Rešavanje optimizacionog problema nalaženja minimalnog Štajnerovog stabla

Računarska inteligencija

Ognjen Stamenković

64/2017

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Sadržaj

1. Uvod

Problem pronalaženja minimalnog Štajnerovog stabla u grafovima je poznat NP-težak optimizacioni problem koji je primenjivan na dizajn VLSI, dizajn komunikacionih mreža, biologiju sistema i menadžment podataka.

Neka je G(V, E, c) povezan neusmeren graf, gde je V skup čvorova, E skup grana i c funkcija koja slika svaku granu iz E u pozitivan ceo broj koji se naziva težina grane. Neka je T podskup od V koji se naziva skup terminala. Problem minimalnog Štajnerovog stabla ima za cilj da pronađe povezani podgraf $G' \subseteq G$ koji sadrži sve čvorove iz skupa terminala za koji je suma težina grana iz G' minimalna. Podgraf G', koji je optimalno rešenje ovog problema naziva se minimalno Štajnerovo stablo grafa G za skup terminala T.

Zbog NP-težine ovog problema, vreme koje je potrebno da se nađe minimalnog Štajnerovo stablo se može povećavati eksponencijalno sa povećanjem veličine grafa. Međutim, puno instanci problema u realnom svetu uključuje velike grafove od više hiljada ili čak desetina hiljada čvorova. Prema tome, potrebno je razviti algoritme koji imaju dobre performanse za velike grafove (1).

U ovom projektu biće predstavljeni sledeći algoritmi za rešavanje ovog optimizacionog problema:

- Genetski algoritam
- Diskretni algoritam za optimizaciju rojem čestica
- Algoritam simuliranog kaljenja

Dodatno, ovi algoritmi će biti napisani u programskom jeziku *Python* korišećem okruženja *Jupyter Notebook* i primenjeni na skup instanci problema pronalaženja minimalnog Štajnerovog stabla.

2. Skup podataka

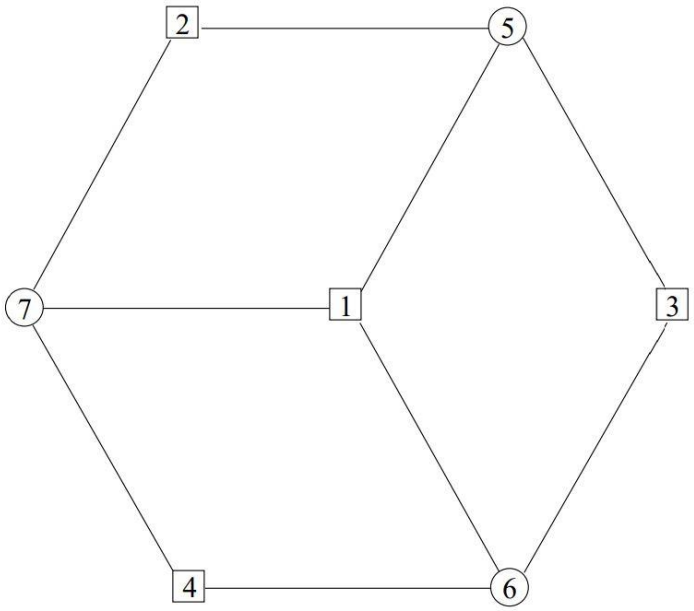
Za potrebe testiranja optimizacionih algoritama korišćena je biblioteka SteinLib Testdata Library čiji je cilj prikupljanje instanci problema Štajnerovih

stabla u grafovima i njegove varijante i informacija o njihovim izvorima, stepenu rešivosti i karakteristikama.

Biblioteka se može naći na stranici http://steinlib.zib.de/steinlib.php. Test podaci su čuvani u *.stp* formatu. Za potrebe projekta implementirano je učitavanje podataka ovog formata.

2.1. Opis formata podataka

U ovoj sekciji se nalazi kratak opis formata podataka koji se koristi SteinLib biblioteci. Za ilustraciju koristi se graf prikazan na slici 1 sa terminalnim čvorovima 1, 2, 3 i 4.



Slika 1: Primer formata podataka

U nastavku su linije koje opisuju ovaj primer u formatu SteinLib biblioteke.

```
33D32945 STP File, STP Format Version 1.0
```

```
SECTION   Comment
Name      “Odd wheel”
Creator   “T. Koch, A. Martin and S. Voss”
Remark    “Example used to describe the STP data format”
END

SECTION   Graph
Nodes 7
Edges 9
E 1 5 1
E 1 6 1
E 1 7 1
E 2 5 1
E 2 7 1
E 3 5 1
E 3 6 1
E 4 6 1
E 4 7 1
END

SECTION Terminals
Terminals 4
T 1
T 2
```

```
T 3
T 4
END

SECTION Coordinates
DD 1 80 50
DD 2 55 5
DD 3 130 50
DD 4 55 95
DD 5 105 5
DD 6 105 95
DD 7 30 50
END
```

Datoteka je podeljena u sekcije. Sekcija počinje ključnom rečju SECTION koju prati naziv skecije. Sekcija se završava ključnom rečju END. Svaki red u sekciji počinje ključnom rečju koja ukazuje na tip reda.

