4.4. Bir Vektör Uzayının Bazı

Tanım.

V bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ kümesi V vektör uzayının sonlu bir kümesi olsun. Eğer S kümesi V yi geriyor ve S lineer bağımsız bir küme ise $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ kümesine V vektör uzayının bir **bazı** adı verilir.

Örnek.

R^nde standart birim vektörler $\mathbf{e}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\cdots,0)$,…,$\mathbf{e}_n = (0,0,\cdots,1)$ lineer bağımsız olduğunu daha önce göstermiştik. Ayrıca R^n de her $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörü

$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{e}_1 + x_2.\mathbf{e}_2 + \cdots + x_\mathrm{n}.\mathbf{e}_\mathrm{n}$$

şeklinde standard birim vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. O halde R^nde $\mathbf{e}_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,\cdots,0)$,…,$\mathbf{e}_n = (0,0,\cdots,1)$ kümesi R^n nin bir bazıdır.

Daha özel olarak R^3deki standart birim vektörler $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$,$\mathbf{k} = (0,0,1)$ de lineer bağımsız olduklarından ve R^3 ü gerdiklerinden R^3 ün bir bazıdır.

Teorem.

V bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ kümesi V vektör uzayının bir bazı olsun. Bu durumda V vektör uzayındaki her vektör

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

olarak tek bir şekilde baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Tanım.

V bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ kümesi V vektör uzayının bir bazı olsun. Bu durumda V vektör uzayındaki bir vektör

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

olarak baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazıldığında $c_1, c_2, \cdots, c_n$ skalerlerine $\mathbf{v}$ vektörünün S bazına göre koordinatları adı verilir. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ koordinatlarının oluşturduğu R^ndeki $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ vektörü $\mathbf{v_s}$ ile gösterilir.

Teorem.

Sonlu boyutlu bir vektör uzayındaki bütün bazlardaki vektör sayıları aynıdır.

4.5. Bir Vektör Uzayının Boyutu

Tanım.

Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının boyutu bir bazındaki vektörlerin sayısıdır ve $\dim(V)$ ile gösterilir.

Örnek.

$$\dim\left(R^n\right) = n$$

$$\dim\left(R^3\right) = 3$$

Teorem.

Eğer W sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir alt vektör uzayı ise bu durumda W alt vektör uzayı da sonlu boyutludur. W alt vektör uzayının boyutu V vektör uzayının boyutundan küçük yada eşittir yani $\dim(W) \leq \dim(V)$ dir . Ayrıca $W = V$ olması için gerek ve yeter şart $\dim(W) = \dim(V)$ olmasıdır.

Örnek.

$$
\begin{aligned}
&3.x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\
&x_1 \qquad\quad - x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Homogen lineer sistemini göz önüne alalım. Çözüm uzayının boyutunu ve bir bazını bulunuz.

Çözüm.

Sistemin ilaveli matrisi

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]
$$

dır. Satırca indirgenmiş eşolon matrisi ise

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

dır. Böylece genel çözümü $x_1 = k, x_2 = -2k, x_3 = k$ olarak elde edilir. Çözüm vektörü ise

$$
(x_1, x_2, x_3) = (k, -2k, k) = k.(1, -2, 1)
$$

olarak elde edilir. Bu ise $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$ vektörünün çözüm uzayını gerdiğini gösterir. Ayrıca $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$ vektörü kendi başına lineer bağımsızdır. O halde $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$ çözüm uzayının bir bazıdır ve çözüm uzayının boyutu 1 dir.

Bölüm Özeti

Bu bölümde;

- Vektör uzayının tanımını,
- Örnek bazı vektör uzaylarını,
- Alt vektör uzayını,
- Vektörlerin lineer kombinasyonunu,
- Germenin ne olduğunu,
- Lineer bağımsızlığı,
- Lineer bağımsızlığın geometrik yorumunu,
- Bir matrisin rankını,
- Wronskiyen kavramını,
- Bir vektör uzayının bazını,
- Bir vektör uzayının boyutunu,

öğrendiniz.

Şimdi bu konuları daha iyi pekiştirmek için değerlendirme sorularına geçiniz.