1.5. Parçalanmış Matrisler

Tanım. $m \times n$ mertebeden bir A matrisinin bazı satır ve sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi adı verilir.

Örnek. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

A matrisinin ikinci satır üçüncü sütunu çıkarılırsa

$A_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde alt matrisi elde edilir.

Bir matris, satırları arasına yatay çizgiler, sütunları arasında dikey çizgiler çizilerek alt matrislere ayrılabilir. Böylece bir matris çok farklı şekillerde alt matrislere ayrılabilir.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 0 & 2 \\ 3 & 2 & \vdots & 5 & -3 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 7 & \vdots & 4 & 2 \\ -3 & 2 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 1 & \vdots & -1 & 0 & 2 \\ 3 & \vdots & 2 & 5 & -3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 7 & 4 & 2 \\ -3 & \vdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

1.5.1. Parçalanmış Matrisler Üzerinde Toplama İşlemi

Eğer A ve B matrisleri aynı $m \times n$ mertebeden ve aynı yolla parçalanmış matrisler ise $A+B$ toplama işlemi alt matrislerin toplanması ile elde edilebilir.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & \vdots & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & \vdots & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & \vdots & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & \vdots & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & \vdots & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & \vdots & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & \vdots & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & \vdots & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \vdots & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} & a_{15}+b_{15} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \vdots & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} & a_{25}+b_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & \vdots & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} & a_{35}+b_{35} \\ a_{41}+b_{41} & a_{42}+b_{42} & \vdots & a_{43}+b_{43} & a_{44}+b_{44} & a_{45}+b_{45} \\ a_{51}+b_{51} & a_{52}+b_{52} & \vdots & a_{53}+b_{53} & a_{54}+b_{54} & a_{55}+b_{55} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & \vdots & 0 & 4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & -3 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & \vdots & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & \vdots & 2 & -4 & -3 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 4 & \vdots & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & \vdots & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+3 & 2+4 & \vdots & 2+7 & 1+0 & -2+4 \\ -1+6 & 3+7 & \vdots & 0+2 & 4+(-4) & 5+(-3) \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6+0 & -3+4 & \vdots & 0+2 & 1+2 & 1+8 \\ 7+5 & 2+0 & \vdots & 4+(-1) & 3+2 & 9+7 \\ 3+0 & 2+1 & \vdots & 1+2 & 0+3 & -1+2 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & \vdots & 9 & 1 & 2 \\ 5 & 10 & \vdots & 2 & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 1 & \vdots & 2 & 3 & 9 \\ 12 & 2 & \vdots & 3 & 5 & 16 \\ 3 & 3 & \vdots & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5.2. Parçalanmış Matrisler Üzerinde Skaler İle Çarpma İşlemi

A matrisi $m\times n$ mertebeden parçalanmış bir matris olsun. $\lambda.A$ skaler çarpım matrisi, her bir alt matrisin skaler ile çarpılması ile elde edilir.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & \vdots & 0 & 4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & -3 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & \vdots & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$3.A=\begin{bmatrix}3.A_{11} & 3.A_{12}\\ 3.A_{21} & 3.A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.1 & 3.2 & \vdots & 3.2 & 3.1 & 3.(-2)\\ 3.(-1) & 3.3 & \vdots & 3.0 & 3.4 & 3.5\\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 3.6 & 3.(-3) & \vdots & 3.0 & 3.1 & 3.1\\ 3.7 & 3.2 & \vdots & 3.4 & 3.3 & 3.9\\ 3.3 & 3.2 & \vdots & 3.1 & 3.0 & 3.(-1)\end{bmatrix}$$

$$3.A=\begin{bmatrix}3 & 6 & \vdots & 6 & 3 & -6\\ -3 & 9 & \vdots & 0 & 12 & 15\\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 18 & -9 & \vdots & 0 & 3 & 3\\ 21 & 6 & \vdots & 12 & 9 & 27\\ 9 & 6 & \vdots & 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

