线性代数第一次作业

郑子诺，物理41

2024 年 9 月 10 日

Q1:

(a):是。

因为由$x_1+y_1+z_1=0$，$x_2+y_2+z_2=0$可得

$$(ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)+(az_1+bz_2)=0$$

对加法和数乘封闭，因此是线性子空间。

(b):不是。

因为由$x_1+y_1+z_1=1$，$x_2+y_2+z_2=1$可得

$$(ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)+(az_1+bz_2)=a+b$$

对加法和数乘不封闭，因此不是线性子空间。

(c):不是。

因为由$x_1^2+y_1^2-z_1^2=0$，$x_2^2+y_2^2-z_2^2=0$可得

$$(ax_1^2+bx_2^2)+(ay_1^2+by_2^2)-(az_1^2+bz_2^2)=0\neq(ax_1+bx_2)^2+(ay_1+by_2)^2-(az_1+bz_2)^2$$

对加法和数乘不封闭，因此不是线性子空间。

(d):是。

因为由$x_1=2y_1,z_1=3y_1$，$x_2=2y_2,z_2=3y_2$可得

$$ax_1+bx_2=2(ay_1+by_2),az_1+bz_2=3(ay_1+by_2)$$

对加法和数乘封闭，因此是线性子空间。

(e):是。

显然当数乘负数时该子空间不封闭，因此不是线性子空间。

Q2:

(a):构成。
因为由$f(0)=0$，$g(0)=0$可得

$$af(0)+bg(0)=0$$

对加法和数乘封闭，因此是线性子空间。
(b):构成。
因为由$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$可得

$$Af(x)+Bg(x)=(Aa+Bc)x+(Ab+Bd)$$

对加法和数乘封闭，因此是线性子空间。
Q3:
(a):$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}$的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

值为0，因此线性相关，有

$$\mathbf{v_1}-2\mathbf{v_2}+\mathbf{v_3}=0$$

(b):可以。

$$\mathbf{u_1}=\mathbf{v_1}+3\mathbf{v_2}$$

(c):不可以。由于$\mathbf{v_1},\mathbf{v2},\mathbf{v_3}$线性相关，$\mathbf{v_3}$可表示为$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$的线性组合，因此实际上是在求$\mathbf{u_2}$关于$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$的线性组合。根据$\mathbf{u_2}$的$x$分量可知，$\mathbf{v_1}$的系数为4，又由$\mathbf{u_2}$的$y$分量可知，$\mathbf{v_2}$的系数为$-1$，此时不符合$\mathbf{u_2}$的$z$分量。因此不可以表示为$\mathbf{v_1},\mathbf{v2},\mathbf{v_3}$的线性组合。
Q4:
(a):显然，$a+bx+cx^2=0$当且仅当$a=b=c=0$，因此$1,x,x^2$线性无关。
(b):由于$1,x,x^2$线性无关，且可线性表示一切次数不超过2的多项式，因此将$1,x,x^2$作为基矢。
此时$1-x,1+x,x^2$的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

值为2，因此线性无关。
(c):$1, x, x^2, 1+2x+3x^2$的个数超过线性空间维数3，因此一定线性相关。
(d):因为$1-x, 1+x, x^2$线性无关，因此可选作基矢，于是$q(x)$可表示为

$$q(x) = \frac{7}{2}p_1(x) + \frac{1}{2}p_2(x) + 2p_3(x)$$

(e):理由同上，有

$$r(x) = -\frac{1}{2}p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x) + p_3$$

Q5:
因为存在不是全为0的数组$a_1, a_2, ..., a_n$使得

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n} = 0$$

因此取$a_{n+1} = 0$，则存在不是全为0的数组$a_1, a_2, ..., a_{n+1}$使得

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_{n+1}\mathbf{v_{n+1}} = 0$$

Q.E.D.
Q6:
若$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$线性相关，则存在不是全为0的数组$a_1, a_2, a_3$使得

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = 0$$

则必有一个系数不为0。设该系数为a_3，则

$$\mathbf{v_3} = -\frac{a_1}{a_3}\mathbf{v_1} - \frac{a_2}{a_3}\mathbf{v_2}$$

与条件矛盾。
若该系数为a_1，则

$$\mathbf{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v_2} - \frac{a_3}{a_1}\mathbf{v_3}$$

由题设条件可知$a_3 \neq 0$，于是回归到先前讨论。a_2同理。
于是可得假设不成立。
Q.E.D.

Q7:

存在不是全为0的数组$a_1, a_2, ..., a_n, b$使得

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n} + b\mathbf{u} = 0$$

若$b \neq 0$，则

$$\mathbf{u} = -\frac{a_1}{b}\mathbf{v_1} - \frac{a_2}{b}\mathbf{v_2} - ... - \frac{a_n}{b}\mathbf{v_n}$$

结论成立。

若$b = 0$，则由题设条件知$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$，与线性相关矛盾。

所以$b \neq 0$，因而结论成立。

Q.E.D.