线代作业10

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 19 日

1. (a)显然，对于$J_m(0)$，每乘自己一次，整体就往右平移一列，因而有

$$J_m(0)^m = 0$$

因此N足够大时，我们有

$$J_m(\lambda)^N = \sum_{k=0}^{N} J_m(0)^k \lambda^{N-k} = \sum_{k=0}^{m-1} J_m(0)^k \lambda^{N-k}$$

或者显式地写出来

$$\begin{bmatrix} \lambda^N & \lambda^{N-1} & \cdots & \lambda^{N-m+2} & \lambda^{N-m+1} \\ 0 & \lambda^N & \cdots & \lambda^{N-m+3} & \lambda^{N-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^N & \lambda^{N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^N \end{bmatrix}$$

由于$|\lambda| < 1$，显然每一项在$N \to \infty$时都趋于零。因此有

$$\lim_{N\to\infty} J_m(\lambda)^N = 0$$

(b)每个方阵都相似于约当标准型，因此有

$$A^N = P \begin{bmatrix} J_{m_{11}}(\lambda_1)^N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_{12}}(\lambda_1)^N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_{kn_k}}(\lambda_k)^N \end{bmatrix} P^{-1}$$

显然每一项趋于0。

2.

(a)设存在，为α，则有

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{m_{ij}} a_j = -a_i$$

因而

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{m_{ij}} a_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{m_{ij}} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j = -\sum_{i=1}^{n} a_i$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

同时若存在a_i不同号，我们有

$$|a_i| = |\sum_{j=1}^{n} \hat{m_{ij}} a_j| < \sum_{j=1}^{n} \hat{m_{ij}} |a_j|$$

因而

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j| > \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

这显然不可能，因此a_i同号，由于其和为0，因此必为零向量，于是不存在该特征值。

(b)如果根子空间与特征子空间不一致，显然我们可以找到一个向量使得$(\widehat{M}-I)^m\alpha = 0, (\widehat{M}-I)^{m-1}\alpha \neq 0$。于是我们总可以写成

$$(\widehat{M}-I)^2\alpha = 0, (\widehat{M}-I)\alpha \neq 0, \alpha \neq 0$$

由于前一题所证性质，$\beta = (\widehat{M}-I)\alpha$各分量同号。又有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \hat{m_{ij}} a_j - a_i) = 0$$

因此$\beta = 0$，矛盾。于是代数重数也为1。