线代作业4

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 1 日

1.

(1) 系数矩阵通过初等行变换可化为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以通解为：

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

(2) 系数矩阵通过初等行变换可化为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

所以通解为：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

2.

(1)增广矩阵通过初等行变换可化为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\0 & 1 & 0 & -1 & 3\\0 & 0 & 1 & -2 & 6\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以通解为：

$$\begin{cases}x_1 = -8\\x_2 = x_4 + 3\\x_3 = 2x_4 + 6\end{cases}$$

(2)(1)增广矩阵通过初等行变换可化为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

所以无解。 3.

显然，齐次线性方程组可以写为：

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

其中α_i为矩阵列向量。容易发现，若有列秩为r，则根据线性无关性，作为基矢的r个列向量的系数c_i可由剩下的$n-r$个系数表示，因此$n-r$即解空间维数。显然，初等行变换不改变矩阵的解空间，因此初等行变换不改变列秩。

4.

由3知，选定$n-1$个基矢，其系数可由剩下一个系数表示，由于方程齐次，必为倍数关系，因此两两解之间差固定倍数。

5.

由于秩为1，因此不失一般性设α_1为基矢，根据前两问讨论我们有：

$$
\begin{aligned}
A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$