

# 重力レンズの基礎と応用

大栗 真宗

(東京大 RESCEU/物理/Kavli IPMU)

slides available at:

<http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~oguri/lecture/2017yitp/>

# 目次

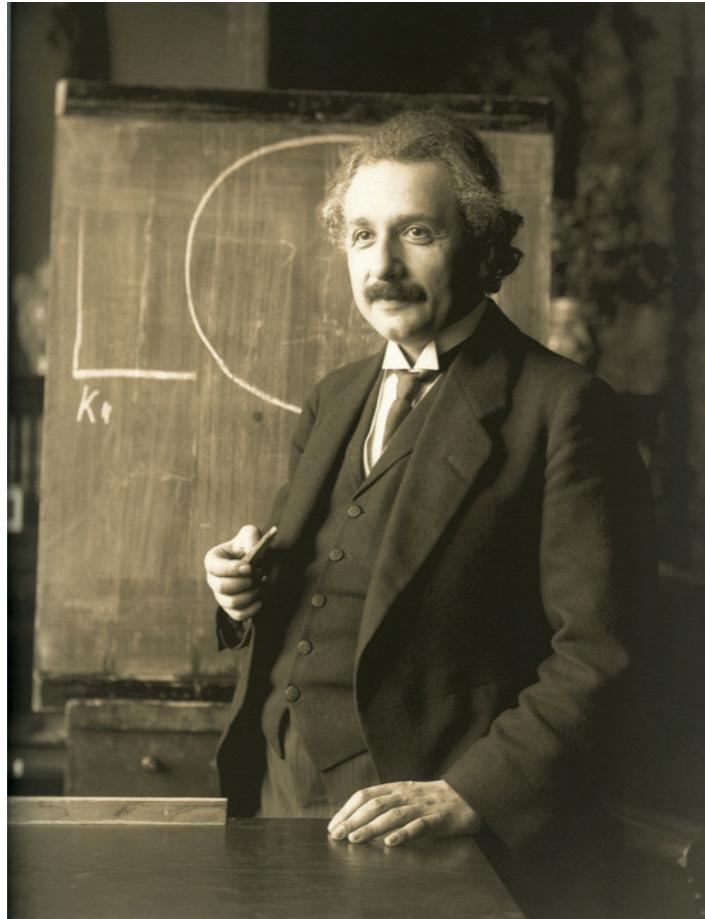
- 1. イントロ+重力レンズの基礎
- 2. 強い重力レンズ
- 3. 強い重力レンズの応用  
(時間の遅れ、サブストラクチャ、遠方銀河)
- 4. 弱い重力レンズ
- 5. 弱い重力レンズの応用  
(銀河団質量分布、密度揺らぎ問題、HSCサーベイ)

# イントロ: なぜ重力レンズ?

- 宇宙の質量はダークマターが支配的  
→ 重力レンズで直接「見る」ことが可能
- 物理的基礎の確かさ: 与えられた質量分布から  
どのような重力レンズ現象が観測されるかを  
第一原理から計算可能  
(一般相対論、ないし何らかの重力理論を仮定)
- きれいな/不思議な画像

# 重力レンズの歴史

- 1919: 太陽による光の曲がりの観測 (Eddington)
- 1936: 星の強い重力レンズ現象の予言 (Einstein)  
[also Mandl, Chowlson, Link, ...]
- 1937: 銀河による重力レンズの予言 (Zwicky)
- 1964: 時間の遅れによる距離決定の提案 (Refsdal)
- 1979: 強い重力レンズ現象の初発見 (Walsh)



Albert Einstein (Wikipedia)

[http://www.einstein-online.info/spotlights/grav\\_lensing\\_history](http://www.einstein-online.info/spotlights/grav_lensing_history)

- アインシュタインは1911年に等価原理の考察から重力レンズを予言
- 1915年的一般相対論の完成により、曲がり角が2倍大きいことを見いだす

$$\alpha = 1.74'' (M/M_\odot) (R/R_\odot)^{-1}$$



Taken from the 22 November 1919 edition of the Illustrated London News.

<http://www.astro.caltech.edu/~rjm/Principe/1919eclipse.php>



Arthur Eddington (Wikipedia)

- 1919年エディントンの日食を利用した曲がり角の観測
    - I.61 "±0.40" @Principe
    - I.98 "±0.16" @Sobral
- 一般相対論は正しい!

# 不都合な真実？

- Sobalのデータはメインの10インチがぼやけたため予備の4インチのデータを使用
- メインの10インチのデータを使うと  $0.93''$  とむしろニュートン重力での値に近い
- Principleのデータは天候が悪くあまり精度はよくない
- 明確な結論を得られるデータだったかどうかあやしい部分も多く依然批判がある

# アインシュタインのサイエンス論文

## DISCUSSION

### LENS-LIKE ACTION OF A STAR BY THE DEVIATION OF LIGHT IN THE GRAVITATIONAL FIELD

SOME time ago, R. W. Mandl paid me a visit and asked me to publish the results of a little calculation, which I had made at his request. This note complies with his wish.

The light coming from a star  $A$  traverses the gravitational field of another star  $B$ , whose radius is  $R_o$ . Let there be an observer at a distance  $D$  from  $B$  and at a distance  $x$ , small compared with  $D$ , from the extended central line  $\overrightarrow{AB}$ . According to the general theory of relativity, let  $\alpha_o$  be the deviation of the light ray passing the star  $B$  at a distance  $R_o$  from its center.

not decrease like  $1/D$ , but like  $1/\sqrt{D}$ , as the distance  $D$  increases.

Of course, there is no hope of observing this phenomenon directly. First, we shall scarcely ever approach closely enough to such a central line. Second, the angle  $\beta$  will defy the resolving power of our instruments. For,  $\alpha_o$  being of the order of magnitude of one second of arc, the angle  $R_o/D$ , under which the deviating star  $B$  is seen, is much smaller. Therefore, the light coming from the luminous circle can not be distinguished by an observer as geometrically different from that coming from the star  $B$ , but simply will manifest itself as increased apparent brightness of  $B$ .

The same will happen, if the observer is situated at a small distance  $x$  from the extended central line  $\overrightarrow{AB}$ .

- R.W. Mandl にお願い  
されたとある、、、

Therefore, there is no great chance of observing this phenomenon, even if dazzling by the light of the much nearer star  $B$  is disregarded. This apparent amplification of  $q$  by the lens-like action of the star  $B$  is a most curious effect, not so much for its becoming infinite, with  $x$  vanishing, but since with increasing distance  $D$  of the observer not only does it not decrease, but even increases proportionally to  $\sqrt{D}$ .

ALBERT EINSTEIN

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,  
PRINCETON, N. J.

## ルディ・マンドル (Rudi W. Mandl)

- チェコのアマチュア科学者
- 重力レンズによる集光で、(1) 環状星雲の形状  
(2) 宇宙線の起源 (3) 生物 (恐竜) の大量絶滅を説明しようとした
- 誰にもまとも相手にされなかっただためインシュタインに論文を出版するよう懇願
- アインシュタインはこれが観測されることはないとと思ったがマンドルのしつこさに負けて(?)サイエンス誌に短い論文を出版



# ツビッキーの洞察

## Nebulae as Gravitational Lenses

Einstein recently published<sup>1</sup> some calculations concerning a suggestion made by R. W. Mandl, namely, that a star *B* may act as a "gravitational lens" for light coming from another star *A* which lies closely enough on the line of sight behind *B*. As Einstein remarks the chance to observe this effect for stars is extremely small.

Last summer Dr. V. K. Zworykin (to whom the same idea had been suggested by Mr. Mandl) mentioned to me the possibility of an image formation through the action of gravitational fields. As a consequence I made some calculations which show that extragalactic *nebulae* offer a much better chance than *stars* for the observation of gravitational lens effects.

A detailed account of the problems sketched here will appear in *Helvetica Physica Acta*.

F. ZWICKY

Norman Bridge Laboratory,  
California Institute of Technology,  
Pasadena, California,  
January 14, 1937.

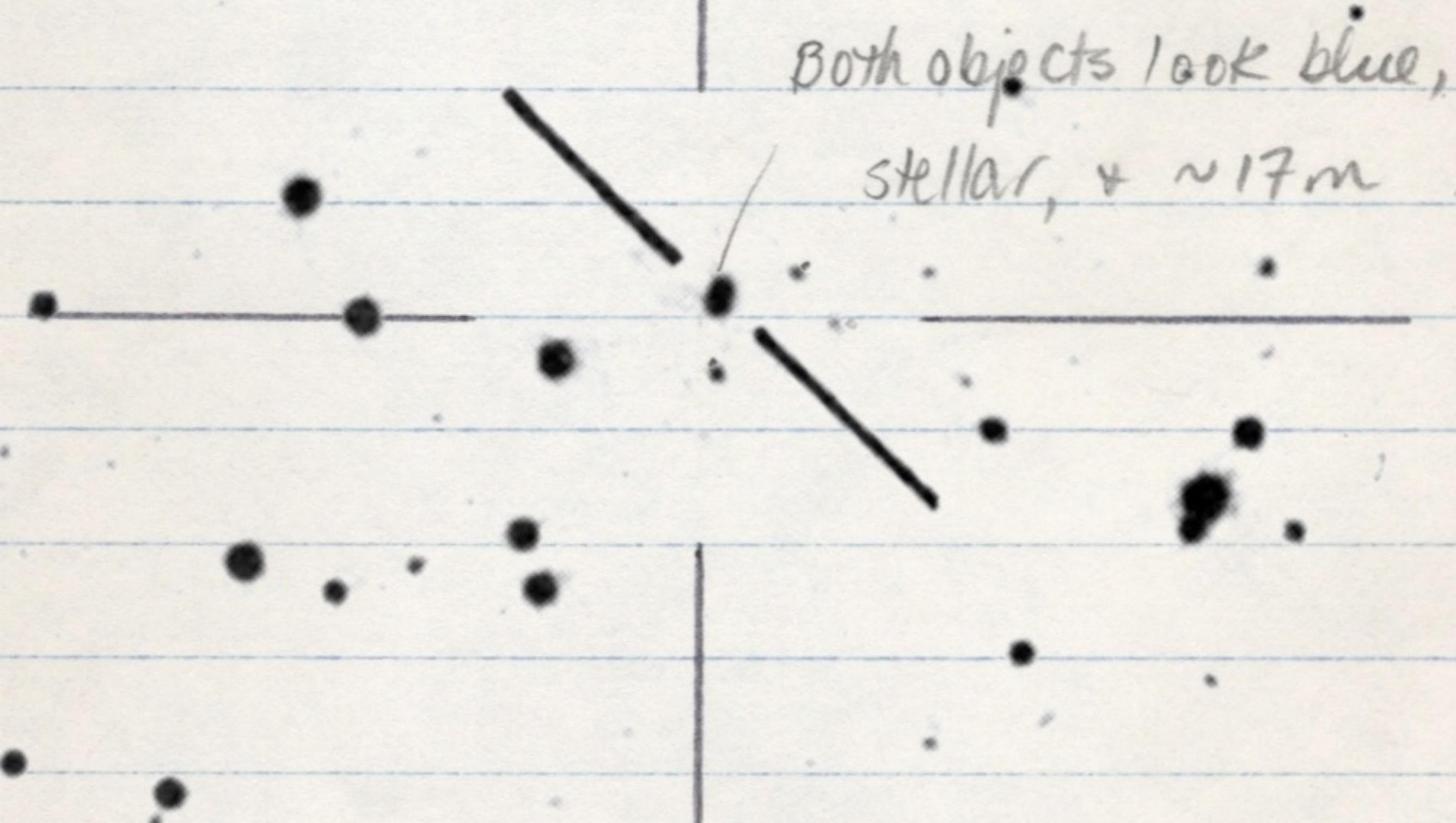
<sup>1</sup> A. Einstein, Science 84, 506 (1936).

<sup>2</sup> F. Zwicky, Helv. Phys. Acta 6, 124 (1933).

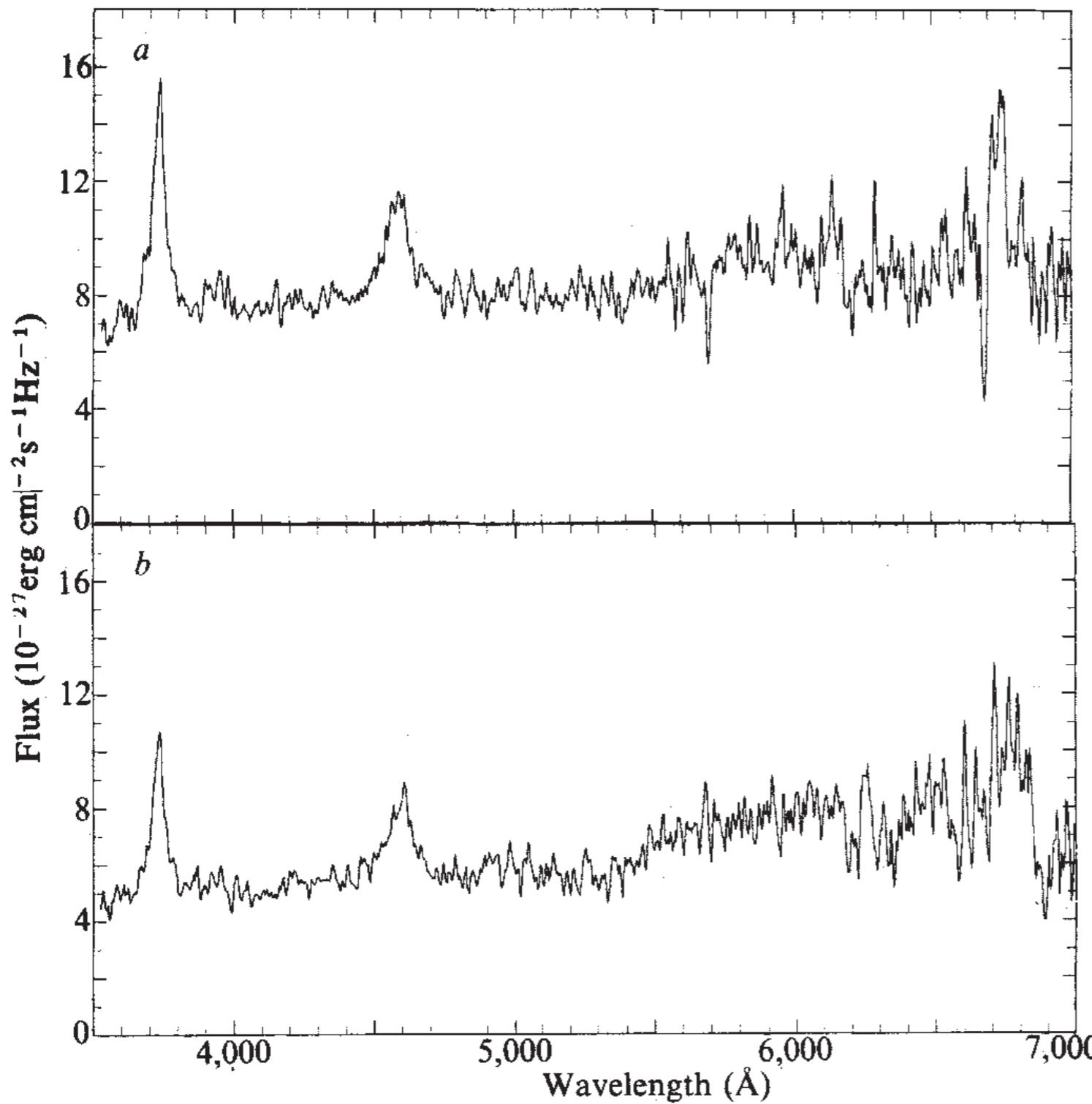
<sup>3</sup> Sinclair Smith, Astrophys. J. 83, 23 (1936).