3. Optimizacioni algoritmi

3.1. Genetski algoritam

Genetski algoritmi implementiraju se kao računarska simulacija u kojoj populacija aprstraktno reprezentovanih jedinki koje su kandidati za rešenje problema, treba da se približava boljim rešenjima. Reprezentacija jedinke naziva se hromozomom. Cilj je naći vrednost za koju zadata funkcija cilja dostiže svoj ekstremum. Početna rešenja, tj. jedinke su obično reprezentovane

nizom nula i jedinica. Postupak se odvija kroz generacije. Funkcija koja pridružuje vrednost jedinkama se naziva funkcija prilagođenosti. Iz jedne generacije, se na osnovi vrednosti funkcije prilagođenosti, kroz proces selekcije biraju jedinke koje će biti iskorišćene za stvaranje novih jedinki. Kvalitetnije se biraju sa većom verovatnoćom. Operatorom ukrštanja se od izabranih jedinki dobijaju nove jedinke, a operatorom mutacije dolazi do modifikacije jedinke.

U predloženom genetskom algoritmu, jedinka je predstavljena nizom nula i jedinica dužine |V| - |T|. Jedinka prestavlja su koji čvorovi uključeni u formiranje Štajnerovog stabla iz skupa ne-terminalnih čvorova.

Početna populacija jedinki je generisana slučajno.

Evaluacija jedinke populacije vrši se rekonstrukcijom matrice povezanosti grafa koja uključuje samo odabrane čvorove iz jedinke i terminalne čvorove. Za ovaj novodobijeni graf se proverava da li je povezan, kako bi bilo moguće da se dobije stablo. Funkcija prilagođenosti jedinke predstavlja vrednost minimalnog razapinjućeg stabla kreiranog od novodobijenog grafa.

Za ukrštanje koristi se jednopoziciono ukrštanje sa slučajno izabranom pozicijom. Za svaku jedinku slučajno se bira par za ukrštanje iz ostatka populacije.

Mutacija se vrši sa verovatnoćom 0.2 nad svakim članom populacije. Mutacija predstavlja inverziju slučajno odabranog gena jedinke.

Selekcija jedinke se vrši sa verovatnoćom koja je proporcijalna prilagođenosti jedinke. U svakoj iteraciji čuva se trenutno najbolja jedinka za sledeću iteraciju.

Algoritam 1: Predloženi genetski algoritam za rešavanje problema pronalaženja minimalnog Štajnerovog stabla

Input: Graf G(V, E, c), terminalni skup T, maksimalni broj iteracija M

Output: Štajnerovo stablo G’ ⊆ G

1: Inicijalizovati početnu populaciju

```
2:   Evaluirati početnu populaciju i upamtiti najbolje rešenje
3:   for i = 0 to M do
4:        Izvršiti ukrštanje nad tekućom populacijom kako bi
          se dobila nova populacija
5:        Izvršiti mutaciju nad novom populacijom
6:        Evaluirati novu populaciju
7:        Ažurirati najbolje rešenje ako je dobijeno bolje
8:        Izvršiti selekciju jedinki iz nove populacije
9:        Zameniti najlošije rešenje populacije sa sačuvanim
          najboljim
10:       Nova populacija postaje tekuća populacija
11:  end
```

3.2. Diskretni algoritam za optimizaciju rojem čestica

Algoritam za optimizaciju rojem čestica je računarska metoda koja optimizuje problem iterativno, pokušavajući da poboljša kandidate za rešenje vodeći se merom kvaliteta. Algoritam optimizuje problem pomoću populacije kandidata za rešenje koji se nazivaju čestice. One se kreću u prostoru rešenja pomoću jednostavne matematičke formule koja zavisi od njihovog najboljeg položaja i globalno najboljeg položaja. Kako se otkrivaju bolje pozicije čestica, biće korišćene za usmeravanje njihove kretnje.

U predloženom diskretnom algoritmu za optimizaciju rojem čestica, jednu česticu predstavlja niz nula i jedinica koje označavaju da li je neterminalni čvor uključen u formiranje Štajnerovog stabla (kao kod genetskog algoritma).

Generisanje inicijalne populacije vrši se slučajno. Međutim, postavljeno je da bude duplo verovatnije da proizvoljan čvor bude uključen kako bi se povećala šansa za generisanje povezanog stabla.

Početna brzina čestice je niz float vrednosti jednake dužine kao veličina čestice. Svaka vrednost niza brzine proporcijalna je verovatnoći da će odgovarajući gen čestice promeniti vrednost.

