

Системы аналитических вычислений

Лабораторная работа 4

Арапов Степан М80-2086-19

Для заданной формулой функции найти:

Область определения функции.

Является ли функция четной или нечетной, является ли периодической.

Точки пересечения графика с осями координат.

Промежутки знакопостоянства.

Промежутки возрастания и убывания.

Точки экстремума и значения в этих точках.

Непрерывность. Наличие точек разрыва и их классификация.

Асимптоты.

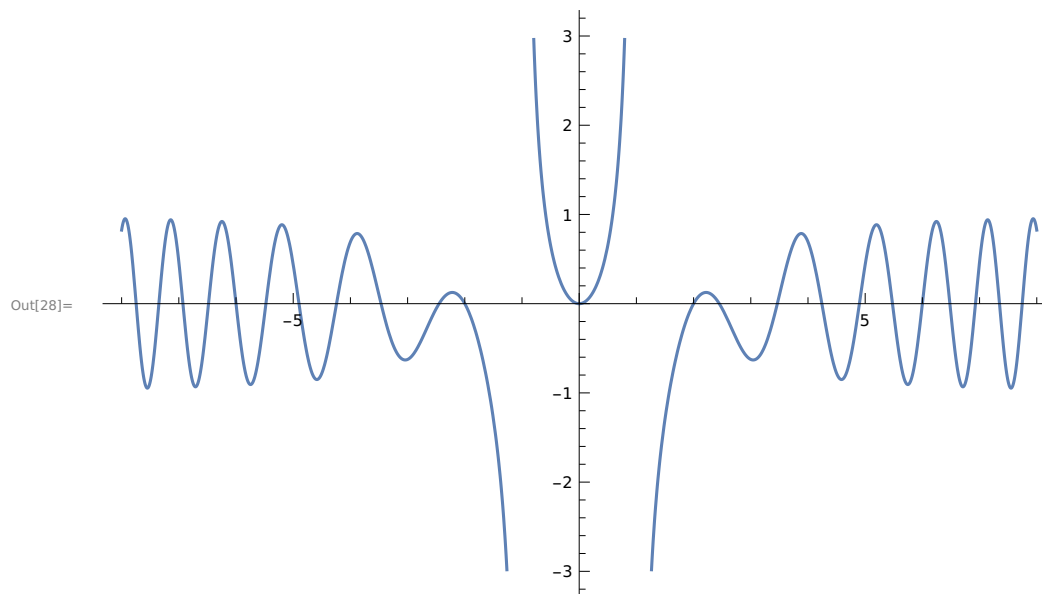
```
In[19]:= f[x_] := (x^2 - 4) * Sin[Pi * (x^2) / 6] / (x^2 - 1);  
f[x]
```

Out[20]=

$$\frac{(-4 + x^2) \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{-1 + x^2}$$

1. График функции

```
In[28]:= Plot[f[x], {x, -8, 8}]
```



2. Область определения

```
In[66]:= Domain := FunctionDomain[f[x], x]
Domain
```

```
Out[67]= x < -1 || -1 < x < 1 || x > 1
```

3. Исследование на чётность и нечётность

```
In[111]:= TautologyQ[f[x] == f[-x]]
TautologyQ[f[x] + f[-x] == 0]
```

```
Out[111]= True
```

```
Out[112]= False
```

Функция оказалась чётной, это можно было заметить еще из графика

4. Исследование на периодичность

```
In[113]:= FunctionPeriod[f[x], x]
```

```
Out[113]= 0
```

Встроенная функция вернула значение нуль, значит периода нет. Опять же это заметно из графика.

5. Исследование на пересечение с осями координат

Очевидно ось OY пересекается в единственной точке (0;0). Теперь разберёмся с OX.

```
In[124]:= Solve[f[x] == 0, x]
```

Solve : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

```
Out[124]= {{x -> -2}, {x -> 0}, {x -> 2}}
```

```
In[128]:= Reduce[f[x] == 0, x]
```

```
Out[128]= 
$$\left( c_1 \in \mathbb{Z} \&\& \left( x == -2 \sqrt{3} \sqrt{c_1} \parallel x == 2 \sqrt{3} \sqrt{c_1} \parallel x == -\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\pi + 2 \pi c_1} \parallel x == \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\pi + 2 \pi c_1} \right) \right) \parallel$$


$$x == -2 \parallel x == 2$$

```

Получили бесконечно много решений, из-за периодичности синуса.