1.5.3. Parçalanmış Matrisler Üzerinde Çarpma İşlemi

A $n\times m$ mertebeden, B $m\times k$ mertebeden birer parçalanmış matris olsun. Bu matrisler blok çarpma metodu kullanılarak çarpılabilir. Farz edelim ki A ve B matrislerinin alt matrisleri parçalandıktan sonra da çarpılabilir olsun. Bu durumda, alt matrisler kendi arasında matris çarpımında olduğu gibi çarpılarak matris çarpımı gerçekleştirilir.

$$A.B=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}.B_{11}+A_{12}.B_{21} & A_{11}.B_{12}+A_{12}.B_{22}\\ A_{21}.B_{11}+A_{22}.B_{21} & A_{21}.B_{12}+A_{22}.B_{22}\end{bmatrix}$$

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & \vdots & 0 & 4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & -3 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & \vdots & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & \vdots & 2 & -4 & -3 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 4 & \vdots & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & \vdots & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 24 & 10 & -8 & 17 \\ 35 & 22 & 5 & 11 & 25 \\ 5 & 4 & 37 & 17 & 42 \\ 48 & 67 & 76 & 33 & 93 \\ 21 & 29 & 25 & -9 & 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

olur. Burada örnek olarak C_{12} nin nasıl hesaplandığını gösterelim. Diğer parçalanmalarda benzer şekilde hesaplanır.

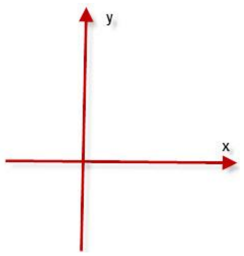
$$C_{12}=A_{11}.B_{12}+A_{12}.B_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -8 & 17 \\ 5 & 11 & 25 \end{bmatrix}$$

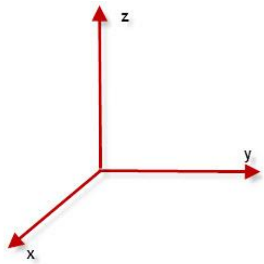
1.6. Vektörler

Lineer cebir matematiksel kavramlardan matrisler ve vektörler ile ilgilenir. Bu bölümde vektörler ile ilgileneceğiz. Skaler ve vektör kavramları fizikçiler ve mühendisler tarafından kullanılan iki önemli temel kavramdır. Skalerler sadece sayısal bir değer sahip iken vektörler sadece sayısal değere sahip değildir. Örneğin sıcaklık ve uzunluk kavramları 25^oC ve $125m$ şeklinde sadece sayısal bir değer ile ifade edilebilir. Ancak vektörel kavramlar sayısal değerler haricinde yön kavramına da sahiptir. Örneğin hız ve kuvvet sayısal değerlere sahip olmalarına rağmen onlar için önemli olan şeylerden birisi de yöndür. Batıya doğru $80km/sa$

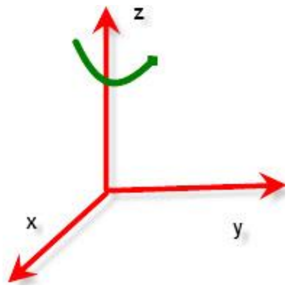
hızla bir araba gitti denildiğinde hem büyüklük hem de yön söz konusudur. Ancak burada vektörleri matematiksel bir büyüklük olarak ele alıp öyle inceleyeceğiz. Skaler büyüklükler alfabenin küçük harfleri ile $a,b,c,\cdots$ şeklinde gösterilirler. Vektörler ise yine bu harfler ile ancak skaler büyüklüklerle karıştırılmamaları için **a,b,c,…..** şeklinde kalın harflerle ifade edilirler.

