

高微2作业1

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 1 日

1.

(1) 由于

$$\left| \sum_{n=1}^n \sin n\theta \right| = \left| \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$$

同时 $\frac{1}{n^2}$ 单调收敛于0。因此利用狄利克雷判别法我们知道该级数收敛。

(2) 我们知道

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} < 1$$

因此根据比值判别法该级数收敛。

(3) 同上题，此时有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n! a^n}{n^n}} = \frac{a}{e}$$

因此 $a > e$ 时发散， $a < e$ 时收敛。当 $a = e$ 时，我们有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

因此 a_n 并不趋于0，于是发散。

(4) 我们有

$$\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$$

取对数得

$$\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln \ln n$$

显然当 n 趋于无穷时上式趋于负无穷，因此原式趋于0。因此该级数收敛。

(5) 显然我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} (\ln n)^p}{1 + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^p}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

且我们知道级数 $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 因此该级数收敛。

(6) 对任意正数 ϵ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p (\ln n)^q}{n^p} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{p-\epsilon} (\ln n)^q}{n^p} = 0$$

因此当 $p \leq 1$ 时, 该级数发散, 当 $p > 1$ 时, 该级数收敛。

(7) 让 $\frac{1}{n^\beta}$ 去除级数项, 我们有

$$n^{\beta-\alpha} - n^\beta \sin \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{3!} \frac{n^\beta}{n^{3\alpha}} - \frac{1}{5!} \frac{n^\beta}{n^{5\alpha}} + \cdots$$

当 $\alpha > \frac{1}{3}$ 时, 取 $\beta = 1 + \epsilon, \epsilon > 0$ 使得 $\beta < 3\alpha$, 显然此时该级数收敛。当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时, 该极限等于 1, 与调和级数同敛散, 因此发散。当 $\alpha < \frac{1}{3}$ 时, 我们知道 $x - \sin x$ 单调递增, 且 $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, 因此该级数发散。

综上所述, $\alpha > \frac{1}{3}$ 级数收敛, $\alpha \leq \frac{1}{3}$ 级数发散。

(8) 显然当 $p > 1$ 时, 该级数绝对收敛, 因为此时有

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \cdots < 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots$$

而右边收敛。当 $p = 1$ 是, 我们知道

$$\frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \cdots \\ & > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \\ & > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots \\ & = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

因此该级数发散。鉴于我们有

$$\left(\frac{1}{(2n-1)^x} - \frac{1}{(2n)^{2x}} \right)' = \frac{x}{(2n-1)^{x+1}} \left(\frac{2}{(2n^x)} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{x+1} - 1 \right) < 0$$

$$\frac{1}{(2n+1)^p} > \frac{1}{(2n+1)}, p < 1$$

因此当 $p < 1$ 时该级数部分和大于 $p = 1$ 的情形，且后者发散，因而 $p < 1$ 时发散。

综上所述， $p > 1$ 级数收敛， $p \leq 1$ 级数发散。

(9)此即(1)中 θ 取1的情况，根据狄利克雷判别法该级数收敛。

2.

将 $f(n)$ 写作 a_n ，我们有

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n-1} \\ & \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} \\ & \geq a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \end{aligned}$$

因此显然两个级数同敛散。

3.

我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

因此显然两个级数同敛散。