2.8. LU Ayrışım Yöntemi

Bu bölümde, bir A kare matrisini L bir alt üçgen matris ve U bir üst üçgen matris olmak üzere A=L.U şeklinde iki matrisin çarpımı şeklinde yazmayı öğreneceğiz. LU ayrışım yöntemi olarak da adlandırılan bu yöntem yardımı ile Lineer Cebirsel Denklem Sistemlerinin çözümleri elde edilebilir.

Tanım. Eğer A bir kare matris ise ve A = LU olarak çarpanlarına ayrılabilir, burada L bir alt üçgen matris ve U bir üst üçgen matristir, o zaman A'nın bir LU Ayrışımına sahip olduğunu söyleriz.

Teorem Eğer A bir kare matris ise ve herhangi iki ~~bir~~ satırı değiştirmeden satırca eşolon formdaki bir U üst üçgen matrise indirgenebiliyorsa, A matrisi A = LU olarak çarpanlarına ayrılabilir, burada L, bir alt üçgen üçgen matristir.

Bu teoremi kanıtlamayacağız ama biraz detaylı inceleyelim ve L'yi belirlemenin bir yolunu bulalım. Bir A kare matrisini herhangi iki ~~bir~~ satırı değiştirmeden satırca eşolon formdaki bir U matrisine indirgeyebildiğimizi var sayarak başlayalım. Her elementer satır operasyonunun $E_1, E_2, \cdots, E_k$ elementer matrislerine karşılık geldiğini biliyoruz. Böylece A matrsini satırca eşolon formdaki bir üst üçgen formdaki U matrisine indirgemek için kullandığımız elementer satır işlemlerine karşılık gelen elementer matrisler yardımı ile

$$E_k.E_{k-1}\cdots E_2.E_1.A = U$$

olduğunu biliyoruz. Her elementer matirisin terslenebilir birer matris olduğunu da biliyoruz ve her bir elementer matrisin tersini alırsak

$$A = E_1^{-1}.E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}.U$$

elde ederiz. Burada $L = E_1^{-1}.E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$ matrisi bir alt üçgen matristir ve böylece A matrisinin A=LU şeklinde LU ayrışımı yapılmış olur.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$ matrisinin LU ayrışımını bulunuz.

Çözüm.

Bu matrisi herhangi iki satırın yer değiştiremeyeceğini unutmadan satırca eşolon formdaki matrise indirgemek için yapılacak olan elementer satır işlemlerini yapalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-9R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{29}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece satırca eşolon formda elde ettiğimiz bu matris U matrisi olarak elde edilmiş oldu.

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi artık L matrisini elde etmemiz gerekiyor. Bu matrisi elde edebilmek için A matrisini satırca eşolon formdaki matrise indirgemek için kullandığımız elementer satır işlemlerini I birim matrisine uygulayarak elementer matrisleri elde edelim. Elde edeceğimiz her bir elementer matrisin de terslenebilir olduğunuz biliyoruz.

Aşağıda elementer satır işlemleri, o işlem ile elde edilen elementer matris ve o elementer matrisin tersi yer almaktadır.

$$\frac{1}{3}R_1 \qquad E_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2-2R_1 \qquad E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3+4R_1 \qquad E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3-9R_2 \qquad E_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_4^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{29}R_3 \qquad E_5=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{29} \end{bmatrix} \qquad E_5^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

Böylelikle L matrisini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$L=E_1^{-1}.E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}$$

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix}$$

Sonuçta yaptığımız işlemin doğruluğunu test etmek için L ve U matrislerini çarpalım

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = A$$

Böylece A matrisini elde ettiğimizi görürüz.

L matrisini bu şekilde çarparak elde etmek doğru fakat zahmetli bir yol oldu. Bu işlemi biraz daha basitleştirebiliriz.

$$L = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

L alt üçgen matris olduğuna göre esas köşegen üzerinde bulunan elemanların sıfır olması gerekir. Geriye esas köşegen ve onun altındaki elemanların bulunması kalıyor. Önce esas köşegen üzerindeki elemanları bulalım.

U matrisi elde etmek için kullandığımız elementer satır işlemlerine göz atalım. U matrisinin esas köşegenini 1 yapmak için kullandığımız elementer satır işlemlerine bakalım. Birinci satırı $\frac{1}{3}$ ile çarpmışız ikinci satır zaten 1 olduğu için o satırla ilgili bir işlem yapmadık ama 1 ile çarptığımızı düşünelim. Üçüncü satırı ise $-\frac{1}{29}$ ile çarpmışız. Şimdi ise elde ettiğimiz L matirisinin esas köşegenine göz atalım. Bu sayılar 3, 1, -29 dur. Bu sayıların aslında $\frac{1}{3}$, 1 ve $-\frac{1}{29}$ un çarpma işlemine göre tersi olduğunu görüyoruz.

