Örnek .

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

Bu determinantı hesaplarken A matrisinin istediğimiz satır ve sütununu kullanabiliriz. Hangi satırı veya sütunu kullanırsak kullanalım sonuç değişmez aynı olur. Matrislerin bazı satırlarında veya sütunlarında 0 elamanı fazla ise o satırı veya sütunu kullanmak hesap yaparken daha az işlem yapmanızı sağlayacaktır. Bu determinant hesaplanırken üçüncü satırı kullanmak avantaj sağlar ancak burada birinci satırı kullanalım.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13}+a_{14}.A_{14}$$

$$=a_{11}.(-1)^{1+1}.M_{11}+a_{12}.(-1)^{1+2}.M_{12}+a_{13}.(-1)^{1+3}.M_{13}+a_{14}.(-1)^{1+4}.M_{14}$$

$$=1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}+2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}+1.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}+0.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=1.40-2.39+1.(-6)+0.(-5)$$

$$=40-78-6$$

$$=-44$$

Örnek .

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13}$$

$$=a_{11}.(-1)^{1+1}.M_{11}+a_{12}.(-1)^{1+2}.M_{12}+a_{13}.(-1)^{1+3}.M_{13}$$

$$=1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}+(-2).(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix}+(-1).(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$=1.(-10)+2.(-6)+(-1).2$$

$$=-10-12-2$$

$$=-24$$

Örnek.

$U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

$$|U|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=1.2.5=10$$

Örnek.

$L=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$|L|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=2.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}=2.2.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}=2.2.4.5=160$$

Not: Üst üçgensel veya alt üçgensel matrislerin determinantı onun köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

3.2. Determinantın Özellikleri

Bu kısımda determinantların hesabını daha kolay yapabilmek için bazı özellikler verilecektir.

Özellik 1. Herhangi bir A kare matrisi ve onun A^T transpozunun determinantları eşittir.

Örnek .

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} \text{ ise } |A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2 \text{ ve}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \text{ise } |A^T|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$$

olur.

Özellik 2. Eğer bir kare matrisin herhangi iki farklı satırı (sütunu) yer değiştirirse determinantın işareti değişir.

Örnek .

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=-24 \text{ ve } |B|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 4 & 3\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}=24 \text{ olur.}$$

Özellik 3. Eğer bir kare matrisin iki satırı (sütunu) aynı işe determinant sıfırdır.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 7\end{bmatrix} \text{ ise } |A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 4\end{vmatrix}=0 \text{ dır.}$$

Özellik 4.

Eğer bir A kare matrisinin tek bir satırı (sütunu) bir k sayısı ile çarpılırsa determinantının değeri $k.\det(A)$ olur.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix} \text{ ve } \quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 2.2 & 2.3 & 2.(-1)\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 4 & 6 & -2\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix}=6, \quad |B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 4 & 6 & -2\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix}=12=2.\det(A)$$

Özellik5. $\det(k.A)=k^n.\det(A)$

Örnek.

$$\begin{vmatrix}k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13}\\ l.a_{21} & l.a_{22} & l.a_{23}\\ m.a_{31} & m.a_{32} & m.a_{33}\end{vmatrix}=k.l.m.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k.l.m.\det(A)$$

Örnek.

$$\begin{vmatrix}k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13}\\ k.a_{21} & k.a_{22} & k.a_{23}\\ k.a_{31} & k.a_{32} & k.a_{33}\end{vmatrix}=k^3.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k^3.\det(A)$$

Özellik 6.

Eğer bir A kare matrisinin iki satırı (sütunu) orantılı ise determinantı sıfırdır.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=2.0=0$$

Özellik 7.

Eğer bir A kare matrisinin herhangi bir satırının (sütununun) tamamı sıfır ise determinantı sıfırdır.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Özellik 8.

Eğer bir A kare matrisinin herhangi bir satırının (sütununun) bir k katı başka bir satıra (sütuna) eklenirse determinantın değeri değişmez.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & 11 & -4 \end{bmatrix}$ olsun. Burada B matrisi A matrisinin 2. satırının iki katının 3. satıra eklenmesi ile bulunmuştur.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}=6, \quad |\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 8 & 11 & -4 \end{vmatrix}=6$$

Özellik 9.

Eğer A ve B kare matrisler ise bu durumda $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$ dir.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $A.B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 2 & 10 & 17 \\ 4 & 18 & 31 \end{bmatrix}$ olur.

$$\det(A.B)=|A.B|=\begin{vmatrix}0&2&9\\2&10&17\\4&18&31\end{vmatrix}=-24,\quad |A|=\begin{vmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\4&5&-2\end{vmatrix}=6,\ |B|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&-2\end{vmatrix}=-4$$

$\det(A.B)=\det(A).\det(B)$ dir.

