Системы аналитических вычислений

Лабораторная работа 7

Арапов Степан М8О-208б-19

Матрицы, СЛАУ.

1. Задание системы уравнений для поиска собственных чисел в общем виде.
2. Получение СЛАУ не вручную, а через матричные операции умножения.
3. Решение этой системы.
4. Получение характеристического полинома через определитель.
5. Атоматизированное сравнение с характеричтическим полиномом по встроенным функциям Wolfram.
6. Решение характеристического полинома и получение таким образом собственных чисел.
7. Автоматизированная проверка собственных чисел с встроенными в Wolfram функциями по получению собственных чисел.
8. Аналогично для собственных векторов.
9. График для исходного уравнения.
10. График для уравнения в каноническом виде.

По списку 2 => Вариант 2

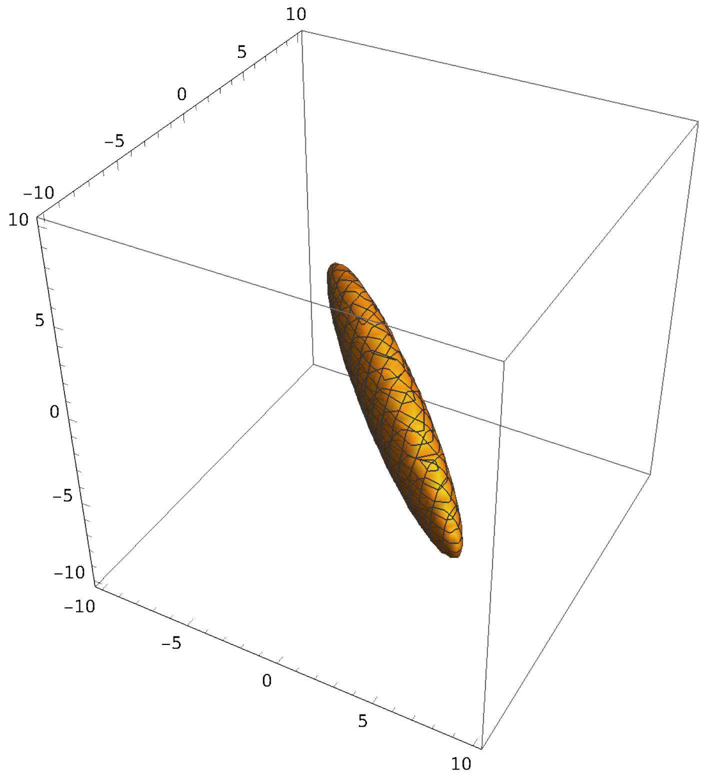
```
In[53]:= f[x_, y_, z_] = 6*x^2 + 12*x*y + 7*y^2 + 2*x*z + 3*z^2 + 5*x + 5*y + 5*z - 18;
f[x, y, z]
```

Out[54]= $-18 + 5x + 6x^2 + 5y + 12xy + 7y^2 + 5z + 2xz + 3z^2$

Нарисуем поверхность

In[694]:=
```
ContourPlot3D[
f[x, y, z] == 0,
{x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10},
Mesh → True,
ContourStyle → Opacity[0.9]
]
```

Out[694]=



Создадим две матрицы: матрица для квадратичной формы, матрица из коэффициентов квадратичной и линейной формы и из свободного члена.

In[65]:=
```
A = {
  {6, 6, 1},
  {6, 7, 0},
  {1, 0, 3}
};
B = {
  {6, 6, 1, 2.5},
  {6, 7, 0, 2.5},
  {1, 0, 3, 2.5},
  {2.5, 2.5, 2.5, -18}
};

A // MatrixForm
B // MatrixForm
```

Out[67]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Out[68]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 & 2.5 \\ 6 & 7 & 0 & 2.5 \\ 1 & 0 & 3 & 2.5 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 & -18 \end{pmatrix}$$

Составим характеристический многочлен.

In[69]:=
```
myCharPoly = Det[A - IdentityMatrix[3] * l];
myCharPoly // TraditionalForm
```

Out[70]//TraditionalForm=

$$-l^3 + 16\,l^2 - 44\,l + 11$$

Посмотрим какой результат выдаст стандартная функция для поиска того же самого.

In[74]:=
```
autoCharPoly = CharacteristicPolynomial[A, l];
autoCharPoly // TraditionalForm
```

Out[75]//TraditionalForm=

$$-l^3 + 16\,l^2 - 44\,l + 11$$

Результаты совпали.

Займёмся поиском собственных значений.

In[89]:=
```
eigenvalues = N[Solve[myCharPoly == 0, l, Reals]];
eigenvalues = l /. eigenvalues;
eigenvalues
```

Out[91]= {0.277521, 3.15354, 12.5689}

Посмотрим какой результат выдаст стандартная функция для поиска того же самого.
Для наглядности полученный список отсортирован

In[209]:=
```
Sort[N[Eigenvalues [A]]]
```

Out[209]=
```
{0.277521 , 3.15354 , 12.5689}
```

Результаты совпали.

Займёмся поиском собственных векторов.