Bu fikir ile L matirisinin esas köşegenini oluşturma işlemini tamamlamış oluruz.

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & -29 \end{bmatrix}$$

Şimdi, ilk sütundaki 3'ün altındaki iki girişe bir göz atalım. Yine U' yu bulmak için kullanılan işlemlere geri dönün ve bu iki noktada sıfır almak için kullandığımız işlemlere bir göz atın. İkinci satırda sıfır elde etmek için R_2 üzerine $-2R_1$ ekledik ve üçüncü satırda sıfır elde etmek için R_3 üzerine $4R_1$ ekledik.

Yine bulduğumuz L'ye geri dönün ve bu iki girişin 2 ve -4 olduğuna dikkat edin. Veya, girişin sıfır olmasını sağlamak için söz konusu satıra eklediğimiz ilk satırın katlarının negatifidir.

Bunları da yerlerine yazarak aşağıdaki matrise ulaşıyoruz,

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & * & -29 \end{bmatrix}$$

Geriye bir eleman kaldı. Son olarak, U belirlerken, üçüncü satırdaki birinci elemanı ve ikinci sütundaki birinci elemanı sıfır elde etmek için R_3 üzerine $-9R_2$'yi ekledik ve L'de bu elemanın 9 olarak bulunduğunu görüyoruz. Yine, kullandığımız ikinci satırın katlarının negatifidir. Bu bize L'deki son elemanı verir.

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix}$$

Biraz önce geçtiğimiz bu süreç, yukarıdaki işlemi U'yi bulmak için takip etmemiz koşuluyla, LU Ayrıştırmamız için L'yi belirlemede her zaman işe yarayacaktır. Aslında bu sürecin tek dezavantajı budur. Bu örnekte kullandığımız adımların aynısını kullanarak U'yu bulmalıyız. Başka bir deyişle, ilk sütunu 1 elde etmek için ilk satırı uygun bir skaler ile çarpın / bölün ve ardından onun altındaki girişleri sıfırlayın. Ardından, ikinci satırın ana köşegen girişinde 1 elde etmek için ikinci satırı uygun bir skaler ile çarpın / bölün ve ardından bunun altındaki tüm girişleri sıfırlayın. Tüm sütunlarla ilgilenene kadar bu şekilde devam edin. Bu bazen bazı dağınık kesirlere yol açacaktır.

Örnek.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisinin LU ayrışımını bulunuz.

Çözüm.

Bu nedenle, satır değişimlerini kullanmadan önce B'yi satırca eşolon forma indirgemeliyiz. Ayrıca, L'yi bulmak için yukarıda özetlenen süreci kullanacaksak, indirgemeyi ilk örnekle aynı şekilde yapmamız gerekecek. İşte o işlemler.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-5R_1 \\ R_3+R_1}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{2}{7}R_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3-\frac{17}{2}R_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{32}R_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece U matrisi elde edilmiş olur.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U matrisi elde etmek için kullandığımız elementer satır işlemlerine göz atalım. U matrisinin esas köşegenini 1 yapmak için kullandığımız elementer satır işlemlerine bakalım. Şimdi yine L'ye bakalım. Yine, genel bir L ile başlayacağız ve U nun esas köşegenini elde etmek için yaptığımız işlemlerin çarpma işlemine göre tersleri bize L nin esas köşegenin verecektir.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ * & -\frac{7}{2} & 0 \\ * & * & 32 \end{bmatrix}$$

Şimdi, kalan elemanlar için, işleme geri dönün ve o noktada sıfır elde etmek için gerekli olan çokluları arayın ve bu elemanlar, o katsayıların negatifi olacaktır. Bu bize son L'mizi verir.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -1 & \frac{17}{2} & 32 \end{bmatrix}$$

Son bir kontrol olarak, bu çarpanlara ayırmadan aslında B yi elde ettiğimizi doğrulamak için her zaman hızlı bir çarpma yapabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -1 & \frac{17}{2} & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Görünüşe göre tüm işi doğru yaptık.

İlk olarak, rastgele bir kare matris olan A verildiğinde, A'nın bir LU Ayrıştırmasına sahip olacağını garanti etmenin tek yolu, herhangi bir satırı değiştirmeden onu satırca eşolon formuna indirgeyebilmemizdir. Satırları değiş tokuş etmemiz gerekiyorsa, matrisin bir LU Ayrıştırması OLMAMASI demektir.

İkinci olarak bir A matrisinin tek bir LU ayrışımı yoktur.

LU Ayrıştırmalarının benzersiz olmadığını görmek için ilk örneğe geri dönün. Bu örnekte aşağıdaki LU Ayrıştırmasını hesapladık.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ancak, aşağıdaki LU Ayrıştırmasına da sahibiz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

Birinci matris alt üçgen ve ikincisi üst üçgen olduğundan, bu açıkça bir LU-Ayrıştırmasıdır ve çarpıldığında aslında gösterilen matrisi verdiklerini doğrulamalısınız.

