

高微作业4

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 25 日

1.

(1) 因为

$$\sin^2(n\pi) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2(\pi\sqrt{n^2 + 1}) - \sin^2(n\pi)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) + \sin(n\pi))(\sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) - \sin(n\pi)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sin\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2}\pi\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2}\pi\right) \\ &\leq 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2}\pi\right) \leq 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0 \end{aligned}$$

其中由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0$, $\sin(\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2}\pi)$ 在 n 足够大时为正。

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + 1}) = 0$$

(2) 因为

$$\sin^2\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

当 $n > N, n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n} < \epsilon$ 时我们有 (显然 $n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n} > 0$)

$$\begin{aligned}
|\sin^2((n + \frac{1}{2})\pi) - \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})| &= |(\sin((n + \frac{1}{2})\pi) - \sin(\pi\sqrt{n^2 + n}))(\sin((n + \frac{1}{2})\pi) + \sin(\pi\sqrt{n^2 + n}))| \\
&= |4 \sin(\frac{\sqrt{n^2 + n} + n + \frac{1}{2}}{2}\pi) \cos(\frac{\sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}}{2}\pi) \\
&\quad \sin(\frac{n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n}}{2}\pi) \cos(\frac{\sqrt{n^2 + n} + n + \frac{1}{2}}{2}\pi)| \\
&\leq 4 \sin(\frac{n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n}}{2}\pi) \leq 2\pi\epsilon
\end{aligned}$$

其中由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n}) = 0$, $\sin(\frac{n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2 + n}}{2}\pi)$ 在 n 足够大时为正。
所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + n}) = 1$$

2.

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1 - a)x - 1 - b + \frac{2}{x + 1}) = 0$$

显然有

$$a = 1, b = -1$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - px - q) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}} + (1 - p)x - q) = 0$$

显然有

$$p = 1, q = -1$$

3.

(1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = A$$

所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x)} - 1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n (\sqrt{1 + f(x)} + 1)} = \frac{A}{2}$$

(2)因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 + \sin^2 x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}} - 1}{x^2} + \frac{1 - \sqrt{1 + \sin^2 x}}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2 (1 + \sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}})} - \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \sqrt{1 + \sin^2 x})} \right) \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

4.

(1)因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = A, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - g(x)}{x^2} = B$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} Ax = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - g(x)}{x} = 0$$

所以我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - f(x)}{x^2} + \frac{1 - g(x)}{x^2} - \frac{1 - f(x)g(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - f(x))(1 - g(x))}{x^2} = 0$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)g(x)}{x^2} = A + B$$

(2)做归纳假设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_1(x) \cdots f_k(x)}{x^2} = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

$k = 2$ 时成立, 设 $k = i - 1$ 成立, 下证 $k = i$ 成立显然令 $f(x) = f_i(x), g(x) = f_1(x) \cdots f_{i-1}(x)$, 由(1)得证。

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_1(x) \cdots f_n(x)}{x^2} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

5.

由 e^x 单调性可知, 任取 $\epsilon > 0$, 令 $|x| < \delta, \delta < \frac{1}{\sqrt{n}}, e^n > \epsilon$ 则有

$$e^{-\frac{1}{x^2}} < e^{-\frac{1}{\delta^2}} < e^{-n} < \epsilon$$

因此在 $x = 0$ 处连续。

6.

显然 $x = 0$ 是一个间断点。由于 $x^2 - x + 1, \Delta < 0$, 因此分母不为0。若 $x > 1$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{2n}}} = 1$$

若 $x = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + x} = 2$$

若 $0 < x < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + x} = \frac{1}{x}$$

若 $-1 < x < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-x)^{2n+1} - 1}{(-x)^{2n+1} - (-x)^{n+1} - x} = \frac{1}{x}$$

若 $x = -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + 1} = -1$$

若 $x < -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{(-x)^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{(-x)^n} + \frac{1}{(-x)^{2n}}} = 1$$

所以有三个间断点 $x = 1, 0, -1$ 。

7.

先证函数值域有界。利用有限覆盖定理, 取 $f(x_0)$ 的开邻域 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \epsilon > 0$, 对于每一个 x_0 我们有 $B_\delta(x_0) : |x - x_0| < \delta$ 。 $B_\delta(x_0)$ 内的所有 $f(x)$ 显然是有界的, 记其中一个上界为 $M(x_0)$ 。 $\{B_\delta(x)\}$ 形成了对 $[a, b]$ 的一组开覆盖, 因此存在有限个 $B_\delta(x)$ 可以覆盖 $[a, b]$ 。取 $M = \max\{M(x_1), M(x_2), \dots, M(x_n)\}$, 显然 M 是 $f(x)$ 的上界。下界同理。

所以函数值域有界。因此函数值域存在上下确界。设下确界为 α , 若无法取到下确界, 那么函数

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \alpha}$$

在 $[a, b]$ 上是一个连续函数。又因为 $\forall \epsilon > 0, \exists x, |f(x) - \alpha| < \epsilon$, 这意味着

$$\forall \epsilon > 0, \exists x, g(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

没有上界，与有界性矛盾。因此取得到下确界。上确界同理。

因此函数值域取得到最大值和最小值。选取其中一对点取得最大最小值，这一对点构成一个闭区间，于是应用介值定理，我们证明了最大最小值之间每一个值都可以取到，这意味着函数值域是一个有界闭区间。