- 単独の星では確率は低いが、銀河（銀河団）がレンズの場合には十分観測のチャンスがある！

# First strong lens: Q0957+561 (Walsh et al. 1979)



# First strong lens: Q0957+561 (Walsh et al. 1979)

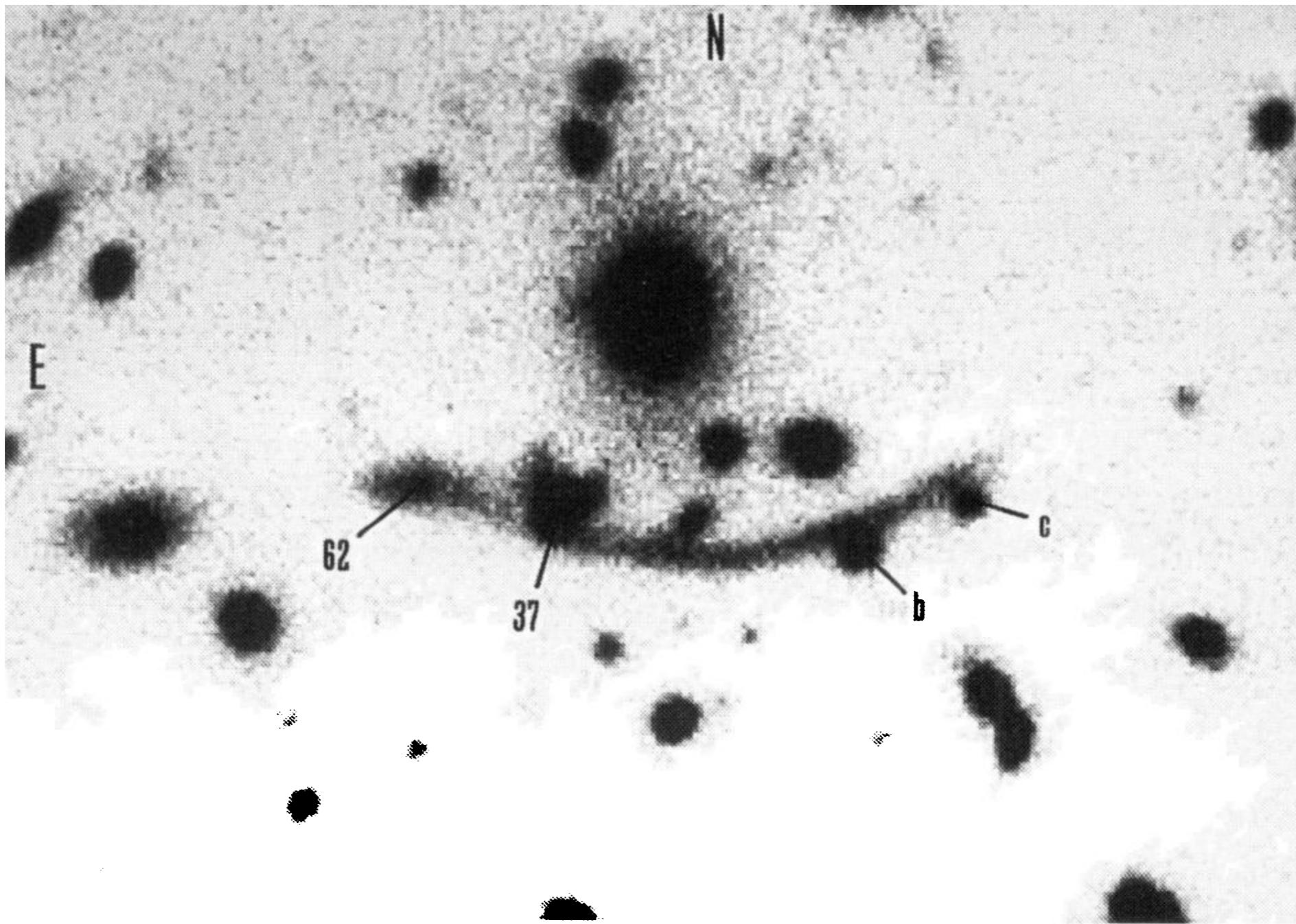


KPNO 2.1m  
でとられた  
スペクトル

# First strong lens: Q0957+561 (Walsh et al. 1979)



# First giant arc:A370 (Lynds & Petrosian 1986; Soucail et al. 1987)

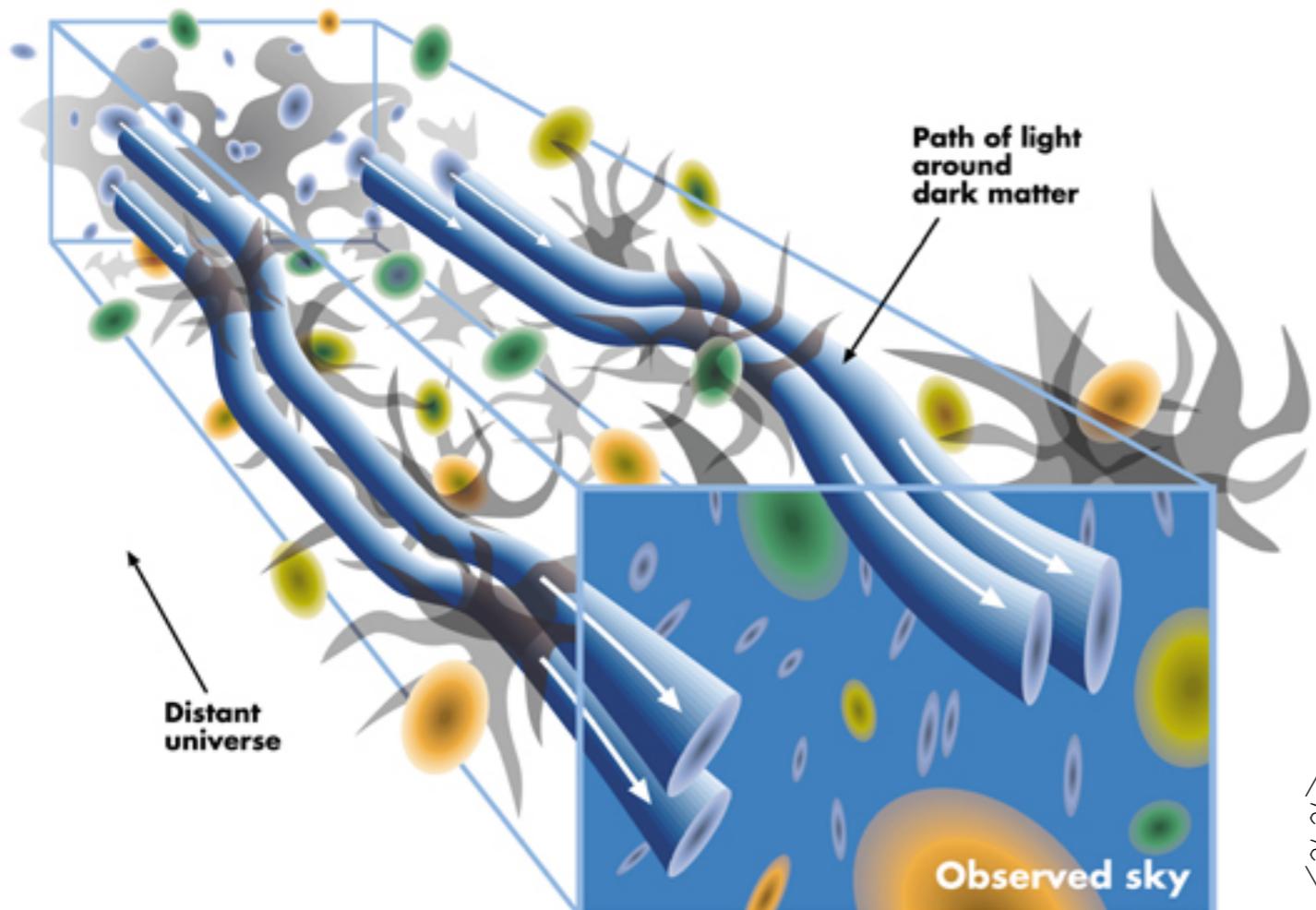


Soucail et al. (1988)



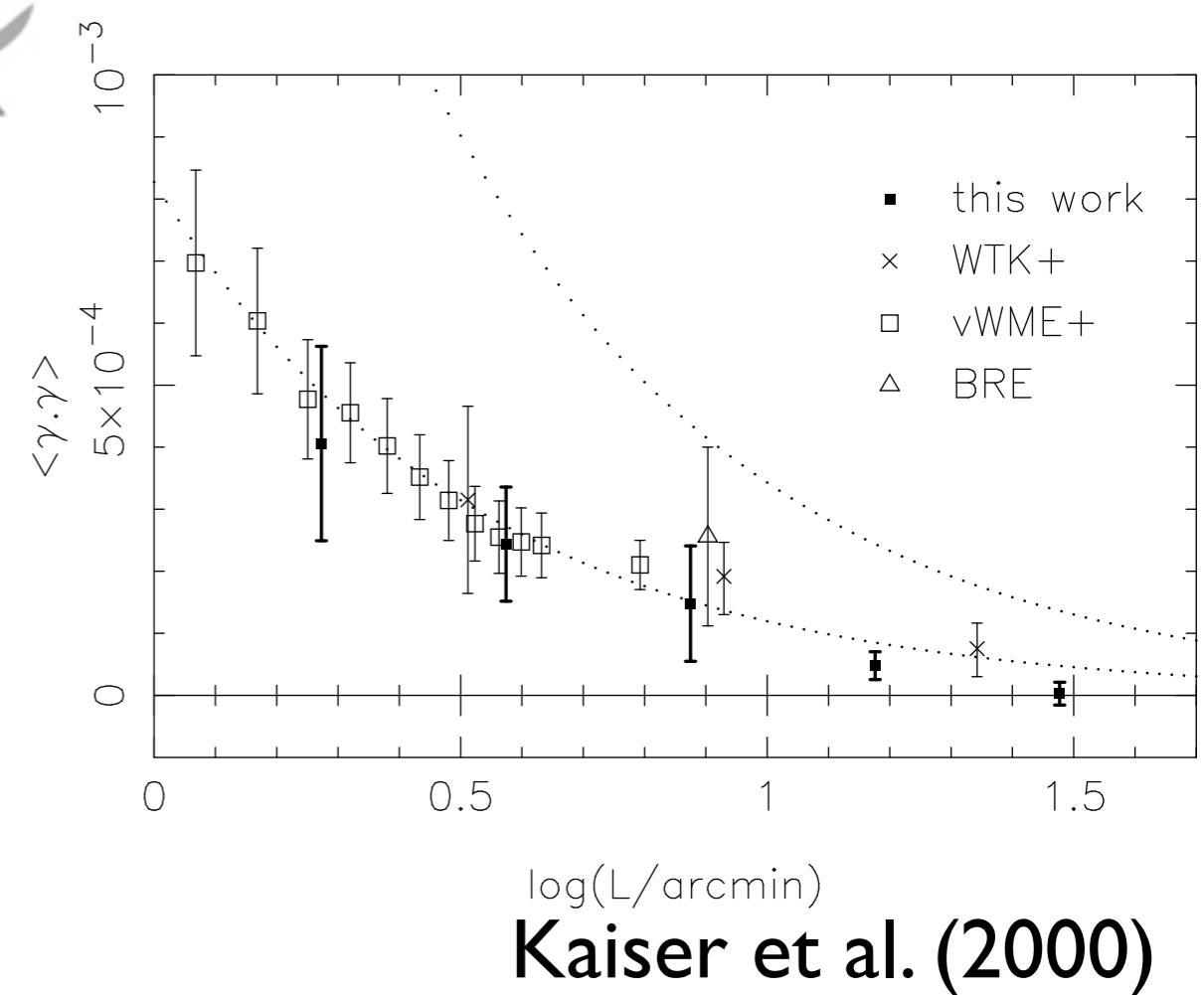
A370 (Hubble Frontier Fields)

# Detection of 'cosmic shear'



Wittman et al. (2000)

Wittman et al. (2000)  
Bacon et al. (2000)  
Kaiser et al. (2000)  
Van Waerbeke et al. (2000)



# 重力レンズの基礎

- 「重力レンズ方程式」の導出
- 像のゆがみ: convergence, shear, magnification
- 複数像: critical curves, caustics
- 時間の遅れ (time delay)

# 重力レンズ方程式

- 重力レンズのマスター方程式(弱場近似)
- (ほとんどの) 重力レンズ研究の出発点
- 一般相対論に基づき導出できる

# 重力レンズ導出の概要 (I)

- 計量 ( $\phi$ : ニュートンポテンシャル)

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + a^2 \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

- 測地線方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0$$

$$p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

$$n^i \equiv \frac{p^i}{\sqrt{\gamma_{ij} p^i p^j}} \quad (\leftarrow \text{光の伝搬方向})$$

# 重力レンズ導出の概要 (II)

- 動径(視線)方向と角度方向に分離

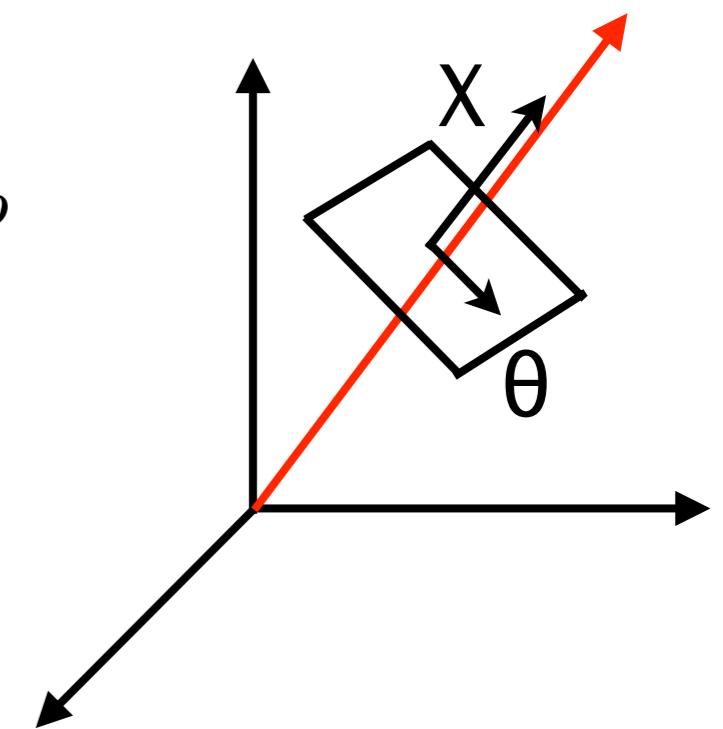
$$n^i = (\chi, \theta^a)$$

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + f_K^2(\chi) \omega_{ab} d\theta^a d\theta^b$$

$$f_K(\chi) = \frac{1}{-K} \sinh(-K\chi) \quad (K < 0)$$

$$= \chi \quad (K = 0)$$

$$= \frac{1}{K} \sin(K\chi) \quad (K > 0)$$



[note: 角径距離  $D_A = af_K(\chi)$  ]

# 重力レンズ導出の概要 (III)

- 測地線方程式の時間成分  
→ 宇宙論的+重力的赤方偏移

$$\frac{d(a^2 p)}{d\lambda} = \frac{2a^3 p^2}{c^3} \dot{\phi}$$

$$E = h\nu = ap \left( 1 - \frac{\phi}{c^2} \right)$$

O: 観測者  
S: ソース

$$\rightarrow 1 + z = \frac{E_S}{E_O} = \frac{a_O}{a_S} \left\{ 1 + \frac{\phi(O) - \phi(S)}{c^2} - \frac{2}{c^2} \int_S^O \dot{\phi} dt \right\}$$

↑                      ↑                      ↑

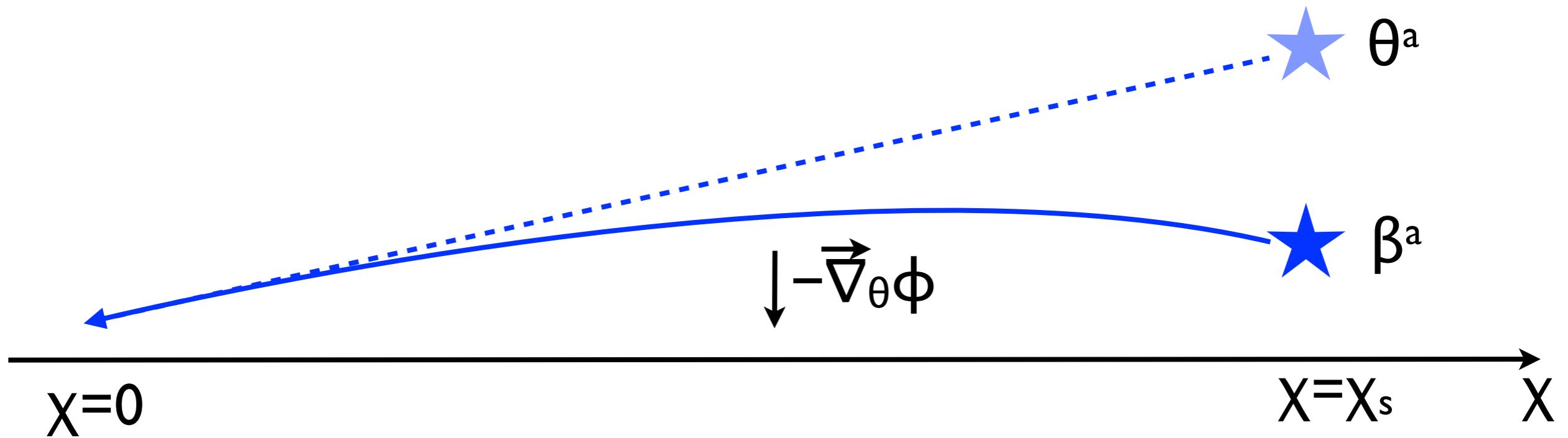
宇宙論的            重力赤方偏移    積分ザックス  
赤方偏移    ヴォルフェ

# 重力レンズ導出の概要 (IV)

- 測地線方程式の空間成分

$$\frac{d}{d\chi} \left( f_K^2(\chi) \frac{d\theta^a}{d\chi} \right) + \frac{2}{c^2} w^{ab} \phi_{,b} = 0$$

$$\rightarrow \beta^a = \theta^a - \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi) f_K(\chi_s)} w^{ab} \phi_{,b}$$



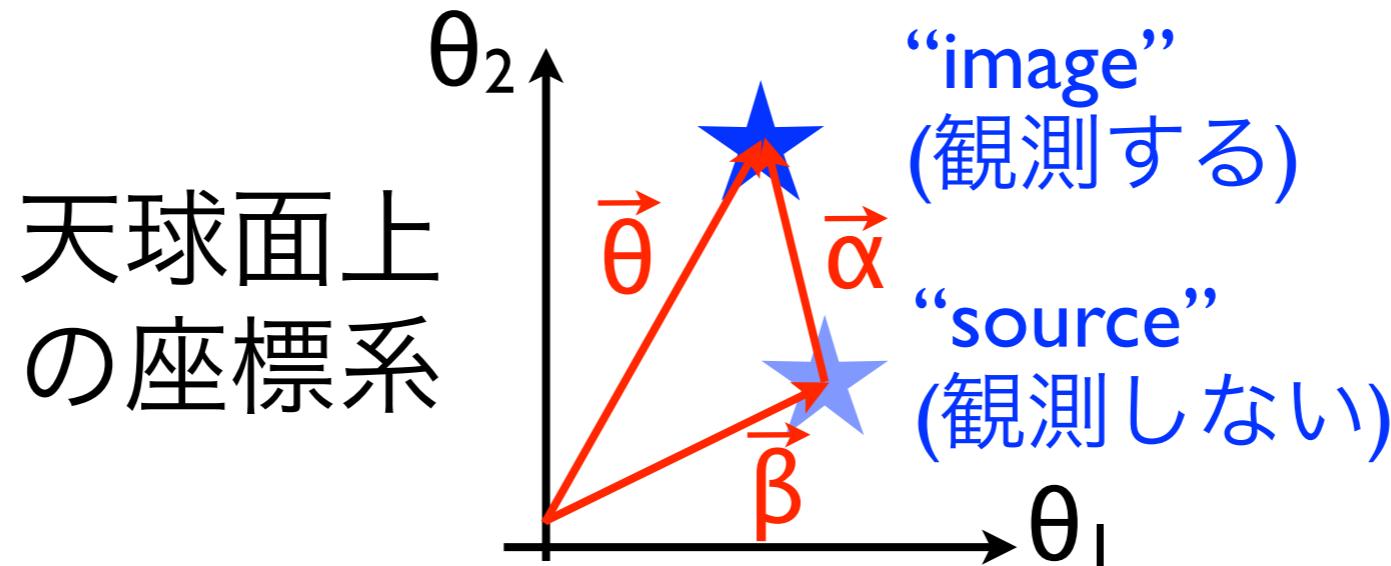
# 重力レンズ導出の概要 (V)

- 重力レンズ方程式

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\nabla}_{\theta}\psi$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \vec{\nabla}_{\theta}\psi \quad (\text{曲がり角})$$

$$\psi \equiv \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \phi \quad (\text{レンズポテンシャル})$$



