统计力学作业4

郑子诺，物理41

2025 年 3 月 17 日

3.20

根据朗道自由能公式我们有

$$F(T)=\begin{cases}F_0(T)-\dfrac{a_0^2(T_C-T)^2}{4b} & T<T_C\\ F_0(T) & T>T_C\end{cases}$$

根据$S=-\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}$我们有

$$S(T)=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}T}+\dfrac{a_0^2(T-T_C)}{2b} & T<T_C\\ -\dfrac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}T} & T>T_C\end{cases}$$

显然连续。

选做题

求导为0算出极值点

$$m^2=\frac{\pm\sqrt{\frac{16}{9}c^2-6bd}-\frac{4}{3}c}{3d},0$$

求二阶导易知，只有取正号才是稳定平衡。观察函数图样随b的变化，发现$b<0$时，0为不稳定平衡点，除此之外还有两个稳定平衡点。当$b>0$时，又出现两个不稳定平衡点，0变成稳定平衡点。当b越来越大时，两个稳定平衡点逐渐上升，超过0，直至最后消失。由此观之，一级相变将发生在两个稳定平衡点等于0的附近，此时b为

$$-\frac{1}{3}c-\frac{1}{2}dm^2=0\to b_0=\frac{2c^2}{9d}$$

m为

$$m = \pm\sqrt{-\frac{2c}{3d}}$$

在b_0附近展开b为$b_0 + b_1(T - T_C)$，只保留一阶项，再根据$S = -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}T}$得

$$L = T\Delta S = T\left|\frac{b_1 c}{3d}\right|$$

其中m对T的依赖正好被消掉。

作业题目1

(1)直接积分得$C = \frac{4}{a^2b^2}$，因此

$$p(x, y) = \frac{4xy}{a^2b^2}$$

(2)对x积分得

$$p(y) = \frac{2}{b^2}y$$

因此我们有

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{2}{a^2}x$$

作业题目2

(1)

$$\bar{X} = \int_0^{+\infty} axe^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

(2)

$$\bar{X}^2 = \int_0^{+\infty} ax^2e^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}$$

$$\Delta X = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} = \frac{1}{a}$$

(3)

$$\delta X = 1$$