

高微作业7

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 20 日

1.

令 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 为 $f(x)$ 的不同零点，根据罗尔定理，有

$$\exists a'_i \in (a_i, a_{i+1}), f'(a'_i) = 0$$

因此至少有 $n - 1$ 个不同零点。以此类推显然有 $f^{(k)}(x), 1 \leq k \leq n - 1$ 至少有 $n - k$ 个不同零点。

2.

根据拉格朗日中值定理，有

$$\frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} = \alpha \xi^{\alpha-1}, \xi \in (x, y)$$

(1) 对于 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ ，我们有

$$\alpha x^{\alpha-1} < \alpha \xi^{\alpha-1} < \alpha y^{\alpha-1}$$

因此有

$$\alpha x^{\alpha-1}(y - x) < y^\alpha - x^\alpha < \alpha y^{\alpha-1}(y - x)$$

(2) 对于 $0 < \alpha < 1$ ，我们显然有

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha \xi^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1}$$

因此有

$$\alpha y^{\alpha-1}(y - x) < y^\alpha - x^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(y - x)$$

(3) 根据拉格朗日中值定理，我们有

$$\frac{\ln \frac{y}{x}}{y - x} = \frac{1}{\xi}, \xi \in (x, y)$$

且显然有

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

因此有

$$\frac{y-x}{y} < \ln \frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$$

3.

这是一个 $\frac{?}{\infty}$ 型洛必达法则，我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{A}{n!}$$

4.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

我们知道 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ，因此这是一个 $\frac{0}{0}$ 型洛必达法则。我们知道

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} \right), x \neq 0$$

因此有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} \right)$$

利用皮亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} - \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{e}{2}$$

因此

$$f'(0) = -\frac{e}{2}$$

显然上式中第二个等号告诉了我们 $f'(x)$ 是连续的。二阶导是类似的

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} - \frac{o(x^2)}{x^2} \right) + \frac{e}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right)^2 + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{2}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x(1+x)^2} \right) \end{aligned}$$

利用皮亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

因此有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right)^2 + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{2}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{e}{4} + \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{1+x} + 2 \frac{o(x^3)}{x^3} \right) \\ &= \frac{11}{12} e \end{aligned}$$

所以

$$f''(0) = \frac{11}{12} e$$

5.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$(\tan x)''' = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$(\tan x)^{(4)} = \frac{4 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{12 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{24 \sin^3 x}{\cos^5 x}$$

$$(\tan x)^{(5)} = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{12 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{12}{\cos^2 x} + \frac{36 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{72 \sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{120 \sin^4 x}{\cos^6 x}$$

所以 $x=0$ 处五阶皮亚诺余项泰勒公式为

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$$

6.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

令 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = 1 - x^2$ 。显然 $x=0$ 处 $1-x^2$ 只有二阶导存在，等于 -2 。

根据复合函数求导定理我们有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{(k)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} ((k-1)!!)^2 & k = 2m \\ 0 & k = 2m-1 \end{cases}$$

因此我们有

$$\arcsin x = x + \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} ((2m-1)!!)^2 \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^n)$$

7.

类似上一题，我们有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

令 $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = 1+x^2$ 。显然 $x=0$ 处 $1+x^2$ 只有二阶导存在，等于2。根据复合函数求导定理我们有

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(k)}|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} k! & k = 2m \\ 0 & k = 2m-1 \end{cases}$$

因此我们有

$$(\arctan x)^{(n)}|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & n = 2m+1, m = 1, 2, \dots \\ 0 & n = 2m, m = 1, 2, \dots \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$