# 密度ゆらぎとの対応

- レンズポテンシャルのラプラシアン

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (\text{ポアソン方程式})$$

密度揺らぎ  
 $\delta = \delta\rho/\rho$

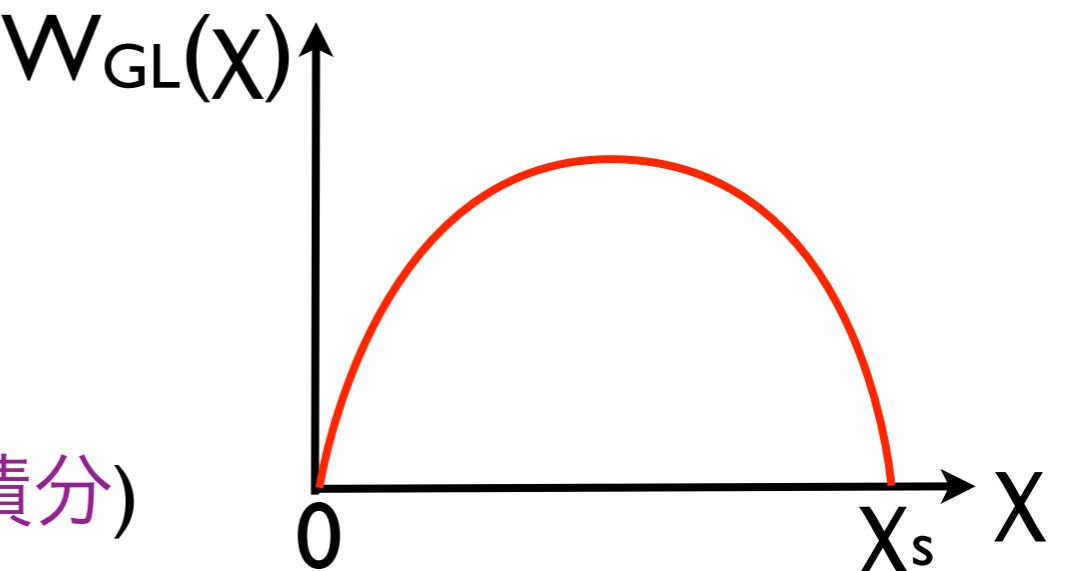
$$\rightarrow \vec{\nabla}_{\theta}^2 \psi = 2 \times \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi) f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi_s)} a^2 \bar{\rho} \delta(\chi, \vec{\theta})$$

$$\equiv \kappa(\vec{\theta}) \quad (\text{convergence})$$

より簡単に、

$$\kappa(\vec{\theta}) = \int d\chi W_{\text{GL}}(\chi) \delta(\chi, \vec{\theta})$$

(密度揺らぎの視線方向の重み付け積分)



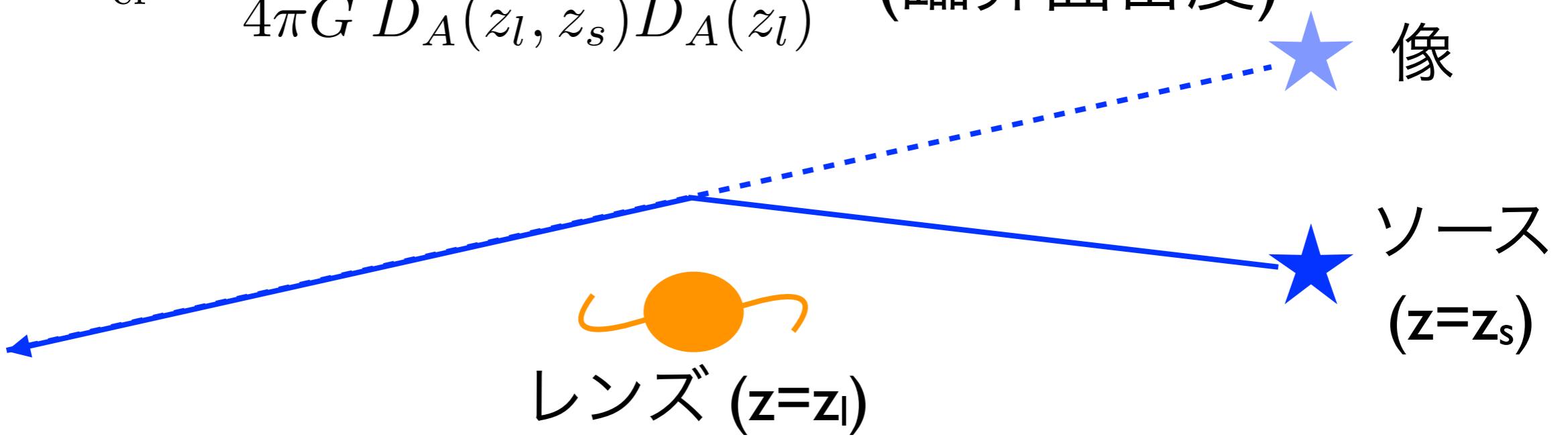
# 薄レンズ近似

- レンズポテンシャルが一つの天体の寄与が卓越している場合

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{\text{cr}}}$$

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \int dz \delta\rho(D_A(z_l)\vec{\theta}, z) \quad (\text{面密度})$$

$$\Sigma_{\text{cr}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s) D_A(z_l)} \quad (\text{臨界面密度})$$



# 重力レンズ方程式のまとめ

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

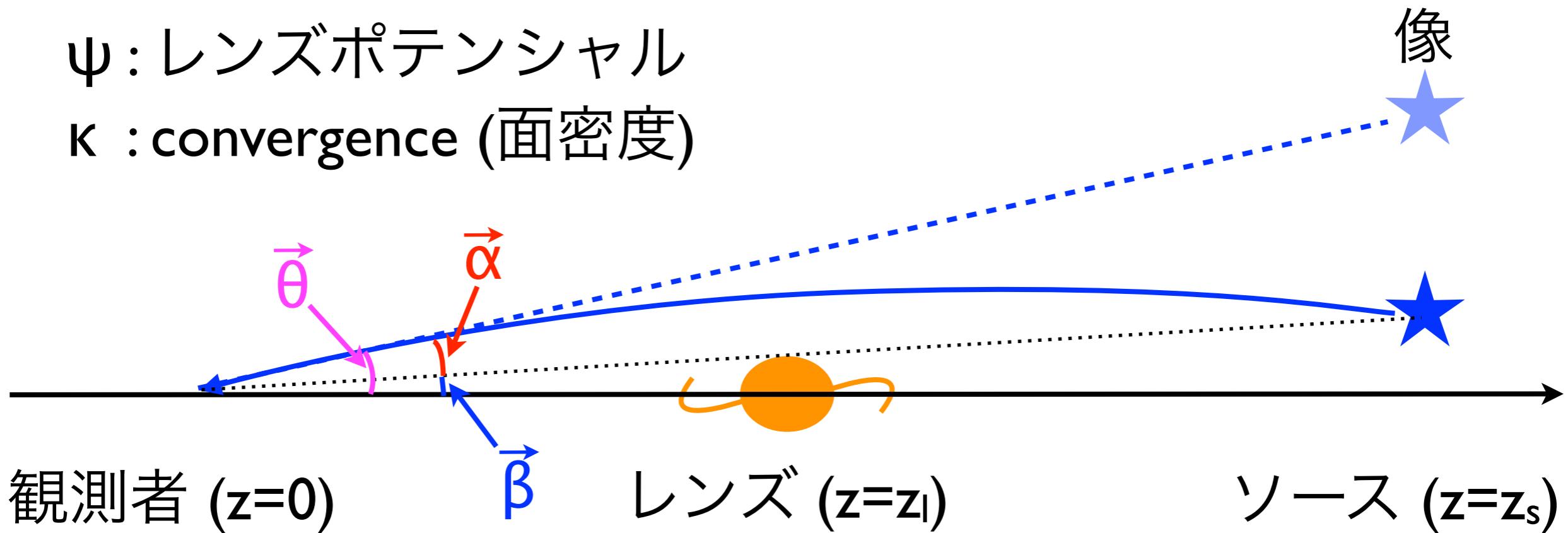
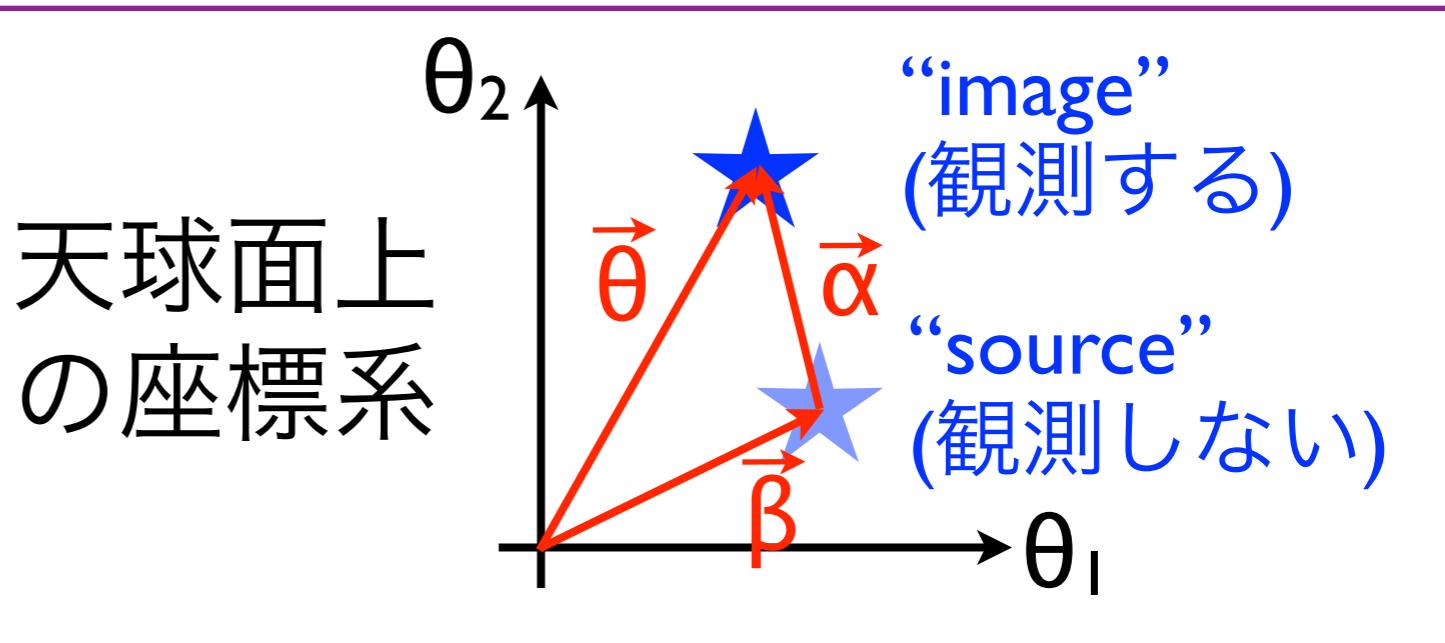
$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_{\theta} \psi$$

$$\vec{\nabla}_{\theta}^2 \psi = 2\kappa(\vec{\theta})$$

$\vec{\alpha}$ : 曲がり角

$\psi$ : レンズポテンシャル

$\kappa$ : convergence (面密度)

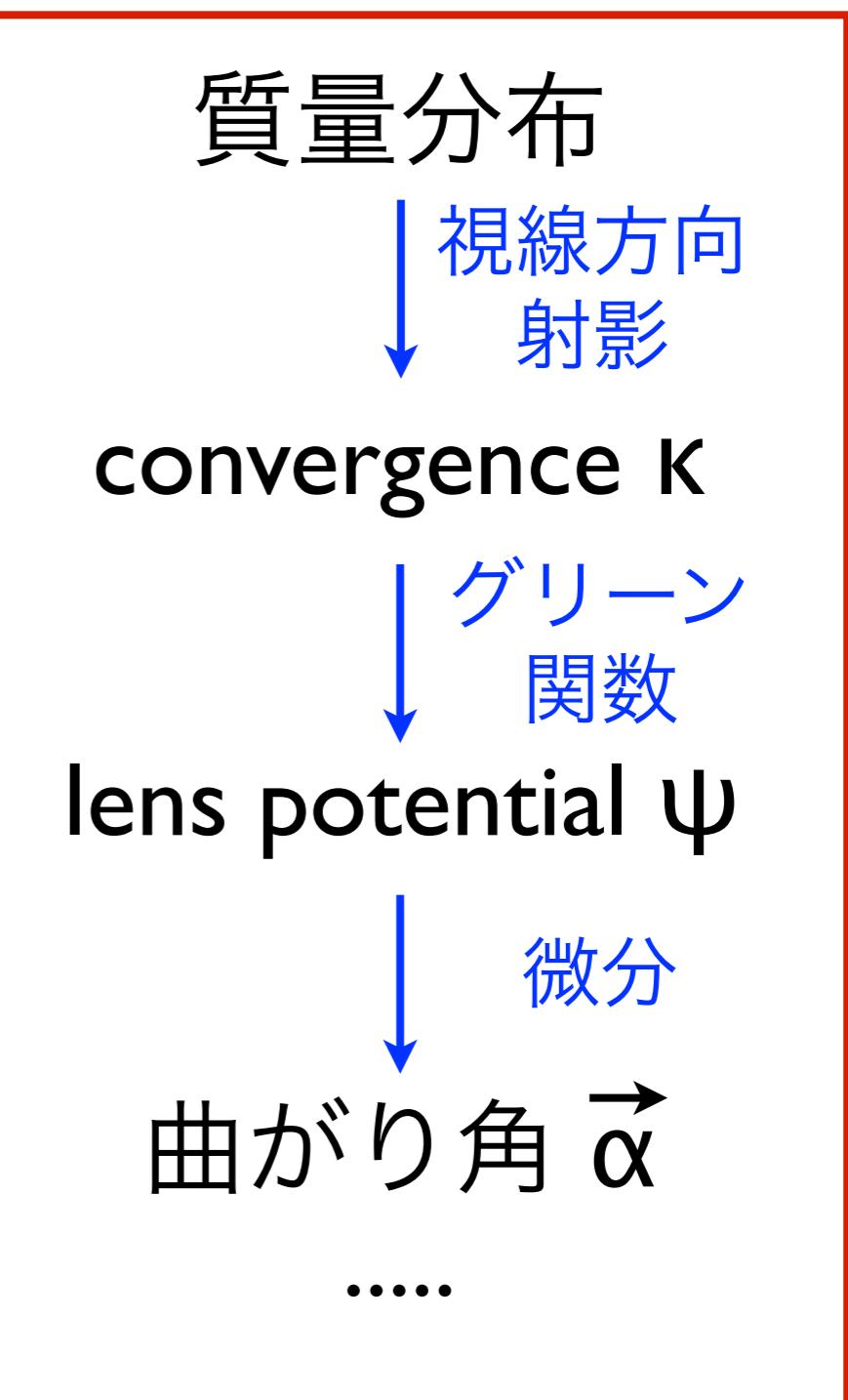


# 質量分布とレンズ方程式の関係

- グリーン関数を使って

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}$$



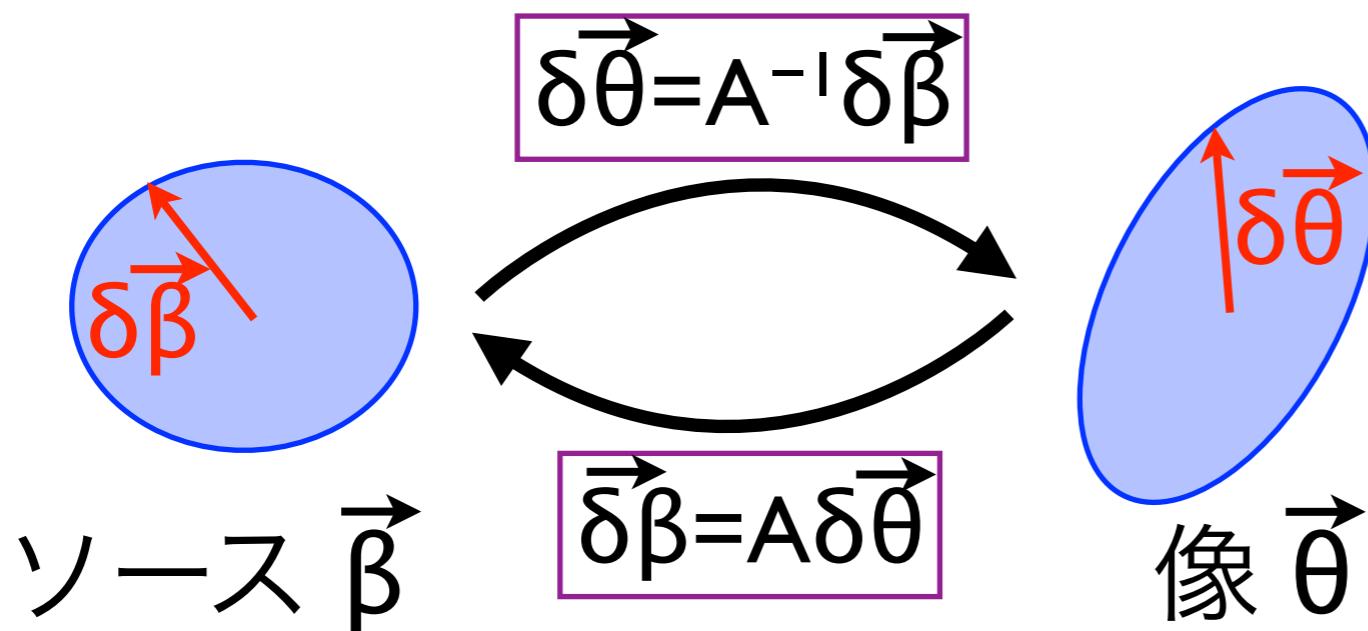
# 重力レンズ像への影響

- 重力レンズを受けた天体は形状も変化

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 - \psi_{11} & -\psi_{12} \\ -\psi_{12} & 1 - \psi_{22} \end{pmatrix} \quad \Psi_{11} = \partial^2 \Psi / \partial \theta_1^2$$

etc.

$$= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$



$A$  : de-lensing  
 $A^{-1}$  : lensing

# Convergence & shear

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

ソース → 像 ( $A^{-1}$ )