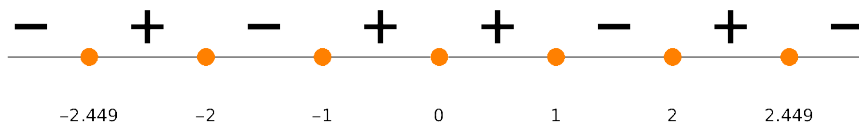
6. Промежутки знакопостоянства

```

In[180]:= Show[
Graphics[Line[{{-3.7, 0}, {3.7, 0}}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{0, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[0, {0, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-1, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[-1, {-1, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{1, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[1, {1, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-2, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[-2, {-2, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{2, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[2, {2, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-3, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[-2.449, {-3, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{3, 0}, VertexColors → Orange ]}],
Graphics[Text[2.449, {3, -0.5}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize → Scaled[0.075]], {0.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize → Scaled[0.075]], {-0.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize → Scaled[0.075]], {1.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize → Scaled[0.075]], {-1.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize → Scaled[0.075]], {2.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize → Scaled[0.075]], {-2.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize → Scaled[0.075]], {3.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize → Scaled[0.075]], {-3.5, 0.3}]]
]

```

Out[180]=



Далее знаки будут чередоваться. Масштаб на оси нарушен для большей наглядности.

7. Промежутки возрастания и убывания

Посчитаем производную

df := D[f[x], x]

df

$$\text{Out[195]=} \frac{\pi x (-4 + x^2) \cos\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{3 \times (-1 + x^2)} - \frac{2 x (-4 + x^2) \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{(-1 + x^2)^2} + \frac{2 x \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{-1 + x^2}$$

$$\text{Out[196]=} \frac{\pi x (-4 + x^2) \cos\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{3 \times (-1 + x^2)} - \frac{2 x (-4 + x^2) \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{(-1 + x^2)^2} + \frac{2 x \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{-1 + x^2}$$

In[197]:= Reduce[df[x] == 0, x]

Reduce : This system cannot be solved with the methods available to Reduce .

$$\text{Out[197]=} \text{Reduce}\left[\left(\frac{\pi x (-4 + x^2) \cos\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{3 \times (-1 + x^2)} - \frac{2 x (-4 + x^2) \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{(-1 + x^2)^2} + \frac{2 x \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{-1 + x^2}\right)[x] == 0, x\right]$$

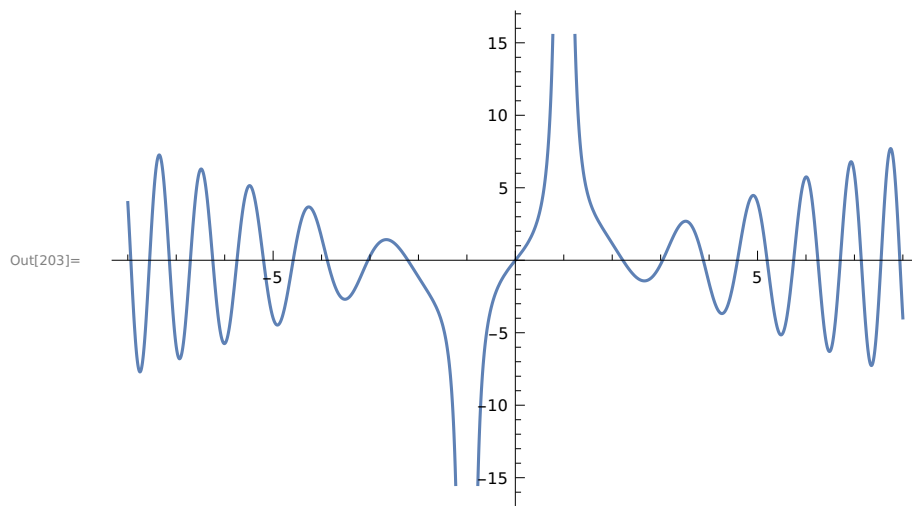
In[198]:= Solve[df[x] == 0, x]

Solve : Inverse functions are being used by Solve , so some solutions may not be found ; use Reduce for complete solution information .

$$\text{Out[198]=} \left\{\left\{x \rightarrow \text{InverseFunction}\left[\frac{\pi x (-4 + x^2) \cos\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{3 \times (-1 + x^2)} - \frac{2 x (-4 + x^2) \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{(-1 + x^2)^2} + \frac{2 x \sin\left[\frac{\pi x^2}{6}\right]}{-1 + x^2}, 1, 1\right][0]\right\}\right\}$$

Так как корней у этой функции бесконечно много, то аналитически не решается.

