线代作业9

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 19 日

1.

(a)特征多项式

$$f(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$$

特征值

$$\lambda = -1, 3$$

特征子空间分别为

$$c\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

根子空间分别为

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

显然不能对角化。

(b) 特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

特征值

$$\lambda = 0, 2$$

特征子空间分别为

$$c\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

根子空间分别为

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},a\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

显然不能对角化。

2.

(a) 若满足$V_1\cap V_2=\{0\}$，则有

$$\alpha=\beta_1+\beta_2,\alpha\in V_1+V_2,\beta_i\in V_i$$

若展开不唯一，则有

$$\alpha=\beta_1'+\beta_2',\alpha\in V_1+V_2,\beta_i'\in V_i$$

$$(\beta_1'-\beta_1)=-(\beta_2'-\beta_2)$$

显然等式左右分别为V_1,V_2中的向量，若不为0，则与$V_1\cap V_2=\{0\}$矛盾。

若$V_1+V_2=V_1\oplus V_2$，则若$\alpha\in V_1\cap V_2$，有

$$\alpha=\alpha+0=0+\alpha$$

由表达式的唯一性可知$\alpha=0$。

(b)令

$$V_1=c\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},V_2=c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},V_3=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

显然题设条件成立，但是此时有

$$\dim(V_1+V_2+V_3)=2<\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3$$

因此不是直和。

(c)令

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\alpha_i\in V_i$$

根据题设条件我们知道，设$\alpha_j\neq 0$，则有

$$\alpha_j=-\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}$$

而等式两边分别属于V_j和$V_1+\cdots+V_{j+1}$，根据条件，必须为0。因此我们证明了线性无关性，即三者之和为直和。

3.

把A看做一个线性变换T在一组基下的表示矩阵。分别取V_1, V_2的一组基，由直和的性质可知合并起来是V的一组基。再根据不变子空间的性质很容易看出，此时T的表示矩阵一定长成这个样子L：

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

我们知道变换一组基相当于相似变换，因而证毕。

4.

通过归纳法。显然$n=1$不用证。设$n=k-1$成立。下证$n=k$成立。因为是复方阵，所以特征多项式必有一根，取出该特征值的特征向量并将它扩成一组基。同样的，我们还是把复方阵当做一个线性变换T在一组基下的表示矩阵。显然，此时的表示矩阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

B为$k-1$阶复方阵，因此可以通过相似变换变成上三角矩阵，这相当于$PBP^{-1} = B'$。于是我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & PBP^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & B' \end{bmatrix}$$

利用归纳法得证。

5.

(a)我们还是把复方阵当做一个线性变换T在一组基下的表示矩阵。先对空间进行根子空间分解。定义投影算符$E_i^2 = E_i$，并使得$E_i\alpha = \alpha_i, \alpha_i \in W_i$。显然此时有

$$E_1 + \cdots + E_k = I, E_iE_j = 0, i \neq j$$

且有

$$TE_i\alpha = T\alpha_i = E_iT\alpha_i = E_iT\alpha$$

因此

$$TE_i = E_iT$$

且投影算符是线性变换。令$D = \lambda_1E_1 + \cdots + \lambda_kE_k$，显然$D$可对角化，因为此时$W_i$就是$\lambda_i$的特征子空间，这是显然的。令$N = T - D$我们有

$$N = (T - \lambda_1 I)E_1 + \cdots + (T - \lambda_k I)E_k$$

以及

$$N^r = (T-\lambda_1 I)^r E_1 + \cdots + (T-\lambda_k I)^r E_k$$

这可有E_i性质轻松得到。只要r足够大，根据根子空间定义，必有$N^r = 0$。同时我们有

$$DN = \lambda_1(T-\lambda_1 I)E_1 + \cdots + \lambda_k(T-\lambda_k I)E_k = ND$$

证毕。

(b)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6.

(a)首先你会发现，交换两列的初等列变换矩阵正是交换两行的初等行变换矩阵，且互为逆。然后观察到对约当块每一列向左交换，然后再每一行向下交换就变成了自己的转置，就等价于

$$J^T = E_k \cdots E_1 J E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} = (E_k \cdots E_1) J (E_k \cdots E_1)^{-1}$$

因而相似。

(b) 根据转置和求逆的交换性以及复方阵的约当型我们得到

$$A^T = (P^T)^{-1} J^T P^T$$

又由于每个约当块与其转置相似，我们可以得出J, J^T相似，因为这就相当于把一组基分成每个约当块的基然后做变换。根据相似的传递性直接得出A与A^T相似。

7.

若A, B可同时对角化，根据对角矩阵的交换性显然有

$$A = PD_1P^{-1}, B = PD_2P^{-1}$$

$$AB = PD_1D_2P^{-1} = PD_2D_1P^{-1} = BA$$

若$AB = BA$，显然此时线性空间可以分别被A, B分割成各自特征子空间的直和。因为这时候如果α是A的特征向量，那么

$$BA\alpha = AB\alpha = \lambda B\alpha$$

表明$B\alpha$也是A的特征向量，因此A的特征空间是B的不变子空间，因而我们可以在A的特征空间里找B的特征空间。
如果把两种分割叠加在一起，仍然是一个分割，那么我们就证完了。这相当于去证A, B共同的特征子空间是否线性无关。

$$\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{1r} + \cdots + \alpha_{k1} + \cdots + \alpha_{kr} = 0$$

然而根据直和的定义这显然有$\alpha_{i1} + \cdots + \alpha_{ir} = 0$，进一步有$\alpha_{ij} = 0$。于是此时有

$$V = (V_1 \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (V_1 \cap W_r) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (V_k \cap W_r)$$

取这些子空间的基，显然可以组成一组V的基，于是同时对角化。