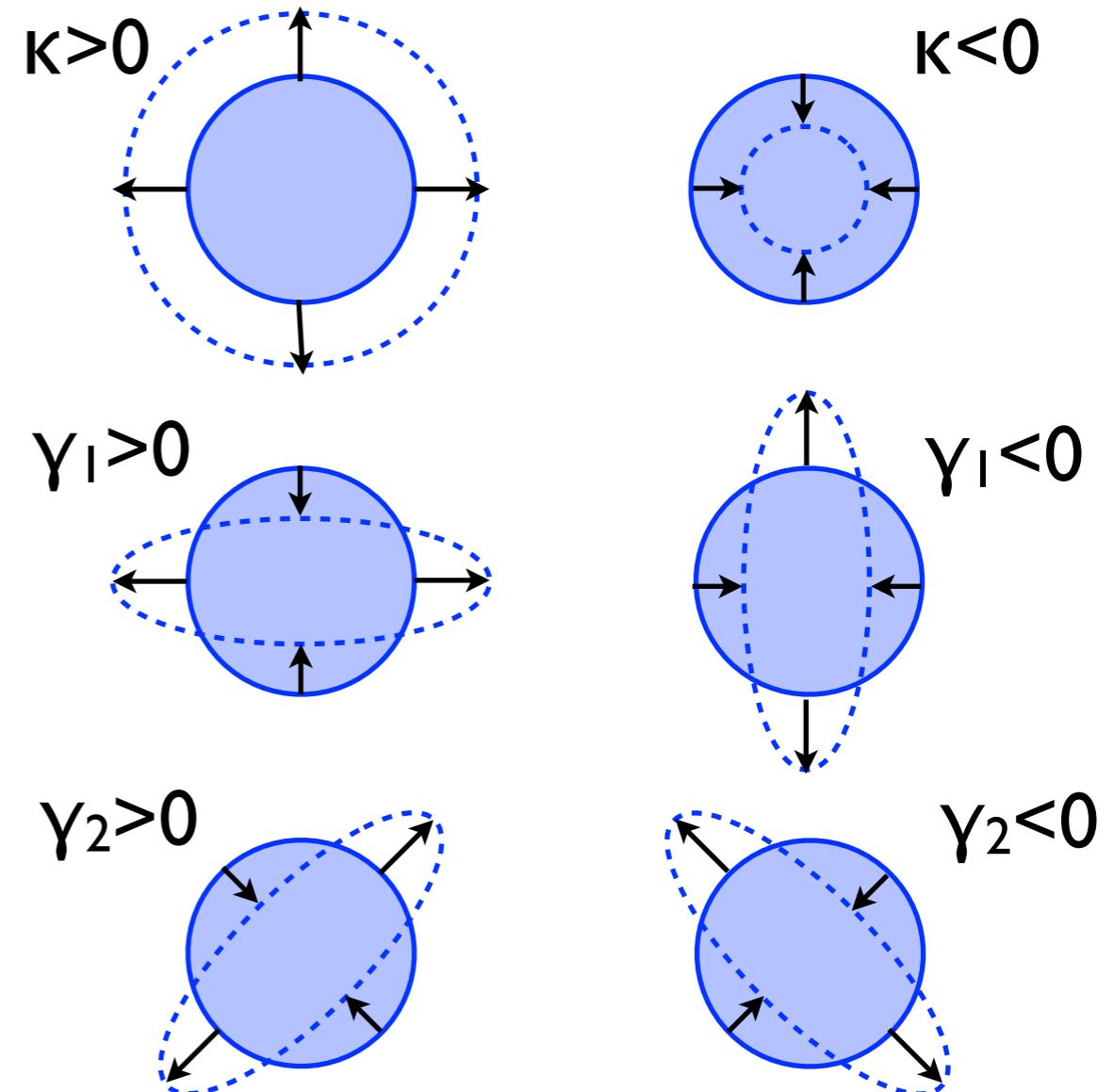
convergence

$$\kappa \equiv \frac{1}{2} (\psi_{11} + \psi_{22})$$

shear

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{2} (\psi_{11} - \psi_{22})$$

$$\gamma_2 \equiv \psi_{12}$$



# 増光率

- 重力レンズは表面輝度を保存する  
→ 増光率 = 面積の変化率

増光率  $\mu$  ( $L_{\text{obs}} = \mu L_{\text{ori}}$ )

$$\mu \equiv (\det A)^{-1} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2}$$

$$|\gamma| \equiv \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$$

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}$$

(レンズの逆変換)

# Critical curves と caustics

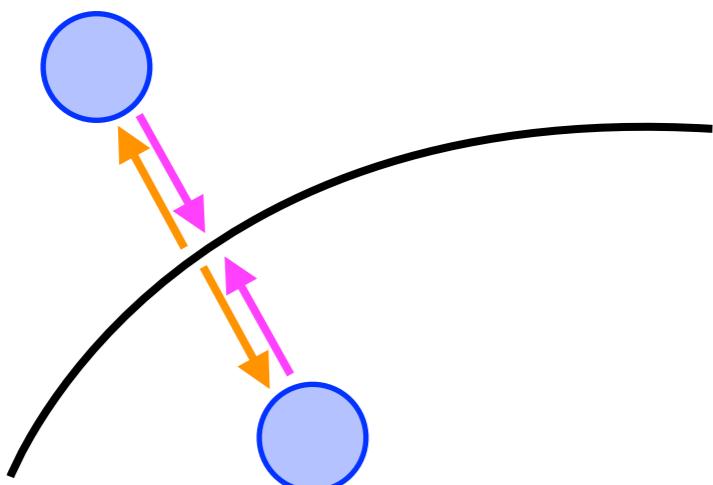
- critical curve は増光率無限大の曲線として定義

$$\det A(\vec{\theta}_c) = 0 \quad (\text{image plane})$$

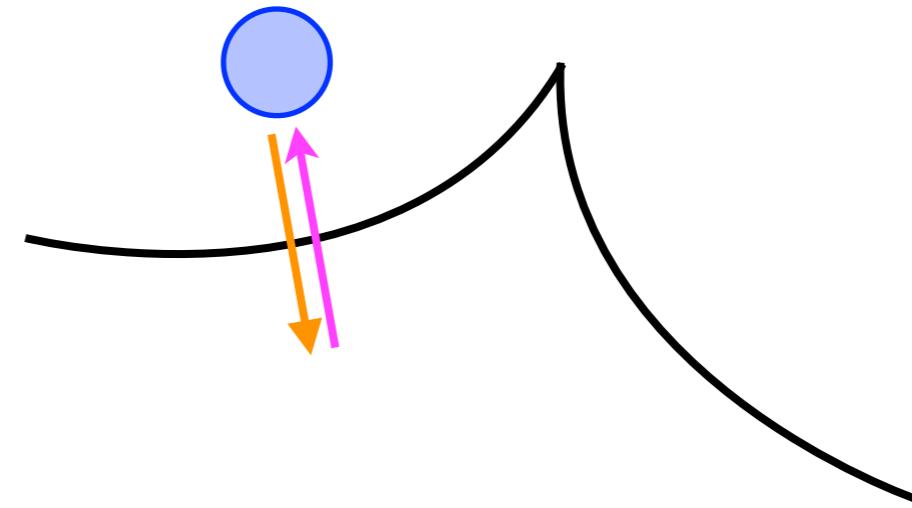
- 対応する source plane 上の曲線を caustic と呼ぶ

$$\vec{\beta}_c = \vec{\beta}(\vec{\theta}_c) \quad (\text{source plane})$$

# Critical curve と複数像



critical curve  
(image plane)



caustic  
(source plane)

critical curve で複数像が生成、消滅

simulated by *glafic*

# 例: ポイントソース (クエーサー)

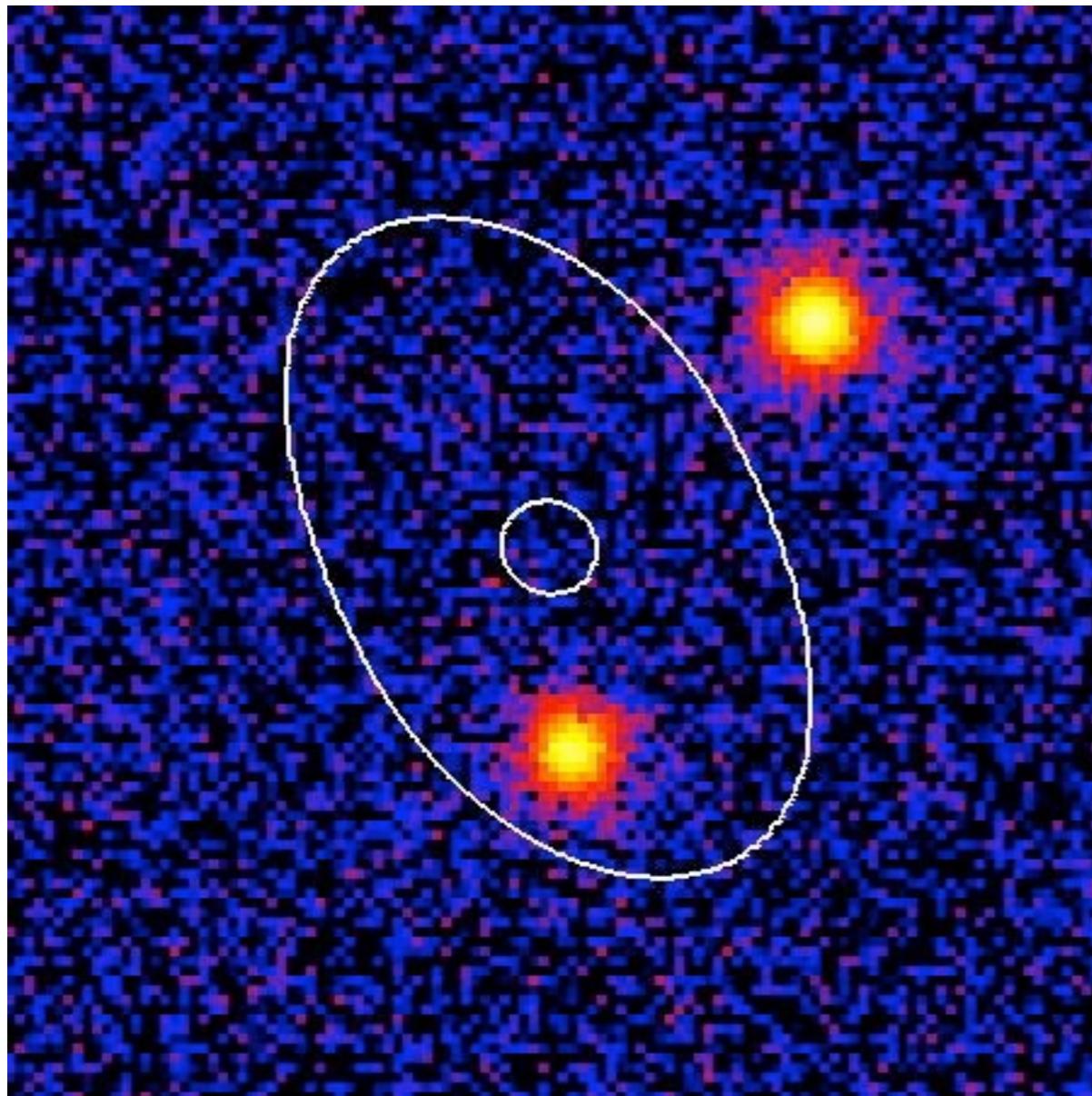
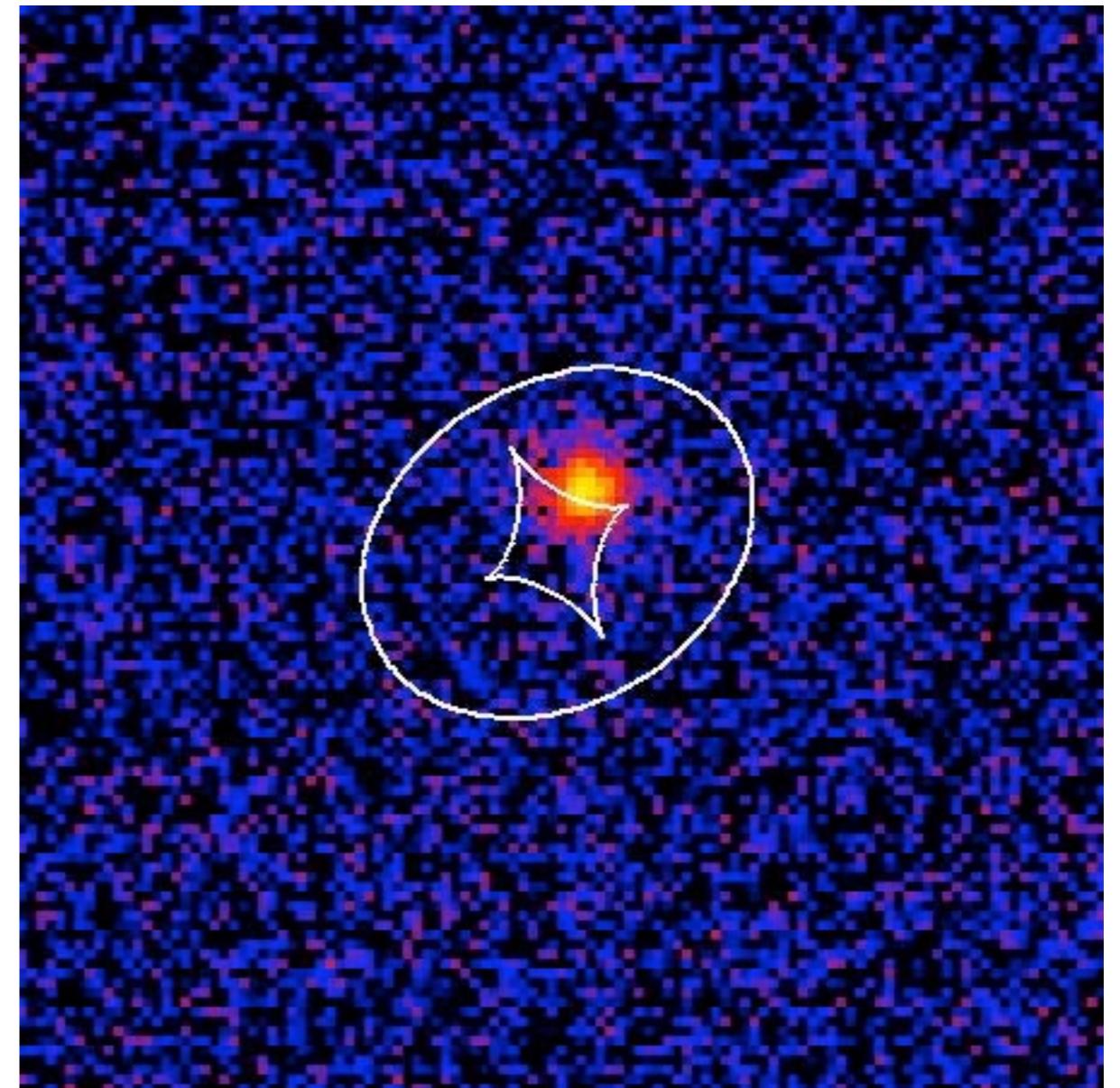


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: ポイントソース (クエーサー)

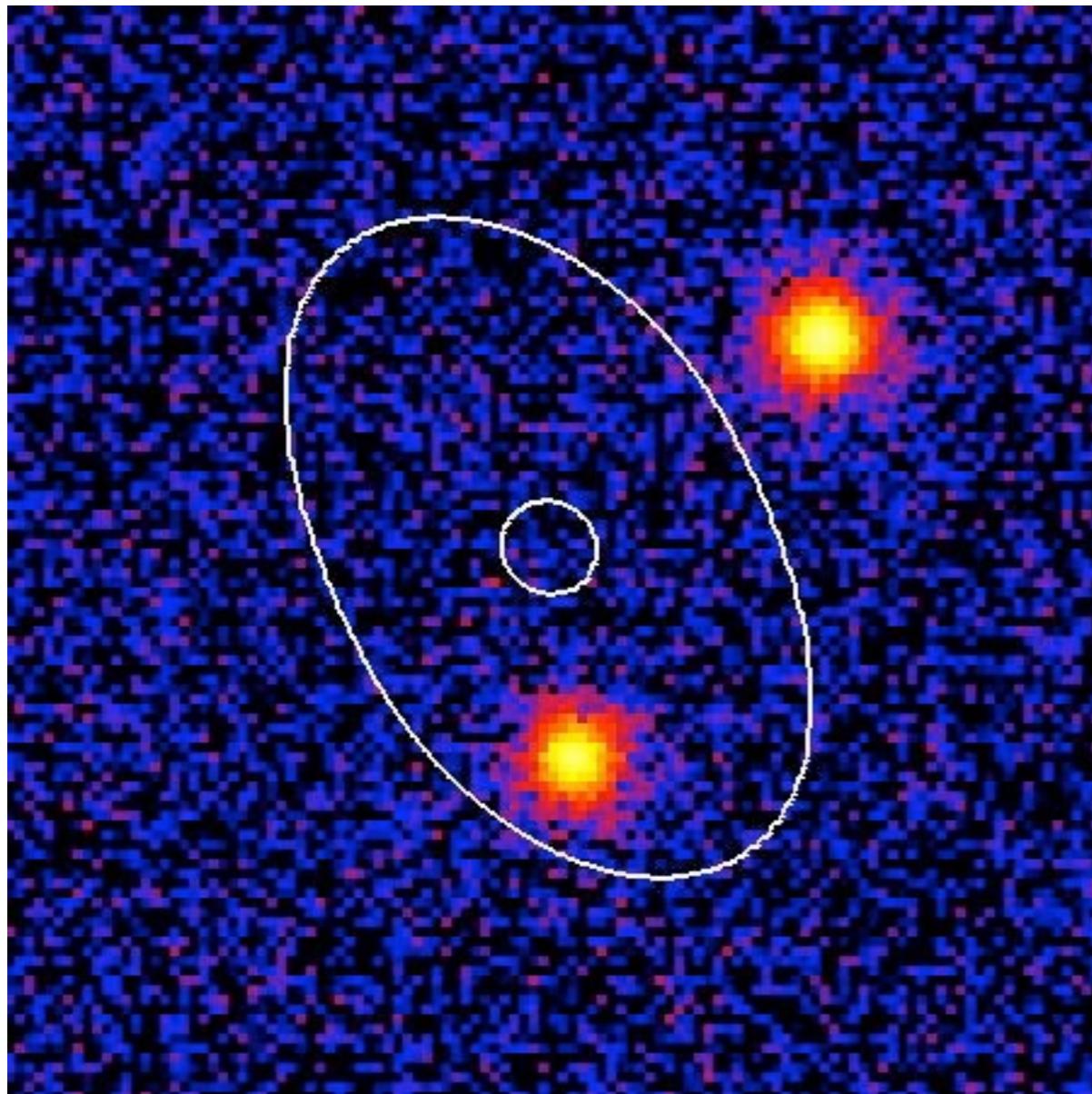
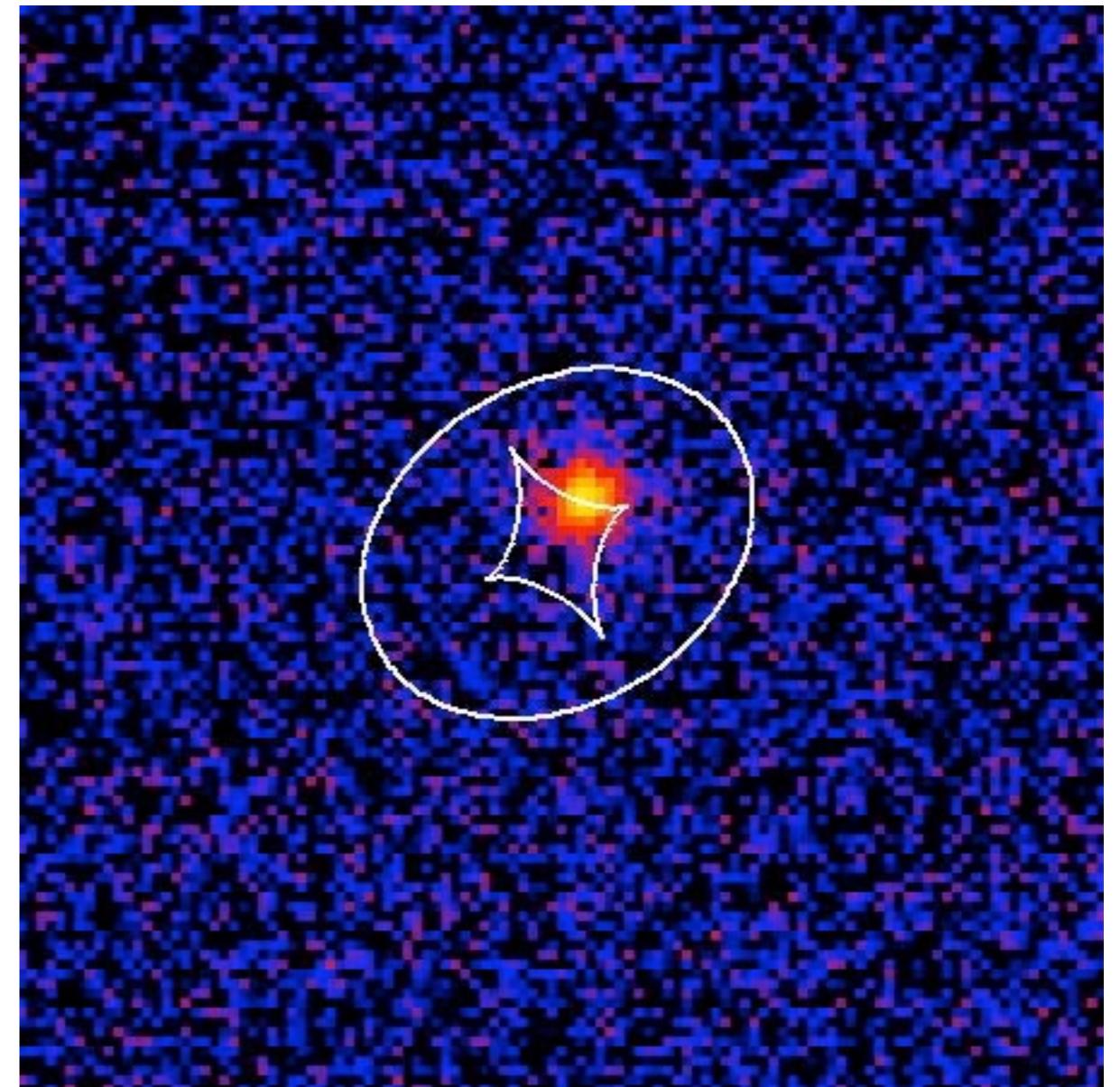


