线代作业3

郑子诺，物理41

2024 年 9 月 27 日

1.

(1):

$$\begin{bmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 14 & 17 & 4 \\ 11 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

(2):

$$\begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 8 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$$

(3):

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}$$

2.

显然，由于$AB = BA$，矩阵乘法运算将与实数无异，于是由二项式展开得：

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^i B^{k-i}$$

若$AB \neq BA$，则显然该式不成立，例如：

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

3.

(1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由归纳法可得：

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2):

$$\begin{bmatrix} a^{k-1} & (k-1)a^{k-2}b \\ 0 & a^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{bmatrix}$$

由归纳法得：

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

(3):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha & -\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha & \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\theta) & -\sin(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) & \cos(\alpha+\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以显然有：

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

(4):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b & b+c & c+d \\ 0 & e & e+f & f+g \\ 0 & 0 & h & h+i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

显然，矩阵元素构成杨辉三角，因此：

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n \geq 2$$

(5):

显然我们有：

$$A = XY, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$YX = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

因此：

$$\begin{aligned} A^n = (XY)^n = X(YX)(YX)\cdots(YX)Y &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^{n-1}XY \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^{n-1} \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_! & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.

(1):

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

(2):

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

(3):

无解，因为原增广矩阵行等价于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & -13 & 8 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5.

系数行列式为$\lambda^4 - 4\lambda^2$，所以：当$\lambda = 0$时，有无穷多个解：

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 \\ x_4 = 1 - x_2 \end{cases}$$

当$\lambda = 2$时，有无穷多个解：

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \frac{1}{2} - x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

当$\lambda = -2$时，无解，因为其增广矩阵行等价于：

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

当$\lambda \neq 0, 2, -2$时，有唯一解为：

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2 + \lambda}$$

6.

显然，由于每个矩阵都行等价于一个行简化阶梯矩阵，因此若$m < n$，则主元数量少于变量，因此要么有无穷多组解，要么无解。又因为必有零解，因此有无穷多个非零解。