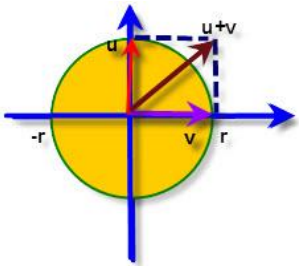
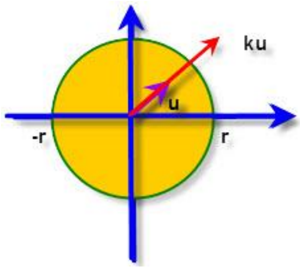
$y = 3x$ doğrusu skaler ile çarpma işlemine göre kapalıdır. O halde bu iki aksiyom sağlandığından $y = 3x$ doğrusu R^2 nin bir alt vektör uzayıdır.

Örnek.

r yarıçaplı herhangi bir dairenin R^2 nin bir alt vektör uzayı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.





r yarıçaplı herhangi bir daire R^2 nin bir alt vektör uzayı değildir. Çünkü r yarıçaplı herhangi bir daire üzerinde alınan ve toplamları daire üzerinde olmayan noktalar vardır. Yani daire toplama işlemine göre kapalı değildir. Aynı zamanda daire üzerinde alından bir noktanın daire üzerinde olmayan sonsuz sayıda katları mevcuttur. O halde daire skalerle çarpma işlemibe göre kapalı değildir. Alt vektör uzayı olma aksiyomlarının her ikisi de sağlanmadığından herhangi bir r yarıçaplı daire R^2 nin bir alt vektör uzayı değildir.

4.2. Vektörlerin lineer kombinasyonu

Tanım.

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ ler skalerler olmak üzere V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vektörlerinin lineer kombinasyonu

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

dir ve $w \in V$ dir. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ skalerlerine lineer kombinasyonun katsayıları adı verilir.

Teorem. Eğer $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ bir V vektör uzayındaki vektörlerin boş olmayan bir cümlesi ise bu durumda S kümesindeki vektörlerin mümkün olan bütün kombinasyonlarının W cümlesi V vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır ve W alt vektör uzayı W daki vektörleri içeren herhangi diğer alt uzaylar içinde S deki bütün vektörleri içeren V vektör uzayının alt vektör uzaylarının en küçüğüdür.

Tanım. Boş olmayan bir S kümesindeki vektörlerin mümkün olan bütün lineer kombinasyonlarından oluşan bir V vektör uzayının alt uzayına S nin germesi adı verilir. S deki vektörler bu alt uzayı geriyor denir. Eğer $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ ise bu durumda S nin germesi

$$span\{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \text{ veya } span(S)$$

ile gösterilir.

Örnek.

R^n nin standard birim vektörleri $\mathbf{e}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\cdots,0)$,…,$\mathbf{e}_n = (0,0,\cdots,1)$

vektörleridir ve R^n de her $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörü

$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{e}_1 + x_2.\mathbf{e}_2 + \cdots + x_\mathrm{n}.\mathbf{e}_\mathrm{n}$$

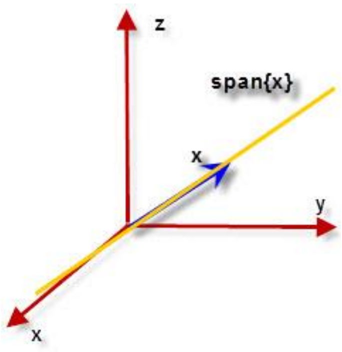
şeklinde standard birim vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Daha özel olarak R^3 deki standard birim vektörleri $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$ vektörleridir ve R^3 de her $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü

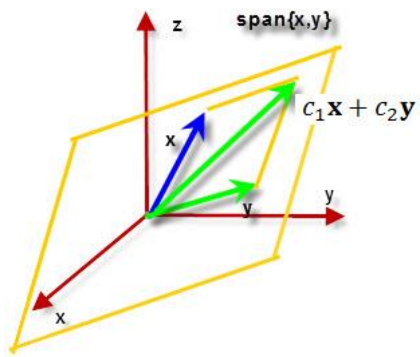
$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{i} + x_2.\mathbf{j} + x_3.\mathbf{k}$$

şeklinde standard birim vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Örnek.

R^2 ve R^3 te başlangıç noktası orijinde olan sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörü o vektör boyunca orijinden geçen doğruyu gerer. Yani $span\{\mathbf{x}\}$ o doğruyu verir. Eğer $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ başlangıcı orijinde olan iki vektör ise bu durumda $span\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinden geçen düzlemdir. Bu durum aşağıdaki şekillerde görülmektedir.





