高等微积分第一次作业

郑子诺，物理41

2024 年 9 月 22 日

1.

(1):

先证明充分性：

由条件映射$f : X \to Y$是双射可知，$\forall y \in Y$，存在唯一的$x \in X$与之对应，因此可以构造映射$f^{-1} : Y \to X$，使得每一个y与相应的x对应。显然，此时

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \to f^{-1} \circ f = id_X$$

同理可知

$$f \circ f^{-1}(y) = id_Y$$

充分性证毕。

再证明必要性：

假设存在映射$f^{-1} : Y \to X$使得

$$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1}(y) = id_Y$$

若存在不同的x_1, x_2使得$f(x_1) = f(x_2)$，则

$$x_1 = f^{-1} \circ f(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1} \circ f(x_2) = x_2$$

矛盾，因此$f(x)$是单射。

若对于$y \in Y$没有x与之对应，则

$$y = f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x')$$

矛盾，因此$f(x)$是满射。

综上，$f(x)$是双射。必要性证毕。

Q.E.D.

(2):

由于$f: X \to Y, g: Y \to Z$是双射,因此$\forall z \in Z$，存在唯一的$\forall y \in Y$与之对应，对于这个y，存在唯一的$\forall x \in X$与之对应，由此可知复合函数
$g \circ f: X \to Z$是双射。

又由复合的结合律可知

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X$$

同理可得

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_Z$$

于是

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Q.E.D.

2.

(1):

设$\alpha = infA, \beta = infB$，不失一般性，令$min\{\alpha, \beta\} = \alpha$，则有

$$\forall a \in A, a \geq \alpha$$

$$\forall b \in B, b \geq \beta \geq \alpha$$

如果$\gamma > \alpha$, 则γ不是A的下界，亦即不是$A \cup B$的下界。

于是$inf(A \cup B) = min\{infA, infB\}$。

同理$sup(A \cup B) = min\{supA, supB\}$。

Q.E.D.

(2):

同(1)设$\alpha = infA, \beta = infB, max\{\alpha, \beta\} = \beta$，则有

$$\forall x \in A \cap B, x \in B, \text{即有} x \geq \beta$$

所以$inf(A \cap B) \geq max\{infA, infB\}$。

同理$sup(A \cap B) \leq max\{supA, supB\}$。

Q.E.D.

3.

构造函数：$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$
显然

$$g(-x)=g(x),h(-x)=-h(x),f(x)=g(x)+h(x)$$

Q.E.D.
4.
设$x=0$，则$f(0)=2f(0),f(0)=0$。
设存在$x\neq 0$，使得$f(x)\neq 0$，则

$$f(2x)=2f(x),f(4x)=2f(2x),...$$

构成等比数列，其绝对值以2为倍数增加。
设$|f(x)|=a$，对于任一正数M，存在$n>\log_2\frac{M}{a}$使得$|f(2^nx)|>M$，与题设条件矛盾。
所以$\forall x,f(x)=0$。
5.
首先证明整数可以提出函数:

$$f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x),f(nx)=f((n-1)x)+f(x),f(-nx)=f(-(n-1)x)-f(x)$$

由归纳法得

$$f(px)=pf(x),p\text{是整数}$$

再证明正整数的倒数可以提出函数:

$$f(x)=2f(\frac{1}{2}x),f(x)=f(\frac{1}{n}x)+f(\frac{n-1}{n}x)=nf(\frac{1}{n}x)$$

可得

$$f(\frac{1}{q}x)=\frac{1}{q}f(x),q\text{是正整数}$$

综上，对于任一有理数$\frac{p}{q}$，有

$$f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}f(1)$$

令$a=f(1)$，则对于有理数$f(x)=ax$。
Q.E.D.
6.
(1):
运用三角不等式得

$$\forall\epsilon>0,\text{存在}N\text{使得所有}n>N,||A|-|a_n||<|A-a_n|<\epsilon$$

所以$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|$。

Q.E.D.

(2):

由题设条件知，存在N使得所有$n > N_0, |A - a_n| < A$，此时$a_n > 0$。因此$\sqrt{a_n}$有意义。

于是有

$$\forall \epsilon > 0, \text{存在} N > N_0 \text{使得所有} n > N, |\sqrt{A} - \sqrt{a_n}| < \frac{|A - a_n|}{\sqrt{A} + \sqrt{a_n}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{A}}$$

所以$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{A}$

Q.E.D.