高微2作业2

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 10 日

1.

(1)鉴于

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

我们有

$$R = 1$$

当$x = 1$时，利用莱布尼茨判别法知该交错级数收敛。当$x = -1$时，此恰为调和级数，发散。因此收敛域为$(-1, 1]$。

(2)设和函数为$f(x)$，我们有

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, |x| < 1$$

积分并利用$f(0) = 0$得到

$$f(x) = \ln(1+x), |x| < 1$$

(3)由于当$x = 1$时，利用莱布尼茨判别法知该交错级数收敛，再利用阿贝尔定理知和函数在$x = 1$处连续，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2.

(1)对$\arctan x$求导得$\dfrac{1}{1+x^2}$，后者展开为

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, |x| < 1$$

逐项积分得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1$$

(2)鉴于积分不改变收敛半径，收敛半径仍为1。

(3)当$x = 1$时，根据莱布尼茨判别法，该交错级数收敛，再根据阿贝尔定理知和函数在$x = 1$处连续，因此

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

3.

(1)收敛域是显然的，为$(1, +\infty)$。

(2)是。对于$x \in [b, +\infty)$，其中$b > 1$，我们有

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^b}$$

而后者显然收敛，因此该级数在$[b, +\infty)$上一致收敛。对于任一$x \in X$，取$1 < b < x$，利用上述结论容易知$\zeta(x)$在X上连续。

(3)对级数逐项求导得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$$

对于$x \in [b, +\infty)$，其中$b > 1$，我们有

$$\frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^b}$$

对后者使用比较判别法，取级数$\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$，其中$\epsilon < b - 1$，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{b-1-\epsilon}} = 0$$

因此该级数收敛，因而求导后的级数在$[b, +\infty)$上一致收敛。于是对于任一$x \in X$，取$1 < b < x$，根据一致收敛的性质得

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$$

4.

(1)利用比值判别法

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{(n+1)^2} = 4$$

因此收敛半径为$\frac{1}{4}$。

(2)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n, |x|<1$$

(3)利用前一小题结论，由于$\arcsin x$导数为$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n}, |x|<1$$

利用幂函数性质逐项积分得

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x|<1$$

5.

(1)鉴于

$$|f_n(x)-f_n(a)|=|f'(\xi)(x-a)|\le M_n(x-a)$$

后者由题设知收敛。因此级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(f_n(x)-f_n(a))$绝对收敛，于是由题设知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$逐点收敛。

(2)鉴于题设，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)$显然在$(a,b)$上一致收敛，设其和函数为$g(x)$，根据$f_n'(x)$连续我们有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_n'$$

其中$x,x_0\in(a,b)$。左右两边求和取极限并利用一致连续的性质得

$$S(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x}g$$

显然$S(x)$在(a,b)上处处可导。

6.

首先由题设得

$$|\sum_{i=m}^{n}a_i(x)b_i(x)|\le(|a_n(x)|+|a_m(x)-a_n(x)|)M$$

再由$a_n(x)$一致收敛至0，存在N使得$\forall n > N, |a_n| < \dfrac{\epsilon}{3M}$。因此对于任一$m, n > N$我们有

$$|\sum_{i=m}^{n} a_i(x)b_i(x)| \le \epsilon$$

由一致收敛的柯西判别法知该级数一致收敛。

7.

将级数写成

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(x) - a(x))b_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a(x)b_n(x)$$

其中$a(x)$为$a_n(x)$的逐点极限。前一项由上题知一致收敛，后一项显然也一致收敛，因为存在N使得$m, n > N, |b_m(x) + \cdots + b_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{K}$，于是

$$|a(x)b_m(x) + \cdots + a(x)b_n(x)| < \epsilon$$

因此原级数一致收敛。

8.

当$x \in [0, x_0]$时，我们有

$$a_n x^n = a_n \frac{x^n}{x_0^n} x_0^n \le a_n x_0^n$$

而后者收敛。因此该级数在$[0, x_0]$上一致收敛。