Teorem. Eğer $S = \{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_n\}$ ve $S_1 = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ bir V vektör uzayının vektörlerinin boş olmayan iki cümlesi ise bu durumda

$$span\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\cdots,\mathbf{w}_n\} = span\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$$

olması için gerek ve yeter şart S deki her vektörün S_1deki vektörlerin lineer kombinasyonu ve S_1deki vektörlerin her birinin S deki vektörlerin lineer kombinasyonu olmasıdır.

4.3. Lineer Bağımsızlık

Tanım.

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ bir V vektör uzayının boş olmayan bir cümlesi olsun. Eğer

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

eşitliği ancak $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olması halinde sağlanıyorsa bu durumda $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesine lineer bağımsızdır denir. Bu tanımı şöyle anlamak da mümkündür. S kümesindeki elemanların diğer elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılamaması lineer bağımsızlık şartıdır. Aksi takdirde yani bu eşitliğin sıfıra eşit olması sıfırdan farklı $c_1, c_2, \cdots, c_n$ katsayıları için mümkün olsaydı bunun anlamı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesinin elemanlarının birbirinin lineer kombinasyonu olarak yani birbirinin cinsinden yazılabilmesi demek olacaktı. Demek ki elemanların lineer bağımsız yani birbiri cinsinden yazılamaması ancak $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olması halinde mümkündür.

Eğer

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

Eşitliği tamamı sıfıra eşit olmayan bazı $c_1, c_2, \cdots, c_n$ katsayıları için sağlanıyorsa $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesine lineer bağımlıdır denir.

Örnek.

R^nde standart birim vektörler $\mathbf{e}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\cdots,0)$,…,$\mathbf{e}_n = (0,0,\cdots,1)$ lineer bağımsızdır. Çünkü

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = 0$$

$$c_1(1,0,\cdots,0) + c_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + c_n(0,0,\cdots,1) = 0$$

eşitliğinin sağlanması için

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$$

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

olması gerekir. Bu ise R^ndeki standart birim vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Benzer olarak R^3deki standart birim vektörler $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$,$\mathbf{k} = (0,0,1)$ de lineer bağımsızdır.

Örnek.

R^3 te $\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (-1,2,0), \mathbf{v}_3 = (1,0,1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Vektörlerin lineer bağımsız olup olmadığını göstermek için

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$$

eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ katsayılarını bulmalıyız. Bu denklemi bir lineer sistem olarak

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sisteme ait ilaveli matris ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\2 & 2 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

matrsidir. Bu matrisin satırca indirgenmiş eşolon matrisi ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

matrisidir. Böylece elimizdeki lineer sistem

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu ise lineer sistemin çözümünün

$$c_1=c_2=c_3=0$$

olduğunu gösterir. Yani R^3 te $\mathbf{v}_1=(1,2,3),\mathbf{v}_2=(-1,2,0),\mathbf{v}_3=(1,0,1)$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek.

R^3 te $\mathbf{v}_1=(1,2,3),\mathbf{v}_2=(-1,-2,-3),\mathbf{v}_3=(1,0,1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Vektörlerin lineer bağımsız olup olmadığını göstermek için

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=0$$

eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ katsayılarını bulmalıyız. Bu denklemi bir lineer sistem olarak

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sisteme ait ilaveli matris ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

matrsidir. Bu matrisin satırca indirgenmiş eşolon matrisi ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisidir. Böylece elimizdeki lineer sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu ise

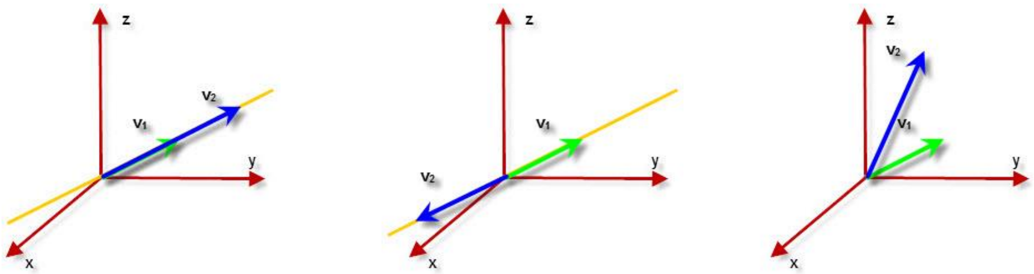
$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

