Сравнение методов численного дифференцирования

Мерзляков Б01-303

1 октября 2025 г.

1 Постановка задачи

Исследуются численные формулы для приближённого вычисления производной $f'(x)$ в точке $x_0 = 10.123$ для набора функций:

1. $f(x) = \sin(x^2)$,
2. $f(x) = \cos(\sin x)$,
3. $f(x) = \exp(\sin(\cos x))$,
4. $f(x) = \log(x + 3)$,
5. $f(x) = \sqrt{x + 3}$.

Выполнено сравнение следующих методов (подписаны на графиках как (1)..(5)):

- $(1) : \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
- $(2) : \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$,
- $(3) : \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$,
- $(4) : \dfrac{4}{3}\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \dfrac{1}{3}\dfrac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h}$
- $(5) : \dfrac{3}{2}\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \dfrac{3}{5}\dfrac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h} + \dfrac{1}{10}\dfrac{f(x+3h) - f(x-3h)}{6h}$

Для каждого метода вычислялась абсолютная погрешность для $h \in [2^{-20}, 2^0]$ и строился график в логарифмическом масштабе.

Реализация

Представлена в файле 1.py. Запуск: python3 1.py (или просто python)

Результаты

В конце файла приведены полученные графики.

Выводы

- Для больших шагов h поведение ошибок определяется погрешностью аппроксимации. На лог-лог графике это видно по примерно линейной зависимости с характерным наклоном.

- При уменьшении h с некоторого момента ошибка перестаёт уменьшаться и начинает расти. Это связано с тем, что начинает проявляться погрешность округления.

- Ошибка уменьшается в том порядке, в котором даны методы (от 1 до 5). То есть 5 метод наиболее точный (для не сильно маленьких h). Однако при слишком маленьких h ошибки у 3, 4 и 5 методов становятся одинаковыми из-за пределов аппаратуры. При этом чем выше порядок метода, тем раньше начинают проявляться ошибки округления.

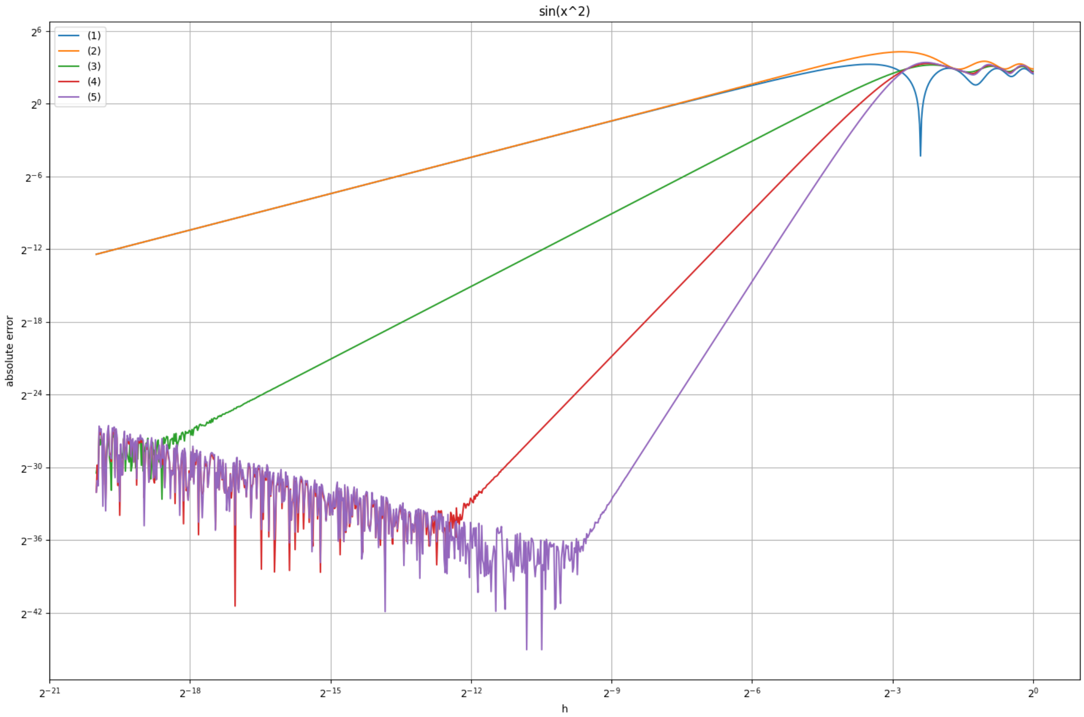


Рис. 1: Погрешности для $f(x) = \sin(x^2)$.

