4. VEKTÖR UZAYLARI

Bölüm Hedefi

Bu bölümde;

- Vektör uzayının tanımını,
- Örnek bazı vektör uzaylarını,
- Alt vektör uzayını,
- Vektörlerin lineer kombinasyonunu,
- Germenin ne olduğunu,
- Lineer bağımsızlığı,
- Lineer bağımsızlığın geometrik yorumunu,
- Bir matrisin rankını,
- Wronskiyen kavramını,
- Bir vektör uzayının bazını,
- Bir vektör uzayının boyutunu,

öğrenmiş olacaksınız.

Bu bölümde vektör uzayları ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Tanım.

Boş olmayan belirli nesnelerin keyfi bir kümesi V olsun. V kümesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri tanımlanmış olsun. Burada toplama işlemi $u,v\in V$,$u+v$, V kümesine ait herhangi iki nesnenin toplamını, skaler ile çarpma işlemi ise her λ skaleri ve her $u\in V$ için $\lambda.u$ şeklinde çarpımı göstermektedir. Eğer her $u,v,w\in V$ ve her λ ve μ skalerleri için aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa V kümesine bir vektör uzayı adı verilir. Eğer skalerler reel sayılar ise bu vektör uzayına reel vektör uzayı, eğer skalerler kompleks sayılar ise kompleks vektör uzayı olarak tanımlanır. Vektör uzayının nesneleri ise vektör olarak tanımlanır.

1. V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır. Yani $u,v\in V$ olmak üzere $u+v\in V$.
2. $u+v=v+u$ değişme özelliği

3. $u+(v+w)=(u+v)+w$ Birleşme özelliği
4. Her $u \in V$ için $0+u=u+0=u$ olacak şekilde sıfır vektörü olarak adlandırılan bir $0 \in V$ elemanı vardır.
5. Her $u \in V$ için u nun negatifi olarak tanımlanan ve $u+(-u)=(-u)+u=0$ olacak şekilde bir $-u \in V$ vardır.
6. V kümesi skaler ile çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani λ hehangi bir skaler ve u, V nin herhangi bir elemanı olmak üzere $\lambda.u \in V$ dir.
7. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ soldan dağılma özelliği
8. $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$ sağdan dağılma özelliği
9. $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$ birleşme özelliği
10. $1.u=u$ birim eleman özelliği

Örnek.

V kümesi sadece 0 ile gösterilen sıfır elemanından oluşsun. Bu küme üzerinde

$0+0=0$ ve her λ skaleri için $\lambda.0=0$ işlemleri tanımlanmış olsun. Bu durumda V kümesi burada tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre vektör uzayı aksiyomlarını sağlar. Bu vektör uzayı **sıfır vektör uzayı** olarak adlandırılabilir.

Örnek.

P katsayıları reel sayılar olan polinomların kümesi olsun.

$$p_1=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

ve

$$p_2=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

olmak üzere P kümesi üzerinde toplama işlemi $n \geq m$ ise

$$\begin{aligned}p_1+p_2=&a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m\\&+(a_{m-1}+b_{m-1})x^{m-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $m \geq n$ olduğunda da benzer olarak tanımlanabilir. Skalerle çarpma işlemi de λ bir skaler olmak üzere

$$\lambda p_1 = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Toplama işlemi sonucu iki polinomun toplamı yine bir polinom ve skaler ile çarpma işleminin sonunda yine bir polinom elde edildiğinden P kümesi toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Diğer sekiz özellik de polinomlar için bilinen özelliklerdir. Dolayısıyla P kümesi üzerinde tanımlanan bu işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Örnek. $V = R^n$ olsun. V kümesi sıralı n-li ler üzerinde tanımlanan alışılmış toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Gösteriniz.

Çözüm.

x$=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, **y**$=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ R^n uzayında vektörler ve c herhangi bir skaler olsun. Bu durumda R^n uzayında tanımlanan alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

x+ **y** $=(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

c . **x**$= c.(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (c.x_1, c.x_2, \cdots, c.x_n)$

$V = R^n$ kümesi üzerinde tanımlanan bu işlemlere göre kapalıdır. Çünkü bu işlemler sonucunda elde edilenler yine $V = R^n$ kümesinin elemanlarıdır. Ayrıca **x, y, z,** R^n uzayında vektörler ve m, n herhangi bir skalerler olmak üzere vektör uzayının diğer aksiyomları olan

(i) **x+y=y+x**

(ii) **(x+y)+z=x+(y+z)**

(iii) **x+0=0+x=x**

(iv) **x+(-x)=0**

(v) m **.(x+y)=** m **.x+** m **.y**

(vi) $(m+n)$ **.x=** m **.x+** n **.x**

(vii) $(m.n)$ **.x=** m **.(** n **.x)**

(viii) 1**.x=x**

aksiyomları sağlanır.

Örnek.

V , R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi olsun. $f,g \in V$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere V üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$ ve $(\lambda \otimes f)(t) = \lambda . f(t)$ şeklinde tanımlı olsun. V kümesinin üzerinde tanımlı bu işlemlere göre R reel sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların toplamları ve skaler ile çarpımları yine reel değerli ve sürekli olduğundan V kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Diğer aksiyomlara da bakacak olursak;

(i) $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = (g \oplus f)(t)$ olduğundan değişme özelliği sağlanmaktadır.