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: ポイントソース (クエーサー)

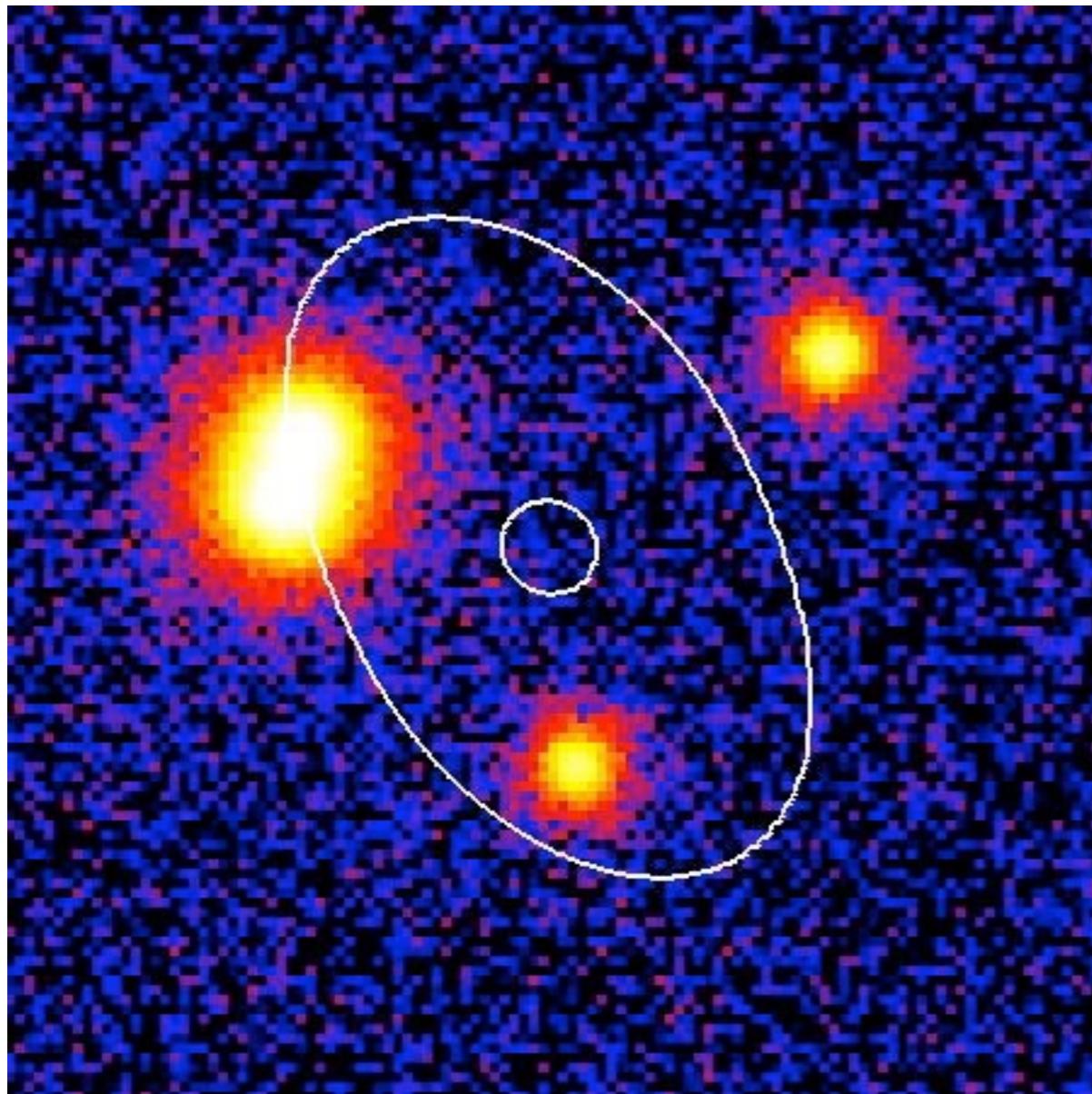
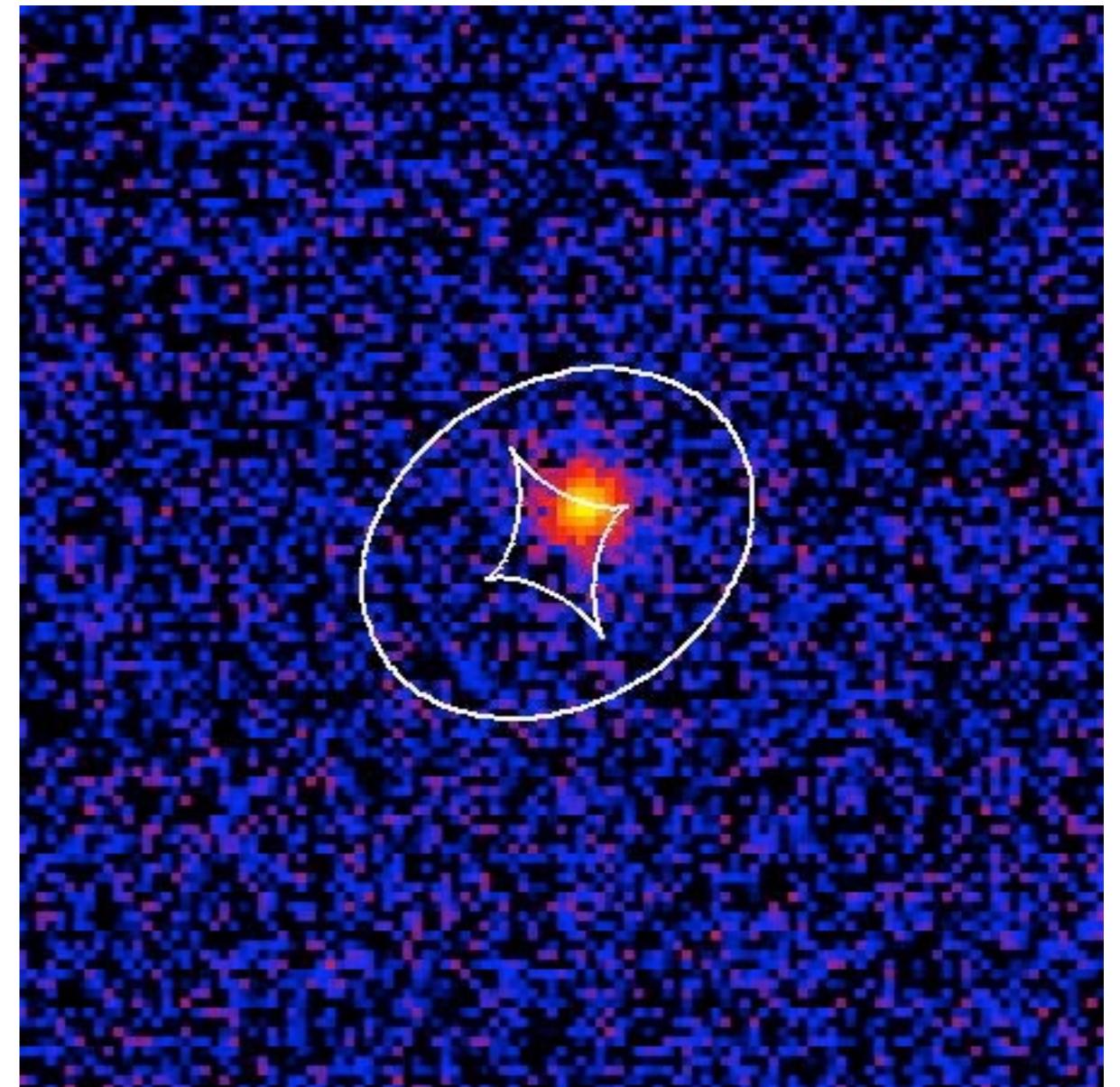


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: ポイントソース (クエーサー)

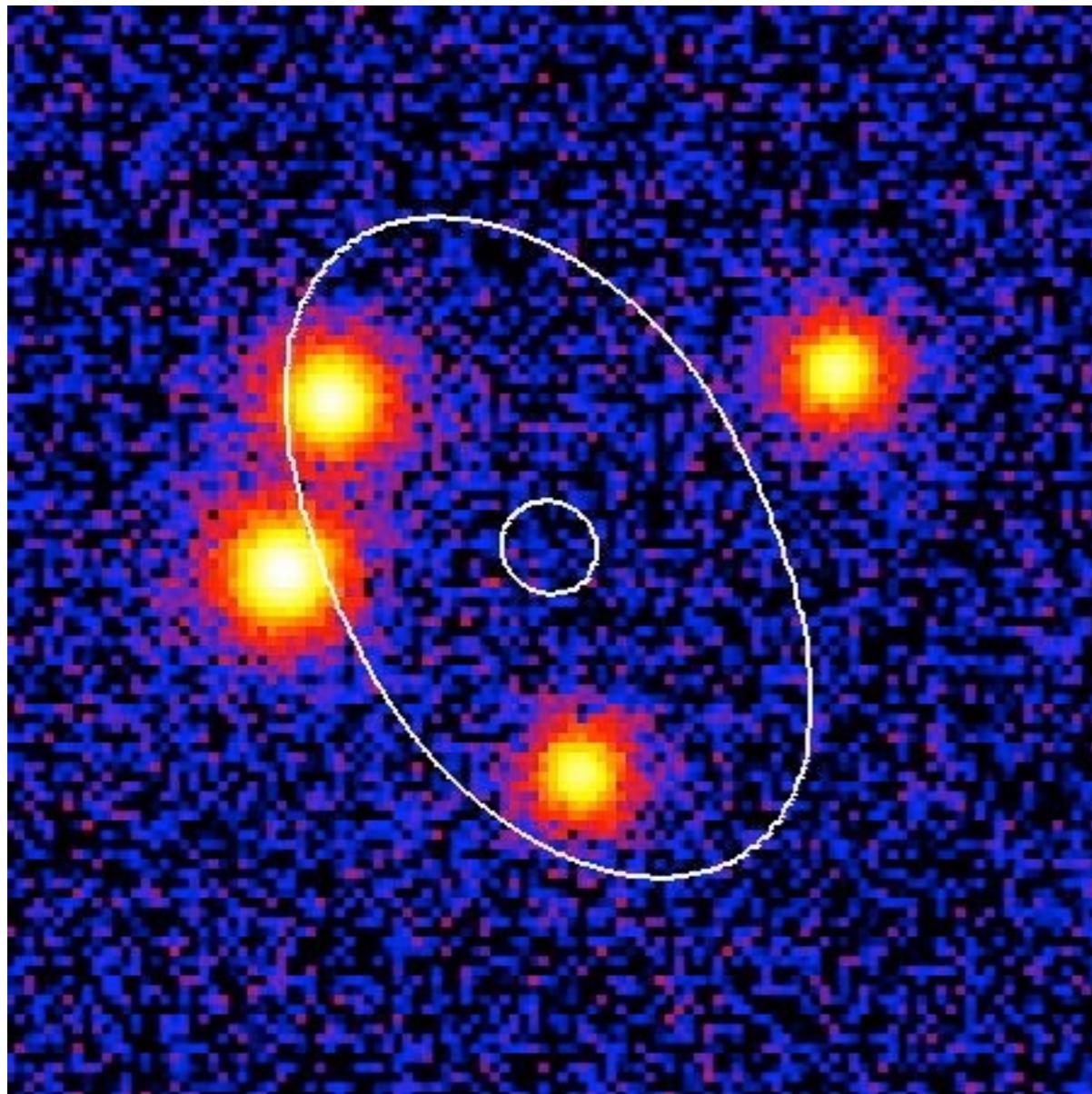
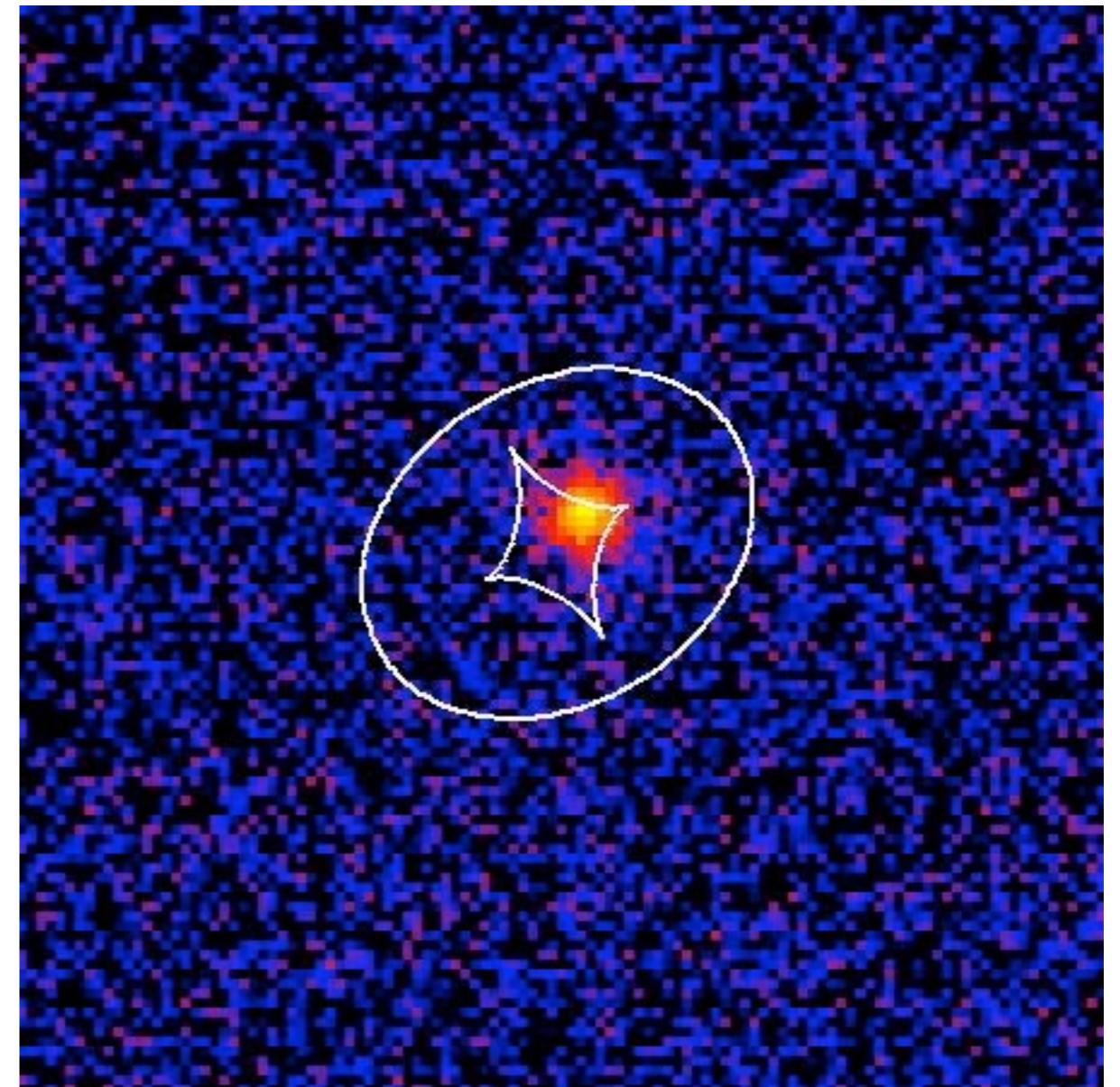


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: ポイントソース (クエーサー)

