2. LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Bölüm Hedefi

Bu bölümde;

- Lineer denklem kavramını,
- Homogen ve homogen olmayan denklemi,
- Lineer cebirsel denklem sistemlerini,
- Lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümünü,
- Tutarlı ve tutarsız lineer cebirsel denklem sistemlerini,
- İlaveli matrisleri ve elementer satır işlemlerini,
- Denk sistemleri,
- Satırca indirgenmiş eşolon formu,
- Lineer cebirsel denklem sistemlerinin Gauss Yok Etme Metodu ve Gauss-Jordan indirgeme metotları ile çözümlerini,
- Homogen lineer sistemleri,
- Elementer matrisleri,
- Elementer matrislerin terslerini,
- Matrislerin terslerinin elementer matris yardımı ile bulunmasını,
- Lineer cebirsel denklem sisteminin çözümlerinin ters matris yardımı ile bulunmasını,

öğrenmiş olacaksınız.

Bu bölümde lineer cebirsel denklem sistemleri hakkında temel bilgiler anlatılacaktır.

2.1. Lineer Denklem Kavramı

Bilinmeyenleri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ olan n değişkenli bir lineer denklem

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_n.x_n = b$$

şeklindedir. Burada $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ler hepsi de sıfır olmayan sabitler ve b sabittir. Özel durumda $n = 2$ ve $n = 3$ özel durumlarında lineer denklemler

$a_1.x + a_2.y = b, (a_1, a_2$ nin her ikisi birden sıfır değil$)$
$a_1.x + a_2.y + a_2.z = b, (a_1, a_2, a_3$ ün üçü birden sıfır değil$)$

$b = 0$ olması özel durumunda denklem **<u>homogen denklem</u>** adını alır ve bilinmeyenleri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ olan n değişkenli bir **<u>homogen lineer denklem</u>**

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_n.x_n = 0$$

şekline sahip olur. Lineer denklemlerde değişkenlerin hepsi birinci dereceden yer alıyor. Değişkenler çarpım durumunda yer almaz veya değişkenin bir kuvveti olmaz veya değişkenler başka bir fonksiyonun (trigonometrik, üstel, logaritmik, ...) değişkeni olmazlar.

Örnek. Aşağıdaki denklemler lineerdir.

$2x - 3y = 4$

$3x + 2y - 4z = 1$

$2x_1 + 3x_2 - 4.x_3 = 7$

$x_1 - 2x_2 + 5.x_3 + 2x_4 = 0$

Örnek. Aşağıdaki denklemler lineer değildir.

$2x - 3y^2 = 3$ Burada y^2 olduğu için lineer değildir.

$3x + 2xy - 4z = 1$ Burada değişkenler x ve y çarpım durumunda olduğu için lineer değildir.

$\cos x - 2y = 3$ Burada $\cos x$ olduğu için lineer değildir.

$x_1 - 2\sqrt{x_2} + 5.x_3 + 2x_4 = 0$ burada x_2 nin karekökü olduğu için denklem lineer değildir.

2.2. Lineer Cebirsel Denklem Sistemi

Birden çok lineer denklemden oluşan denklemler birlikte ele alındığında lineer cebirsel denklem sistemi veya lineer sistem olarak adlandırılır.

Örnek. Aşağıdaki denklemlerden oluşan yapılar birer lineer cebirsel denklem sistemidir.

$$\begin{aligned} 2x-3y&=-5 \\ 5x-2y&=4 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} 2x_1-x_2+5x_3&=15 \\ x_1+2x_2-3x_3&=-4 \\ 3x_1-3x_2+4x_3&=9 \end{aligned}$$

Lineer cebirsel denklem sistemlerinde değişkenler bilinmeyenlerdir.

n bilinmeyenli m tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi

$$\begin{matrix} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\cdots+a_{1n}.x_n=b_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\cdots+a_{2n}.x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+\cdots+a_{mn}.x_n=b_m \end{matrix}$$

şeklindedir. n bilinmeyenli m tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ katsayılar matrisi, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ bilinmeyen sütun matrisi ve

$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ bilinen sütun matrisi olarak alınırsa denklem sistemini

$A.X = B$

şeklinde kısaca yazmak mümkün olur. Eğer burada $B = 0$ ise sisteme **homogen sistem**, aksi takdirde **homogen olmayan sistem** adı verilir.

2.2.1. Lineer Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümü

Bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü sistemde yerine yazıldığında sistemi sağlayan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nin değerlerleridir. Mesela

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots, x_n = a_n$$

değerleri bu sistemin çözümleridir.