2.8. 1. LU Ayrışım Yöntemini Kullanarak Lineer Cebirsel Denklem Sistemlerinin Çözümü

A katsayılar matrisinin bir nxn tipinden bir kare matris olduğu ve A = LU, LU-Ayrışımına sahip olduğu $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ sistemiyle başlayalım. Şimdi, bunu A yerine sisteme koyun,

$$LU\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

Şimdi $U\mathbf{x}$ 'e bir göz atalım. Bu bir nx1 sütun matrisi olacak ve buna **y** diyelim. Yani, elimizde $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ var. Böylece elimizdeki $LU\mathbf{x}=\mathbf{b}$ sistemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$L\,\mathbf{y}=\mathbf{b} \text{ burada } U\mathbf{x}=\mathbf{y}.$$

$L\,\mathbf{y}=\mathbf{b}$ den **y** kolayca elde edilir. Daha sonra da $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ den **x** elde edilerek çözüm tamamlanır.

Örnek.

Aşağıdaki lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -4 \\ -4x_1 + x_2 + 10x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Çözüm.

Öncelikle sistemin matris formunu yazalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki kısımda bulunan ilk örnekte katsayılar matrisinin LU ayrışımını bulmuştuk.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıda özetlenen yönteme göre bu, aslında sırayla aşağıdaki iki sistemi çözmemiz gerektiği anlamına gelir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Öyleyse, ilkinden başlayalım. Bu sistemle ilişkili denklemleri yazmak ve ileri yerine koyma yöntemini kullanarak çözmek dışında gerçekten başka bir şey yapmamıza gerek olmadığına dikkat edin. İlk denklem bize direkt olarak y_1 verecek ve ikinci denklemi kullanarak bize y_2 verecektir. Son olarak, eldeki bu iki değerle üçüncü denklem bize y_3 verecektir. İşte o işlemler.

$$\begin{aligned} 3y_1 &= 0 & &\Rightarrow & y_1 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 &= -4 & &\Rightarrow & y_2 &= -4 \\ -4y_1 + 9y_2 - 29y_3 &= 3 & &\Rightarrow & y_3 &= -\frac{39}{29} \end{aligned}$$

Çözmemiz gereken ikinci sistem ise aşağıdaki sistemdir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -\frac{39}{29} \end{bmatrix}$$

Yine, bunu çözmek için tek yapmamız gereken denklemleri yazmak ve geriye yerine koymayı yapmak olduğuna dikkat edin. Üçüncü denklem bize direkt olarak x_3 verecek ve bunu ikinci denkleme eklemek bize x_2 verecek. İşte bunun için yapılması gereken işlemler.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -\frac{119}{29}$$

$$x_2 + 3x_3 = -4 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{29}$$

$$x_3 = -\frac{39}{29} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = -\frac{39}{29}$$

Örnek.

Aşağıdaki lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \\ -4x_2 + 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Çözüm.

Bir kez daha, önce sistemin matris formunu alalım.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Şimdi katsayı matrisi için bir LU-Ayrıştırması yapalım. İşte onu satırca eşolon forma indirgeyecek çalışma sonucunun U olacağını unutmayın.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Öyleyse, U,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi, L'yi elde etmek için, genel bir alt üçgen matrisle başladığımızı ve esas köşegenlere, o noktada 1 değerini elde etmek için yukarıdaki çalışmada kullanılan skalerin çarpma işlemine göre tersini koyduğumuzu hatırlayın. Ardından, esas köşegenin altındaki girişlere, yukarıdaki elemanları sıfır elde etmek için kullanılan çarpanın negatifini koyarız. O zaman L,

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A = LU olduğunu doğrulama işlemini size bırakacağız. Şimdi sistemi çözelim. Bu, aşağıdaki iki sistemi çözmemiz gerektiği anlamına gelecektir.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

İşte ilk sistemin çalışması.

$$-2y_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$3y_1 + 4y_2 = 17 \qquad \Rightarrow \qquad y_2 = \frac{31}{8}$$

$$-4y_2 - \frac{1}{2}y_3 = -9 \qquad \Rightarrow \qquad y_3 = -13$$

Şimdi ikinci sistemi çözerek asıl çözüme ulaşalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{31}{8} \\ -13 \end{bmatrix}$$

İşte bu sistem için geriye yerine koyma çalışması.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad & x_1 = 5 \\
x_2 - \frac{7}{8}x_3 &= \frac{31}{8} \quad &\Rightarrow \quad & x_2 = -\frac{15}{2} \\
x_3 &= -13 \quad &\Rightarrow \quad & x_3 = -13
\end{aligned}
$$

Yani bu sistemin çözümü vardır.

Kaynak.

Bu kısmın yazılmasında aşağıdaki kaynaktan yararlanılmıştır.

1. Paul Dawkins, LINEAR ALGEBRA, http://tutorial.math.lamar.edu.