线代作业13

郑子诺，物理41

2024 年 12 月 7 日

1.

(a)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

2.

我们有

$$A^T Ax = A^T y \to a = -\frac{36}{35}, b = \frac{61}{35}$$

3.

(a)根据向量范数的三角不等式，我们有

$$\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$

因此

$$\|A+B\| = \max_{|x|=1} \|(A+B)x\| \leq \max_{|x|=1}(\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \|A\| + \|B\|$$

(b)由于Bx的值域小于等于全空间，因此有

$$\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \leq \|A\|$$

于是

$$\|AB\| = \max_{|x|=1} \|ABx\| \leq \max_{|x|=1} \|A\|\|Bx\| = \|A\|\|B\|$$

4.

由于正定方阵可对角化，因此我们有

$$e^{-tA} = e^{-tU\Sigma U^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tU\Sigma U^{-1})^k}{k!} = U \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-t\Sigma^k}{k!} U^{-1} = Ue^{-t\Sigma}U^{-1}$$

鉴于正定方阵特征值为正，因而我们有

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-tA} = \lim_{t\to+\infty} U \begin{bmatrix} e^{-t\lambda_1} & & & \\ & e^{-t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-t\lambda_k} \end{bmatrix} U^{-1} = 0$$

5.

显然其解为

$$Y = e^{tA}Y_0, A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

显然A的特征值为$-2, -3$，于是直接由上题知

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$