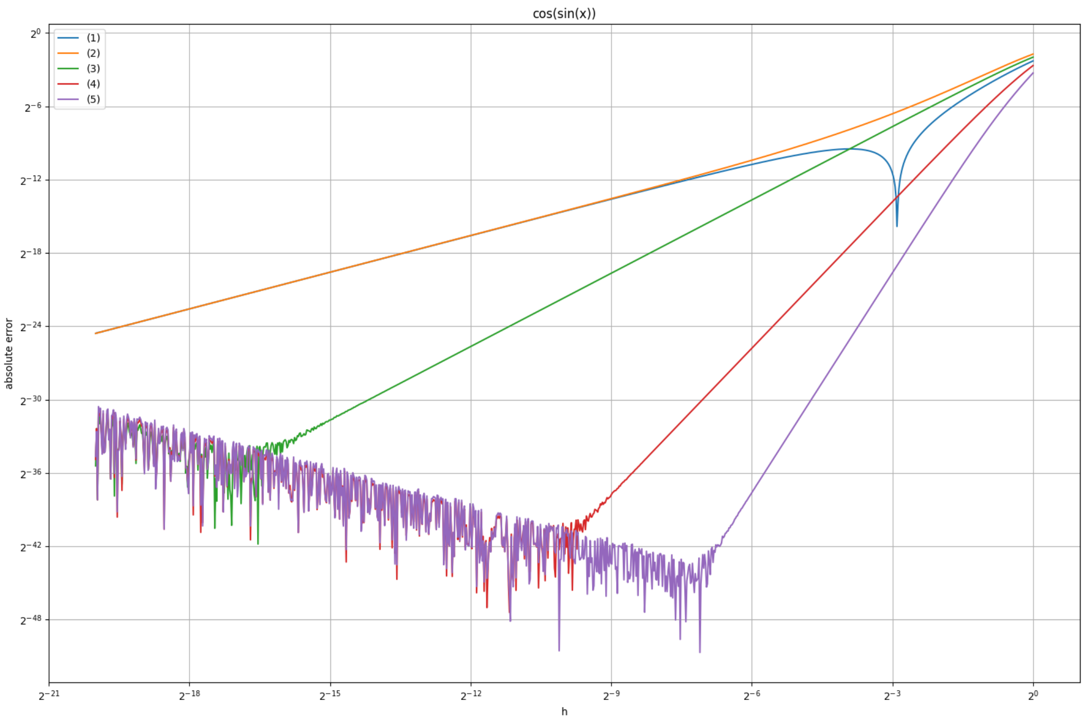


Рис. 2: Погрешности для $f(x) = \cos(\sin x)$.

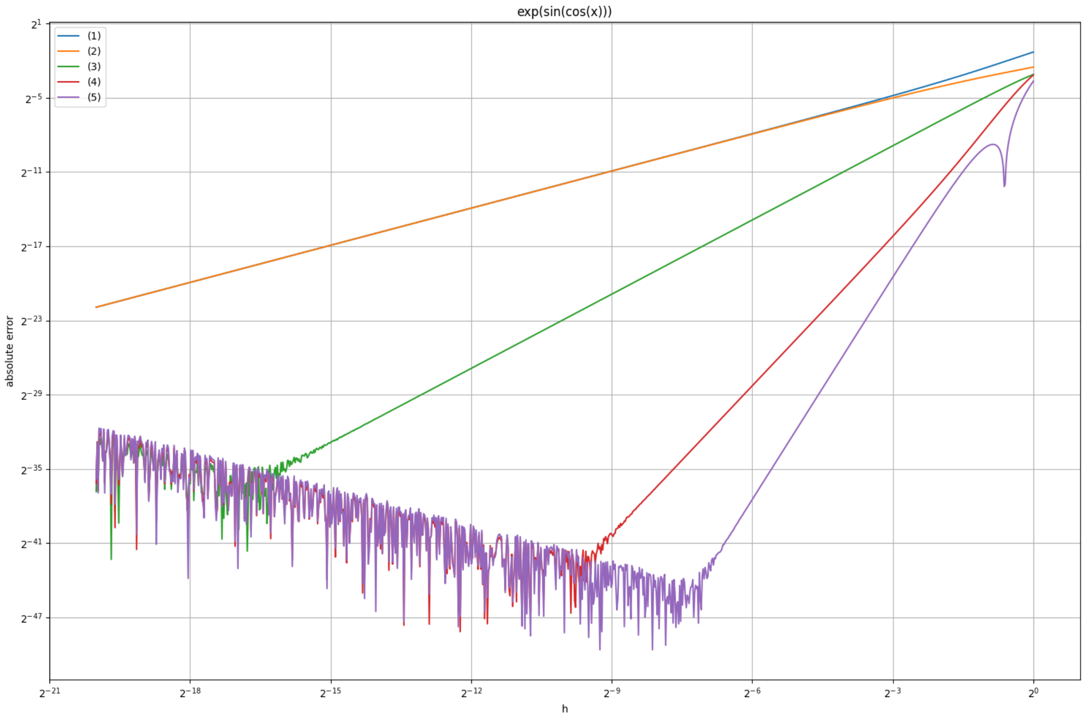
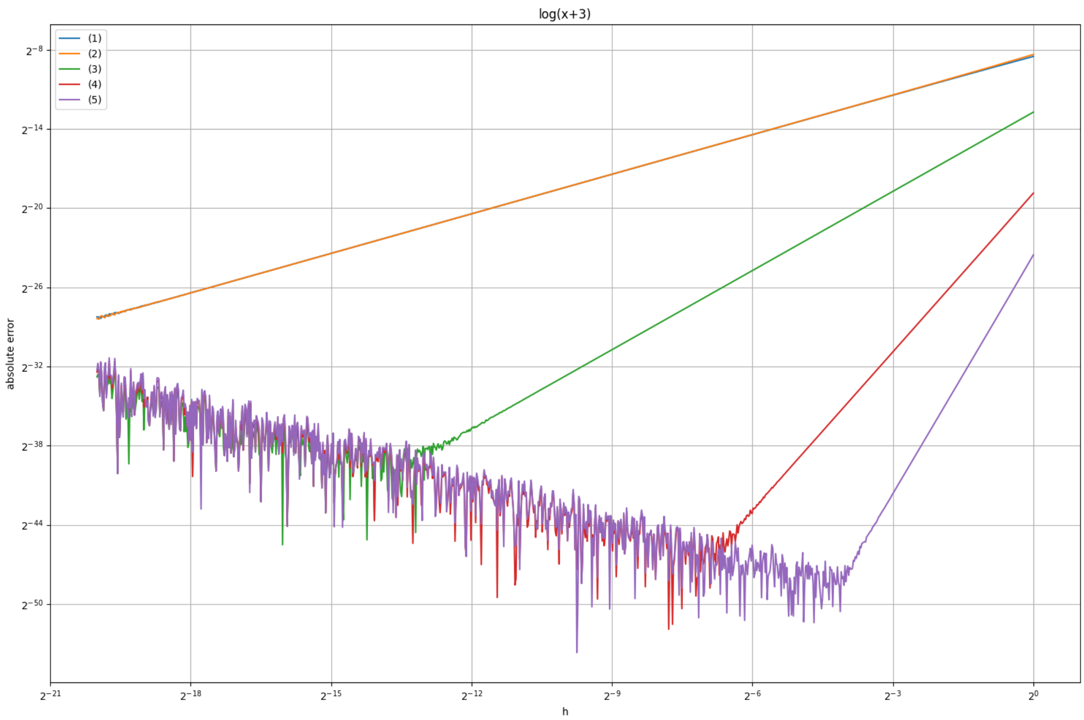


