Lineer Dönüşümler

1.1. Tanım

V, W iki gerçel vektör uzayı olsun. V den W ye tanımlanan T fonksiyonu, aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona **lineer dönüşüm** denir.

$$T : V \rightarrow W$$

i) Her $x, y \in V$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii) Her $x \in V$, $c \in \mathbf{R}$ için $T(cx) = c\,T(x)$

Bir başka deyişle $T : V \rightarrow W$ dönüşümü vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini koruyorsa bu dönüşüme **lineer dönüşüm** denir.

Bu iki koşul birleştirilerek aşağıdaki şekilde bir tek denk koşula indirgenebilir.

Her $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $x_1, x_2, \in V$ için

$$T(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2)$$

olmalıdır.

$$T : V \rightarrow W$$

bir lineer dönüşüm ise $c_1 , c_2 , ..., c_n \in \mathbf{R}$ skalerleri ve $x_1 , x_2 , ... , x_n \in V$ vektörleri için

$$T (c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2) + ... + c_n T(x_n)$$

olacağı açıktır.

Şimdi lineer dönüşümlere örnekler verelim:

1.2. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$
$$T(x, y) = (x, y, x + y)$$

T 'nin lineer olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$x, y \in \mathbf{R}^2$ için $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olsun.

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\ &= (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

bulunur.

$\forall\ x \in \mathbf{R}^2$, $\forall\ c \in \mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} T(c(x_1, x_2)) &= T(cx_1, cx_2) \\ &= (cx_1, cx_2, cx_1 + cx_2) \\ &= c(x_1, x_2, x_1 + x_2) \\ &= c\,T(x) \end{aligned}$$

bulunur. Lineer dönüşüm koşulları sağlandığı için T bir lineer dönüşümdür.

1.3. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$T(x, y) = (y, x + 3)$$

dönüşümün lineer dönüşüm olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$x, y \in \mathbf{R}^2$ için $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olsun.

$$T(x + y) \overset{?}{=} T(x) + T(y)$$

$$T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \overset{?}{=} T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

$$(x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 3) \overset{?}{=} (x_2, x_1 + 3) + (y_2, y_1 + 3)$$

$$(x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 3) \neq (x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 6)$$

olduğundan T bir lineer dönüşüm değildir.

1.4. Teorem

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$T(0) = 0$$

dir. Yani her lineer dönüşümde 0 vektörünün görüntüsü sıfırdır.

Kanıt

$x \in V$ için,

$$T(x + 0) = T(x) + T(0) \qquad T \text{ lineer}$$
$$T(x) = T(x) + T(0)$$

buradan $T(0) = 0$ olur.

1.5. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$
$$T(x, y) = (x^2, y^2)$$

dönüşümünün lineer olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Bu dönüşümün lineer olmadığını gösterelim: Bunun için uygun iki vektör alarak lineer dönüşüm koşullarından birinin sağlanmadığını göstermek yeterlidir.

$x = (1, 1)$, $y = (2, 2) \in \mathbf{R}^2$ alalım.

$$T(x + y) = T[(1, 1) + (2, 2)] = T(3, 3) = (9, 9)$$
$$T(x) + T(y) = T(1, 1) + T(2, 2) = (1, 1) + (4, 4) = (5, 5)$$
$$T(x + y) = (9, 9) \neq (5, 5) = T(x) + T(y)$$

dir. O halde T bir lineer dönüşüm değildir.

1.6. Örnek

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$
$$T\,(x, y, z) = (1\,,\, 2,\;\; x + y + z)$$

olsun. Bu dönüşümün lineer olup olmadığını kontrol edelim. Eğer T lineer dönüşüm ise

$$T(0) = 0 \;\text{ olmalıdır.}$$
$$T(0, 0, 0) = (1, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$$

olduğundan T dönüşümü lineer değildir.

