高微作业3

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 10 日

1.

由三角函数和线性函数的连续性知：

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a$$

左右极限相等，极限存在。因此$a=0$，b任意。

2.

(1)(2):

先证根式函数的连续性：

$$y = y_0 + \epsilon, \epsilon > 0$$

$$\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{y_0} = b, b > 0$$

$$y_0 + \epsilon = y = (\sqrt[k]{y_0} + b)^k > y_0 + kby_0^{\frac{k-1}{k}}$$

$$b < \epsilon \frac{1}{ky_0^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\therefore \lim_{y\to y_0^+} \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{y_0}$$

同理左侧有

$$y = y_0 - \epsilon, \epsilon > 0$$

$$\sqrt[k]{y_0} - \sqrt[k]{y} = b, b > 0$$

$$y + \epsilon = y_0 = (\sqrt[k]{y} + b)^k > y + kby^{\frac{k-1}{k}}$$

$$b < \epsilon \frac{1}{ky^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\therefore \lim_{y\to y_0^-} \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{y_0}$$

$$\therefore \lim_{y\to y_0} \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{y_0}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件II，因此证毕。

3.

(1):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^m + x^{m+1} + \cdots + 1)}{(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + 1)} = \frac{m}{n}$$

(2):

由(1)知

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t} - 1}{1+t-1} = \frac{1}{n}$$

令$t = \dfrac{x^n}{p^n}$即有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{x^n} = \frac{1}{np^{n-1}}$$

(3):

由(2)知，上下同除x^n得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{\sqrt[n]{x^n + q^n} - q} = \frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}$$

(4):

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos t}{\sin t} = 1$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

(5):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

4.

(1):

令$\delta < \min\{A - Ae^{-\epsilon}, Ae^{\epsilon} - A\}, |x - A| < \delta, \epsilon > 0$，则有

$$-\epsilon < \ln x - \ln A = \ln\frac{x}{A} < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to A} \ln x = \ln A$$

(2):

令$\delta < \frac{1}{n}, 1 + \frac{n\epsilon}{e^c} > e, |x - A| < \delta, \epsilon > 0$，则有

$$e < 1 + \frac{n\epsilon}{e^c} < (1 + \frac{\epsilon}{e^c})^n$$

$$e < 1 + \frac{n\epsilon}{e^c} < (1 - \frac{\epsilon}{e^c})^{-n}$$

$$x > c, 0 < e^{x-c} - 1 < e^{\frac{1}{n}} < \frac{\epsilon}{e^c}$$

$$x > c, -\frac{\epsilon}{e^c} < e^{-\frac{1}{n}} < e^{x-c} - 1 < 0$$

$$\therefore \lim_{x \to c} e^x = \lim_{x \to c} e^c(e^{x-c} - 1) + e^c = e^c$$

(3):

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{v(x) \ln u(x)}$$

由(1)(2)得

$$\lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = b \ln a$$

$$\lim_{x \to x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{b \ln a} = a^b$$

证毕。

5.

(1):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{g(x)} = A$$

(2):

$$\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)}}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e^A$$

(3):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{bx}{\sin bx}\frac{a}{b}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

(4):

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}-\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

(5):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

(6):

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}k}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$$

(7):

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}2a}(1+\frac{2a}{x-a})^a$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=e^{2a}$$

(8):

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{bx}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{-ab\frac{x}{-a}}$$

运用复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{bx}=e^{-ab}$$

(9):

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}}$$

运用第四题以及复合函数极限定理，满足修正条件I，得到

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$$

(10):

$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\frac{x\sin x+\cos x-1}{x}}$$

运用第四题以及复合函数极限定理，满足修正条件II，得到

$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$$