3.3. Ek (Adjoint) Matris

A matrisi $n\times n$ tipinden bir kare matris olsun. A matrisinin ek (adjoint) matrisi a_{ij} elemanlarının kofaktörleri A_{ij} ler olmak üzere

$$ek(A)=adj(A)=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}^T$$

matrisidir.

Teorem.

A matrisi $n\times n$ tipinden bir matris olsun. Bu durumda I , $n.$ mertebeden birim matris olmak üzere

$$adj(A).A=A.adj(A)=\det\left(A\right).I$$

dır.

Sonuç.

A matrisi $\det(A)\neq 0$ olmak üzere $n\times n$ tipinden bir matris olsun. Bu durumda A matrisi terslenebilirdir ve

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

dır. Eğer A matrisi 2×2 tipinden $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi ise onun tersi pratik olarak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin ek (adjoint) matrisini ve tersini bulunuz.

Çözüm.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -13,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$ek(A) = adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -13 & 8 \\ 0 & 12 & -6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 6$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -13 & 8 \\ 0 & 12 & -6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{8}{6} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3.4. Cramer Metodu

Bu kısımda n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerinin Cramer Metodu yardımı ile bulunması anlatılacaktır.

Teorem. (Cramer Kuralı)

A matrisi $n \times n$ tipinde terslenebilir bir matris olmak üzere $Ax = b$ lineer cebirsel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ve } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

dir. Bu sistem D_k matrisleri A matrisinin k. sütununun b sütun vektörü ile değiştirilmiş matrisler olmak üzere

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|D_n|}{|A|}$$

ile verilen tek bir çözüme sahiptir.

Örnek.

$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 + 2x_2 \quad = 3$ lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü Cramer metodunu kullanarak
$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

bulunuz.

Çözüm.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -15,$$ $|A| \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \ |D_2| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -15, |D_3| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|D_3|}{|A|}$$

$$x_1 = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{-15}{-15} = 1, x_3 = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3}$$

Örnek.

$2x + 3y - 4z = 12$
$-x + 2y + z = 2$
$3x - y + 7z = -6$

denklem sistemini Cramer Kuralını kullanarak çözünüz.

Çözüm.

Verilen lineer cebirsel denklem sistemini

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$AX = b$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi gerekli determinantları hesaplayalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 80,\ |A| \neq 0$$ olduğundan denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 80,\ |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 160,\ |D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -80$$

Böylece denklemin bilinmeyenleri

$$x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{80}{80} = 1,\ y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{160}{80} = 2,\ z = \frac{|D_3|}{|D|} = \frac{-80}{80} = -1$$

şeklinde elde edilir. Böylece bilinmeyen sütun matrisi $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ olur.

Örnek 3.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 6 \\ -x + 2y - 2z &= -6 \end{aligned}$$ denklem sistemini Cramer Kuralını kullanarak çözünüz.

Çözüm.

Verilen lineer cebirsel denklem sistemini

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$AX = b$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi gerekli determinantları hesaplayalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ olduğundan bu denklem sisteminin ya çözümü yoktur, yada birden fazla çözümü vardır.

Örnek .

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z&=7\\ x+y+z&=3\\ -x+y+z&=-5 \end{aligned}$$

denklem sistemini Cramer Kuralını kullanarak çözünüz.

Çözüm.

Verilen lineer cebirsel denklem sistemini

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$AX=b$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi gerekli determinantları hesaplayalım.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ |A|\neq 0$$ olduğundan denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$$|D_1|=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-8,\ |D_2|=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ |D_3|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}=4$$

Böylece denklemin bilinmeyenleri

$$x=\frac{|D_1|}{|D|}=\frac{-8}{-2}=4,\ y=\frac{|D_2|}{|D|}=\frac{-2}{-2}=1,\ z=\frac{|D_3|}{|D|}=\frac{4}{-2}=-2$$

şeklinde elde edilir. Böylece bilinmeyen sütun matrisi $X=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ olur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde;

- Determinantın tanımını,
- Bir mertebeli determinantın hesaplanmasını,
- İki mertebeli determinantın hesaplanmasını,
- Üç mertebeli determinantın hesaplanması için Sarrus kuralını,
- n- mertebeli determinantı
- Minör ve kofaktör kavramlarını,
- Determinantın özelliklerini,
- n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan Lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümü için Cramer metodunu,

öğrendiniz.

Şimdi bu konuları daha iyi pekiştirmek için değerlendirme sorularına geçiniz.