Örnek.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 5x - 2y &= 4 \end{aligned}$$ sisteminin çözümleri $x = 2, y = 3$ tür.

Örnek.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 15 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$ sisteminin çözümleri $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ tür.

2.2.2. Lineer Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümlerinin Durumu

Lineer denklem sistemleri ya hiç çözüme sahip değildir, ya sadece bir çözüme sahiptir yada sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Başka bir ihtimal yoktur.

İki bilinmeyenli lineer sistemler için bu durumu inceleyelim. Örneğin genel durumda

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

lineer sistemini göz önüne alalım. Bu denklem sisteminin çözümü olan x ve y değerleri her iki denklemi de sağlayan değerlerdir. Bu lineer sistemin her iki denklemi de birer doğru denklemidir. Düzlemde birbirine göre doğruların üç durumu mevcuttur.

1. Bu doğrular birbirine paralel olabilir. Bu durumda bu doğruların hiç bir ortak noktası yoktur. Bu da bu doğrular ile belirtilen sistemin çözümünün olmaması demektir.
2. Bu doğrular tek bir noktada kesişiyor olabilir. Bu durum bu sistemin tek bir çözümü olduğunu gösterir.
3. Bu doğrular çakışık olabilir. Bu durum her iki denklemi de sağlayan sonsuz sayıda nokta olduğunu yani sistemin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösterir.

2.2.3. Tutarlı ve Tutarsız Lineer Cebirsel Denklem Sistemi

Genel olarak, bir lineer sistem en azından bir çözüme sahip ise tutarlı eğer hiç bir çözüme sahip değilse tutarsız olarak adlandırılır.

Örnek.

$$2x - 3y = -5$$
$$5x - 2y = 4$$

lineer sisteminin sadece bir çözümü vardır.

Örnek.

$$2x - 3y = -5$$
$$4x - 6y = 7$$

lineer sisteminin hiç çözümü yoktur.

Örnek.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 4x - 6y &= -10 \end{aligned}$$

lineer sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır.

2.3. İlaveli Matrisler ve Elementer Satır Operasyonları

Lineer sistemlerde bilinmeyenler ve denklem sayıları attıkça sistemin kontrolü ve çözümü daha güç hale gelmektedir. Eğer sistem basit bir şekilde ifade edilirse kontrolü ve çözümü daha basit hale gelir.

$$\begin{array}{l} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \cdots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{array}$$

lineer sistemini göz önüne alalım.

Bu sistemi aşağıdaki şekilde daha kısa olarak ifade etmek mümkün olur.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Bu matrise yukarıdaki lineer sistemin ilaveli matrisi adı verilir. Burada da görüldüğü gibi bir lineer sistemin ilaveli matrisi, katsayılar matrisinin sağ tarafına sistemdeki denklemlerin sağ taraflarındaki sayıların bir sütun olarak ilave edilmesiyle elde edilen bir matristir.

Örnek.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 15 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sisteminin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 15 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

matrisidir.

2.3.1. Elementer satır işlemleri

Bir lineer cebirsel denklem sistemini çözmenin basit metotlarından birisi cebirsel işlemleri uygulayarak bilinmeyenleri bulmaktır. Bu şekilde yerine koyma yöntemi ya da yok etme yöntemi olarak adlandırılan iki temel yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler iki denklem, iki bilinmeyenli ve üç denklem üç bilinmeyenli lineer cebirsel denklem sistemleri için kolaylıkla uygulanabilirken denklem ve bilinmeyen sayısının artmasıyla daha zor hale gelmektedir. Bu yöntemler uygulanırken lineer cebirsel denklem sistemindeki denklemlere aşağıdaki temel işlemler uygulanmaktadır.

1. Bir denklemin sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılması,
2. İki denklemin yer değiştirmesi,
3. Bir denklemin bir katının diğer bir denkleme ilave edilmesi.

İlaveli matrisin satırları bir lineer cebirsel denklem sisteminin denklemlerinde karşılık geldiğinden denklemlere uygulanan bu işlemler ilaveli matristeki satırlarına uygulanabilir. Bir matris için elementer satır işlemleri olarak adlandırılan bu işlemler aşağıda listelenmiştir.

1. Bir satırın sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılması,
2. İki satırın yer değiştirmesi,
3. Bir satırın bir sabit ile çarpımının diğer bir satıra ilave edilmesi.