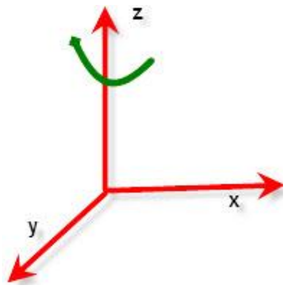
Vektörler kartezyen koordinatlar sistemi üzerinde gösterilirler. Kartezyen koordinatlar sistemi veya dik koordinatlar sistemi sayesinde iki boyutta düzlem ve daha yüksek boyutta yer alan uzaylarda noktaları ve vektörleri göstermek ve onlarla işlem yapmak mümkün olmaktadır. Katezyen koordinatlar sisteminin gösteriminde eksenler kullanılır. Her bir eksen bir boyutu temsil etmektedir. Tek boyutta noktaları temsil etmek için reel eksen veya reel sayılar doğrusu yeterli iken daha yüksek boyutları temsil etmek için daha çok eksek gerekli olur. Her boyut için birbirine dik olan eksenler ilave edilir. Aşağıda iki boyutlu ve üç boyutlu kartezyen koordinatlar sistemleri görülmektedir.





Üç boyutlu koordinatlar sistemini gösterirken sağ el ve sol el koordinatlar sistemleri kullanılabilir. Sağ el koordinatlar sisteminde baş parmak z eksenini gösterdiğinde diğer parmaklar eksenlerin sırasını gösterir. Sol el koorinarlar sistminde ise benzer olarak sol elin başparmağı z eksenini gösterdiğinde diğer parmaklar eksenlerin sırasını gösterir. Aşağıdaki şekillerde sağ el ve sol el koordinatlar sistemleri görülmektedir.





Düzlemdeki her P noktası ile bir (x,y) sıralı ikilisini eşleştirebiliriz. Aynı zamanda her (x,y) sıralı ikilisi düzlemde bir P noktası ile eşleştirilebilir. (x,y) koordinatlarına sahip bir P noktasını $P(x,y)$ ile veya (x,y) ile gösterebiliriz. İki boyutlu reel uzay R^2 şeklinde gösterilir ve düzlemdeki bütün noktaların cümlesini belirtir. $O(0,0)$ kartezten koordinatlar sisteminin merkezini ve P bir noktayı göstermek üzere OP bir doğru parçasını gösterir ancak eğer O dan başlayan ve büyüklüğü OP nin büyüklüğü kadar olan ve yönü O dan P ye kadar olan bir yönlendirilmiş doğru parçası $\vec{OP}$ ile gösterilir. İki boyutlu R^2 uzayında vektörler x ve y reel sayılar olmak üzere

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sütun matrisi ile gösterilir. $\vec{OP}$ ile $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörünü eşleştirebiliriz. Başlangıcı orijinde olmayan vektörler de olabilir. Başlangıç noktası $P(x_1, y_1)$ bitiş noktası $Q(x_2, y_2)$ olan bir vektör $\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektörüdür. Bu vektör ise

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

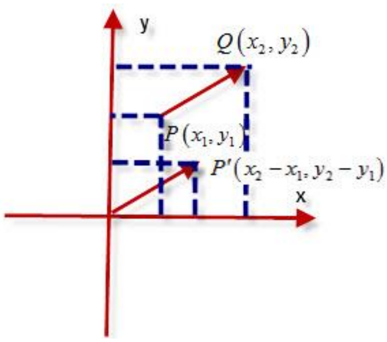
şeklinde gösterilebilir. Bu vektör ile başlangıcı orijinde olan

$$\vec{OP'} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

vektörü aynı vektörü göstermektedir. Yani $\vec{PQ} = \vec{OP'}$ vektörü $\vec{OQ}$ vektörü ve $\vec{OP}$ arasındaki fark olan vektördür.

$$\vec{PQ} = \vec{OP'} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

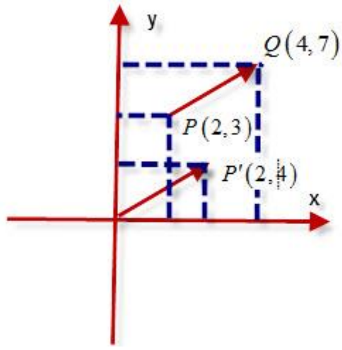
Her bir vektör ile yönlü doğru parçası eşleştirilebildiği gibi her yönlü doğru parçası ile vektör eşleştirilebilir. Böylece yönlü doğru parçası ve vektör birbirinin yerine kullanılabilir. Yani bir yönlendirilmiş doğru parçasına vektör denilir demek de doğru olmuş olur.