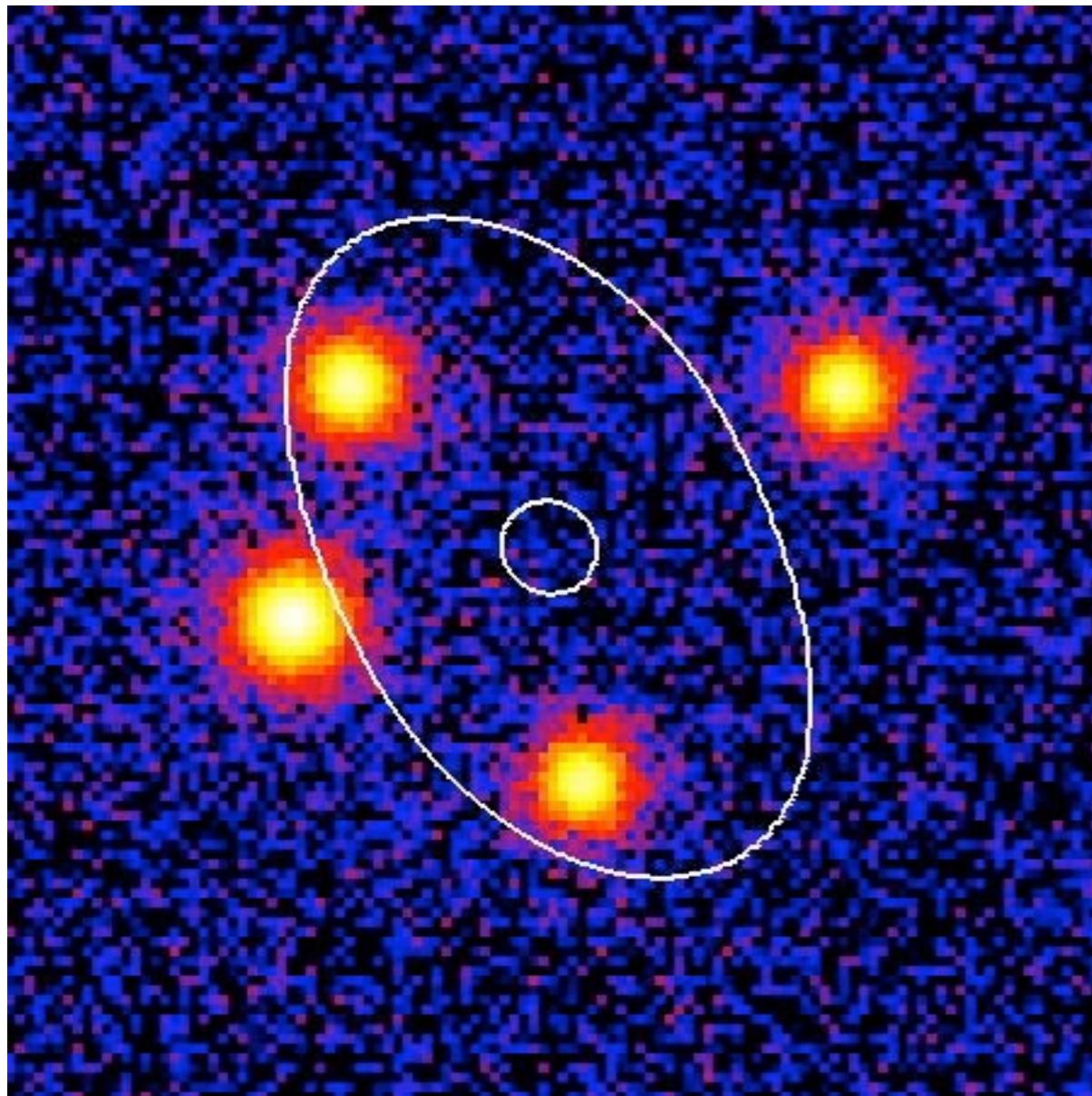
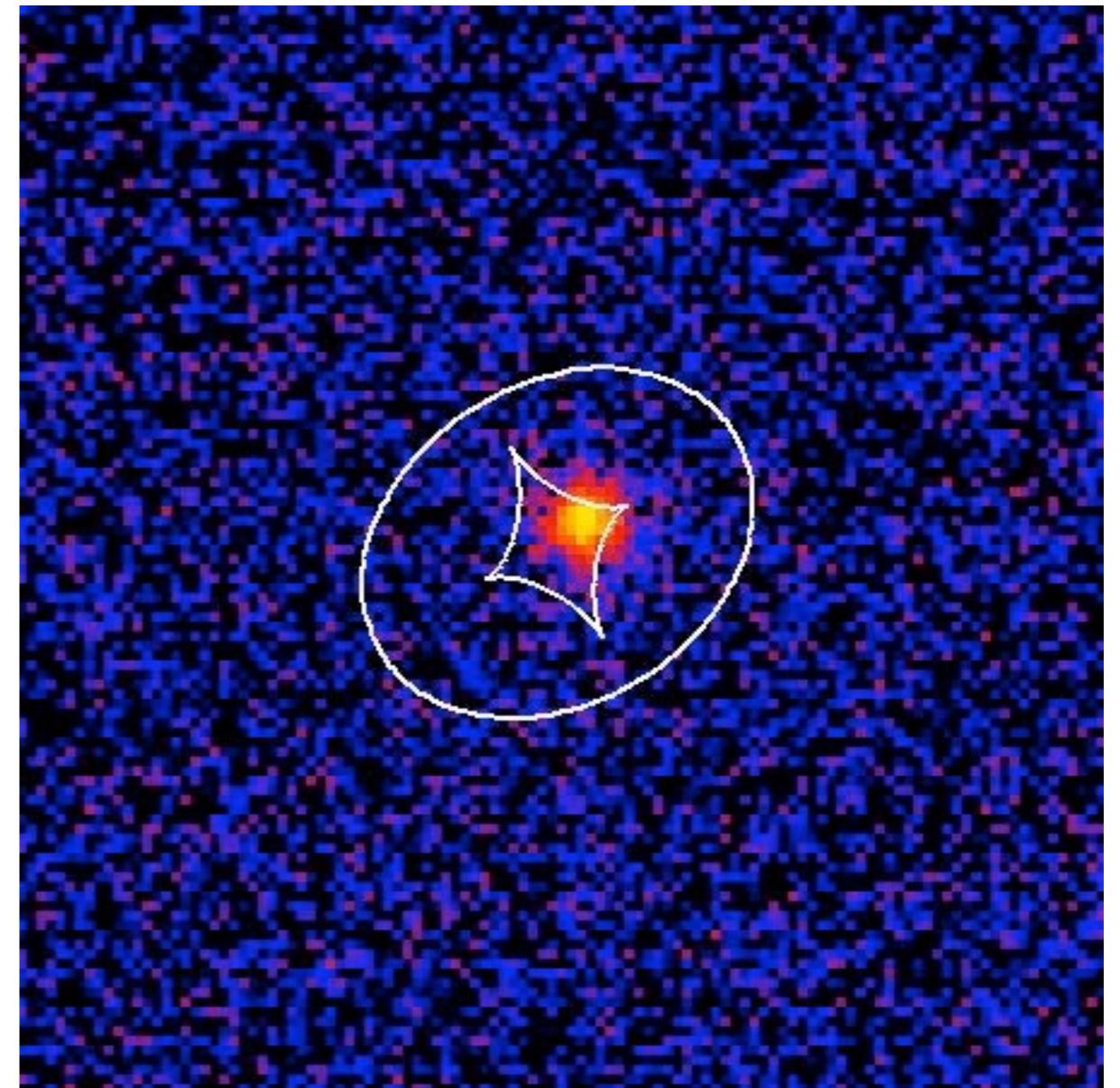


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: 広がったソース (銀河)

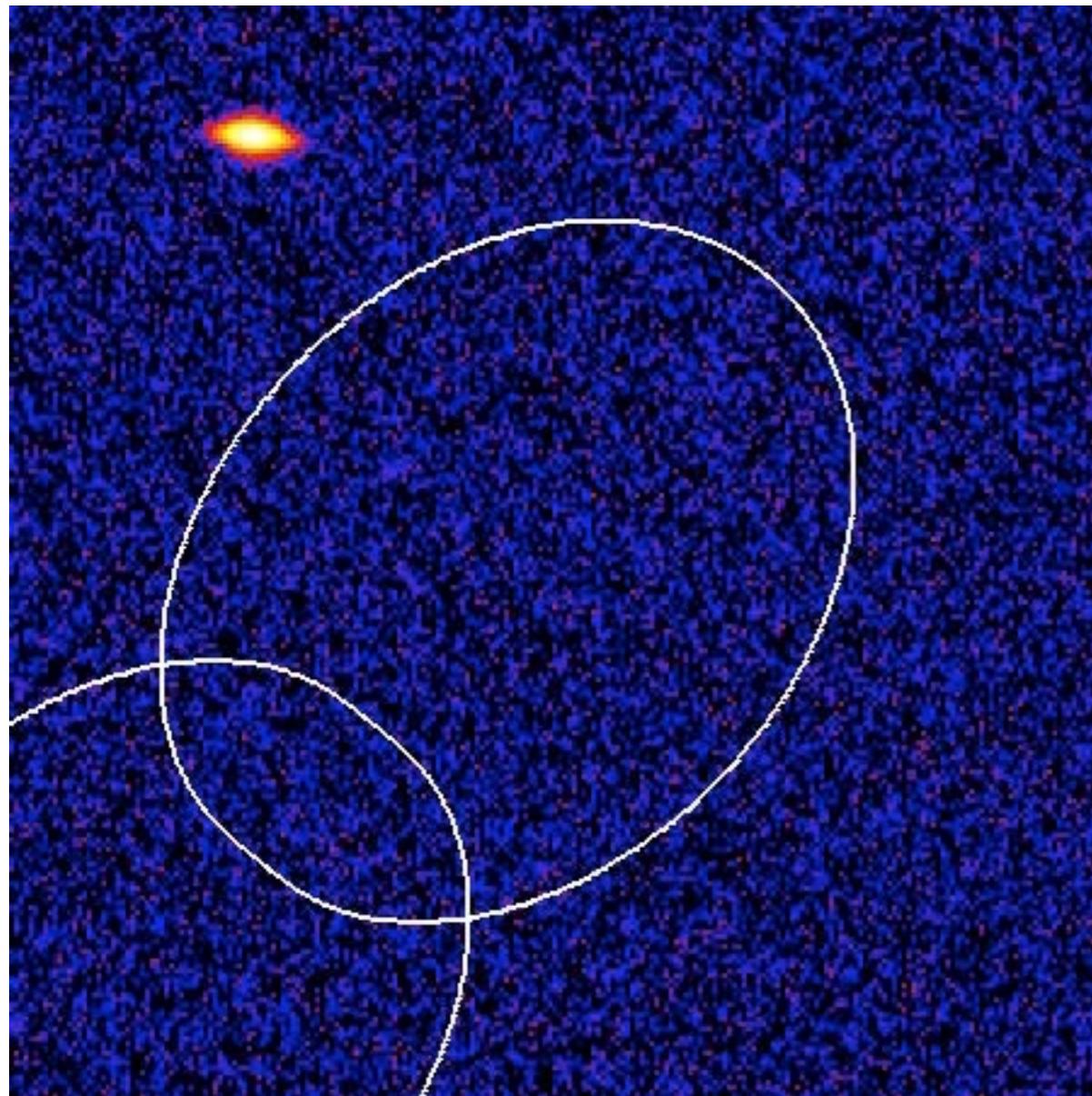
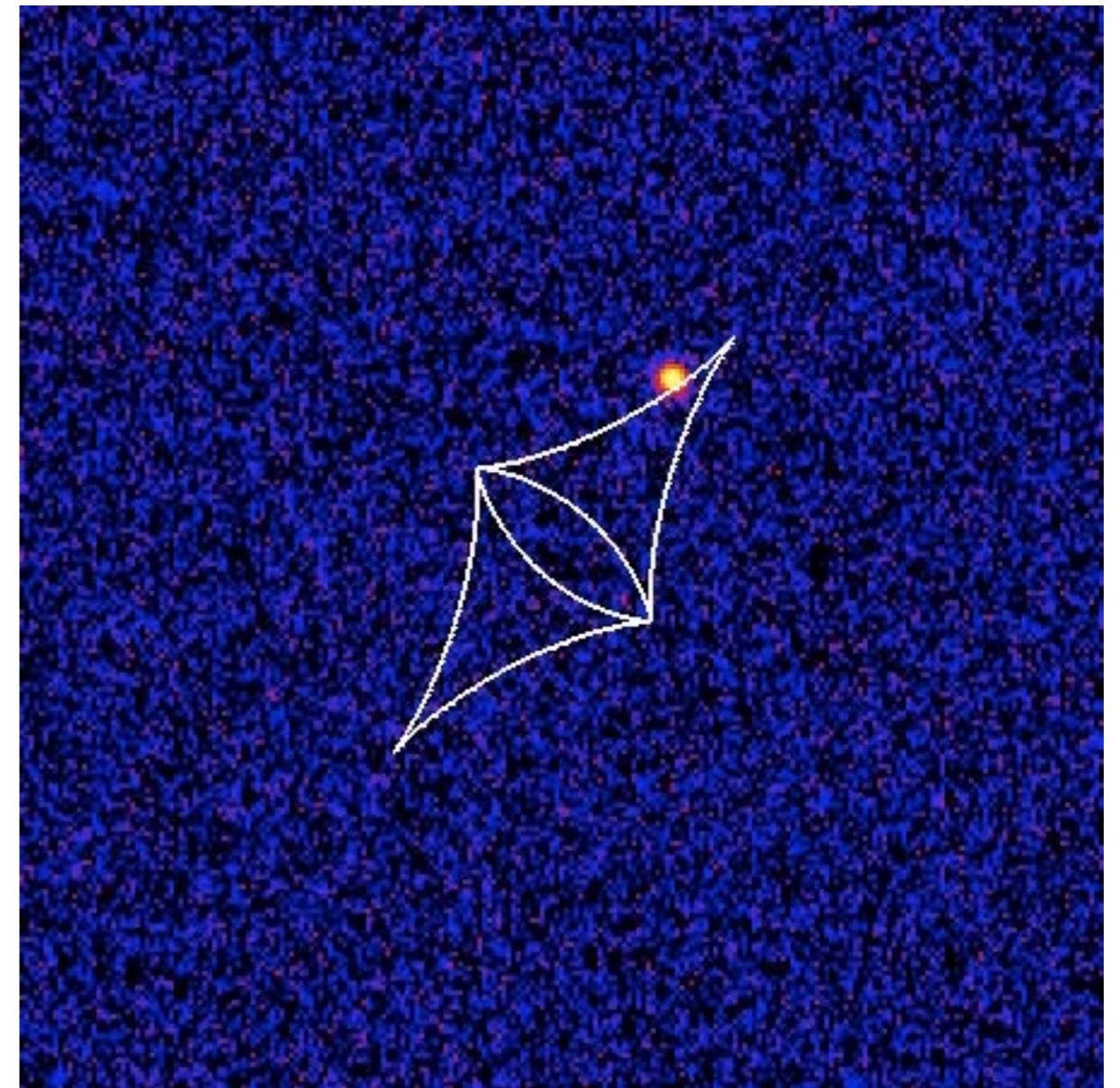


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: 広がったソース (銀河)

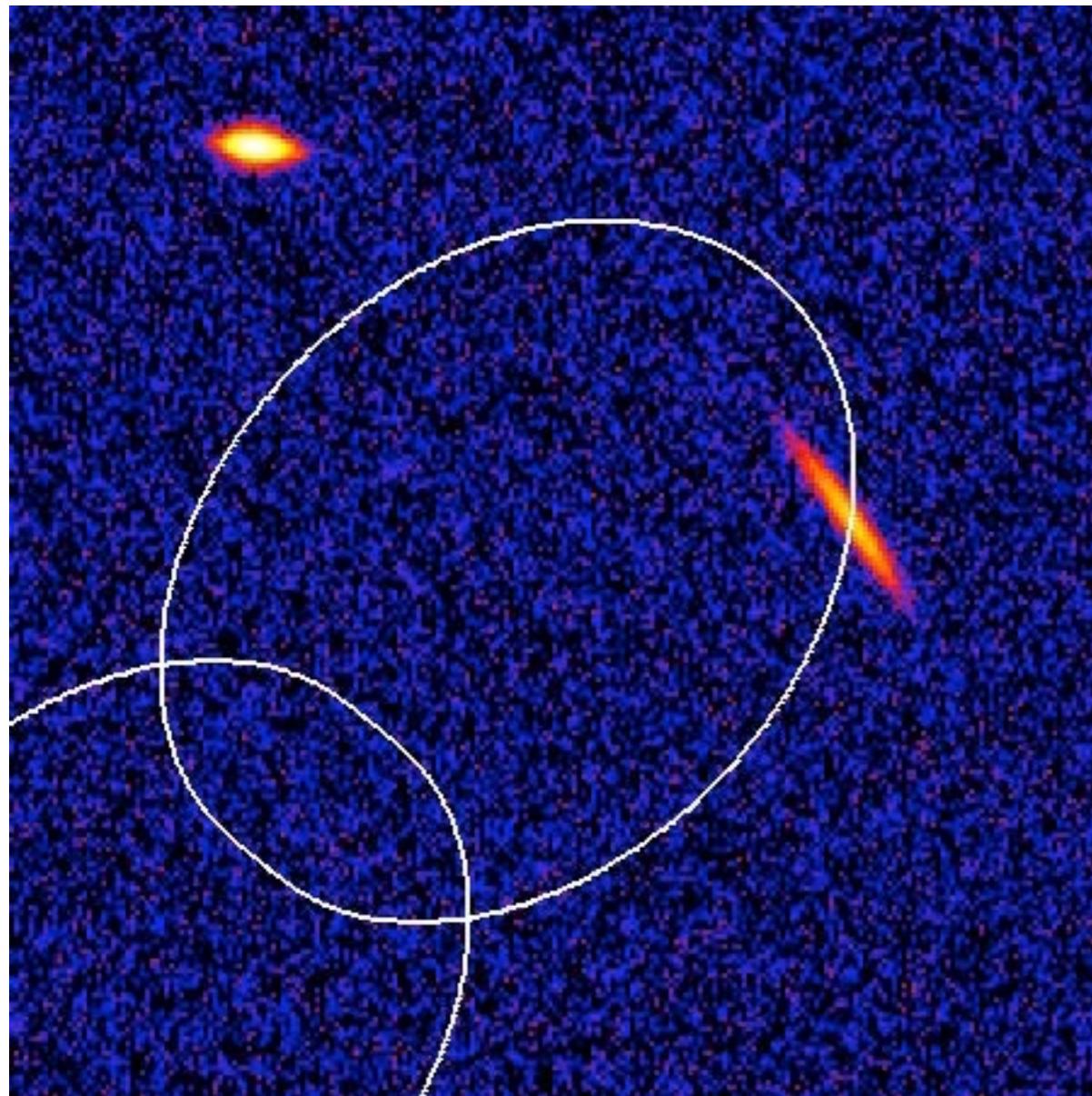
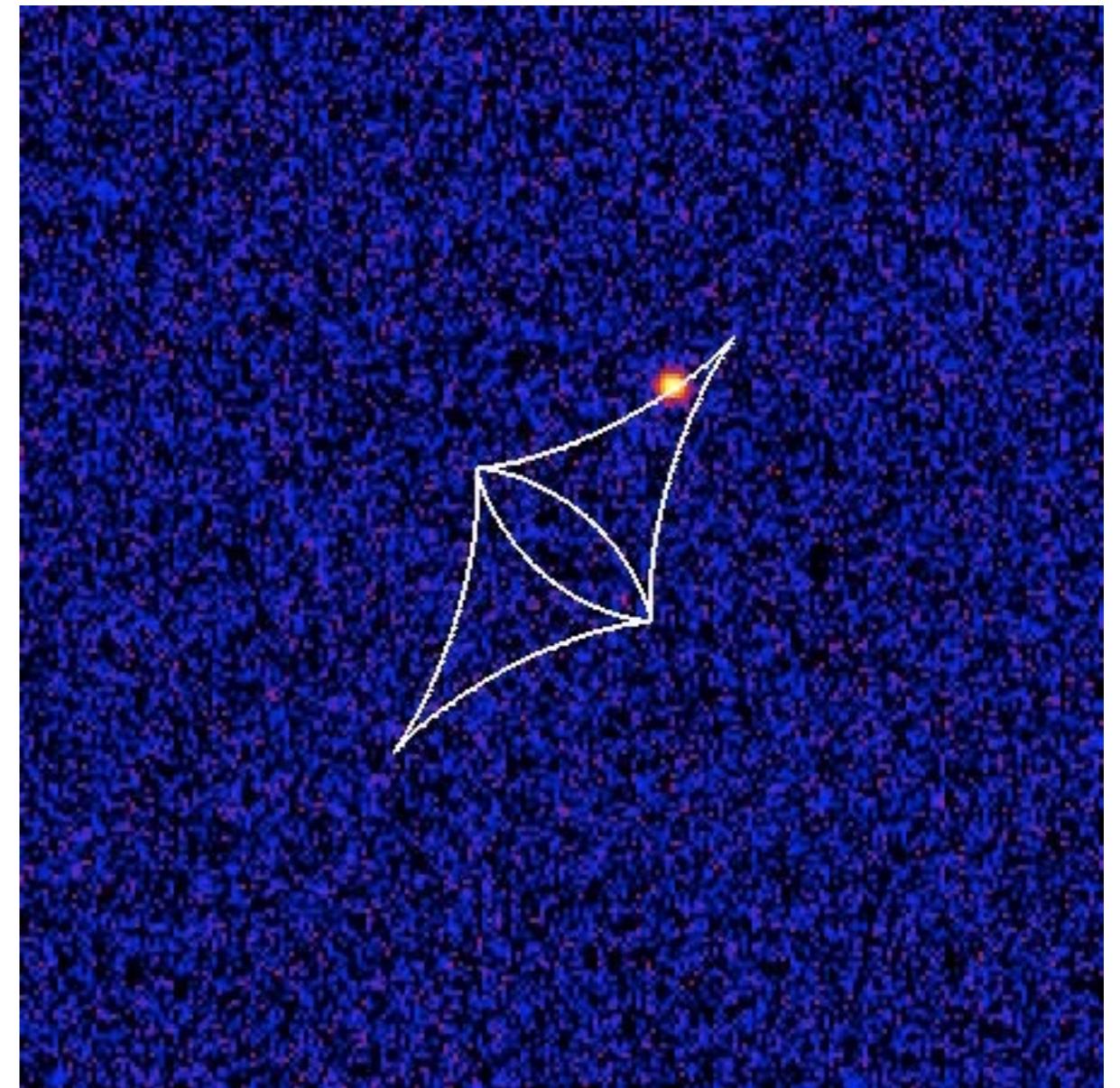