Ažuriranje vrednosti brzine vrši se po formuli:

$$V_{ij}(t+1) = \begin{cases} \omega_t \times V_{ij}(t) + c_1 r_1 + c_2 r_2 & \text{if } gB_j = pB_{ij} = 1 \\ \omega_t \times V_{ij}(t) - c_1 r_1 - c_2 r_2 & \text{if } gB_j = pB_{ij} = 0 \\ \omega_t \times V_{ij}(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Gde su c_1 i c_2 konstante, r_1 i r_2 slučajne vrednosti iz opsega (0, 1), a ω_t faktor inercije dobijen formulom:

$$w_t = w_{t=max} - \frac{w_{t=max} - w_{t=min}}{t = max} \times t$$

Ažuriranje pozicije vrši se po formuli:

$$X_{ij}(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{ij} < sig(V_{ij}(t+1)) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Evaluacija čestice se radi na isti način kao kod genetskog algoritma, koristeći minimalno razapinjuće stablo.

Algoritam 2: Predloženi diskretni algoritam za optimizaciju rojem čestica

Input: Graf G(V, E, c), terminalni skup T, maksimalni broj iteracija M

Output: Štajnerovo stablo G’ ⊆ G

1: Inicijalizovati početnu populaciju

2: Evaluirati početnu populaciju i upamtiti najbolje rešenje

```
3:   Upamtiti globalno najbolje rešenje
4:   for i = 0 to M do
5:        Izračunati faktor inercije ωt
6:        Za svaku česticu populacije ažurirati brzinu
7:        Za svaku česticu populacije ažurirati poziciju
8:        Evaluirati pozicije čestica
9:        Ažurirati najbolju poziciju svake čestice
10:       Ažurirati globalno najbolju poziciju rešenja
11:  end
```

3.3. Algoritam simuliranog kaljenja

Algoritam simuliranog kaljenja iterativno poredi funkcije prilagođenosti tekućeg rešenja i susednog rešenja. Ako susedno rešenje daje bolji rezultat, ono postaje tekuće rešenje. Inače, ako susedno rešenje ne daje bolji rezultat, ono može postati tekuće rešenje sa verovatnoćom koja je zavisi od razlike vrednosti funkcije prilagođenosti ova dva rešenja i od vrednosti parametra temperature sistema. Ovaj parametar služi kao imitacija temperature u kaljenju.

U predloženom algoritmu simuliranog kaljenja rešenje sistema predstavlja podstablo koje sadrži sve terminalne čvorove. Inicijalno rešenje dobija se određivanjem minimalnog razapinjućeg stabla početnog grafa, i zatim brisanjem jednostepenih ne-terminalnog čvorova.

Susedno rešenje se generiše od trenutnog rešenja, brisanjem proizvoljne grane iz stabla. Zatim se slučajno bira po jedan čvor iz dve novonastale komponente povezanosti. Korišćenjem svih grana iz polaznog grafa, pronalazi se najkraći put između odabranih čvorova, i grane ovog puta se ubacuju u graf susednog rešenja. Treba osigurati da su svi terminali dobijenog rešenja u istoj komponenti povezanosti.

Za vrednost funkcije prilagođenosti uzima se suma težina grana stabla rešenja.

Parametar temperature predstavlja razliku maksimalnog broja iteracija i vrednost trenutnog broja iteracije.

Verovatnoća prihvatanja susednog rešenja, u slučaju da je ono lošije računa se sledećom formulom:

$$p = e^{-\frac{|f_{new} - f_{curr}|}{T_i}}$$

Algoritam 3: Predloženi algoritam simuliranog kaljenja

Input: Graf G(V, E, c), terminalni skup T, maksimalni broj iteracija M

Output: Štajnerovo stablo G' ⊆ G

```
1:  Naći minimalno razapinjuće stablo od G
2:  Izbaciti jednostepene ne-terminalne čvorove
3:  Evaluirati početno rešenje
4:  for i = 0 to M do
5:      Odrediti susedno rešenje tekućem
6:      Evaluirati susedno rešenje
7:      Ako je kvalitetnije susedno rešenje, ono postaje
        tekuće, inače postaje tekuće sa verovatnoćom p
8:  end
```

4. Rezultati i diskusija

4.1. Genetski algoritam

6. Literatura

[1] A. Kartelj, *Računarska inteligencija.*

[2] P. Janičić i M. Nikolić, *Veštačka inteligencija.*

[3] Y. Sun, *Solving the Steiner Tree Problem in Graphs using Physarum-inspired Algorithms.*

[4] T. Koch, A. Martin, S. Voss, *SteinLib: An Updated Library on Steiner Tree Problems in Graphs.*

[5] M. Clerc, *Discrete Particle Swarm Optimization, illustrated by the Travelling Salesman Problem.*

[6] K. A. Dowsland, *Hill-Climbing, Simulated Annealing and the Steiner Problem in Graphs.*

[7] A. H. El-Maleh, A. T. Sheikh, S. M. Sait, *Binary particle swarm optimization based state assignment for area minimization of sequential circuits.*