

统计力学作业5

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 21 日

补充题1:

玻色子；玻色子；费米子；玻色子；玻色子；

费米子；费米子；玻色子；费米子

补充题2:

$$\{\{4, 0\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 4\}\}, \{1, 16, 36, 16, 1\}, \{2, 2\}$$

$$\{\{4, 0\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 4\}\}, \{35, 80, 100, 80, 35\}, \{2, 2\}$$

6.5&6.6

对于经典粒子，我们有

$$\Omega\{a_i, a'_i\} = \left(\frac{N!}{\prod a_i!} \prod \omega_i^{a_i} \right) \left(\frac{N'!}{\prod a'_i!} \prod \omega_i^{a'_i} \right)$$

求对数并利用斯特林公式近似得

$$\ln \Omega\{a_i, a'_i\} = N \ln N - N - \sum (a_i \ln a_i - a_i) + \sum a_i \ln \omega_i + N' \ln N' - N' - \sum (a'_i \ln a'_i - a'_i) + \sum a'_i \ln \omega'_i$$

利用拉格朗日乘子法，主要到 α, α' 不同，但是 β 相同，因为能量约束条件涉及两种粒子，分别对 a_l, a'_l 求导取0得到

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha - \beta \epsilon_l}, a'_l = \omega'_l e^{-\alpha' - \beta \epsilon'_l}$$

由于两种粒子近独立，类似的，对于费米子和玻色子有

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha + \beta \epsilon_l} \pm 1}, a'_l = \frac{\omega'_l}{e^{\alpha' + \beta \epsilon'_l} \pm 1}$$

其中+为费米子，-为玻色子。

根据热力学第三定律，在温度趋于零时系统趋于基态，观察可知 $\beta \rightarrow +\infty$ 可

以满足这一条件，因此 β 和温度有关。

特别的，对于玻尔兹曼分布， α 是公有的，粒子分布只与能量有关， $\beta \rightarrow +\infty$ 时所有粒子将处于能量最低态；对于费米狄拉克分布， $\beta \rightarrow +\infty$ 时指数上为正的态上将没有粒子，反之粒子数等于简并数，由此可见粒子占据一个特定的能量下的每一个态；对于玻色爱因斯坦分布，选定基态作为能量零点，显然 $\alpha \geq 0$ ，否则基态粒子数为负，当 $\beta \rightarrow +\infty$ 时除了基态外所有态上没有粒子，因此所有粒子处于基态。