In[416]:=
```
Clear[x, y, z]
X = {x, y, z};

A1 = A - IdentityMatrix [3] * l /. l → eigenvalues [[1]];
A1X = A1.X;
EigenVector1 = Solve[A1X == 0 /. z → 1];
EigenVector1 = N[{x, y, 1} /. EigenVector1 [[1]]]

A2 = A - IdentityMatrix [3] * l /. l → eigenvalues [[2]];
A2X = A2.X;
EigenVector2 = Solve[A2X == 0 /. z → 1];
EigenVector2 = N[{x, y, 1} /. EigenVector2 [[1]]]

A3 = A - IdentityMatrix [3] * l /. l → eigenvalues [[3]];
A3X = A3.X;
EigenVector3 = Solve[A3X == 0 /. z → 1];
EigenVector3 = N[{x, y, 1} /. EigenVector3 [[1]]]
```

Out[421]=
```
{-2.72248 , 2.42989 , 1.}
```

Out[425]=
```
{0.153544 , -0.239509 , 1.}
```

Out[429]=
```
{9.56894 , 10.3096 , 1.}
```

In[430]:=
```
N[Eigensystem [A]]
```

Out[430]=
```
{{12.5689 , 3.15354 , 0.277521},
  {{9.56894 , 10.3096 , 1.}, {0.153544 , -0.239509 , 1.}, {-2.72248 , 2.42989 , 1.}}}
```

Сравним наши значения со значениями встроенной функции.

In[431]:=
```
SameQ[N[Eigensystem [A][[2, 3]]] , N[EigenVector1 ]]
SameQ[N[Eigensystem [A][[2, 2]]], N[ EigenVector2 ]]
SameQ[N[Eigensystem [A][[2, 1]]], N[EigenVector3 ]]
```

Out[431]=
```
True
```

Out[432]=
```
False
```

Out[433]=
```
True
```

По какой-то причине во второй строке имеем значение 'Ложь', однако , если вывести на экран значения видно, что это не так.

:'(

In[434]:=
```
N[Eigensystem[A][[2, 2]]]
EigenVector2
```

Out[434]= {0.153544, -0.239509, 1.}

Out[435]= {0.153544, -0.239509, 1.}

Получили одинаковые значения собственных векторов для встроенной функции и нашего способа.

Теперь составим матрицу S из нормированных собственных векторов, вектор-столбец a коэффициентов линейной формы и свободный член a0

In[448]:=
```
S = Transpose[{
  Normalize[EigenVector1],
  Normalize[EigenVector2],
  Normalize[EigenVector3]
}];
a = {2.5, 2.5, 2.5};
a0 = -18;

S // MatrixForm
a // MatrixForm
a0
```

Out[451]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.719532 & 0.147683 & 0.678575 \\ 0.642202 & -0.230368 & 0.7311 \\ 0.264293 & 0.961832 & 0.0709144 \end{pmatrix}$$

Out[452]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Out[453]= -18

Вектор S_T * a

In[473]:=
```
a1 = Transpose[S].a;
a1 // MatrixForm
```

Out[474]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.467408 \\ 2.19787 \\ 3.70147 \end{pmatrix}$$

Составим канонический вид уравнения

In[678]:=
```
Clear[fCanonical]
fCanonical = Eigenvalues[A][[1]] * x1^2 + Eigenvalues[A][[2]] * y1^2 +
   Eigenvalues[A][[3]] * z1^2 + 2 * a1[[1]] * x1 + 2 * a1[[2]] * y1 + 2 * a1[[3]] * z1 + a0;
N[fCanonical] // TraditionalForm
```

Out[680]//TraditionalForm=

$$12.5689\ x1^2 + 0.934816\ x1 + 3.15354\ y1^2 + 4.39574\ y1 + 0.277521\ z1^2 + 7.40295\ z1 - 18.$$

Избавляемся от ненулевых коэффициентов при линейных множителях (x1 , y1 и z1).

In[681]:=
```
fCanonical = fCanonical /. (Eigenvalues[A][[1]] * x1^2 + 2 * a1[[1]] * x1) →
    (Eigenvalues[A][[1]] * (x1 + a1[[1]] / Eigenvalues[A][[1]])^2 -
      Eigenvalues[A][[1]] * (a1[[1]] / Eigenvalues[A][[1]])^2);
fCanonical = fCanonical /. (Eigenvalues[A][[2]] * y1^2 + 2 * a1[[2]] * y1) →
    (Eigenvalues[A][[2]] * (y1 + a1[[2]] / Eigenvalues[A][[2]])^2 -
      Eigenvalues[A][[2]] * (a1[[2]] / Eigenvalues[A][[2]])^2);
fCanonical = fCanonical /. (Eigenvalues[A][[3]] * z1^2 + 2 * a1[[3]] * z1) →
    (Eigenvalues[A][[3]] * (z1 + a1[[3]] / Eigenvalues[A][[3]])^2 -
      Eigenvalues[A][[3]] * (a1[[3]] / Eigenvalues[A][[3]])^2);

fCanonical = fCanonical /. (x1 + a1[[1]] / Eigenvalues[A][[1]]) → x1;
fCanonical = fCanonical /. (y1 + a1[[2]] / Eigenvalues[A][[2]]) → y1;
fCanonical = fCanonical /. (z1 + a1[[3]] / Eigenvalues[A][[3]]) → z1;
N[fCanonical] // TraditionalForm
```

Out[687]//TraditionalForm=

$$12.5689\ x1^2 + 3.15354\ y1^2 + 0.277521\ z1^2 - 68.9181$$

Нарисуем поверхность

In[692]:=
```
fcanonical[a_, b_, c_] := fCanonical /. {x1 → a, y1 → b, z1 → c}
ContourPlot3D[
fcanonical[x, y, z] == 0,
{x, -20, 20}, {y, -20, 20}, {z, -20, 20},
Mesh → True,
ContourStyle → Opacity[0.9]
]
```

Out[693]=