Örnek.

Başlangıç ve bitiş noktaları $P=(2,3), Q=(4,7)$ olan $\overrightarrow{PQ}$ vektörünü ve onun eşdeği olan vektörü kartezyen koordinatlar sisteminde gösteriniz.

Çözüm.



Her **x** = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü ile düzlemde bir $P(x,y)$ noktasını ve her $P(x,y)$ noktası ile bir **x** = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörünü eşleştirebiliriz. Böylece iki boyutta düzlemi vektörlerin bir cümlesi olarak değerlendirmek de mümkün olur. O halde R^2, (x,y) noktalarının bir cümlesi veya

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislerin bir cümlesi olarak ele almak mümkün olmaktadır.

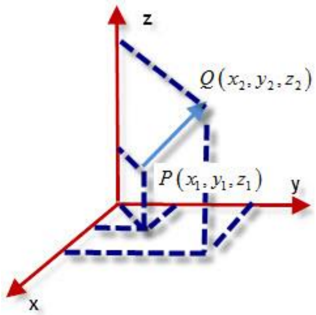
Benzer olarak üç boyutlu uzayda her P noktası ile bir (x,y,z) sıralı üçlüsünü eşleştirebiliriz. Aynı zamanda her (x,y,z) sıralı üçlüsünü Üç boyutlu uzayda bir P noktası ile eşleştirilebilir. (x,y,z) koordinatlarına sahip bir P noktasını $P(x,y,z)$ ile veya (x,y,z) ile gösterebiliriz. Üç boyutlu reel uzay R^3 şeklinde gösterilir ve uzaydaki bütün noktaların cümlesini belirtir. $O(0,0,0)$ kartezten koordinatlar sisteminin merkezini ve P bir noktayı göstermek üzere OP bir doğru parçasını gösterir ancak eğer O dan başlayan ve büyüklüğü OP nin büyüklüğü kadar olan ve yönü O dan P ye kadar olan bir yönlendirilmiş doğru parçası $\overrightarrow{OP}$ ile gösterilir. Üç boyutlu R^3 uzayında vektörler x , y ve z reel sayılar olmak üzere

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sütun matrisi ile gösterilir. $\overrightarrow{OP}$ ile $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vektörünü eşleştirebiliriz. Başlangıcı orijinde olmayan vektörler de olabilir. Başlangıç noktası $P(x_1, y_1, z_1)$ bitiş noktası $Q(x_2, y_2, z_2)$ olan bir vektör $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ vektörüdür. Bu vektör ise

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

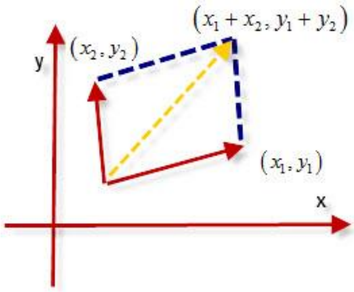


1.6.1. Vektörlerin Toplamı

Vektörlerin toplamı yapılırken vektörlerin bileşenleri kendi aralarında toplanır. Geometrik olarak toplama işlemi yapılırken paralel kenar kuralı adı verilen bir kural kullanılır. Toplanacak vektörler uç uca eklendiğinde ilk vektörün başlangıç noktası ile ikinci vektörün bitiş noktası toplam vektörünü meydana getirir.

