高微作业6

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 15 日

1.

(1)因为f处处可导，因而连续。显然$f(x) \neq 0$。设$f(x) > 0$，则在x的一个邻域内有

$$\ln|f(x)| = \ln f(x)$$

因此导函数为

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

若$f(x) < 0$，则在x的一个邻域内有

$$\ln|f(x)| = \ln(-f(x))$$

因此导函数为

$$\frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

综上，导函数为

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

(2)显然$f(x) = 1, -1$时不可导。设$f(x) \neq 1, -1$，有

$$(\arcsin(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$$

(3)显然$u(x)^{v(x)}$默认了$u(x) > 0, u(x)^{v(x)} > 0$，因此设$f(x) = u(x)^{v(x)}$并两边取对数有

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$$

两边求导有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x)$$

因此我们有

$$(u(x)^{v(x)})' = (v'(x)\ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)}v(x))u(x)^{v(x)}$$

2.

(1)在x_0的一个邻域内存在一个线性变换$A : R \to R$使得

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + \alpha(h), \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0$$

那么称f在x_0处可微。

(2)设f在x_0处可导，令

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)$$

根据导数定义有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

因此可微，证毕。

(3)由定义可得

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}, h'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}$$

利用复合函数极限定理，绝对值函数显然连续，因此根据条件可得

$$|g'(0)| = \lim_{x\to 0}|\frac{g(x)}{x}| \le \lim_{x\to 0}|\frac{h(x)}{x}| = |h'(0)|$$

证毕。

3.

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln|f(a+\frac{1}{n})| - \ln|f(a)|) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln|f(a+\frac{1}{n})| - \ln|f(a)|}{\frac{1}{n}} = (\ln|f(a)|)' = \frac{L}{f(a)}$$

(2)显然$\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}$在$n$很大时为正数，我们有

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln|f(a+\frac{1}{n})| - \ln|f(a)|}{\frac{1}{n}} = (\ln|f(a)|)' = \frac{L}{f(a)}$$

利用复合函数极限定理，且对数函数连续，我们有

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)})^n = e^{\frac{L}{f(a)}}$$

4.

(1)不一定。因为$f'(x)=0$时f^{-1}不可导。此时有

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\to\infty$$

(2)

$$h'(x)=\frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(x)}$$

$$h''(x)=\frac{g''(f^{-1}(x))-f''(x)g'(f^{-1}(x))}{(f'(x))^2}$$

5.

(1)利用复合函数高阶导数求导法则可得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{\substack{all\,division\\ i_1+\cdots+i_k=n}}g^{(k)}(h(x))h^{(i_1)}(x)\cdots h^{(i_k)}(x)$$

令$g(x)=e^x,h(x)=-\dfrac{1}{x}$，显然前者的任意阶导数仍然不变，而后者的导数是$\dfrac{1}{x}$的倍数乘上一个常数，于是我们显然有

$$f^{(n)}(x)=P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

(2)利用归纳法。显然左导数任一多阶为0，因此以下皆讨论右导数。先求一阶导

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}te^{-t}=0$$

下设$k-1$阶导为0，我们有

$$f^{(k)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{P_{k-1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}tP_{k-1}(t)e^{-t}=0$$

利用归纳，我们有

$$f^{(n)}(0)=0$$

6.

Attention is all you need.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$$

因此显然有

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}})$$