高微2作业3

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 16 日

1.

(1)首先$|f(x)-g(x)|$显然也是连续函数，由于连续函数在闭区间上可以取到最大值，该度量是良定义的。

其次，正定性是显然的，因为$d(f,g)$肯定大于等于0，且若其为0则有

$$0 \le |f(x)-g(x)| \le d(f,g) = 0$$

因此其等于0当且仅当$f=g$。

对称性也是显然的，而三角不等式可由普通的三角不等式得出。首先

$$|f(x)-h(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|$$

设左边在x_0处取到最大值，我们有

$$d(f,h) = |f(x_0)-h(x_0)| \le |f(x_0)-g(x_0)| + |g(x_0)-h(x_0)| \le d(f,g) + d(g,h)$$

(2)根据定义，我们知道对于任一$x \in I$，当$n,m \ge N$时我们有

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le d(f_n,f_m) < \epsilon$$

根据实数的柯西收敛定理知每点都有极限$f(x)$。首先证f为连续函数，为此，先对上式取极限

$$\lim_{m\to+\infty} |f_n(x)-f_m(x)| = |f_n(x)-f(x)| \le \epsilon$$

由于f_n为连续函数，对于任一ϵ，存在$\delta > 0$使得$|x-x_0| < \delta$时有

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \epsilon$$

因此我们有

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$$

因此f为连续函数。最后由$n \ge N$时$|f_n(x)-f(x)| \le \epsilon$得

$$d(f_n,f) \le \epsilon < 2\epsilon$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

2.

取任意实数t，根据积分不等式我们有

$$\int_a^b (f-tg)^2 \ge 0$$

展开得

$$\int_a^b f^2 + t^2\int_a^b g^2 - 2t\int_a^b fg \ge 0$$

由于对于所有t成立，该二次函数判别式需小于等于0，因此我们有

$$4\left(\int_a^b fg\right) - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \le 0$$

于是

$$\left(\int_a^b fg\right) \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

3.

由于U是开集，任一$x\in U$为U的内点，因此存在开球邻域$B_{x,r}\subseteq U$。于是我们有

$$U \subseteq \bigcup_{x\in U} B_{x,r} \subseteq U$$

因此U可以表示成一族开球邻域的并。反之，对于任一$x\in U$存在一开球使得$x\in B_{x_0,r_0}$，取$r<r_0-d(x,x_0)$，我们有

$$B_{x,r}\subseteq B_{x_0,r_0}\subseteq \bigcup B_{x_i,r_i} = U$$

因此U是开集。

4.

(1)由于

$$1-\cos(xy) = 2\sin^2\frac{xy}{2} \le \frac{x^2y^2}{2}$$

令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，我们有

$$0 \le \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{r^2}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta \le r^2$$

根据夹逼定理得该函数极限为0。

(2)若存在极限L，取$x = t, y = kt$，显然满足复合函数极限定理条件I，我们有

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{-3kt^3 + k^3t^3 - 4kt^2}{(1+k^2)t^2} = -\frac{4k}{1+k^2}$$

显然为k的函数，因此矛盾。所以极限不存在。

(3)首先证明函数$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-e}}{x}$在$x = 0$处存在极限。由于上下趋于0，利用洛必达得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{(1+x)x}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^2}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
&=-\frac{e}{2}
\end{aligned}$$

再根据复合函数极限定理，显然满足条件I，得到原函数极限为$-\frac{e}{2}$。

(4)令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，我们有

$$\frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha} = r^{1-2\alpha}(a\cos\theta + b\sin\theta)$$

当$\alpha < \frac{1}{2}$时，我们有

$$-\sqrt{a^2+b^2}r^{1-2\alpha} \le r^{1-2\alpha}(a\cos\theta + b\sin\theta) \le \sqrt{a^2+b^2}r^{1-2\alpha}$$

因此极限为0。当$\alpha > \frac{1}{2}$时，若存在极限L，取$x = t, y = kt$，根据复合函数定理满足条件I，我们有

$$L = \lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bk)t^{1-2\alpha}}{(1+k^2)^\alpha}$$

若$a = b = 0$，极限为0，否则取k使分子不为0，必有极限趋于无穷。若$\alpha = \frac{1}{2}$，要求极限存在且等于0，至少要求

$$\frac{a+bk}{\sqrt{1+k^2}} = 0$$

对于所有k成立。因此$a = b = 0$。综上所述，我们要求$\alpha < \frac{1}{2}$或$a = b = 0$。

5.

根据三角不等式我们有

$$d(x_0, x) - d(x_0, x') \leq d(x', x)$$

$$d(x_0, x') - d(x_0, x) \leq d(x, x') = d(x', x)$$

因此

$$|d(x_0, x) - d(x_0, x')| \leq d(x', x)$$

对于任一$\epsilon > 0$，取$\delta < \epsilon$，对于$d(x, x') < \delta$我们总有

$$|d(x_0, x) - d(x_0, x')| \leq d(x', x) < \epsilon$$

因此该函数连续。

6.

由于$h(x)$可以写作

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$$

且对连续函数求和求绝对值后仍然连续，因此$h(x)$为连续函数。