Tanım. İki boyutlu R^2 uzayında $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ vektörlerinin **x+y** toplamı **x+y**= $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Üç boyutlu R^3uzayında ise $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ ve z = $\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$

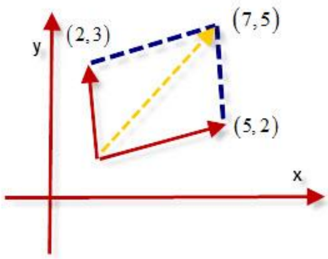
vektörlerinin **x+y+z** toplamı **x+y+z=** $\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \\ z_1+z_2+z_3 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Bu toplamı iki boyutlu R^2 uzayında aşağıdaki grafikte görmek mümkündür.



Örnek. x= $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve **y=** $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Verilen bu vektörler için **x+y** toplamını bulunuz.

Çözüm.

x+y= $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$



1.6.2. Vektörlerin Skaler İle Çarpımı

Tanım. İki boyutlu R^2 uzayında bir **x** = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü ile bir c skalerinin çarpımı **c.x** = $\begin{bmatrix} c.x \\ c.y \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Benzer olarak üç boyutlu R^3uzayında ise **x** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ vektörü ile bir c skalerinin çarpımı c.**x** = $\begin{bmatrix} c.x_1 \\ c.y_1 \\ c.z_1 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Eğer skaler negatif ise vektör yön değiştirir. –**x** vektörü **x** vektörü ile aynı büyüklükte fakat ters yönde bir vektör olur.

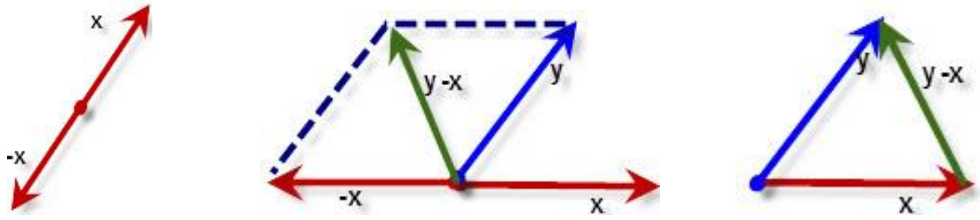
Örnek.

a=$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ olsun. O zaman 3.**a**=$\begin{bmatrix}3.1\\3.2\end{bmatrix}$ olur.

v=$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ olsun. O zaman -**v**=$\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$ olur.

1.6.3. Vektörlerde Çıkarma İşlemi

Tanım. Vektörlerde çıkarma işlemi birinci vektör ile ikinci vektörün negatifinin toplamı şeklinde gerçekleşir. **x** = $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ ve **y** = $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ vektörlerinin **x-y** farkı **x-y**=$\begin{bmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{bmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Aşağıdaki şekillerde bu işlemin geometrik olarak nasıl gerçekleştiği görülmektedir.

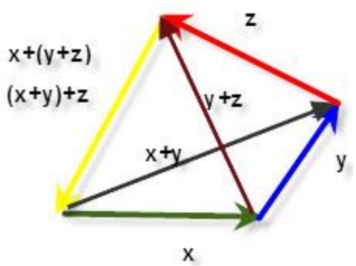


1.6.4. Üç ve Daha Çok Sayıda Vektörlerin Toplamı

Üç ve daha çok sayıda vektörlerin toplamında birleşme işlemi sağlanır. Yani

$$\mathbf{x+(y+z)=(x+y)+z}$$

olur. Geometrik olarak birleşme işleminin nasıl gerçekleştiği aşağıdaki şekilde görülmektedir.