Örnek. Aşağıdaki sistemi ve ona karşılık gelen sistemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 15 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 15 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

Birinci ve ikinci denklemleri değiştirelim. Birinci ve ikinci satırları değiştirelim.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 15 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & 15 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

Birinci denklemin -2 katını ikinci denkleme ilave edelim. Birinci satırın -2 katını ikinci satıra ilave edelim.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ -5x_2 + 11x_3 &= 23 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 11 & 23 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

Birinci denklemin -3 katını üçüncü denkleme ilave edelim. Birinci satırın -3 katını üçüncü satıra ilave edelim.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ -5x_2 + 11x_3 &= 23 \\ -9x_2 + 13x_3 &= 21 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 11 & 23 \\ 0 & -9 & 13 & 21 \end{array}\right]$$

İkinci denklemi, üçüncü denklemin $\frac{-5}{9}$ katı ile toplayalım. İkinci satırı, üçüncü satırın $\frac{-5}{9}$ katı ile toplayalım.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ -5x_2 + 11x_3 &= 23 \\ \frac{34}{9}x_3 &= \frac{102}{9} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{102}{9} \end{array}\right]$$

Elde edilen bu son denklemden $x_3=3$ olduğu kolayca elde edilebilir. $x_3=3$ ikinci denklemde yerine yazılırsa $x_2=2$ elde edilir. $x_2=2$ ve $x_3=3$ birinci denklemde yerlerine yazılırsa $x_1=1$ elde edilir.

2.3.2. Denk Sistemler

Eğer bir B matrisi bir dizi elementer satır işlemi sonucunda A matrisinden elde edilen bir matris ise B matrisi A matrisine satırca denktir denir. Her elementer satır işlemi aynı tipten başka bir elementer satır işlemi ile geri alınabilir. Mesela bir satırın k ile çarpılmasını $\frac{1}{k}$ ile çarparak geri alabiliriz. Bu durumda eğer A matrisi A matrisine satırca denk ise A matrisi de B matrisine satırca denktir. Bu durumda A ve B matrisleri satırca denktir denir. Bir $Ax=b$ lineer sistemine uygulanan elementer işlemler $\left[A|b\right]$ ilaveli matrisinde elementer satır işlemlerine karşılık gelmektedir ve elementer satır işlemlerinin sonucunda elde edilen çözüm başlangıçtaki lineer sistemin çözümüdür.

Teorem. Eğer $\left[A|b\right]$ ve $\left[C|d\right]$ satırca denk ilaveli matrisler ise bu ilaveli matrislere karşılık gelen $Ax=b$ ve $Cx=d$ sistemleri denktir yani aynı çözüm cümlesine sahiptir.

Sonuç. Eğer A ve C, $m\times n$ tipinde satırca denk iki matris ise $Ax=0$ ve $Cx=0$ lineer homogen sistemleri denktirler.

2.3.3. Satırca İndirgenmiş Eşolon Form

Tanım.

Eğer bir matris için aşağıdaki şartlar sağlanırsa **satırca indirgenmiş eşolon formdadır** denir.

1. **1.** Eğer varsa bütün sıfır satırları matrisin en alt satırında yer alır.
2. **2.** Eğer bir satır sıfır olmayan elemanlar içeriyorsa bu durumda bu satırda sıfırdan farklı ilk eleman 1 olmalıdır. Bu elamana ilk 1 adı verilir.
3. **3.** Eğer herhangi ardarda iki satır tamamen sıfırlardan oluşmuyorsa alttaki satırın ilk 1' i üstteki satırın ilk 1' inin sağında yer almalıdır.
4. **4.** İlk 1 içeren her sütunda ilk 1 haricinde bütün elemanlar sıfır olmalıdır.

İlk üç özelliğe sahip olan matrislere **satırca eşolon formda** matris adı verilir. Bir A matrisinde sıfırdan farklı bir elemana sahip birinci sütuna pivot sütunu adı verilir. Pivot sütunundaki sıfırdan farklı ilk elemana pivot adı verilir.

Örnek.

Aşağıdaki matrisler satırca indirgenmiş eşolon formdadır.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&1&4&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Örnek.

Aşağıdaki matrisler satırca eşolon formdadır fakat satırca indirgenmiş eşolon formda değildir.

$$E=\begin{bmatrix}1&2&5&-2\\0&1&-2&3\\0&0&1&6\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0&1&3&7&2\\0&0&1&3&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Örnek.