In[203]:= Plot[df, {x, -8, 8}]



```
In[269]:= Reduce[df < 0 && x > 1.9 && x < 2.3, x]
Reduce[df < 0 && x > 2.4 && x < 3.3, x]
Reduce[df < 0 && x > 3.5 && x < 4.1, x]
Reduce[df < 0 && x > 4.3 && x < 4.7, x]
```

Reduce : Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients . The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result .

```
Out[269]= 2.21885 < x < 2.3
```

Reduce : Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients . The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result .

```
Out[270]= 2.4 < x < 3.04156
```

Reduce : Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients . The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result .

```
Out[271]= 3.88204 < x < 4.1
```

Reduce : Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients . The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result .

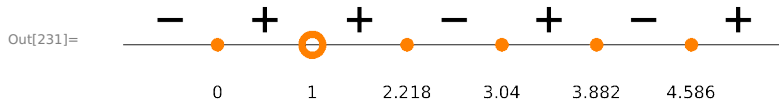
```
Out[272]= 4.3 < x < 4.58607
```

Нарисуем прямую знакопостоянства только для правой части, т.к левая строится аналогично.

```

In[231]:= Show[
Graphics[Line[{{-1, 0}, {6, 0}}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{0, 0}, VertexColors -> Orange ]}],
Graphics[Text[0, {0, -0.5}]],
Graphics[{Orange, Annulus[{1, 0}, {0.07, 0.15}]}], Graphics[Text[1, {1, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{2, 0}, VertexColors -> Orange ]}],
Graphics[Text[2.218, {2, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{3, 0}, VertexColors -> Orange ]}],
Graphics[Text[3.04, {3, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{4, 0}, VertexColors -> Orange ]}],
Graphics[Text[3.882, {4, -0.5}]],
Graphics[{PointSize[0.02], Point[{5, 0}, VertexColors -> Orange ]}],
Graphics[Text[4.586, {5, -0.5}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize -> Scaled[0.075]], {-0.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize -> Scaled[0.075]], {0.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize -> Scaled[0.075]], {1.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize -> Scaled[0.075]], {2.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize -> Scaled[0.075]], {3.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["-", FontSize -> Scaled[0.075]], {4.5, 0.3}]],
Graphics[Text[Style["+", FontSize -> Scaled[0.075]], {5.5, 0.3}]]
]

```



8. Точки экстремума и значения в этих точках

Так как функция имеет бесконечно большое количество промежутков знакопостоянства, то и локальных экстремумов будет бесконечно много. Оценим некоторые значения экстремумов.

```

In[31]:= f[0]
Out[31]= 0
f[2.218]
Out[32]= 0.125755
f[3.04]
Out[33]= -0.630911
f[3.882]
Out[34]= 0.786252
f[4.586]
Out[35]= -0.85012

```

9. Непрерывность.. Наличие точек разрыва и их классификация

Еще в первом пункте было установлено, что функция разрывна в точках -1 и 1. Выясним какого типа эти разрывы.

```
In[40]:= Limit[f[x]/x, x → ∞, Direction → "FromAbove"]
          Limit[f[x]/x, x → -∞, Direction → "FromBelow"]

Out[40]= 0

Out[41]= 0
```

Как видим пределы слева и справа разные и являются бесконечными. Значит это разрывы второго рода, они не являются устранимыми.

9. Асимптоты

Из предыдущего пункта задания можно сразу сделать вывод, что есть две вертикальные асимптоты: $x = 1$, $x = -1$. Исследуем на горизонтальные асимптоты.

```
Limit[f[x], x → 1]
Limit[f[x], x → 1]
```

Нашлось только для вертикальных прямых, значит наклонных асимптот нет.