1.6.5. n- Boyutlu Uzaya Genelleme

Şimdiye kadar iki boyutlu R^2 ve üç boyutlu R^3 uzaylarında vektörler ile ilgili bilgi verildi. Ancak yapılan bilimsel çalışmalarda daha yüksek boyutlar da kullanılmaktadır ve daha yüksek boyutlarda vektörler iki ve üç boyutlu uzaylarda olduğu gibi tanımlanır. n- boyutlu bir R^n uzayında bir vektör **x**$=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ şeklinde veya **x**$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ şeklinde bir satır vektörü veya

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir sütun vektörü olarak gösterilir. n- boyutlu bir R^n uzayında vektörlerle yapılan işlemler, iki boyutlu R^2 ve üç boyutlu R^3 uzaylarında vektörlerle yapılan işlemlere benzer olarak yapılır.

1.6.6. Vektörlerin Eşitliği

Eğer R^n de $\mathbf{x}=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), \mathbf{y}=\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ vektörlerinin karşılıklı elemanları birbirine eşit ise yani

$$x_1=y_1, x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$$

ise **x** ve **y** vektörleri eşdeğer aynı zamanda eşit olarak adlandırılır ve $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ şeklinde yazılır.

Örnek. $(x_1, x_2, x_3)=(2,-3,5)$ eşitliğinin sağlanması için x_1, x_2, x_3 ne olmalıdır ?

Çözüm. Eşitliğin sağlanması için karşılıklı elemanların birbirine eşit olması gerekir. O halde

$$x_1=2, x_2=-3, x_3=5$$

olmalıdır.

Tanım. **x**$=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, **y**$=\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ R^n uzayında vektörler ve c herhangi bir skaler olsun. Bu durumda R^n uzayında aşağıdaki işlemler tanımlanır.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)=\left(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n\right)$$

c . **x**= $c.(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (c.x_1, c.x_2, \cdots, c.x_n)$

-x= $-(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$

x- y = $(x_1, x_2, \cdots, x_n) - (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n)$

Teorem. x, y, z, R^n uzayında vektörler ve m, n herhangi bir skalerler olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) **x+y=y+x**

(ii) **(x+y)+z=x+(y+z)**

(iii) **x+0=0+x=x**

(iv) **x+(-x)=0**

(v) m **.(x+y)=** m **.x+** m **.y**

(vi) $(m+n)$**.x=** m **.x+** n **.x**

(vii) $(m.n)$**.x=** m **.(**n **.x)**

(viii) 1**.x=x**

Tanım.

x1,x2,...,xn R^n uzayında vektörler ve $c_1, c_2, \cdots, c_n$ skalerler olsun. **x1,x2,...,xn** vektörlerinin lineer kombinasyonu

x= c_1 **x1+** c_2 **x2**+...+ c_n **xn**

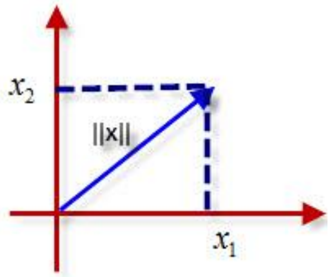
şeklinde tanımlıdır. Burada $c_1, c_2, \cdots, c_n$ skalerleri lineer kombinasyonun katsayıları olarak adlandırılır.

1.6.7. Bir Vektörün Normu

Bir **x** vektörünün normu ||**x**|| ile gösterilir, **x** in uzunluğu, **x** in büyüklüğü veya **x** in normu olarak okunur. R^n de bir **x**=$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörünün normu

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

ile tanımlıdır.



Örnek.

$\mathbf{x}=(2,-2,3)$ olsun. $||\mathbf{x}||=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$ olur.

Teorem.

$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, R^n de bir vektör ve c bir skaler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $||\mathbf{x}||\geq 0$

(ii) $||\mathbf{x}||=0$ ancak ve ancak $\mathbf{x}=0$

(iii) $||c\,\mathbf{x}||=|c|.||\mathbf{x}||$

1.6.8. Birim Vektör

Normu bir birim olan vektöre birim vektör adı verilir. Eğer, R^n de herhangi sıfır olmayan bir vektör ise bu durumda

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{x}||}\mathbf{x}$$

x ile aynı yönde olan bir birim vektör tanımlar. Yukarıdaki teoremde $c=\frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{x}||}$ olarak alınırsa

$$||\mathbf{y}||=||c.\mathbf{x}||=|c|.||\mathbf{x}||=\frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{x}||}||\mathbf{x}||=1$$

Bu şekilde birim vektör elde etme işlemine **x** in normalleştirilmesi adı verilir.

