高微作业4

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 18 日

1.

(1)因为

$$\sin^2(n\pi) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

所以我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1}) - \sin^2(n\pi)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)+\sin(n\pi))(\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)-\sin(n\pi)) \\ &= \lim_{n\to\infty}4\sin(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi)\cos(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi) \\ &\sin(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi)\cos(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi) \\ &\leq 4\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi) \leq 2\pi\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = 0\end{aligned}$$

其中由于$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = 0$，$\sin(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi)$在$n$足够大时为正。

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$$

(2)因为

$$\sin^2((n+\frac{1}{2})\pi) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

当$n > N, n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n} < \epsilon$时我们有(显然$n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n} > 0$)

$$\begin{aligned}
|\sin^2((n+\frac{1}{2})\pi)-\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})| &= |(\sin((n+\frac{1}{2})\pi)-\sin(\pi\sqrt{n^2+n}))(\sin((n+\frac{1}{2})\pi)+\sin(\pi\sqrt{n^2+n}))| \\
&= |4\sin(\frac{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}}{2}\pi)\cos(\frac{\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}}{2}\pi) \\
&\sin(\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n}}{2}\pi)\cos(\frac{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}}{2}\pi)| \\
&\leq 4\sin(\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n}}{2}\pi) \leq 2\pi\epsilon
\end{aligned}$$

其中由于$\lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n})=0$，$\sin(\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{n^2+n}}{2}\pi)$在$n$足够大时为正。
所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})=1$$

2.
(1)

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}((1-a)x-1-b+\frac{2}{x+1})=0$$

显然有

$$a=1, b=-1$$

(2)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-px-q)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}+(1-p)x-q)=0$$

显然有

$$p=1, q=-1$$

3.
(1)因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=A$$

所以有

$$\lim_{x\to0}f(x)=A\lim_{x\to0}x^n=0$$

我们有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n(\sqrt{1+f(x)}+1)}=\frac{A}{2}$$

(2)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

所以我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2}&=\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2(1+\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}})}-\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{1+\sin^2 x})})\\&=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

4.

(1)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}=A,\lim_{x\to 0}\frac{1-g(x)}{x^2}=B$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}Ax=0,\lim_{x\to 0}\frac{1-g(x)}{x}=0$$

所以我们有

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1-f(x)}{x^2}+\frac{1-g(x)}{x^2}-\frac{1-f(x)g(x)}{x^2})=\lim_{x\to 0}\frac{(1-f(x))(1-g(x))}{x^2}=0$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)g(x)}{x^2}=A+B$$

(2)做归纳假设

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)\cdots f_k(x)}{x^2}=A_1+A_2+\cdots+A_k$$

$k=2$时成立，设$k=i-1$成立，下证$k=i$成立显然令$f(x)=f_i(x),g(x)=f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)$，由(1)得证。

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)\cdots f_n(x)}{x^2}=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

5.

由e^x单调性可知，任取$\epsilon>0$，令$|x|<\delta,\delta<\frac{1}{\sqrt{n}},e^n>\epsilon$则有

$$e^{-\frac{1}{x^2}}<e^{-\frac{1}{\delta^2}}<e^{-n}<\epsilon$$

因此在$x=0$处连续。

6.

显然$x=0$是一个间断点。由于$x^2-x+1,\Delta<0$，因此分母不为0。若$x>1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}{1-\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

若$x=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=1$$

若$0<x<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\frac{1}{x}$$

若$-1<x<0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-x)^{2n+1}-1}{(-x)^{2n+1}-(-x)^{n+1}+-x}=\frac{1}{x}$$

若$x=-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+1}=-1$$

若$x<-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{(-x)^{2n+1}}}{1-\frac{1}{(-x)^n}+\frac{1}{(-x)^{2n}}}=1$$

所以有两个间断点$x=0,-1$ 7.

先证函数值域有界。利用二分法可知，若函数值域无界，二分取其中无界的一半，则有

$$a_{n-1}\leq a_n,b_{n-1}\geq b_n,b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$$

且在$[a_n,b_n]$上函数值域无界。利用区间套定理知存在唯一的$c=\bigcap[a_n,b_n]$，显然f在c上有界，因此矛盾。

所以函数值域有界。因此函数值域存在上下确界。设下确界为α，对于每个$\epsilon_n>0$，我们有

$$X_{\epsilon_n}=x|f(x)-\alpha<\epsilon\subseteq[a_n,b_n]$$

显然有

$$a_{n-1}\leq a_n,b_{n-1}\geq b_n$$

令$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$，根据单调序列极限定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\lim_{n\to\infty}b_n=B,A\leq B$$

若$A\neq B$，则闭区间$[A,B]$内存在点满足

$$f(x)-\alpha<\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots$$

这意味着$f(x)=\alpha$。
若$A=B$，根据区间套定理我们同样有存在一个点c使得$f(c)=\alpha$。上确界同理。因此函数值域取得到最大值和最小值。选取其中一对点取得最大最小值，这一对点构成一个闭区间，于是应用介值定理，我们证明了最大最小值之间每一个值都可以取到，这意味着函数值域是一个有界闭区间。