高微作业2

郑子诺，物理41

2024 年 9 月 26 日

1.

(1):

$$\because \frac{1}{2} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+1}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2}$$

(2):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+an+b}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1} = \frac{a}{2}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^k}} = 1$$

3.

(1):

显然，存在N，使得当$n>N$时有：

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r < 1$$

$$|a_n| = r^{n-n_0}|a_{n_0}| \to \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2):

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n}$$
$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0<1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

(3):

$$\frac{n^k}{a^{n+1}}\frac{a^n}{n^k}=\frac{1}{a}<1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$$

(4):

$$\frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{q})^(n+1)}\frac{(\frac{n}{q})^n}{n!}=\frac{q}{(1+\frac{1}{n})^n}$$
$$\because \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e,0<q<e$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{q}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{q}{e}<1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(\frac{n}{q})^n}=0$$

4.

(1):

由均值不等式得：

$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{k}{x_{n-1}})\geqslant\frac{1}{2}2\sqrt{k}=\sqrt{k},n\geqslant 1$$

(2):

$$\because x_n\geqslant\sqrt{k}$$
$$\therefore \frac{1}{2}\frac{k}{x_n}\leqslant\frac{x_n}{2}$$
$$\therefore x_{n+1}\leqslant x_n,n\geqslant 1$$

(3):

$$\because x_n \geqslant \sqrt{k}, x_n \geqslant x_{n+1}$$

由单调有界序列收敛定理知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛。 (4):

$$x_n - x_{n+1} = \frac{(x_n - \sqrt{k})(x_n + \sqrt{k})}{2x_n} \geqslant \frac{\sqrt{k}}{x_n}(x_n - \sqrt{k})$$

$$\therefore \frac{x_{n+1} - \sqrt{k}}{x_n - \sqrt{k}} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{k}}{x_n} < 1$$

$$\because x_n \geqslant x_{n+1}$$

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{k}}{x_n - \sqrt{k}} < q < 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n - \sqrt{k} = 0 \to \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{k}$$

5.

(1):

由均值不等式得：

$$y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}) \geqslant \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} = x_n, n \geqslant 1$$

(2):

$$\because y_n \geqslant x_n$$

$$\therefore x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant x_n, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \leqslant y_n$$

(3):

$$x_{n+1} \leqslant y_n \leqslant y_0 = b, y_{n+1} \geqslant x_n \geqslant x_0 = a$$

(4):

$$\because x_n \leqslant b, x_n \leqslant x_{n+1}, y_n \geqslant a, y_n \geqslant y_{n+1}$$

由单调有界序列收敛定理知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛。 (5):

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})^2 < \frac{y_n - x_n}{2}$$

$$\therefore \frac{y_{n+1}-x_{n+1}}{y_n-x_n} < \frac{1}{2} < 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

6.

(1):

设存在N使得$a_N > A$，则对于$n > N$有$a_n \geqslant a_N > A$，令$\epsilon = a_N - A$

$$\therefore \text{不存在}N_0\text{，因为当}n > max\{N_0, N\}, |a_n - A| > \epsilon$$

与极限定义矛盾。

$$\therefore a_n \leqslant A$$

(2):

下证$(1+\frac{1}{n})^n$递增：

$$\binom{k}{n+1}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k}{n+1})}{k!} > \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})}{k!} = \binom{k}{n}\frac{1}{n^k}$$

$$\therefore (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^n$$

下证$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$递减：

$$\binom{k}{n+1}\frac{1}{(n)^k} > \binom{k}{n+1}\frac{1}{(n+1)^k}\frac{n+2}{n+1}$$

$$\to 1 > (\frac{n}{n+1})^{k-1}\frac{n(n+2)}{n+1}$$

因此成立。将(1)中结论用于递减序列有类似结果，因此：

$$\because \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$$

$$\therefore (1+\frac{1}{n})^n \leqslant e \leqslant (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

(3):

显然，题中结论可由(2)中结论连乘得到。

$$\frac{(1+n)^n}{n^n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\cdots\frac{1+1}{1} = \frac{(1+n)^n}{n!} \leqslant e^n \leqslant \frac{(1+n)^{1+n}}{n!}$$

$$\therefore \frac{(1+n)^n}{e^n} \leqslant n! \leqslant \frac{(1+n)^{1+n}}{e^n}$$

(4):

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{e} \leqslant \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leqslant \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$