高微作业8

郑子诺，物理41

2024 年 12 月 9 日

1.

(1)设f在x_0处存在n阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\text{当}x\to x_0\text{时}$$

(2)设f在开区间I上处处存在n阶导数，则对于I内任意两点a,b，存在ξ介于a,b之间，使得

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

2.

鉴于连续函数，我们有

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1$$

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x}\\
&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2[(1-x)e^x-1]+(e^x-1)^2}{2x(e^x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2+2x(e^x-1)e^x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-x}{4(e^x-1)+2x(2e^x-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x-1}{8e^x-2+4xe^x}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

3.

鉴于$\frac{1}{4^3}<0.01$，将函数展到3阶即可。

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}\frac{1}{(1-\xi)^{\frac{5}{2}}}x^3$$

因此取$P(x)$为

$$P(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

即可，此时有

$$|f(x)-P(x)|=\frac{1}{16}\frac{1}{(1-\xi)^{\frac{5}{2}}}x^3\le\frac{1}{16}\frac{1}{(1-0.25)^{\frac{5}{2}}}(0.25)^3<0.01$$

4.

(1)

$$F'(x)=f'(x)+\sum_{k=1}^{n}[\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}]=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n$$

(2)根据拉格朗日中值定理直接得到存在ξ介于a,b之间使得

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi)=(b-a)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n$$

5.

(1)

$$f(y)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(y-x)+\frac{f''(x)}{2!}(y-x)^2+\frac{f'''(x)}{3!}(y-x)^3+o((y-x)^3)$$

(2)将该式视作h的函数，即可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+3h)-2f'(x+2h)+f'(x+h)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3f''(x+3h)-4f''(x+2h)+f''(x+h)}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{9f'''(x+3h)-8f'''(x+2h)+f'''(x+h)}{2}\\
&=f'''(x)
\end{aligned}$$

6.

(1)鉴于我们知道

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^\alpha}\to -\infty, \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$$

$$(\frac{\ln x}{x^\alpha})'=\frac{1-\alpha\ln x}{x^{\alpha+1}}$$

极大值点为

$$x=e^{\frac{1}{\alpha}}$$

此时有

$$f(x)=\frac{1}{\alpha e}>0$$

因此最大值为$\frac{1}{\alpha e}$。

(2)我们先来看$x^{\frac{1}{x}}$的最大值，即$\frac{\ln x}{x}$，由上题可知$x=e$时最大，最大值为$\frac{1}{e}$。

除此之外我们知道导数

$$(\frac{\ln x}{x})'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

在$(0,e)$上大于0，$(e,+\infty)$上小于0，因而在这两个区间分别单调递增递减。

于是只需要取$n=2,3$进行比较，此时我们有

$$3>2\sqrt{2}\to \sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$$

因此最大元素为$\sqrt[3]{3}$。

7.

我们有以下方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$C=4x+4y, S=4xy$$

将y视作x的函数，对第一个方程求导得

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

对第二个方程求导得

$$C' = 4(1 - \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y})$$

显然在$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2}$取到最大值

$$C_{max} = 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

对第三个方程求导得

$$S' = 4y(1 - \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y^2})$$

显然在$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$时取到最大值

$$S_{max} = 2ab$$