高微作业9

郑子诺，物理41

2024 年 12 月 17 日

1.

令$f(x) = x^p$，我们有

$$\forall x > 0, f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0, p \geq 1$$

因此$f(x)$下凸。根据Jensen不等式，我们有

$$(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n})^p \leq \frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}$$

2.

(1)

$$f''(x) = -\sin x$$

因此拐点为

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

上凸和下凸区间分别为

$$[2k\pi, (2k+1)\pi], [(2k-1)\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$$

(2)

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$$

因此拐点为

$$x = 0$$

上凸和下凸区间分别为

$$(-\infty, 0], [0, +\infty)$$

(3)令$x_i=\ln a_i\geq 0$并利用Jensen不等式我们有

$$\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+e^{\frac{\ln a_1+\cdots\ln a_n}{n}}}d=\frac{1}{1+\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$$

3.

由于$f''(x)\geq 0$，于是利用Jensen不等式我们有

$$f(x)=f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)\leq\max\{f(a),f(b)\},\forall x\in[a,b],t\in[0,1]$$

因此显然最大值在端点处取到。

4.

(1)对于区间$[a,b]$上的有界函数$f(x)$，其可积当且仅当其间断点组成的集合测度为零。

(2)首先这两个函数都是显然有界的。显然对于f连续的点，我们有

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x-x_0|<\delta,|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

因此

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

因此我们知道f连续的点$|f|$必连续，于是有

$$D(|f|)\subseteq D(f)$$

因此$D(|f|)$是零测集，因而可积。同理，对于f连续的点我们有

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x-x_0|<\delta,|f(x)-f(x_0)|<\min\{\frac{\epsilon}{2f(x_0)},f(x_0)\}$$

因此

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|=|f(x)-f(x_0)||f(x)+f(x_0)|<\epsilon$$

因此我们知道f连续的点f^2必连续，于是有

$$D(f^2)\subseteq D(f)$$

因此$D(f^2)$是零测集，因而可积。

(3)不一定。因为我们可以令f在有理点上取1，无理点上取-1，因此每一点都是间断点，因而不可积，然而此时$|f|$却是常数1，一定可积，这正是反例。

5.

$$G(x)=\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t+\int_{u(x)}^a f(t)\mathrm{d}t=F_1(v(x))-F_2(a)+F_2(a)-F_2(u(x))$$

因此我们有

$$G'(x)=F_1'(v(x))v'(x)-F_2'(u(x))u'(x)=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x)$$

6.

(1)

$$\int_a^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x|_a^1-\int_a^1\mathrm{d}x=a-1-a\ln a$$

(2)利用洛必达定理，我们有

$$\lim_{a\to 0^+}a-1-a\ln a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1=-1$$

因此

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\ln x\mathrm{d}x=-1$$

(3)鉴于$\ln x$单调递增，显然对于$x\in(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})$我们有$\ln\frac{i}{n}<\ln x<\ln\frac{i+1}{n}$。将原积分区间分成这些子区间，分别利用该不等式求和得到

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\ln x\mathrm{d}x<\frac{1}{n}(\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}),\int_{\frac{1}{n}}^1\ln x\mathrm{d}x>\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\cdots+\ln\frac{n-1}{n})$$

因此我们有

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\ln x\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}<\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})<\int_{\frac{1}{n}}^1\ln x\mathrm{d}x$$

(4)令$n\to+\infty$，左右显然都趋于-1，根据夹逼定理我们知道

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=-1$$

根据$\ln x$的连续性我们知道

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

7.

(1)鉴于其下凸性，利用Jensen不等式以及下凸的定义，我们有

$$f(\frac{a+b}{2})+(x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})\le f(x)\le\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

然后利用积分不等式得到

$$f(\frac{a+b}{2})(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(2)若严格大于0，则上述关于函数的不等式严格成立。鉴于连续函数的积分不等式取等当且仅当两者相等，因此积分不等式也会严格成立，于是

$$f(\frac{a+b}{2})(b-a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(3)令$g(x) = f(x) - \frac{M}{2}(x - \frac{a+b}{2})^2$，显然有

$$g''(x) = f''(x) - M > 0$$

代入上题不等式得

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{M}{24}(b-a)^3 < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{M}{8}(b-a)^3$$

因此我们有

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{M}{24}(b-a)^3 < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{M}{12}(b-a)^3$$

(4)根据最值定理，令$m = \min\{f''(x)\}$，我们有

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{m}{24}(b-a)^3 \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

令$M = \max\{f''(x)\}$，$g(x)$变上凸，不等式反向，我们有

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{M}{24}(b-a)^3 \ge \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

结合两个不等式我们有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{y}{24}(b-a)^3, y \in [m, M]$$

再根据介值定理，我们有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \xi \in [a, b]$$

(5)与上一题同理有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{m}{12}(b-a)^3$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{M}{12}(b-a)^3$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{y}{12}(b-a)^3, y \in [m, M]$$

再根据介值定理得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3, \eta \in [a, b]$$