统计力学作业7

郑子诺，物理41

2025 年 4 月 5 日

7.11

类似三维的麦克斯韦分布，可以直接写出速度分布为

$$f(\boldsymbol{v})=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}}$$

速率分布为

$$f(v)=2\pi v\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\bar{v}=\int_0^{+\infty}2\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0\to v_m=\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

$$v_s^2=\int_0^{+\infty}2\pi v^3\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\to v_s=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

7.12

设$\boldsymbol{v_r}=\boldsymbol{v_2}-\boldsymbol{v_1},v_c=\dfrac{\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}}{2}$，我们有

$$\boldsymbol{v_1}=\boldsymbol{v_c}-\frac{\boldsymbol{v_r}}{2},\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v_c}+\frac{\boldsymbol{v_r}}{2}$$

换元的雅可比行列式为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=1$$

因此我们有

$$f(\boldsymbol{v_r},\boldsymbol{v_c})=J\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}=\left(\frac{2m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{2mv_c^2}{2kT}}\left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv_r^2}{4kT}}$$

因此

$$\overline{v_r}=4\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

7.17

此时的配分函数为

$$Z_1=\frac{S}{h^3}\int e^{-\beta\epsilon(\boldsymbol{p})}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\int_0^H e^{-\beta mgz}\mathrm{d}z=Z_0\frac{1-e^{-\beta mgH}}{mg\beta}$$

因此

$$U=-\frac{N\partial\ln Z_1}{\partial\beta}=U_0+NkT-\frac{NmgH}{e^{\frac{mgH}{kT}}-1}$$

$$C_V=C_V^0+Nk-\frac{N(mgH)^2e^{\frac{mgH}{kT}}}{(e^{\frac{mgH}{kT}}-1)^2}\frac{1}{kT^2}$$

7.21

$$Z_1=e^{-\beta\epsilon_1}+e^{-\beta\epsilon_2}$$

令$|\epsilon_2-\epsilon_1|=\Delta,\dfrac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}=\epsilon_0$，我们有

$$Z_1=2e^{-\beta\epsilon_0}\cosh\beta\frac{\Delta}{2}$$

$$U=-N\frac{\partial\ln Z_1}{\partial\beta}=N\epsilon_0-N\frac{\Delta}{2}\tanh\beta\frac{\Delta}{2}$$

$$S=Nk\left(\ln Z_1-\beta\frac{\partial\ln Z_1}{\partial\beta}\right)=Nk\left(\ln 2\cosh\beta\frac{\Delta}{2}-\beta\frac{\Delta}{2}\tanh\beta\frac{\Delta}{2}\right)$$

当$T\to 0,\beta\to+\infty$时，

$$U\to N\epsilon_0-N\frac{\Delta}{2},S\to 0$$

这是因为低温极限下系统处于能量最低态，且无简并。

当$T\to+\infty,\beta\to 0$时，

$$U\to N\epsilon_0,S\to Nk\ln 2$$

这是因为高温极限下系统处于任何态的概率都相等，因此能量为两能级平均值，熵为$Nk\ln 2$。

7.23

$$\begin{aligned}Z_1^r&=\frac{1}{h^2}\iint\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\exp\left\{-\beta\left[\frac{1}{2I}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)-d_0E\cos\theta\right]\right\}\\&=\frac{I}{\beta\hbar^2}\int_0^\pi\sin\theta e^{\beta d_0E\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{I}{\beta\hbar^2}\frac{e^{\beta d_0E}-e^{-\beta d_0E}}{\beta d_0E}\end{aligned}$$