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: 広がったソース (銀河)

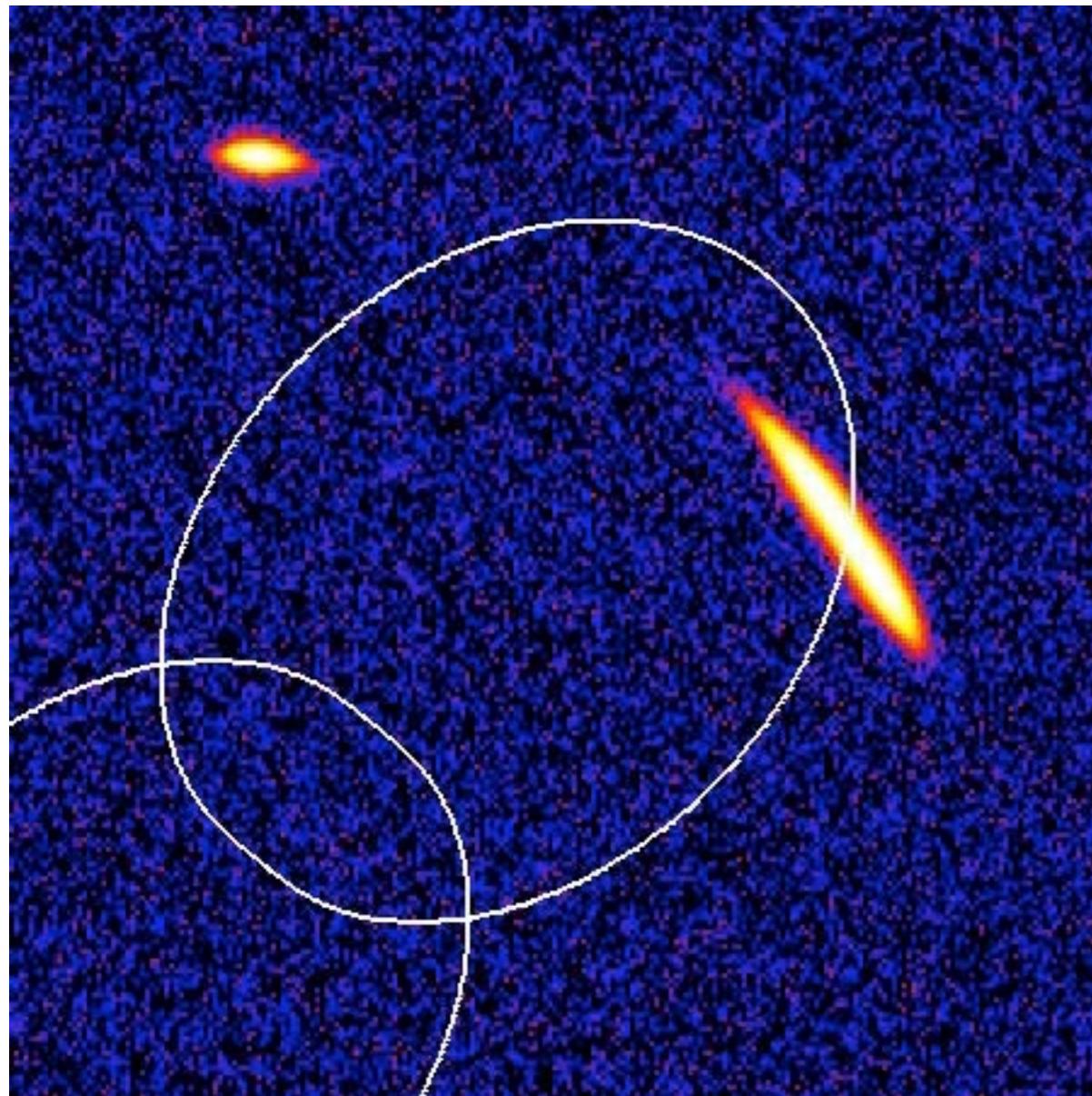
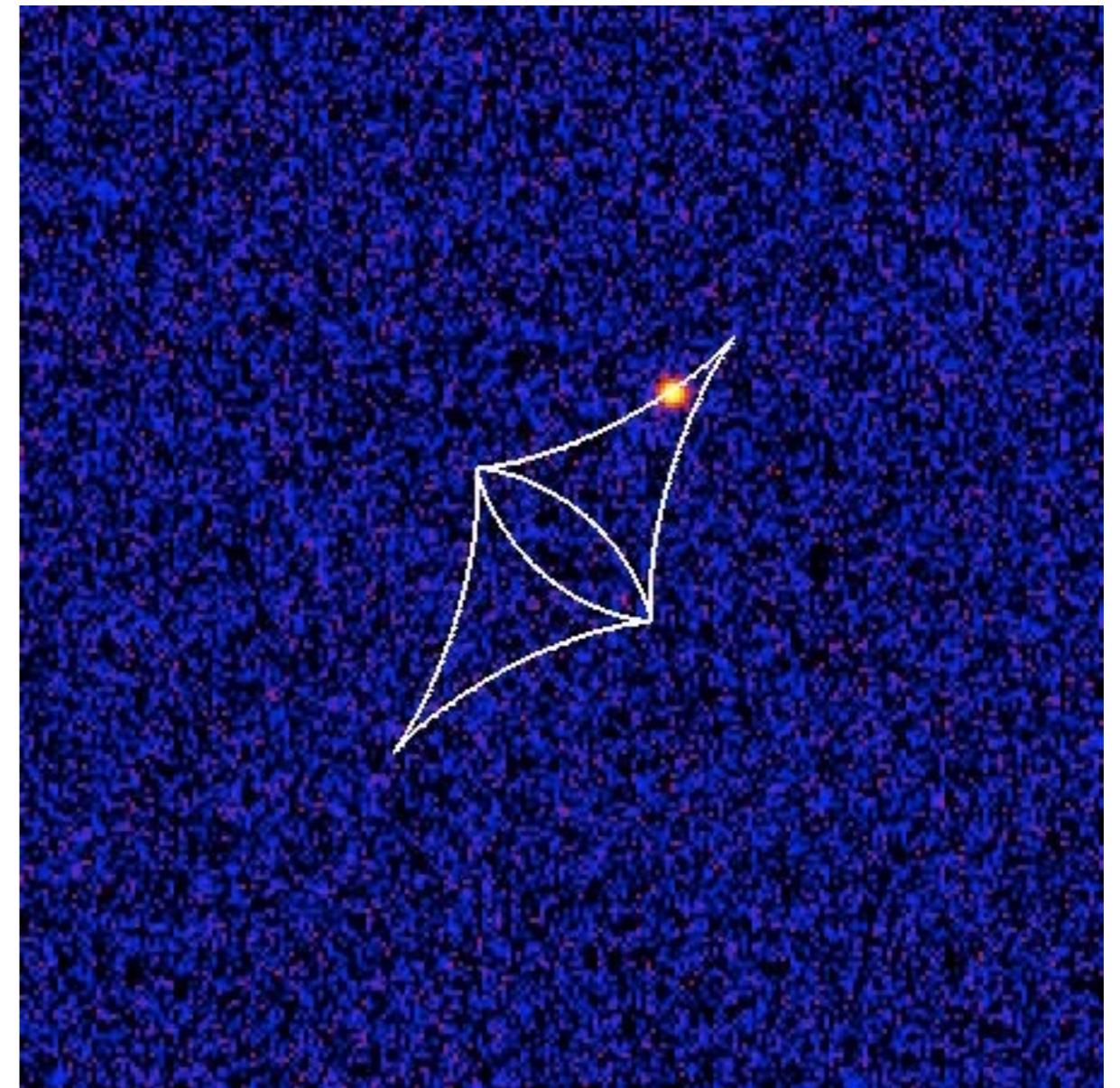


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: 広がったソース (銀河)

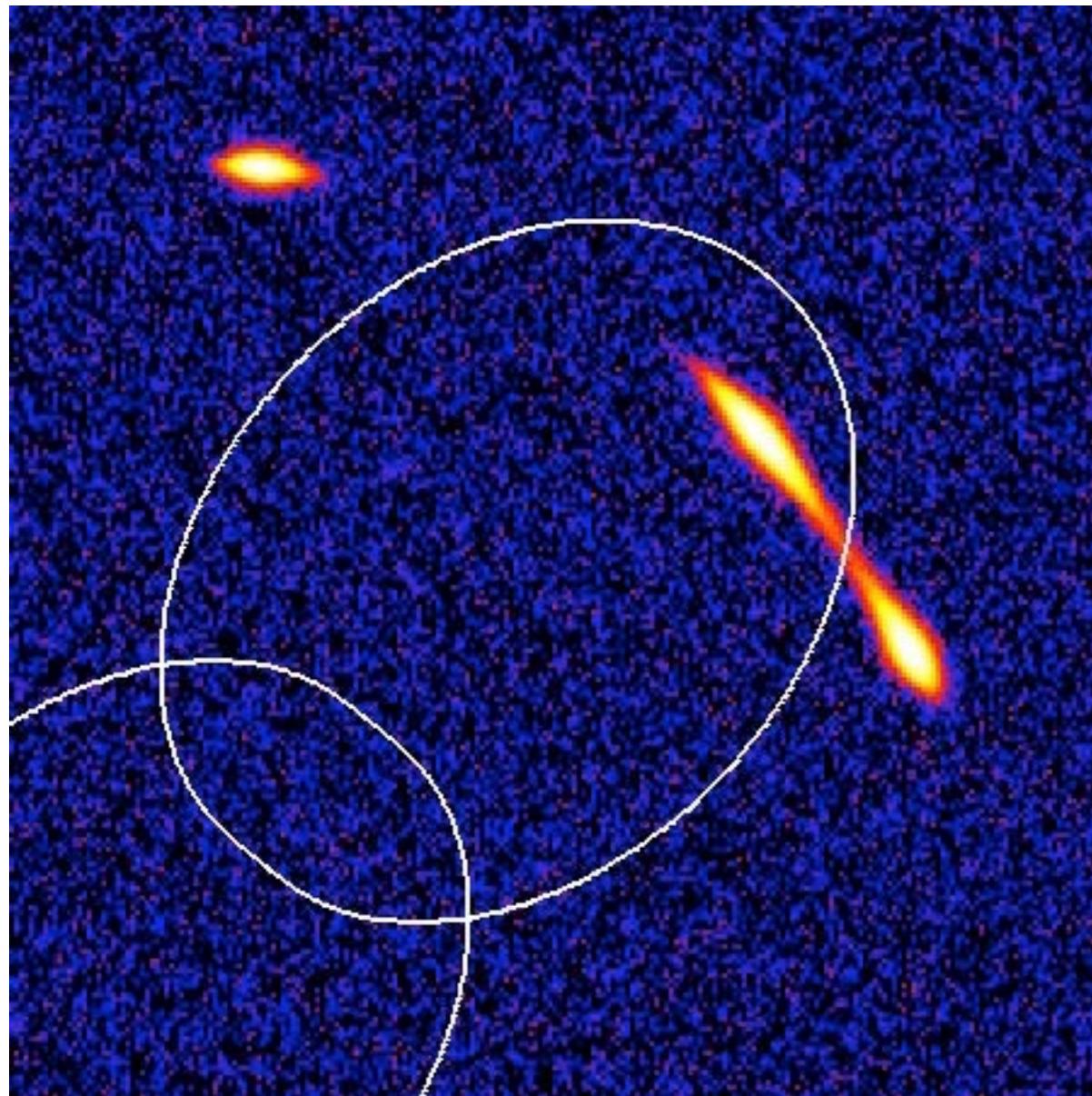
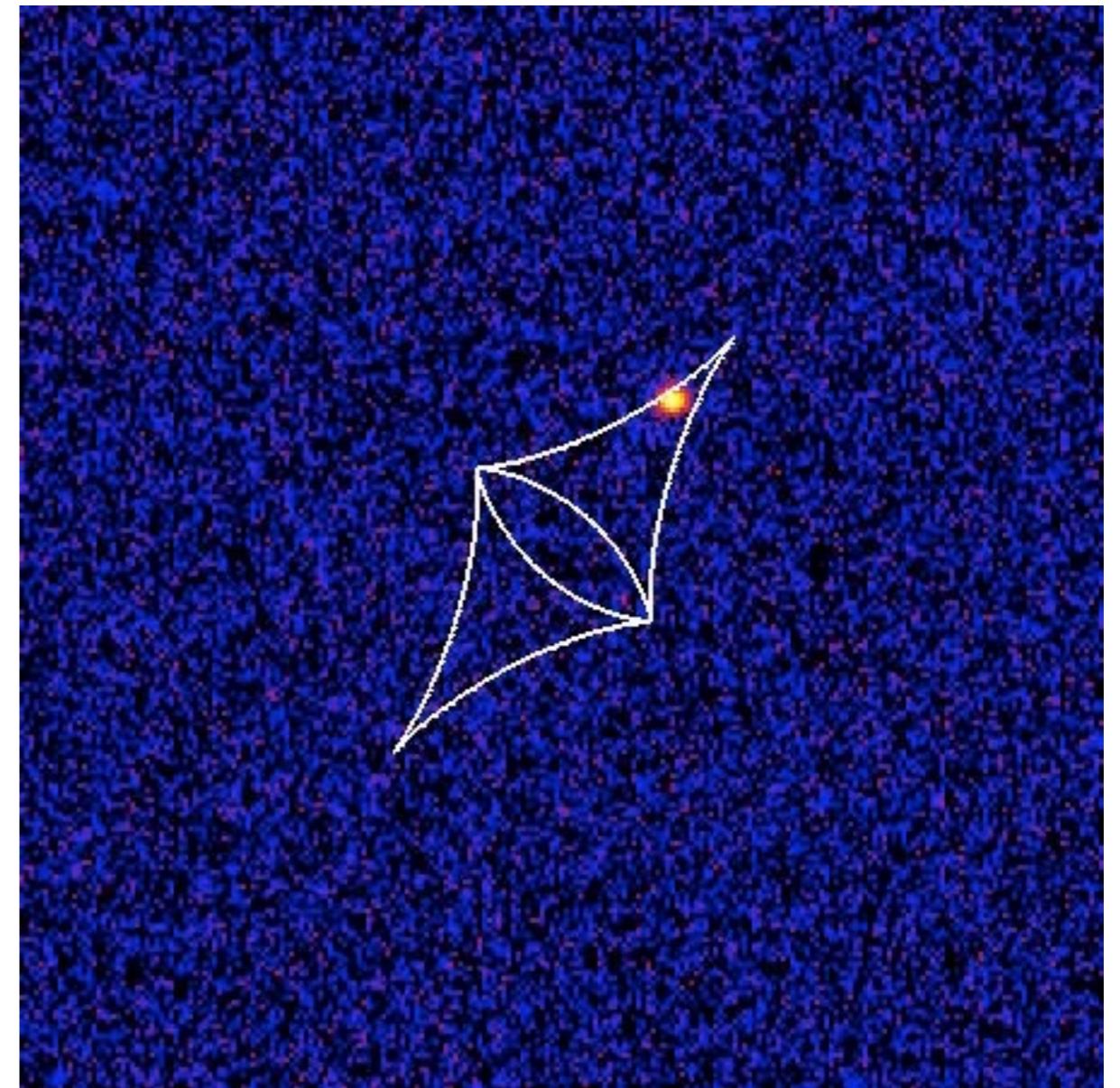


