统计力学作业6

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 30 日

6.2

根据薛定谔方程，我们有

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$$

由边界条件得

$$k = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}$$

因此波矢空间内每$\dfrac{\pi}{L}$有一个态。因而能量在ϵ内的态数为

$$\Omega(\epsilon) = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

求导得

$$D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon = \frac{2L}{h}\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}\mathrm{d}\epsilon$$

6.3

类似地，此时能量满足

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2m\epsilon}{\hbar^2}$$

而k_1, k_2满足

$$k_1 = \frac{n_1\pi}{L}, k_2 = \frac{n_2\pi}{L}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

因此波矢空间每$\dfrac{\pi^2}{L^2}$有一个态。因而能量在ϵ内的态数为

$$\Omega(\epsilon) = \frac{L^2}{\pi^2}\frac{\pi}{4}\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}$$

求导得

$$D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon = \frac{2\pi L^2}{h^2}m\mathrm{d}\epsilon$$

6.4

与前同理，唯一改变的是能量与波矢的关系，此时为

$$\epsilon = c\hbar\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

因此能量在ϵ内的态数为

$$\Omega(\epsilon) = \frac{L^3}{8\pi^3}\frac{4\pi}{3}\frac{\epsilon^3}{c^3\hbar^3}$$

求导得

$$D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi L^3\epsilon^2}{h^3c^3}\mathrm{d}\epsilon$$

7.1

根据$V = L^3$，我们有

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial V} = -\frac{2}{3}\frac{1}{2m}\frac{h^2}{V^{\frac{5}{3}}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = -\frac{2}{3}\frac{\epsilon}{V}$$

所以

$$P = \sum -a_i\frac{\partial\epsilon_i}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{1}{V}\sum a_i\epsilon_i = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

7.2

类似上题，我们有

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial V} = -\frac{1}{3}c\frac{h}{V^{\frac{4}{3}}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\frac{\epsilon}{V}$$

所以

$$P = \sum -a_i\frac{\partial\epsilon_i}{\partial V} = \frac{1}{3}\frac{1}{V}\sum a_i\epsilon_i = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

7.3

我们有

$$Z_l^* = \sum \omega_i e^{-\alpha-\beta\epsilon_i^*} = \sum \omega_i e^{-\alpha-\beta(\epsilon_i+\Delta)} = e^{-\beta\Delta}Z_l$$

此时热力学函数分别为

$$U^* = -N\frac{\partial\ln Z_l^*}{\partial\beta} = U + N\Delta$$

$$Y_k^* = -\frac{N}{\beta}\frac{\partial\ln Z_l^*}{\partial y_k} = Y_k$$

$$S^* = Nk\left(\ln Z_l^* - \beta\frac{\partial\ln Z_l^*}{\partial\beta}\right) = S$$

$$F^* = U^* - TS^* = F + N\Delta$$

7.6

(1)当存在n个缺陷和填隙原子时，我们有C_N^n种可能的缺陷位置，以及C_N^n种可能的填隙位置，根据乘法原理我们有

$$S = k\ln\Omega = k\ln(C_N^n)^2 = 2k\ln\frac{N!}{(N-n)!n!}$$

(2)我们有

$$F = nu - TS \approx nu - 2kT\ln N! + 2kT(n\ln n - n) + 2kT[(N-n)ln(N-n) - (N-n)]$$

对n求导为零得

$$u + 2kT\ln n - 2kT\ln(N-n) = 0$$

所以

$$\frac{n}{N} \approx \frac{n}{N-n} = e^{-\frac{u}{2kT}}$$

$$n = Ne^{-\frac{u}{2kT}}$$