线代作业8

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 6 日

1.

(a)

$$\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-5=0$$

特征值为

$$\lambda=r\cos\theta-1,r\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})-1,r\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})-1$$

$$r=\frac{4}{\sqrt{3}},\theta=\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

对应的特征向量为

$$\alpha=c\begin{bmatrix}\dfrac{2\lambda+3}{\lambda^2+\lambda-1}\\ \dfrac{3\lambda+4}{\lambda^2+\lambda-1}\\ 1\end{bmatrix}$$

(b)

$$\lambda^3-2\lambda^2+1=0$$

特征值为

$$\lambda=1,\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=c\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=c\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=c\begin{bmatrix}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$$

(c) 令$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

$$(\lambda-f(1))(\lambda-f(\omega))\cdots(\lambda-f(\omega^{n-1}))=0$$

$$\lambda=f(1),f(\omega),\dots,f(\omega^{n-1})$$

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\alpha_k=\begin{bmatrix}1\\ \omega^k\\ \vdots\\ \omega^{k(n-1)}\end{bmatrix},0\le k\le n-1$$

2.

$$\lambda=2,4$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{20}=P\begin{bmatrix}2^{20}&0&0\\0&2^{20}&0\\0&0&4^{20}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2^{20}&0&0\\2^{19}-2^{39}&2^{19}+2^{39}&-2^{19}+2^{39}\\2^{19}-2^{39}&-2^{19}+2^{39}&2^{19}+2^{39}\end{bmatrix}$$

3.

$$\det(\lambda I-A)=\det((\lambda A^{-1}-I)A)=(-1)^n\lambda^n\det A\det(\frac{1}{\lambda}I-A^{-1})$$

$$\therefore a'_k=\frac{a_{n-k}}{(-1)^n\det A}$$

对于每一个A的特征值有

$$\lambda'=\frac{1}{\lambda}$$

4.

$$Tr(AB)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{lk}b_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}b_{kl}a_{lk}=Tr(BA)$$

5.

$$Tr(AB-BA)=Tr(AB)-Tr(BA)=0\neq Tr(I_n)=n$$

6.

$$\begin{bmatrix}I & -A\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I & A\\ B & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda I-AB & 0\\ B & I\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}I & 0\\ -B & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I & A\\ B & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda I & A\\ 0 & I-BA\end{bmatrix}$$
$$\therefore \det(\lambda I-AB)=\det(\lambda I-BA)$$

特征值相同。

7.

充分性是显然的。

$$\det(\lambda I-A)=\det(P^{-1}(\lambda I-B)P)=\det(\lambda I-B)$$

很容易发现，要使得一个对角矩阵的对角元素交换顺序，只需要在两边同时乘上一对相同的表示交换两行的初等行变换矩阵，显然两者互相为逆。那么我们有

$$B=E_1E_2\cdots E_nAE_n^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}=P^{-1}AP$$

8.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

两者特征方程显然相同，但是不相似。因为初等行列变换不改变矩阵的秩，每一个可逆矩阵又可以表示成初等行列变换的复合，这意味着相似的矩阵具有相同的秩，而A,B的秩显然不同，前者为2后者1。

9.

显然可以直接因式分解

$$\phi(B) = (B - \lambda_1 I)(B - \lambda_2 I) \cdots (B - \lambda_n I)$$

然后就再显然不过了，该是行列式不为0当且仅当B没有和A相同的特征值，这直接导出可逆性。

10.

显然有

$$A^n X = A^{n-1} X B = \cdots = X B^n$$

设$\phi(x)$为A的特征方程，那么有

$$\phi(A) X = X \phi(B) = 0$$

又由于$\phi(B)$可逆，我们有

$$X = 0$$