1.7. Teorem

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi V için bir taban ve x, V deki herhangi bir vektör ise

$$T(x) \in L(\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\})$$

Kanıt

$x \in V$ olsun. $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi V nin bir tabanı olduğundan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

dir.

$$T(x) = T(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n) \quad \text{T lineer olduğundan}$$
$$T(x) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2) + \ldots + c_n T(x_n) \in L(\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\})$$

O halde, $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşüm ise V nin her x vektörünün T(x) görüntüsü V nin bir tabanındaki vektörlerin görüntülerinin bir lineer bileşimidir. Bu nedenle, bir lineer dönüşüm için bir tabandaki vektörlerin görüntülerinin verilmesi yeterlidir.

1.8. Örnek

$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineer dönüşüm olsun

$T(1, 0) = (1, 2)$, $T(1, 1) = (3, -1)$ ise $T(x, y) = ?$, $T(4, 5) = ?$

Çözüm

$\{ (1, 0), (1, 1) \}$ kümesinin $\mathbf{R}^2$ için bir taban olduğunu kontrol ediniz.

(x, y) vektörü bu tabandaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır

$(x, y) = a\,(1, 0) + b\,(1,1)$

$(x, y) = (a + b, b)$

$$\begin{cases} a + b = x \\ \quad\;\; b = y \end{cases}$$

bulunur. Buradan $a = x - y$, $b = y$ olur.

$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y\,(1, 1)$ T lineer olduğundan

$T(x, y) = (x - y)\; T(1, 0) + y\; T(1, 1)$

$T(x, y) = (x - y)\;(1, 2) + y\,(3, -1)$

$T(x, y) = (x - y\,, 2x - 2y) + (3y\,, -y)$

$T(x, y) = (x + 2y,\; 2x - 3y)$

bulunur. Buradan;

$T(4\,, 5) = (4 + 2.5\,,\; 2.4 - 3.5) = (14\,, -7)$

olur.

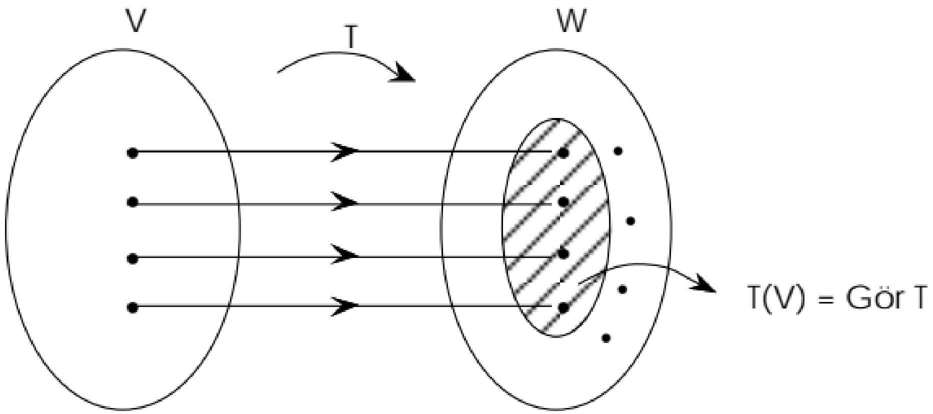
2. Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

