高微作业7

郑子诺，物理41

2024 年 11 月 15 日

1.

令$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$为$f(x)$的不同零点，根据罗尔定理，有

$$\exists a_i' \in (a_i, a_{i+1}), f'(a_i') = 0$$

因此至少有$n-1$个不同零点。以此类推显然有$f^{(k)}(x), 1 \leq k \leq n-1$至少有$n-k$个不同零点。

2.

根据拉格朗日中值定理，有

$$\frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} = \alpha \xi^{\alpha-1}, \xi \in (x, y)$$

(1)对于$\alpha > 1$或$\alpha < 0$，我们有

$$\alpha x^{\alpha-1} < \alpha \xi^{\alpha-1} < \alpha y^{\alpha-1}$$

因此有

$$\alpha x^{\alpha-1}(y-x) < y^\alpha - x^\alpha < \alpha y^{\alpha-1}(y-x)$$

(2)对于$0 < \alpha < 1$，我们显然有

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha \xi^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1}$$

因此有

$$\alpha y^{\alpha-1}(y-x) < y^\alpha - x^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(y-x)$$

(3)根据拉格朗日中值定理，我们有

$$\frac{\ln \frac{y}{x}}{y-x} = \frac{1}{\xi}, \xi \in (x, y)$$

且显然有

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

因此有

$$\frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$$

3.

这是一个$\frac{?}{\infty}$型洛必达法则，我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{A}{n!}$$

4.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

我们知道$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$，因此这是一个$\frac{0}{0}$型洛必达法则。我们知道

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)}), x \neq 0$$

因此有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)})$$

利用皮亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)}) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} - \frac{o(x^2)}{x^2}) = -\frac{e}{2}$$

因此

$$f'(0) = -\frac{e}{2}$$

显然上式中第二个等号告诉了我们$f'(x)$是连续的。二阶导是类似的

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} - \frac{o(x^2)}{x^2}) + \frac{e}{2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}((-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)})^2 + \frac{2}{x^3}\ln(1+x) - \frac{2}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x(1+x)^2})
\end{aligned}$$

利用皮亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

因此有

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}((-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)})^2+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{2}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x(1+x)^2})$$
$$= \frac{e}{4} + \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{2}{3} - \frac{x}{1+x} + 2\frac{o(x^3)}{x^3})$$
$$= \frac{11}{12}e$$

所以

$$f''(0) = \frac{11}{12}e$$

5.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\tan x)'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$
$$(\tan x)''' = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}$$
$$(\tan x)^{(4)} = \frac{4\sin x}{\cos^3 x} + \frac{12\sin x}{\cos^3 x} + \frac{24\sin^3 x}{\cos^5 x}$$
$$(\tan x)^{(5)} = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{12\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{12}{\cos^2 x} + \frac{36\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{72\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{120\sin^4 x}{\cos^6 x}$$

所以$x=0$处五阶皮亚诺余项泰勒公式为

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

6.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

令$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, f(x) = 1-x^2$。显然$x=0$处$1-x^2$只有二阶导存在，等于$-2$。根据复合函数求导定理我们有

$$(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})^{(k)}|_{x=0} = \begin{cases} ((k-1)!!)^2 & k=2m \\ 0 & k=2m-1 \end{cases}$$

因此我们有

$$\arcsin x = x + \sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]} ((2m-1)!!)^2 \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^n)$$

7.
类似上一题，我们有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

令$g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = 1 + x^2$。显然$x = 0$处$1 + x^2$只有二阶导存在，等于2。根据复合函数求导定理我们有

$$(\frac{1}{1+x^2})^{(k)}|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} k! & k = 2m \\ 0 & k = 2m-1 \end{cases}$$

因此我们有

$$(\arctan x)^{(n)}|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & n = 2m+1, m = 1, 2, \dots \\ 0 & n = 2m, m = 1, 2, \dots \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$