Örnek.

$\mathbf{x}=(1,-2,2)$ ile aynı yönde olan **y** birim vektörünü bulunuz.

Çözüm.

$||\mathbf{x}||=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{x}||}(1,-2,2) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

elde edilir. Kontrol etmek için normu hesaplarsak

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

olduğunu görürüz.

1.6.9. Standart Birim Vektör

R^2 ve R^3 dik koordinat sistemlerinde koordinat eksenleri üzerinde pozitif yönde bir birim uzunluğundaki vektörler standart birim vektörler olarak adlandırılır. Bu standart birim vektörler R^2 de

$$i = (1,0),\ j = (0,1)$$

ve R^3 de

$$i = (1,0,0),\ j = (0,1,0), k = (0,0,1)$$

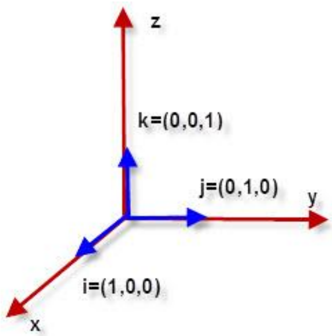
ile gösterilirler. R^2 ve R^3 teki her vektör bu birim vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak

$\mathrm{x} = (x_1, x_2) = x_1.(1,0) + x_2.(0,1)$

ve

$\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1.(1,0,0) + x_2.(0,1,0) + x_3.(0,0,1)$

şeklinde yazılabilirler.



Genel olarak R^n de standard birim vektörler

$e_1 = (1,0,\cdots,0),\ e_2 = (0,1,\cdots,0),\ldots,e_n = (0,0,\cdots,1)$

vektörleridir ve R^n de her $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörü

$$\mathbf{x} = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \cdots + x_n.e_n$$

şeklinde standard birim vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Örnek.

$(2,-2,3) = 2i - 2j + 3k$

$(-3,5,-2,4,6) = -3e_1 + 5e_2 - 2e_3 + 4e_4 + 6e_5$

Tanım.

Eğer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ noktaları R^nde iki nokta ise bu noktalar arasındaki uzaklık

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek.

$\mathbf{x} = (2,3,4,2)$ ve $\mathbf{y} = (1,0,3,4)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.

$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}\| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2 + (4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+9+1+4} = \sqrt{15}$

Bölüm Özeti

Bu bölümde;

- Matrislerle ilgili temel tanımları,
- Matrislerde Toplama, Çıkarma ve Skaler ile Çarpma İşlemlerini,
- Matrislerin transpozunu,
- Matrislerin çarpımını,
- Parçalanmış matrisleri,
- Parçalanmış matrisler üzerinde toplama işlemini,
- Parçalanmış matrisler üzerinde skaler ile çarpma işlemini,
- Parçalanmış Matrisler Üzerinde Çarpma İşlemini,

- Vektörler ile ilgili temel tanımları,
- Vektörlerin toplamını,
- Vektörlerin skaler ile çarpımını,
- Vektörlerde çıkarma işlemini,
- Üç ve daha çok sayıda vektörlerin toplamını,
- Vektörlerin toplamının n-boyutlu uzaya genellemesini,
- Vektörlerin eşit olma şartlarını,
- Bir vektörün normunun nasıl hesaplandığını,
- Birim Vektörü,
- Standart birim vektörleri,

öğrendiniz.

Şimdi bu konuları daha iyi pekiştirmek için değerlendirme sorularına geçiniz.