(ii) $$\begin{aligned}&\left[(f \oplus g) \oplus h\right](t) = \left(f(t) + g(t)\right) + h(t) = f(t) + \left(g(t) + h(t)\right)\\ &= \left[f \oplus (g \oplus h)\right](t)\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği de sağlanmaktadır.

(iii) $(f \oplus g)(t) = (g \oplus f)(t) = f(t)$

$f(t) + g(t) = g(t) + f(t) = f(t)$

olacak şekilde sabit bir $g(t) = 0$ reel değerli ve sürekli fonksiyonu bulunabildiğinden toplama işlemine göre etkisiz elemana sahip olduğunu da göstermiş olduk.

(iv) $\left(f \oplus (-f)\right)(t) = f(t) - f(t) = 0$ olacak şekilde V kümesine ait her reel değerli ve sürekli $f(t)$ fonksiyonu için $-f(t)$ fonksiyonu bulunabilir.

(v) λ bir skaler olmak üzere

$\lambda \otimes (f \oplus g)(t) = \lambda . \left(f(t) + g(t)\right) = \lambda . f(t) + \lambda . g(t) = \lambda \otimes f(t) \oplus \lambda \otimes g(t)$

eşitliği sağlandığından soldan dağılma özelliği sağlanmaktadır.

(vi) $(\lambda + \mu) \otimes f(t) = (\lambda + \mu) . f(t) = \lambda . f(t) + \mu . f(t)$

eşitliği sağlandığından sağdan dağılma özelliği sağlanmaktadır.

(vii) $(\lambda.\mu)\otimes f(t)=(\lambda.\mu).f(t)=\lambda.(\mu.f(t))=\lambda.(\mu\otimes f(t))$

eşitiği sağlandığından skaler ile çarpma işlemine göre birleşme özelliği sağlanmaktadır.

(viii) Her $f(t)\in V$ için $(I\otimes f)(t)=I(t).f(t)=f(t)$ olacak şekilde $I(t)=1\in V$ reel değerli ve sürekli fonksiyonu bulunabilir.

Kapalılık aksiyomlarının dışında gerekli olan diğer sekiz aksiyom da sağlandığından R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre R reel sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek.

V, R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $f,g\in V$ ve $\lambda\in R$ olmak üzere V üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ ve $(\lambda.f)(t)=\lambda.f(t)$ şeklinde tanımlı olsun. V kümesinin üzerinde tanımlı bu işlemlere göre R reel sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayı olduğu yukarıdaki örneğe benzer olarak gösterilebilir. Yukarıdaki örnekten tek farkı, yukarıdaki örnekteki fonksiyonlar sürekli iken bu örnekteki fonksiyonlar reel değerli herhangi fonksiyonlardır.

4.1. Alt Vektör Uzayı

Tanım.

V kümesi bir vektör uzayı olsun. $W\subset V$ alt kümesi V kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre tek başına bir vektör uzayı ise W alt kümesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır denir.

Aslında verilen bir alt kümenin bir alt vektör uzayı olduğunu göstermek için vektör uzayı aksiyomlarının tamamını sağladığını göstermek gerekir. Ancak V kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bu akyomlardan bir çoğunu sağladığı için V kümesi için sağlanan bazı özellikler W alt kümesi için de geçerli olacaktır. Ancak tanımlanan işlemlere göre W alt kümesinin kapalılık özellikleri, W alt kümesinde sıfır vektörünün varlığı ve W alt kümesinde her elemanın negatifinin olması özelliklerinin sağlanması gerekir.

Buna göre aşağıdaki teoremin sağlanması alt vektör uzayı olduğunu göstermek için yeterli olacaktır.

Teorem. V kümesi bir vektör uzayı olsun. W ise V kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W nın V nin bir alt vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

i. Eğer her $x, y \in W$ için $x \oplus y \in W$

ii. Her $x \in W$ ve λ skaleri için $\lambda \otimes x \in W$

Örnek.

V herhangi bir vektör uzayı ve $W = \{0\}$, V nin sadece sıfır vektörünü içeren alt kümesi olsun. W kümesi

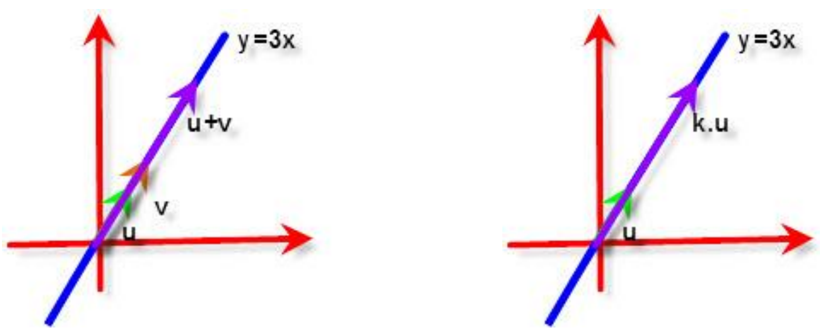
$0 \oplus 0 = 0 \in W$ ve λ skaleri için $\lambda \otimes 0 = 0 \in W$

olduğundan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır. O halde W kümesi V vektör uzayının alt vektör uzayıdır.

Örnek.

$y = 3x$ doğrusunun R^2 nin bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.



$y = 3x$ doğrusunun üzerinde alınan herhangi iki vektörün toplamı yine bu doğru üzerinde olduğundan $y = 3x$ doğrusu toplama işlemine göre kapalıdır. $y = 3x$ doğrusunun üzerinde alınan herhangi bir vektörün bir skalerle çarpımı yine bu doğru üzerinde yer aldığından