image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

simulated by *glafic*

# 例: 広がったソース (銀河)

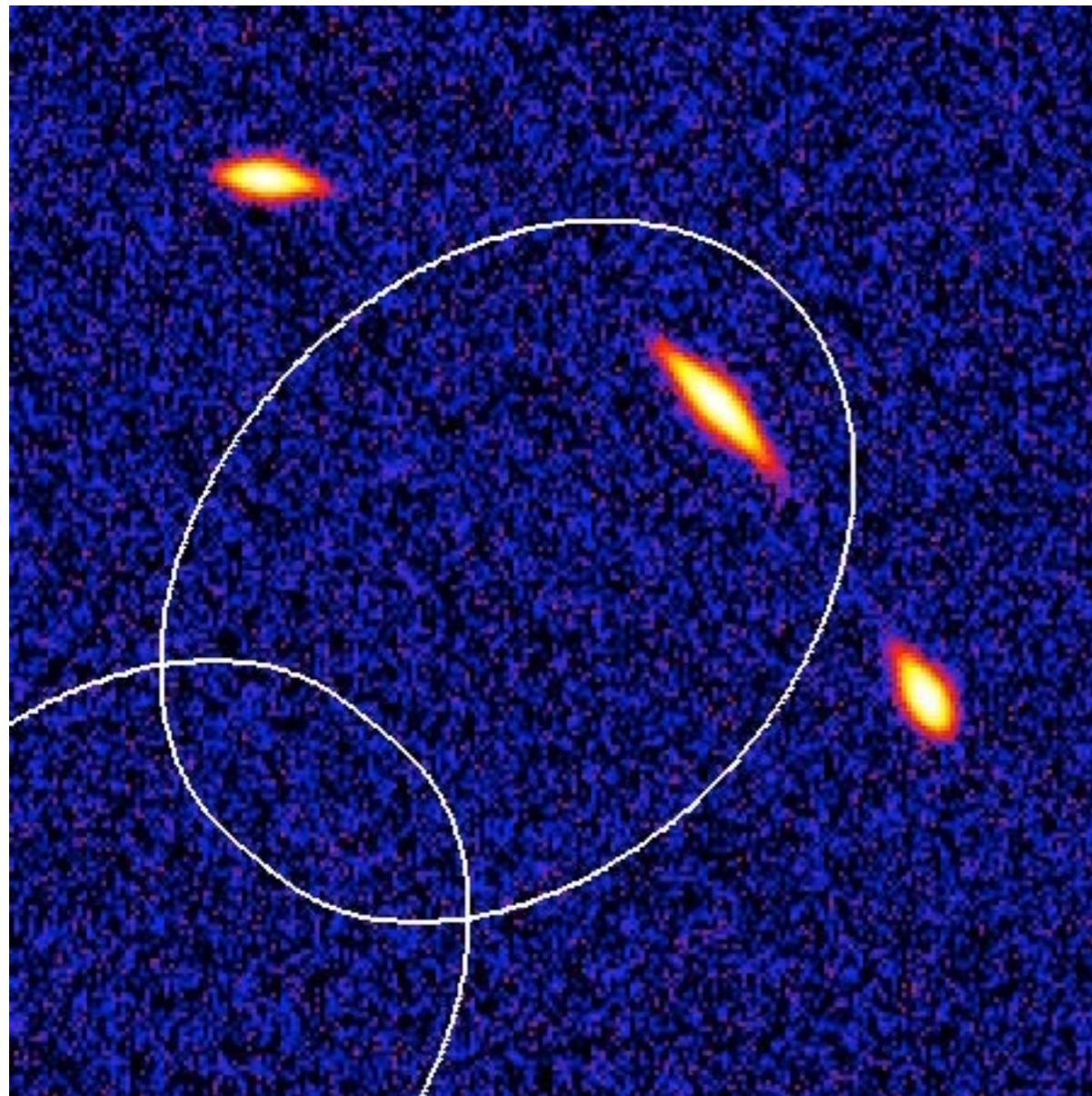
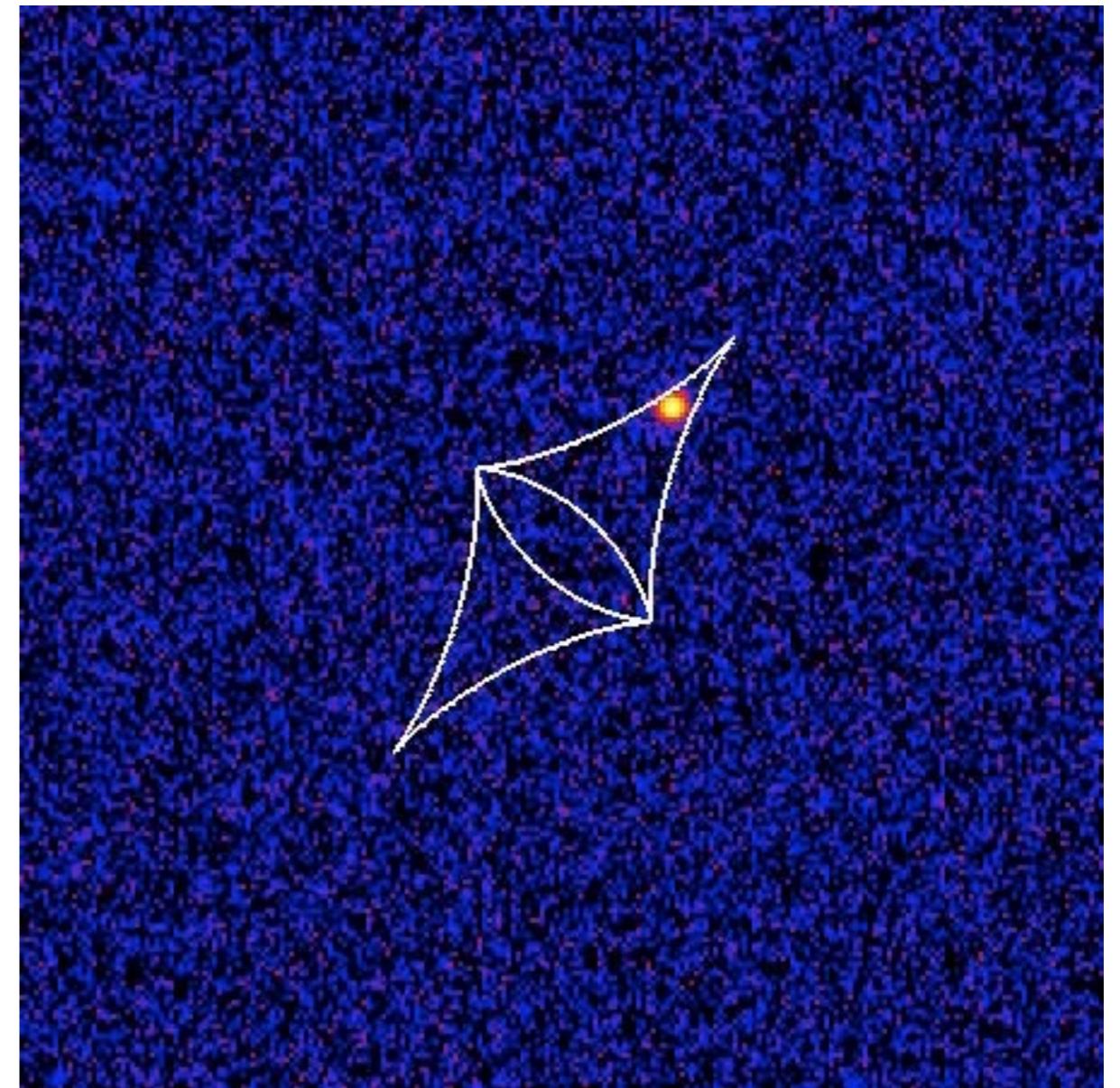


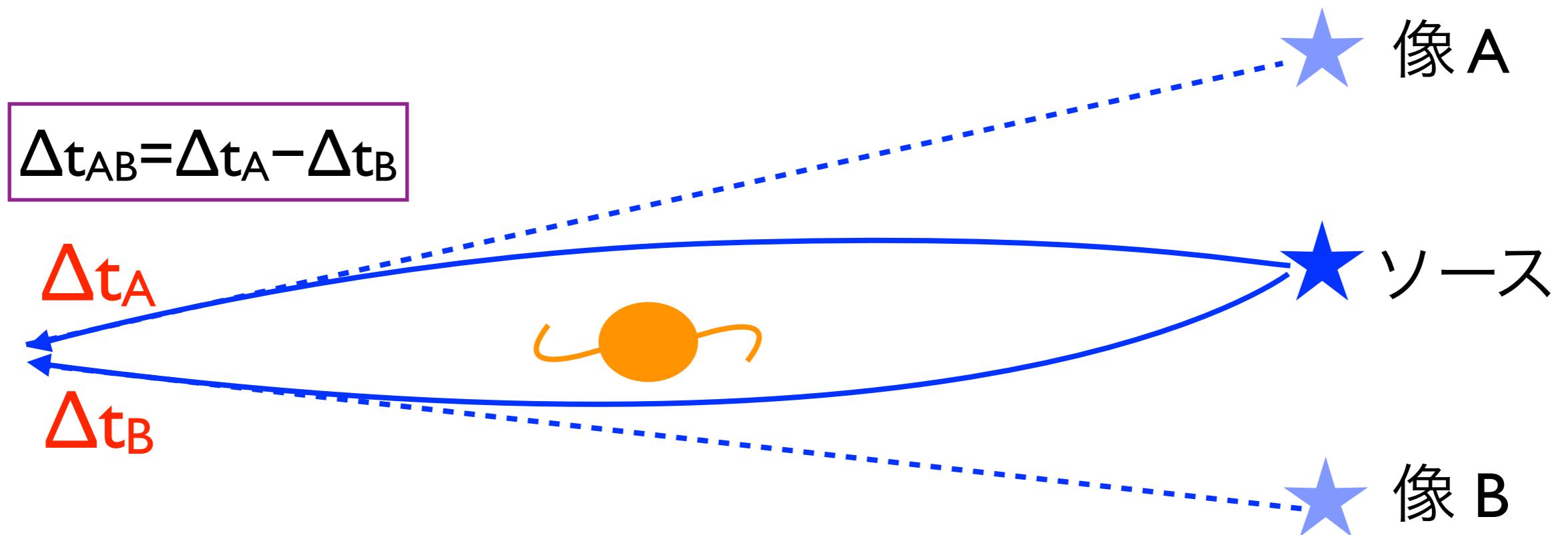
image plane  
(critical curves)



source plane  
(caustics)

# 時間の遅れ

- 異なる光の経路では伝搬時間が異なる
- 時間変動する天体(クエーサー等)の強い重力レンズで測定可能



# 時間の遅れの導出の概要 (I)

- 光はヌル測地線  $ds^2=0$  を伝搬

$$c dt = \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) a dl \quad dl \equiv \sqrt{\gamma_{ij} dx^i dx^j}$$

$$c \Delta t_{\text{lens}} = \Delta x_{\text{lens}} - \underbrace{\frac{2}{c^2} \int \phi a dl}_{\text{重力的時間の遅れ}}$$

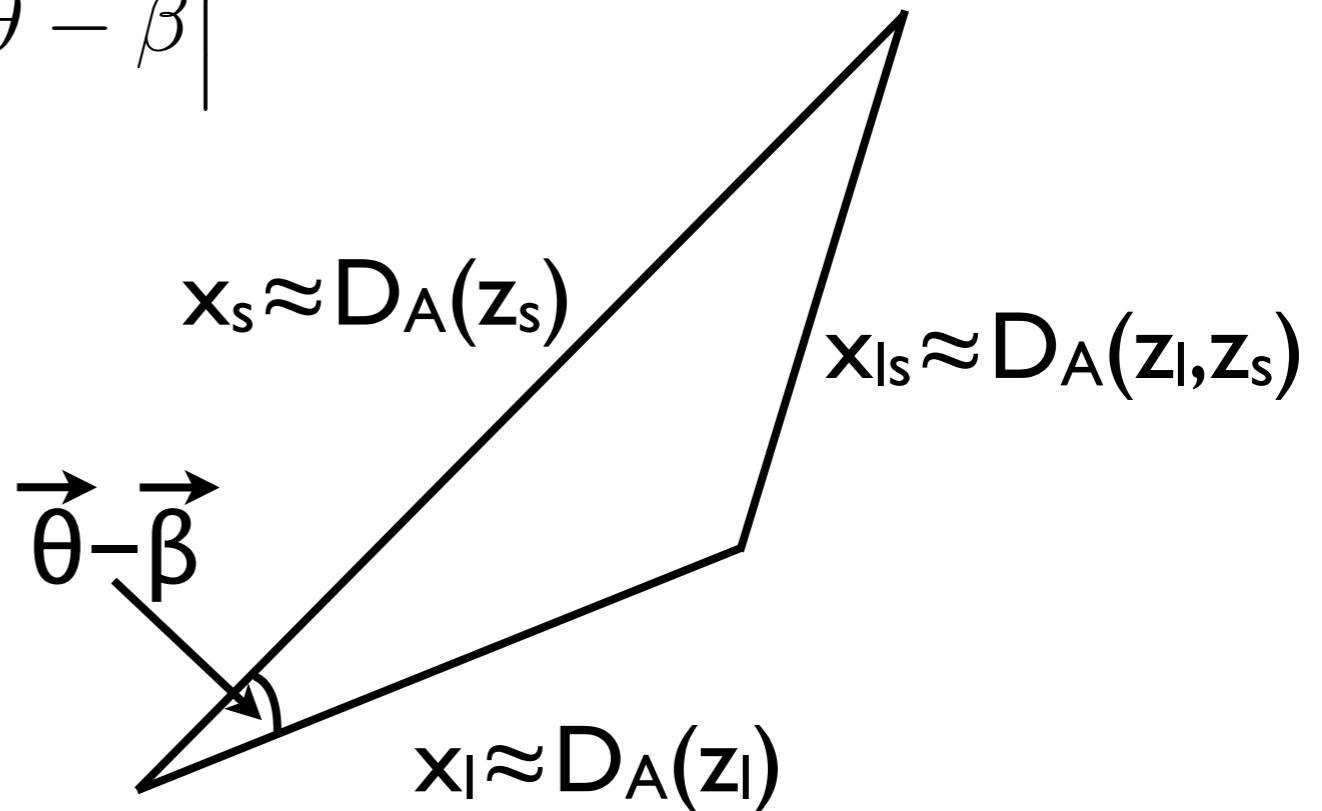
幾何学的 重力的  
時間の遅れ 時間の遅れ  
(Shapiro delay)

# 時間の遅れの導出の概要 (II)

- 幾何学的時間の遅れ

$$\cos |\vec{\theta} - \vec{\beta}| \simeq 1 - \frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 \simeq 1 - \frac{\Delta x_{\text{lens}} x_{ls}}{x_l x_s}$$

$$\rightarrow \Delta x_{\text{lens}} \simeq \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{2 D_A(z_l, z_s)} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2$$



# 時間の遅れの導出の概要 (III)

- 重力的時間の遅れ

レンズポテンシャル  $\psi$  の定義より

$$\frac{2}{c^2} \int \phi a dl \simeq \frac{f_K(\chi_l) f_K(\chi_s)}{f_K(\chi_s - \chi_l)} a_l \psi = \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s)} \psi$$

# 時間の遅れの導出の概要 (III)

- 宇宙論的な時間の伸び

$$\Delta t_{\text{obs}} = (1 + z_l) \Delta t_{\text{lens}}$$

- 従って観測される時間の遅れは

$$c\Delta t_{\text{obs}} = (1 + z_l) \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s)} \left[ \frac{1}{2} \left| \vec{\theta} - \vec{\beta} \right|^2 - \psi \right]$$



幾何学的 重力的  
時間の遅れ 時間の遅れ

# フェルマーの原理との関連

- $\vec{\beta}$ にあるソースについて、到達時刻曲面  
(time delay surface) が定義できる

$$\tau(\vec{\theta}) = (1 + z_l) \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s)} \left[ \frac{1}{2} \left| \vec{\theta} - \vec{\beta} \right|^2 - \psi(\vec{\theta}) \right]$$

- 複数像の場所は 到達時刻曲面の停留点に  
なっている (フェルマーの原理)

$$\vec{\nabla} \tau(\vec{\theta}) = 0$$

# 時間の遅れと $H_0$

- 時間の遅れは絶対距離スケール  $H_0$  を測定できる貴重な手法 (Refsdal 1964)

$$c\Delta t_{\text{obs}} = (1 + z_l) \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s)} \left[ \frac{1}{2} \left| \vec{\theta} - \vec{\beta} \right|^2 - \psi \right]$$

観測  
(典型的には  
数ヶ月)

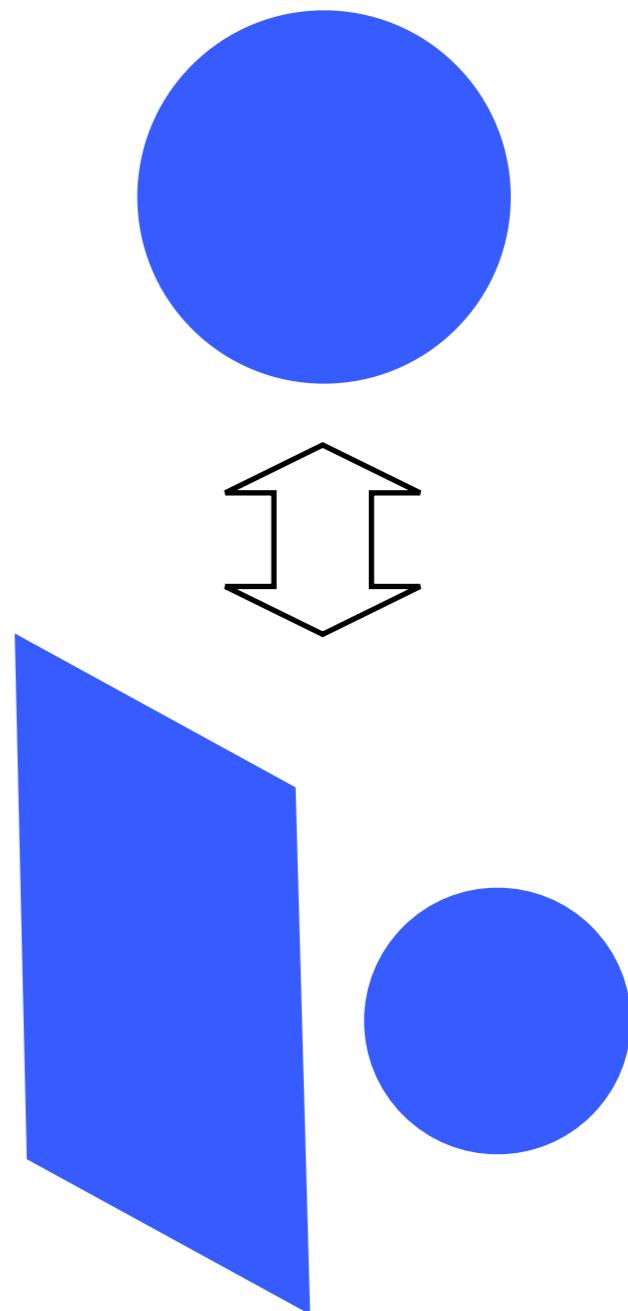
観測  $(\vec{\theta})$  +  
質量モデル

三つの距離の比

$\propto H_0^{-1}$

# Mass-sheet 縮退 (I)

- 重力レンズ方程式から導出できる質量モデルの縮退  
(Falco et al. 1985)
- 質量分布をへらし一様な mass sheet (constant  $\kappa$ ) を挿入しても観測は不变



# Mass-sheet 縮退 (II)

- 以下の変換を考える

$$\kappa(\vec{\theta}) \rightarrow \lambda\kappa(\vec{\theta}) + (1 - \lambda)$$

観測量

$$\vec{\theta} \rightarrow \vec{\theta}$$

- 他の量が以下のとおり変換される

$$\psi(\vec{\theta}) \rightarrow \lambda\psi(\vec{\theta}) + (1 - \lambda)\frac{\theta^2}{2}$$

$$\vec{a}(\vec{\theta}) \rightarrow \lambda\vec{a}(\vec{\theta}) + (1 - \lambda)\vec{\theta}$$

$$\mu \rightarrow \lambda^{-2}\mu$$

$$\vec{\beta} \rightarrow \lambda\vec{\beta}$$

$$\mu_i/\mu_j \rightarrow \mu_i/\mu_j$$

$$\gamma_a \rightarrow \lambda\gamma_a$$

# Mass-sheet 縮退 (III)

- 影響1: 時間の遅れによる $H_0$ の決定

$$\Delta t_{ij} \rightarrow \lambda \Delta t_{ij} \quad (\text{fixed } H_0)$$

or

$$\Delta t_{ij} \rightarrow \Delta t_{ij} \quad (H_0 \rightarrow \lambda H_0)$$

- 影響2: 弱い重力レンズによる質量再構築のゼロ点

$$\kappa(\vec{\theta}) \rightarrow \kappa(\vec{\theta}) + \kappa_0$$

# まとめ

- 測地線方程式から導出される重力レンズ方程式が重力レンズ解析の出発点
- 「ソース」と「像」とのマッピング
- 重要な量: convergence、shear、増光率、critical curve、caustics、時間の遅れ、、、