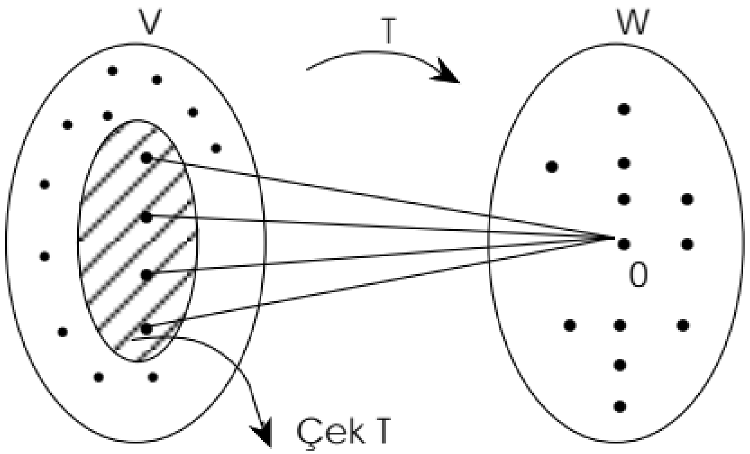
2.1. Tanım

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. V nin T altındaki görüntüsü olan $T(V) = \{T(x) \mid x \in V\}$ kümesine T lineer dönüşümünün **görüntü uzayı** denir. W nin sıfır vektörünün öngörüntüsüne de T nin **çekirdeği** denir ve Çek T ile gösterilir;

$$\text{Çek } T = \{ x \in V \mid T(x) = 0 \}$$

dir.





2.2. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$
$T(x, y, z) = (2x, x + y)$ veriliyor.

(i) T 'nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
(ii) Çek T ve Gör T'yi bulunuz.

Çözüm

(i) T 'nin lineer dönüşüm olduğunu siz gösteriniz.

(ii) Çek T ve Gör T yi bulalım:

$$\text{Çek } T = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0) \}$$

olan vektörlerin kümesidir.

$(x, y, z) \in$ Çek T ise $T(x, y, z) = (0, 0)$ diğer taraftan,
$T(x, y, z) = (2x, x + y)$ T nin tanımı
buradan $(2x, x + y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x = 0$, $y = 0$ bulunur. Burada z bileşeni için hiçbir sınırlama söz konusu olmadığına göre, Çek $T = \{ (0, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \in \mathbf{R} \}$ dir. Çek T , $\mathbf{R}^3$ teki $(0, 0, z)$ şeklindeki bütün vektörlerden oluşur. Bu vektörlerin kümesi ise z-eksenidir. z-ekseni $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayıdır ve $\{(0, 0, 1)\}$ kümesi bu alt uzayın bir tabanıdır. O halde, T lineer dönüşümünün çekirdeği $\mathbf{R}^3$ ün 1-boyutlu alt uzayıdır.

Şimdi Gör T yi bulalım:

$$\begin{aligned} \text{Gör } T &= T(\mathbf{R}^3) = \{ T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \} \\ &= \{ (2x, x + y) \mid x, y \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

$(2x, x + y) = x(2, 1) + y(0, 1)$ şeklinde yazabiliriz.
O halde, $\text{Gör } T = \{ x(2, 1) + y(0, 1) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$ dir.

Gör T, $(2,1), (0,1)$ vektörlerinin tüm lineer bileşimlerinin kümesidir. $\{(2,1), (0,1)\}$ kümesi $\mathbf{R}^2$ nin bir tabanı olduğundan bu küme $\mathbf{R}^2$ yi gerer. Böylece $\text{Gör } T = \mathbf{R}^2$ olur.

2.3. Teorem

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise Çek T, V nin bir alt uzayıdır.

Kanıt

Çek T nin V nin bir alt uzayı olması için, daha önce gördüğümüz alt uzay olma koşullarını sağlamalıdır yani

$x, y \in$ Çek T için $x + y \in$ Çek T
$x \in$ Çek T, $c \in \mathbf{R}$ için $c\,x \in$ Çek T

olmalıdır.

$x, y \in$ Çek T olsun. T bir lineer dönüşüm olduğundan

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$$

$x + v \in$ Cek T

$$c \in \mathbf{R}\ ,\ \ T(c\,x) = c\,T(x) = c.0 = 0$$

$c\,x \in$ Çek T

Böylece Çek T, V nin bir alt uzayıdır.

2.4. Teorem

$T: V \to W$ lineer dönüşüm ise Gör $T = T(V)$, W nin bir alt uzayıdır.

Kanıt

Gör T nin W nin alt uzayı olması için alt uzay olma koşulları sağlanmalıdır.