Aşağıdaki matrisler satırca eşolon formda değildir.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&2\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&0&1\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

2.4. Lineer Cebirsel Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Örnek.

Aşağıdaki sistemin çözümünü bulunuz.

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Çözüm.

Bu örnekte katsayılar matrisi üst üçgen matris halinde yer almaktadır. Verilen bir sistem elementer satır işlemleri kullanılarak bu şekilde üst üçgen bir matris haline getirilebilir. Böyle bir üst üçgen matris elde ettikten sonra çözümü elde etmek için yapılması gereken geri yerine koyma yöntemini kullanarak çözümü elde etmektir.

Son denklemden $x_3 = -2$ elde edilir. Elde edilen bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$3x_2 + 5(-2) = 8, \qquad 3x_2 = 18,\; x_2 = 6$$

elde edilir. Bu iki değer ilk denklemde yerlerine yazılırsa

$$-5x_1 - 6 + 3(-2) = 3,\; -5x_1 = 15,\; x_1 = -3$$

elde edilir.

2.4.1. Gauss Yok Etme Metodu ve Gauss-Jordan indirgeme metodu

Tanım. (Gauss yok etme metodu)

1. $\left[A|b\right]$ ilaveli matrisi elementer satır işlemleri kullanılarak satırca eşolon şeklindeki üst üçgen veya alt üçgen formundaki $\left[C|d\right]$ matrisine dönüştürülür.

2. Eğer $\left[C|d\right]$ üst üçgen matris ise geriye yerine koyma, eğer $\left[C|d\right]$ alt üçgen matris ise ileriye yerine koyma kullanılarak karşılık gelen lineer sistemin çözümü bulunur.

Tanım. (Gauss-Jordan indirgeme metodu)

1. $\left[A|b\right]$ ilaveli matrisi elementer satır işlemleri kullanılarak satırca indirgenmiş eşolon şeklindeki $\left[C|d\right]$ matrisine dönüştürülür.

2. Geriye yerine koyma kullanılarak karşılık gelen lineer sistemin çözümü bulunur.

Not. Eğer A, $n\times n$ tipinde bir kare matris ise $Ax=b$ lineer sistemi bir tek çözüme sahiptir.

Örnek.

$$\begin{aligned} x_2-3x_3&=-5\\ 2x_1+3x_2-x_3&=7\\ 4x_1+5x_2-2x_3&=10 \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü **Gauss yok etme metodunu** kullanarak bulunuz.

Çözüm.

Verilen sisteme karşılık gelen ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5\\ 2 & 3 & -1 & 7\\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] \quad r_2 \leftrightarrow r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] \quad -2r_1+r_3 \to r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right] \quad r_2+r_3 \to r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{3}r_3 \rightarrow r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Elimizdeki ilaveli matrise karşılık gelen lineer sistem ise

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{7}{2} \\ x_2 - 3x_3 &= -5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

dir. Buradan $x_3 = 3$ direk olarak elde edilir. Geriye yerine koyma kullanalım. Bu değer

$x_2 - 3x_3 = -5$ de yerine yazılırsa

$x_2 - 3.3 = -5$, $x_2 = 4$ elde edilir.

$x_2 = 4, x_3 = 3$ değerleri $x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2}$ de yerlerine yazılırsa

$x_1 + \frac{3}{2}4 - \frac{1}{2}3 = \frac{7}{2}$, $x_1 = -1$ elde edilir.

Örnek.

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sistemini **Gauss-Jordan indirgeme metodunu** kullanarak bulunuz.

Çözüm. Dikkat edilirse örnekteki sistem yukarıdaki örnekteki sistemin aynısıdır. Sadece metot Gauss-Jordan indirgeme metodudur. Bu metot da elementer satır işlemlerinden sonra katsayılar matrisi birim matris haline getirilip daha sonra bilinmeyenler hesaplanır.

O halde yukarıdaki örnekte son adımdan sonra hesaplamalara devam ederek çözümü bulalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad -\frac{3}{2}r_2 + r_1 \to r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad -4r_3 + r_1 \to r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad 3r_3 + r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

İlaveli matrisi elde edilir. Elimizdeki ilaveli matristen ise çözüm direk olarak elde edilebilir.

$x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 3.$

Not. Eğer A matrisi, $m \neq n$ olmak üzere $m \times n$ tipinde bir matris ise $Ax = b$ lineer sistemi ya sonsuz çözüme sahiptir ya da hiç bir çözüme sahip değildir.