线性代数第二次作业

郑子诺，物理41

2024 年 9 月 21 日

Q1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

显然线性无关，又由于R^4为四维线性空间，所以构成一组基。

Q2.$z = x + 2y$，所以令$x = 1, y = 0$和$x = 0, y = 1$得：

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1), \mathbf{v_2} = (0, 1, 2)$$

显然线性无关。并且每一个解可以表示为：

$$\mathbf{v} = (x, y, x + 2y) = x\mathbf{v_1} + y\mathbf{v_2}$$

因此子空间维数是2，$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$构成一组基。

Q3.易解得$x_3 = 4x_1 + x_2, x_4 = 3x_1$所以令$x_1 = 1, x_2 = 0$和$x_1 = 0, x_2 = 1$得：

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 4, 3), \mathbf{v_2} = (0, 1, 1, 0)$$

显然线性无关。并且每一个解可以表示为：

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, 4x_1 + x_2, 3x_1) = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2}$$

因此子空间维数是2，$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$构成一组基。

Q4.显然一组基$\{A_{ij}\}$为：

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{if } m, n \neq i, j, \\ 1 & \text{if } m, n = i, j \end{cases}$$

线性无关是显然的，并且每一个矩阵为：

$$B = b_{ij}A_{ij}$$

因此维数为mn。

Q5.

(a)因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

而$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$显然线性无关，所以秩为2，一个极大线性无关组为$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$。

(b)因为

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{v_4} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

显然$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$线性无关。所以秩为2，一个极大线性无关组为$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$。

Q6.因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以$\alpha_1, \alpha_2$线性无关，又由于$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2$线性表出，若三者线性相关，将会得出$\beta$系数为0，从而得出$\alpha_1, \alpha_2$线性相关的矛盾，因此三者线性无关。又由于$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出，所以$\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$秩为3，因此$\{\beta, \alpha_1, \alpha_2\}$为最大线性无关组。

Q7.由课上所证的替代定理可知，向量组$\mathbf{v}$的极大线性无关组可以讲$\mathbf{u}$的极大线性无关组替代，因此前者个数一定小于等于后者，于是得证。

Q8.由Q7得到两个相反的不等式，因此得证。

Q9.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$