高微作业11

郑子诺，物理41

2024 年 12 月 19 日

1.

(1)鉴于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^{a-1}}{1+x}}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

因此与x^a同敛散。因此我们有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛} & \text{if } a<1\\ \text{发散} & \text{if } a\geq 1\end{cases}$$

(2)鉴于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{a-1}}{1+x}}{x^{a-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

因此与x^{a-1}同敛散。因此我们有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛} & \text{if } a>0\\ \text{发散} & \text{if } a\leq 0\end{cases}$$

(3)令$t=\dfrac{1}{x}$，这个换元显然是单射且光滑，除此之外边界的极限相同，因此可以直接写

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{t^{1-a}}{1+t^{-1}}\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}\mathrm{d}x$$

2.

(1)鉴于我们有

$$\int_0^{+\infty}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0 e^{x}\mathrm{d}x=1$$

因此
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\mathrm{d}x$$
收敛。我们还有
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}}=\lim_{x\to\infty}e^{-x^2(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}-\frac{|x|}{x^2})}=0$$
因此
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c}\mathrm{d}x$$
收敛。

(2)鉴于无穷积分收敛，因此柯西主值与其相等，我们有
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} e^{-ax^2-bx-c}\mathrm{d}x\\
&=e^{\frac{b^2}{4a}-c}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}}^{M\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-u^2}\mathrm{d}u\\
&=\frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}}I
\end{aligned}$$

3.

(1)由于
$$|\sum_{n=1}^{n}\sin n\theta|=|\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\theta\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}|\leq\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}$$
同时$\dfrac{1}{n^2}$单调收敛于0。因此利用狄利克雷判别法我们知道该级数收敛。

(2)我们知道
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}<1$$
因此根据比值判别法该级数收敛。

(3)同上题，此时有
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!a^n}{n^n}}=\frac{a}{e}$$

因此$a>e$时发散，$a<e$时收敛。当$a=e$时，我们有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$$

因此a_n并不趋于0，于是发散。
(4)我们有

$$\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$$

取对数得

$$\frac{(\ln n)^2}{n}-\ln\ln n$$

显然当n趋于无穷时上式趋于负无穷，因此原式趋于0。因此该级数收敛。
(5)显然我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}(\ln n)^p}{1+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^p}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+n^{\frac{1}{2}}}=0$$

且我们知道级数$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，因此该级数收敛。
(6)对任意正数ϵ，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p(\ln n)^q}{n^p}=+\infty,\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{p-\epsilon}(\ln n)^q}{n^p}=0$$

因此当$p\leq 1$时，该级数发散，当$p>1$时，该级数收敛。
(7)让$\frac{1}{n^\beta}$去除级数项，我们有

$$n^{\beta-\alpha}-n^\beta\sin\frac{1}{n^\alpha}=\frac{1}{3!}\frac{n^\beta}{n^{3\alpha}}-\frac{1}{5!}\frac{n^\beta}{n^{5\alpha}}+\cdots$$

当$\alpha>\frac{1}{3}$是，取$\beta=1+\epsilon,\epsilon>0$使得$\beta<3\alpha$，显然此时该级数收敛。当$\alpha=\frac{1}{3}$时，该极限等于1，与调和级数同敛散，因此发散。当$\alpha<\frac{1}{3}$时，我们知道$x-\sin x$单调递增，且$\frac{1}{n^\alpha}>\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$，因此该级数发散。
综上所述，$\alpha>\frac{1}{3}$级数收敛，$\alpha\leq\frac{1}{3}$级数发散。
(8)显然当$p>1$时，该级数绝对收敛，因为此时有

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^{2p}}+\cdots<1+\frac{1}{2^p}+\cdots$$

而右边收敛。当$p=1$是，我们知道

$$\frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \cdots \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots) \to +\infty
\end{aligned}$$

因此该级数发散。鉴于我们有

$$(\frac{1}{(2n-1)^x} - \frac{1}{(2n)^{2x}})' = \frac{x}{(2n-1)^{x+1}}(\frac{2}{(2n^x)}(\frac{2n-1}{2n})^{x+1} - 1) < 0$$

$$\frac{1}{(2n+1)^p} > \frac{1}{(2n+1)}, p < 1$$

因此当$p<1$时该级数部分和大于$p=1$的情形，且后者发散，因而$p<1$时发散。

综上所述，$p>1$级数收敛，$p\le 1$级数发散。

(9)此即(1)中θ取1的情况，根据狄利克雷判别法该级数收敛。