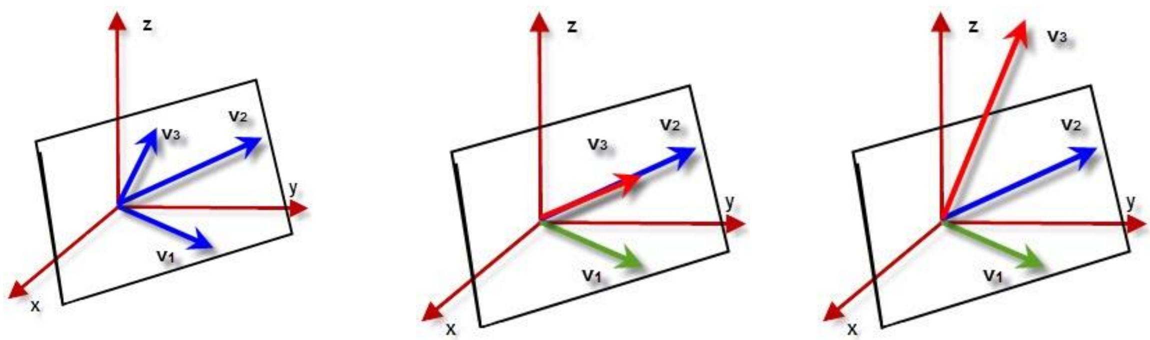
demektir. Buradan çözüm $c_3 = k$ denirse $c_1 = c_2 = -k$ elde edilir. Bu ise sistemin sonsuz çözümünün olduğunu gösterir. O halde verilen vektörler lineer bağımsız değildir.

4.3.1. Lineer Bağımsızlığın Geometrik Yorumu

Başlangıcı orijinde yer alan R^2 ve R^3 teki iki vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart aynı doğru üzerinde olmamasıdır.



Başlangıcı orijinde yer alan R^3 teki üç vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart aynı düzlem üzerinde olmamasıdır.



Tanım.

Bir A matrisinde bulunan lineer bağımsız satırların veya sütunların sayısı o matrisin rankıdır ve $Rank(A)$ ile gösterilir.

Örnek.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu matris için $Rank(A) = 2$ dir.

Örnek.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu matris için $Rank(A) = 3$ tür.

Örnek.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olsun. Bu matris için $Rank(B)=2$ dir.

Not.

Vektörlere benzer olarak verilen fonksiyonların lineer bağımsız olabilmeleri için birbirinin cinsinden yazılamaması gerekir. Yani verilen fonksiyonlardan herhangi biri diğer fonksiyonların lineer kombinasyonu olarak yazılamamalıdır.

Örnek.

R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların kümesi $F(-\infty,\infty)$ kümesine ait fonksiyonlar

$$f_1=sin^2x, f_2=cos^2x, f_3=3$$

olsun. Bu fonksiyonlar

$$f_3-3f_1-3f_2=3-3.(sin^2x+cos^2x)=0$$

olduğudan lineer bağımlıdır.

4.3.2. Wronskiyen

Tanım.

R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $n-1$ defa türevlenebilen $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ fonksiyonları için

$$W(x)=\begin{vmatrix}f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan determinanta $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyen'i adı verilir.

Teorem.

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ fonksiyonları R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $n-1$ defa sürekli türevlenebilen fonksiyonlar ve bu fonksiyonların Wronskiyen'i R reel sayılar kümesi üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı ise $n-1$ defa sürekli türevlenebilen fonksiyonların $C^{(n-1)}R$ vektör uzayında lineer bağımısız bir küme olur.

Örnek.

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu fonksiyonların Wronskiyen' i

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & x \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = \cos x + x.\sin x$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen Wronskiyen fonksiyonu R reel sayılar kümesi üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklıdır. Örneğin

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

dir. Böylece bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğu gösterilmiş oldu.

Örnek.

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu fonksiyonların Wronskiyen' i

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen Wronskiyen fonksiyonu R reel sayılar kümesi üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklıdır. Böylece bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğu gösterilmiş oldu.

Örnek.

$f_1(x)=3$, $f_2(x)=e^{2x}$, $f_3(x)=e^{4x}$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu fonksiyonların Wronskiyen' i

$$W(x)=\begin{vmatrix} 3 & e^{2x} & e^{4x} \\ 0 & 2e^{2x} & 4e^{4x} \\ 0 & 4e^{2x} & 16e^{4x} \end{vmatrix}=3.\left(32.e^{6x}-16.e^{6x}\right)=48.e^{6x}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen Wronskiyen fonksiyonu R reel sayılar kümesi üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklıdır. Böylece bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğu gösterilmiş oldu.