# 高微作业5

郑子诺，物理41

2024 年 10 月 24 日

1.

$$f(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x+a_0=x^{2n}(1+\frac{a_{2n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{2n}})$$
$$\because \lim_{x\to\infty}1+\frac{a_{2n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{2n}}=1$$
$$\therefore \exists N,|x|>N,1+\frac{a_{2n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{2n}}>0$$
$$\therefore x>N,f(x)>0;-x<-N,f(x)>0$$

又因为$f(0)=a_0<0$，所以根据介值定理，$[0,N+1],[-N-1,0]$各存在一个零点，所以至少有两个零点。

2.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，所以

$$\forall M,\exists N,|x|>N,f(x)>M$$

因此$(-\infty,-N),(N,+\infty)$内的函数都有下界。对$[-N,N]$内的函数使用有界性定理，存在下界。因此$f(x)$的值域存在下界，因而有下确界$\alpha$。

若取不到下确界，令

$$g(x)=\frac{1}{f(x)-\alpha}$$

且取$M=\alpha+\epsilon_0$。则对于$0<\epsilon<\epsilon_0,\exists x\in[-N,N],f(x)-\alpha<\epsilon$。

$$\therefore \forall 0<\epsilon<\epsilon_0,\exists x\in[-N,N],g(x)>\frac{1}{\epsilon}$$

与有界性矛盾，因此存在最小值$f(x_0)$。

3.

利用第一题结论，我们有

$$\exists N,|x|>N,1+\frac{a_3}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^4}>0$$

同时$\lim_{x\to\infty} x^4 = +\infty$。所以

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$$

利用第二题结论，即可得$P(x)$存在最小值$P(x_0)$。

4.

首先我们证明伯努利不等式：对于$x > -1$，我们有

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \alpha > 1$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, 0 < \alpha < 1$$

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \alpha < 0$$

对于正整数情况，用数学归纳法，$n = 1$成立，设$n = k$成立，则有

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) \geq 1 + (k+1)x$$

因此成立。对于有理数$r$，先设$r = \frac{p}{q} < 1$，我们有

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p} \leq \frac{p(1+x)+q-p}{q} = 1 + \frac{p}{q}x$$

若$r = \frac{p}{q} > 1$，则有

$$(1+rx)^{\frac{1}{r}} \leq 1 + x \to (1+x)^r \geq 1 + rx$$

若$r < 0$，存在充分大的正整数$n$使得$-1 < \frac{-rx}{n} < 1$，因此

$$(1+x)^{\frac{-r}{n}} \leq 1 - \frac{r}{n}x \leq \frac{1}{1+\frac{r}{n}x}$$

$$(1+x)^r \geq (1+\frac{r}{n}x)^n \geq 1 + rx$$

回到题目，$\alpha = 0, 1$显然一致连续。若$\alpha > 1$，则有

$$(x+\delta)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha((1+\frac{\delta}{x})^\alpha - 1) > \alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随$x$递增趋于无穷，因此不一致连续。若$0 < \alpha < 1$，则有

$$(x+\delta)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha((1+\frac{\delta}{x})^\alpha - 1) < \alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随$x$递减，因此取$\delta < \frac{\epsilon}{\alpha}$即可，因而一致连续。若$\alpha < 0$，则有

$$x^\alpha - (x+\delta)^\alpha = x^\alpha(1-(1+\frac{\delta}{x})^\alpha) < -\alpha\delta x^{\alpha-1}$$

随$x$递减，因此取$\delta < -\frac{\epsilon}{\alpha}$即可，因而一致连续。
综上所述，$\alpha \le 1$，一致连续，$\alpha > 1$，不一致连续。
5.

$$\ln x < x^\alpha < a^x < [x]! < x^x$$

首先

$$e^x > (1+\frac{x}{N})^N, N > \alpha$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} > \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{x\ln a}{N})^{N-\alpha}(\frac{1}{x}+\frac{\ln a}{N})^\alpha = +\infty$$

其次

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty$$

然后

$$\frac{[x+1]!}{a^{[x+1]}}\frac{a^{[x]}}{[x]!} = \frac{[x+1]}{a}$$

当$x$足够大时有$\frac{[x+1]}{a} > k > 1$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x]}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x+1]}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^x} > \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{a^{[x+1]}} = +\infty$$

最后

$$\frac{[x+1]^{[x+1]}}{[x+1]!}\frac{[x]!}{[x]^{[x]}} = (1+\frac{1}{[x]})^{[x]}$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 所以$x$足够大时，$(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} > k > 1$。因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]^{[x]}}{[x]!} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{[x]!} > \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]^{[x]}}{[x]!} = +\infty$$

6.
由题意可知

$$a_{n+1} = f(a_n) < \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} > 1 + \frac{1}{a_n} > n + \frac{1}{a_1} > n+1$$

$$\therefore na_n < 1, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

因此对于每一个$t$，存在$N$使得$n > N$时有

$$a_{n+1} = f(a_n) > \frac{a_n}{1 + ta_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} < t + \frac{1}{a_n} < nt + \frac{1}{a_1}$$

$$\therefore na_n > \frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{t}$$

而且$t$为任意大于1的数。因此存在$N_0$使得$na_n > 1 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$。于是我们有

$$\frac{n}{nt - t + \frac{1}{a_1}} na_n = 1$$