线代作业7

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 25 日

1.

(1)

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{28} & \frac{25}{28} & \frac{5}{28} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4)经过艰苦卓绝的一系列行变换我们终于得到了

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{n}{n+1} & 1-\dfrac{2n}{n+1} & 2-\dfrac{3n}{n+1} & \cdots & n-1-\dfrac{n^2}{n+1} \\ -\dfrac{n-1}{n+1} & -\dfrac{2(n-1)}{n+1} & 1-\dfrac{3(n-1)}{n+1} & \cdots & n-2-\dfrac{n(n-1)}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{1}{n+1} & -\dfrac{2}{n+1} & -\dfrac{3}{n+1} & \cdots & -\dfrac{n}{n+1} \end{bmatrix}$$

2.

$$(I_n - A)X = 0$$

只需证明该方程有唯一解。

$$X = AX$$

$$AX = A^2X$$

以此类推得到

$$A = AX = A^2X = \cdots = A^NX = 0$$

因此$I_n - A$为可逆矩阵。

3.

让我们求伴随矩阵

$$(adj\ A)_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ji}$$

令i, j处于下三角，显然j, i处于上三角，因此A_{ji}为一个上三角元的余子式，显然也是一个上三角矩阵，并且其对角线至少含有一个0，因此行列式为0。于是伴随矩阵也是上三角矩阵。

4.

显然，初等行变换并不会导致行列式变为0。我们对A做初等行变换，相当于对每一个行列子式做初等行变换，因而并不会导致任何行列子式变为0。初等列变换同理。于是我们可以通过一系列初等行变换将A变为简化阶梯矩阵，再通过初等列变换使其变为标准型

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

很显然此时$p(A) = rank(A)$。

5.

显然，根据之前作业所证过的定理，初等行变换等价于左乘一个初等矩阵，初等列变换等价于右乘一个初等矩阵，而且显然初等矩阵是可逆的，因为初等行、列变换都是可逆的。我们显然可以通过一系列初等行、列变换使得A化为标准型，而可逆矩阵的乘积仍然可逆，于是我们有

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$