热学笔记

haruki

2024 年 7 月 17 日

该笔记灵感源于竞赛题。我们经常会碰到这样的情况：一个圆筒以$\boldsymbol{\omega}$的角速度旋转，使其中空气以相同角速度整体旋转，相对静止，此时我们在旋转参考系中仍然使用麦克斯韦-玻尔兹曼分布律。这真的合理吗？难道真的只是加上离心势能就可以了吗？

问题是显而易见的，与惯性系不同，旋转参考系下会受到两个惯性力（匀速旋转），一个是离心力，另一个是科里奥利力，前者可以当做势能处理，但后者也起着关键的作用，因而不可忽视。由此观之，我们并没有直接的理由认为麦克斯韦-玻尔兹曼分布律仍成立。

为了解决这个问题，我们需要回到统计力学的最开始处。固然，哈密顿正则方程才是统计力学源点，因此，寻找旋转系的哈密顿量是首要的任务。可以看出，此时的哈密顿量不再是$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v^2} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{\omega}^2 r^2$（$\boldsymbol{v}$为旋转系中速度），将上式带入正则方程得不到正确的受力方程。让我们从改写拉格朗日量开始。

初始的拉氏量为$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v_0^2} - U$，转换至平动非惯性系有：$\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}(t)$，其中$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{a}(t)$，于是

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v'^2} + m\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}(t) + \frac{1}{2}m\boldsymbol{u^2}(t) - U$$

因为$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r'}}{dt}$，所以有

$$m\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}(t) = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{u}(t)) - m\boldsymbol{r}' \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

根据拉格朗日量的性质，可以增减一项时间的全导数。因此此时拉氏量为：

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v'^2} - m\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{a}(t) - U$$

我们再换到旋转系中，有$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，且$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$，所以：

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}} + m\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 - m\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} - U$$

这就是旋转参考系的拉格朗日量。不难验证受力方程的正确性。
现在回归正题，另$\boldsymbol{u}(t) = 0, \boldsymbol{\omega} = const$，得到：

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}} + m\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 - U$$

易得广义动量为：

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

代入$H = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L$得：

$$H = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{\omega}^2 r^2 - U$$

得到了一开始否定的哈密顿量。显然，此时成立的原因是广义动量$\boldsymbol{p}$的改变。
但是到这里为止证明并没有结束。众所周知，经典近似下的统计力学需要对相空间进行积分，而此时的微元为$d^3\boldsymbol{p}d^3\boldsymbol{r}$，由于广义动量$\boldsymbol{p}$不再等于$m\boldsymbol{v}$，因此为了得出正确的分布律，还需证明微元$d^3\boldsymbol{p}d^3\boldsymbol{r} = d^3m\boldsymbol{v}d^3\boldsymbol{r}$。
雅克比行列式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\omega_z} & \boldsymbol{\omega_y} \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{\omega_z} & 0 & -\boldsymbol{\omega_x} \\ 0 & 0 & 1 & -\boldsymbol{\omega_y} & \boldsymbol{\omega_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

显然为1。因此可以直接换元。于是我们就得到了梦寐以求的麦克斯韦-玻尔兹曼分布律，以后使用公式的时候也可以安心了呢（^o^）

小忍