Рис. 3: Погрешности для $f(x) = \exp(\sin(\cos x))$.



H]

Рис. 4: Погрешности для $f(x) = \log(x + 3)$.

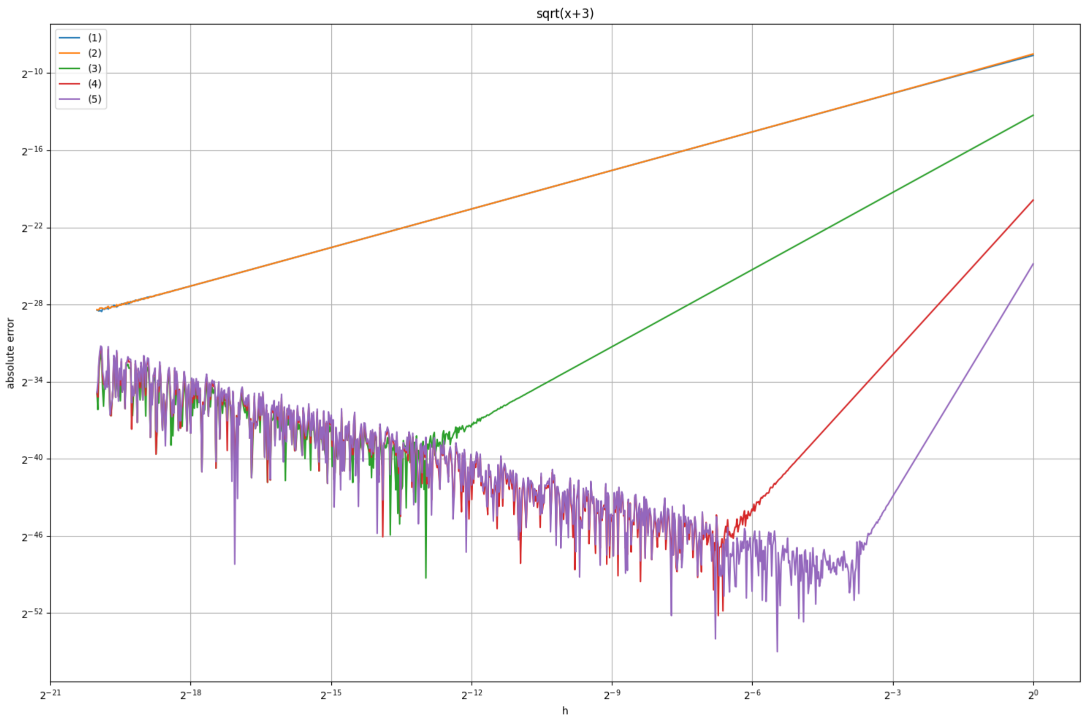


Рис. 5: Погрешности для $f(x) = \sqrt{x+3}$.