高微2作业4

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 25 日

1.
根据条件

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$$

我们有$\exists M > 0$使得

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\mathbf{0}), |\boldsymbol{x}| > M$$

取闭球$\overline{B_M(\mathbf{0})}$，对其使用最值定理知，存在点$(x_0, y_0)$使得

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), (x,y) \in B_M(\mathbf{0})$$

对于$|x| > M$，我们有

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\mathbf{0}) \geq f(x_0, y_0)$$

因此

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2.
(1)由于x^2+y^2为连续映射，因而闭集的原像是闭集，而单点1是闭集，于是$S = \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$是闭集。
(2)由于S是$\mathbb{R}^2$中的有界闭集，因而紧致，所以最值定理成立，于是存在$(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in S$使得

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1,y_1), \forall (x,y) \in S$$

3.

(1)正确。若可微，鉴于线性映射连续，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}(L(\boldsymbol{h})+\alpha(\boldsymbol{h})) \\ &= 0+\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}|\boldsymbol{h}|\frac{\alpha(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|} \\ &= 0\end{aligned}$$

因而连续。

(2)正确。若可微，我们有

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{v}} f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t)-f(\boldsymbol{x})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{tL(\boldsymbol{v})+\alpha(\boldsymbol{v}t)}{t} \\ &= L(\boldsymbol{v})+\lim_{t\to 0}|\boldsymbol{v}|\frac{\alpha(\boldsymbol{v}t)}{|\boldsymbol{v}|t} \\ &= L(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

(3)(4)错误。取一函数f为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|y|\sqrt{x^2+y^2}}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

其各个方向导数都存在，因为令$\boldsymbol{v}=(v\cos\theta, v\sin\theta)$，我们有

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f=\begin{cases}\dfrac{v|\sin\theta|}{\cos\theta} & \cos\theta\neq 0 \\ 0 & \cos\theta=0\end{cases}$$

但是该函数显然不连续，因为对于$x\neq 0$，我们有

$$|f|\geq\frac{y^2}{|x|}$$

因而在x轴附近无界。同理，线性关系也不成立，因为

$$\partial_x f=\frac{|\sin\theta|}{\cos\theta}=0$$

$$\partial_y f = 0$$

而$\nabla_{\boldsymbol{v}} f$并非皆为0。因此不成立。

4.

根据定义，令$\boldsymbol{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta)$，我们有

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \sqrt{|x^2 - y^2|} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{v^2 t^2 |\cos 2\theta|}}{t} = \frac{|t| v \sqrt{|\cos 2\theta|}}{t}$$

鉴于$\frac{|t|}{t}$无极限，因此只有当$\cos 2\theta = 0$时才有方向导数，于是满足条件的所有方向为

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

5.

(1)当$x \neq 0$时，我们有

$$\partial_x x^y = y x^{y-1}, \partial_y x^y = x^y \ln x$$

(2)当$x \neq 0$时，我们有

$$\partial_x \arctan \frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \partial_y \arctan \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(3)当x_i不全为0时，我们有

$$\partial_i \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

6.

(1)令$\boldsymbol{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta)$，我们有

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f = \lim_{t \to 0} \frac{v|t| \sqrt{|\sin\theta \cos\theta|}}{t}$$

由于$\frac{|t|}{t}$无极限，并不是所有方向都存在方向导数，于是不可微。

(2)微分为零映射，因为首先$f(\mathbf{0})$显然为0，我们又有

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

后者在$|\boldsymbol{x}| \to 0$的极限下趋于0，因此根据夹逼定理前项极限为0，因此我们有

$$f(x, y) = f(0, 0) + 0(\boldsymbol{h}) + \alpha(\boldsymbol{h})$$

其中

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{\alpha(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|}=\lim_{|\boldsymbol{x}|\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

因此可微，且根据微分的唯一性，微分正是零映射。
(3)不一定。取g为$\sqrt{2|xy|}$，显然有

$$\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{2|xy|}=g$$

而由(1)知g在$(0,0)$处不可微，因此不一定可微。