线代作业14

郑子诺，物理41

2024 年 12 月 13 日

1.

$$\langle a\alpha+b\beta|a\alpha+b\beta\rangle=\|a\alpha\|^2+\|b\beta\|^2+2\mathbb{R}\{\overline{a}b\,\langle\alpha|\beta\rangle\}$$

若α,β正交，显然有

$$\langle a\alpha+b\beta|a\alpha+b\beta\rangle=\|a\alpha\|^2+\|b\beta\|^2$$

反之，上式成立，我们有

$$\mathbb{R}\{\overline{a}b\,\langle\alpha|\beta\rangle\}=0$$

令$\langle\alpha|\beta\rangle=u+iv$。令$a=b=1$，我们有$u=0$，令$a=1,b=i$，我们有$v=0$，因此$\alpha,\beta$正交。

2.

利用爱因斯坦求和约定，我们有

$$\langle A|B\rangle=Tr(\overline{A}^TB)=\overline{a}_{ki}b_{ki}$$

显然满足准线性条件和共轭对称性，$A=B$时，恰是每个矩阵元的模方，因而满足正定性。

3.

我们有

$$Tr(AB)^2=a_{ik}b_{kl}a_{lk'}b_{k'i},Tr(A^2B^2)=a_{ik}a_{kl}b_{lk'}b_{k'i}$$

取共轭并利用厄米性得到

$$\overline{Tr(AB)^2}=a_{ki}b_{ik'}a_{k'l}b_{lk},\overline{Tr(A^2B^2)}=a_{lk}a_{ki}b_{ik'}b_{k'l}$$

更换哑指标名称可见其相同，因而都是实数。鉴于求迹的可交换性以及转置不变性加之迹为实数，我们有

$$\begin{aligned}Tr(A^2B^2)-Tr(AB)^2&=Tr(BA(AB-BA))\\&=-Tr(AB(AB-BA))\\&=\frac{1}{2}Tr[(BA-AB)(AB-BA)]\\&=\frac{1}{2}Tr[(AB-BA)^\dagger(AB-BA)]\geq 0\end{aligned}$$

等号成立当且仅当$AB=BA$。

4.

我们知道$\det U=e^{i\theta}$，因此总有

$$U=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{i\frac{\theta}{2}} & \\ & e^{i\frac{\theta}{2}}\end{bmatrix}$$

其中$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1$且是酉矩阵。因此我们有

$$ad-bc=1,a\bar{a}+c\bar{c}=1,a\bar{b}+c\bar{d}=0$$

可以解得

$$c=-\bar{b},d=\bar{a}$$

于是我们有

$$U=\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{i\frac{\theta}{2}} & \\ & e^{i\frac{\theta}{2}}\end{bmatrix}$$

令$a=a'e^{i\alpha_1},b=b'e^{i\alpha_2}$。令

$$\theta_1=\alpha_1+\frac{\theta}{2},\theta_2=-\alpha_2+\frac{\theta}{2},\theta_3=0,\theta_4=\alpha_2-\alpha_1$$

我们总可以将一个酉矩阵写成

$$U=\begin{bmatrix}e^{i\theta_1} & \\ & e^{i\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b'\\ -b' & a'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{i\theta_3} & \\ & e^{i\theta_4}\end{bmatrix}$$

显然中间矩阵为实正交矩阵，因而可以写作

$$U=\begin{bmatrix}e^{i\theta_1} & \\ & e^{i\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{i\theta_3} & \\ & e^{i\theta_4}\end{bmatrix}$$

5.

(a)根据分块矩阵的性质，我们显然有

$$\varphi(A_1)\varphi(A_2)=\begin{bmatrix} B_1B_2-C_1C_2 & B_1C_2+C_1B_2 \\ -B_1C_2-C_1B_2 & B_1B_2-C_1C_2 \end{bmatrix}$$

同时我们有

$$A_1A_2=B_1B_2-C_1C_2+i(B_1C_2+C_1B_2)$$

因此$\varphi(A_1A_2)=\varphi(A_1)\varphi(A_2)$。显然我们有

$$\overline{A}^T=B^T-iC^T$$

因此

$$\varphi(\overline{A}^T)=\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}=\varphi(A)^T$$

(b)若A是厄米矩阵，则有$\varphi(A^\dagger)=\varphi(A)=\varphi(A)^T$，因而$\varphi(A)$对称。反之我们有$\varphi(A^\dagger)=\varphi(A)$，显然$\varphi(A)=\varphi(A')$当且仅当$A=A'$，因此$A=A^\dagger$，$A$为厄米矩阵。

(c)若A是酉矩阵，则$\varphi(I)=\varphi(AA^\dagger)=\varphi(A)\varphi(A^\dagger)=\varphi(A)\varphi(A)^T=I$，于是$\varphi(A)$为正交矩阵。反之我们有$\varphi(AA^\dagger)=I$，显然有$AA^\dagger=I$，因此$A$为酉矩阵。

6.

若B,D是酉矩阵，$C=0$，那么A显然是酉矩阵，因为我们有

$$AA^\dagger=\begin{bmatrix} BB^\dagger+CC^\dagger & CD^\dagger \\ DC^\dagger & DD^\dagger \end{bmatrix}=I$$

反之，根据行列式不为0我们知道B,D可逆，因此一定有$C=0$，紧接着$BB^\dagger=I,DD^\dagger=I$，因而都是酉矩阵。

7.

应用我们曾经证明过的结论，任何一个复方阵酉相似于一个上三角矩阵，显然其对角线正是其特征值。显然我们有

$$Tr(A^TA)=|\lambda_1|^2+|a_{12}|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|a_{1n}|^2+\cdots+|\lambda_n|^2\geq\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2$$

等式成立当且仅当上三角矩阵是对角矩阵，因而A可对角化，于是A是正规矩阵。

8.
若A正定，定义$P=\sqrt{A}$，显然有$A=P^\dagger P$，且由于特征值非零P一定可逆。
反之显然有

$$\langle x|Ax\rangle = \langle Px|Px\rangle \geq 0$$

且等于零当且仅当$Px=0$，由于P可逆，一定有$x=0$，因而正定。
9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$