高微作业5

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 25 日

1.

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^{2n}(1 + \frac{a_{2n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n}})$$
$$\because \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{a_{2n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n}} = 1$$
$$\therefore \exists N, |x| > N, 1 + \frac{a_{2n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n}} > 0$$
$$\therefore x > N, f(x) > 0; -x < -N, f(x) > 0$$

又因为$f(0) = a_0 < 0$，所以根据介值定理，$[0, N+1], [-N-1, 0]$各存在一个零点，所以至少有两个零点。

2.

由于$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$，所以

$$\forall M, \exists N, |x| > N, f(x) > M$$

因此$(-\infty, -N), (N, +\infty)$内的函数都有下界。对$[-N, N]$内的函数使用有界性定理，存在下界。因此$f(x)$的值域存在下界，因而有下确界$\alpha$。

若取不到下确界，令

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \alpha}$$

且取$M = \alpha + \epsilon_0$。则对于$0 < \epsilon < \epsilon_0, \exists x \in [-N, N], f(x) - \alpha < \epsilon$。

$$\therefore \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0, \exists x \in [-N, N], g(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

与有界性矛盾，因此存在最小值$f(x_0)$。

3.

利用第一题结论，我们有

$$\exists N, |x| > N, 1 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^4} > 0$$

同时$\lim\limits_{x\to\infty} x^4=+\infty$。所以

$$\lim_{x\to\infty} P(x)=+\infty$$

利用第二题结论，即可得$P(x)$存在最小值$P(x_0)$。

4.

首先我们证明伯努利不等式：对于$x>-1$，我们有

$$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x,\alpha>1$$

$$(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x,0<\alpha<1$$

$$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x,\alpha<0$$

对于正整数情况，用数学归纳法，$n=1$成立，设$n=k$成立，则有

$$(1+x)^{k+1}\geq(1+kx)(1+x)\geq 1+(k+1)x$$

因此成立。对于有理数r，先设$r=\frac{p}{q}<1$，我们有

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(1+x)^p}\leq\frac{p(1+x)+q-p}{q}=1+\frac{p}{q}x$$

若$r=\frac{p}{q}>1$，则有

$$(1+rx)^{\frac{1}{r}}\leq 1+x\to(1+x)^r\geq 1+rx$$

若$r<0$，存在充分大的正整数n使得$-1<\frac{-rx}{n}<1$，因此

$$(1+x)^{\frac{-r}{n}}\leq 1-\frac{r}{n}x\leq\frac{1}{1+\frac{r}{n}x}$$

$$(1+x)^r\geq(1+\frac{r}{n}x)^n\geq 1+rx$$

由有理数的稠密性以及指数函数的连续性可推知伯努利不等式对一切实数成立。回到题目，$\alpha=0,1$显然一致连续。若$\alpha>1$，则有

$$(x+\delta)^\alpha-x^\alpha=x^\alpha((1+\frac{\delta}{x})^\alpha-1)>\alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随x递增趋于无穷，因此不一致连续。若$0<\alpha<1$，则有

$$(x+\delta)^\alpha-x^\alpha=x^\alpha((1+\frac{\delta}{x})^\alpha-1)<\alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随x递减，因此取$\delta < \frac{\epsilon}{\alpha}$即可，因而一致连续。若$\alpha < 0$，则有

$$x^\alpha - (x+\delta)^\alpha = x^\alpha(1-(1+\frac{\delta}{x})^\alpha) < -\alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随x递减，因此取$\delta < -\frac{\epsilon}{\alpha}$即可，因而一致连续。
综上所述，$\alpha \le 1$，一致连续，$\alpha > 1$，不一致连续。
5.

$$\ln x < x^\alpha < a^x < [x]! < x^x$$

首先

$$e^x > (1+\frac{x}{N})^N, N > \alpha$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} > \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{x\ln a}{N})^{N-\alpha}(\frac{1}{x}+\frac{\ln a}{N})^\alpha = +\infty$$

其次

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty$$

然后

$$\frac{[x+1]!}{a^{[x+1]}}\frac{a^{[x]}}{[x]!} = \frac{[x+1]}{a}$$

当x足够大时有$\frac{[x+1]}{a} > k > 1$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x]}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x+1]}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^x} > \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x+1]}} = +\infty$$

最后

$$\frac{[x+1]^{[x+1]}}{[x+1]!}\frac{[x]!}{[x]^{[x]}} = (1+\frac{1}{[x]})^{[x]}$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 所以x足够大时，$(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} > k > 1$。因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]^{[x]}}{[x]!} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{[x]!} > \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]^{[x]}}{[x]!} = +\infty$$

6.
由题意可知

$$a_{n+1} = f(a_n) < \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} > 1 + \frac{1}{a_n} > n + \frac{1}{a_1} > n + 1$$

$$\therefore na_n < 1, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

因此对于每一个t，存在N使得$n > N$时有

$$a_{n+1} = f(a_n) > \frac{a_n}{1 + ta_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} < t + \frac{1}{a_n} < nt + \frac{1}{a_1}$$

$$\therefore na_n > \frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{t}$$

而且t为任意大于1的数。因此存在N_0使得$na_n > 1 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$。于是我们有

$$\frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}} na_n = 1$$