5. İÇ ÇARPIM UZAYLARI

Bölüm Hedefi

Bu bölümde;

- İç çarpım kavramını,
- İç çarpımın özelliklerini,
- Bir vektörün uzunluğunu,
- İki vektörün arasındaki açıyı,
- İki vektörün ortogonal olmasını,
- Bir kümenin ortogonal ve ortonormal olmasını,
- Sonlu boyutlu bir vektör uzayının Gram-Schmidt yöntemi ile daima bir ortonormal tabanının bulunabileceğini,

öğrenmiş olacaksınız.

Bu bölümde iç çarpım uzayları ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

5.1. İç Çarpım Uzayları

Tanım. V herhangi bir reel vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\langle x, y\rangle : V \times V \to R, (x, y) \to \langle x, y\rangle$ reel sayısını karşılık getiren fonksiyonuna V üzerinde bir İç Çarpım V ye de iç çarpım uzayı denir. Bu iç çarpım uzayı $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ile gösterilir.

i. Her $x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

ii. Her $x, y, z \in V$ için $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

iii. Her $x, y \in V$ ve $c \in R$ için $\langle cx, y\rangle = \langle x, cy\rangle = c\langle x, y\rangle$

iv. Her $x \in V$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Not. Bu tanımda ii. Ve iii. numaralı aksiyomlar birlikte

Her $x, y, z \in V$ için ve her $\alpha, \beta \in R$ için $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ şeklinde de gösterilebilir.

Örnek. $x, y \in R^n$ için , $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı

$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ şeklinde tanımlıdır.

şimdi bunu gösterelim.

i. Her $x,y \in R^n$ için $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots y_nx_n = \langle y,x\rangle$

ii. Her $x,y,z \in V$ için $\langle x+y,z\rangle = (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \cdots + (x_n+y_n)z_n$

$= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \cdots + x_nz_n + y_nz_n$

$= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n)$

$= \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

iii. Her $x,y \in V$ ve $c \in R$ için $\langle cx,y\rangle = \langle x,cy\rangle = c\langle x,y\rangle$

$\langle cx,y\rangle = c.x_1y_1 + c.x_2y_2 + \cdots + c.x_ny_n = c.(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = c\langle x,y\rangle$

$\langle x,cy\rangle = x_1.c.y_1 + x_2.c.y_2 + \cdots + x_n.c.y_n = c.(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = c\langle x,y\rangle$

iv. Her $x \in V$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Her $x \in V$ için $\langle x,x\rangle = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2} \geq 0$ dir.

$\langle x,x\rangle = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2} = 0$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ise $x = 0$ dır.

Böylece R^n için iç çarpımın olduğunu göstermiş olduk.

Örnek. R^3 te tanımlanan $x = (2,1,-1)$, $y = (1,3,2)$ vektörlerinin iç çarpımını bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= 2.1 + 1.3 + (-1).2 = 3\end{aligned}$$

Örnek. $x,y \in R^2$ için $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun bir iç çarpım fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

i. Her $x,y \in V$ için $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ olduğu tanımdan çok kolay olarak görülmektedir.

ii. Her $x,y,z \in V$ için

$\langle x+y,z\rangle = (x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2$

$$= x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + y_1 z_1 + 2y_2 z_2$$
$$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

iii. Her $x, y \in V$ ve $c \in R$ için

$$\langle cx, y\rangle = \langle x, cy\rangle = c.x_1 y_1 + c.2x_2 y_2 = c.(x_1 y_1 + 2x_2 y_2) = c\langle x, y\rangle$$

iv. Her $x \in V$ için

$$\langle x, x\rangle = x_1 x_1 + 2x_2 x_2 = x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} \geq 0$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Örnek. $P_n(R)$ derecesi n veya n den daha küçük olan polinomların oluşturduğu vektör uzayı olsun. $p(x), q(x) \in P_n(R)$ için

$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun bir iç çarpım fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

i. Her $p(x), q(x) \in P_n(R)$ için $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \langle q(x), p(x)\rangle$ olduğu aşikardır.

ii. Her $p(x), q(x), r(x) \in P_n(R)$ için

$$\langle (p(x) + q(x)), r(x)\rangle = \int_0^1 (p(x) + q(x))r(x)dx$$

$$= \int_0^1 p(x)r(x)dx + \int_0^1 q(x)r(x)dx$$

$$= \langle p(x), r(x)\rangle + \langle q(x), r(x)\rangle$$

iii. Her $p(x), q(x) \in P_n(R)$ ve $c \in R$ için

$$\langle c.p(x), q(x)\rangle = \langle p(x), c.q(x)\rangle = c.\int_0^1 p(x)q(x)dx = c.\langle p(x), q(x)\rangle$$

iv. Her $p(x) \in P_n(R)$ için $\langle p(x), p(x)\rangle = \int_0^1 p(x)p(x)dx = \int_0^1 p^2(x)dx \geq 0$

$\langle p(x), p(x)\rangle = \int_0^1 p(x)p(x)dx = 0$ ise ancak ve ancak $p(x) = 0$ dır.

Örnek. $P_2(R)$ de $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx$ şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonu için $p(x)=x^2-x+1$, $q(x)=x+1$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

Çözüm.

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx=\int_0^1 (x^2-x+1)(x+1)dx$$
$$=\int_0^1 (x^3+1)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1=\frac{5}{4}$$

Örnek. $M_{n\times n}$ vektör uzayı $n\times n$ tipindeki matrislerin üzerinde tanımlanan standart toplam ve skaler ile çarpma işlemlerine göre R reel sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır. $M_{n\times n}$ vektör uzayındaki $A,B\in M_{n\times n}$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ olmak üzere $\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur gösteriniz.

Çözüm.

i. Her $A,B\in M_{n\times n}$ için $\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ij}\right)=\langle B,A\rangle$

ii. Her $A,B,C\in M_{n\times n}$ için

$$\langle A+B,C\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{ij}+b_{ij}c_{ij})\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{ij}\right)$$
$$=\langle A,B\rangle+\langle A,C\rangle$$

iii. Her $A,B\in M_{n\times n}$ ve $c\in R$ için

$$\langle c.A, B\rangle = \langle A, c.B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c.a_{ij}b_{ij}\right) = c.\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right) = c.\langle A, B\rangle$$

iv. Her $A \in M_{n\times n}$ için

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{2}\right) \geq 0 \text{ dır ve}$$

$$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{2}\right) \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$