(i) $y_1, y_2 \in$ Gör T iken $y_1 + y_2 \in$ Gör T

(ii) $c \in R$ iken $c\, y_1 \in$ Gör T

olmalıdır.

T bir lineer dönüşüm olduğu için $T(0) = 0$, $0 \in$ Gör T, Gör $T \neq \varnothing$ olur.

$y_1, y_2 \in$ Gör T ise $T(x_1) = y_1$ ve $T(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in V$ vardır.

$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2)$ yani $y_1 + y_2 \in$ Gör T.

$c \in \mathbf{R}$ için $c\, y_1 = c\, T(x_1) = T(c\, x_1)$ yani $c\, y_1 \in$ Gör T, böylece Gör T, W nin bir alt uzayı olur.

Her mertebeden türevi olan fonksiyonların kümesi V olsun. V kümesi

$$f, g \in V \ , \ c \in \mathbf{R} \text{ için}$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$c f(x) = c \ f(x)$$

işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayıdır. (Siz V kümesinin vektör uzayı olma koşullarını sağladığını gösteriniz.)

$D : V \to V$

Dönüşümü her fonksiyonu türevine gönderen bir dönüşüm olsun. Örneğin; $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ ise $D f(x) = D(x^3 + 6x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 12x - 4$

$$D : V \to V$$
$$D f = f'$$

dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Gerçekten bir toplamın türevi, türevlerinin toplamına eşit olduğundan $f, g \in V$ için

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = Df + Dg$$

olur.

Bir fonksiyonun sabit ile çarpımının türevi, türevin bu sabitle çarpımına eşit olduğundan,

$c \in \mathbf{R}$, $f \in V$ için
$D(c\,f) = (c\,f)' = c\,f' = c\,Df$

O halde D türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim:

2.5. Örnek

$D : P_3(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$

$D(p(x)) = \dfrac{d}{dx} p(x) = (p(x))'$ lineer dönüşümü verilsin

(i) Çek D ve Gör D yi bulunuz.

(ii) Çek D ve Gör D için birer taban yazınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}\text{Çek } D &= \{ p(x) \in P_3(\mathbf{R}) \mid D(p(x) = 0 \} \\ &= \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbf{R}) \mid a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = 0 \}\end{aligned}$$

$a_1 + 2a_2 x + 3\,a_3 x^2 = 0$ Polinom özdeşliğinden

$a_1 = 0\ ,\ a_2 = 0\ ,\ a_3 = 0$

Çek $D = \{ p(x) = a_0 \mid a_0 \in \mathbf{R} \}$

sabit polinomların kümesidir. Çek D, P_3 $(\mathbf{R})$ nin bir alt uzayıdır ve boy Çek D $=1$ olduğu kolayca görülür. Çünkü (1) vektörü sabit polinomların kümesi olan Çek D yi gerer.

Gör $D \subseteq P_2(\mathbf{R})$ dir.

Gör $D = \{ p(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \in P_2(R) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R} \}$ dir.

Gör D kümesi $P_2(\mathbf{R})$ nin bir alt uzayıdır. Aslında Gör $D = P_2(\mathbf{R})$ dir, dolayısıyla bir tabanı $\{1, x, x^2\}$ kümesidir. Buradan boy Gör $D = 3$ tür.

2.6. Teorem

$T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün bire - bir olması için gerekli ve yeterli koşul Çek $T = \{0\}$ olmasıdır.

Kanıt

T lineer dönüşümü bire-bir ise Çek $T = \{0\}$ olduğunu gösterelim.

$x \in$ Çek T olsun.
$T(x) = 0$ olur. Çek T nin tanımı
$T(0) = 0$ T lineer. Buradan
$T(x) = T(0)$

olur. T bire-bir olduğundan $x = 0$ ve Çek $T = \{0\}$ bulunur.

Tersine olarak, Çek $T = \{0\}$ ise T nin bire-bir olduğunu gösterelim:

$x_1, x_2 \in V$ için $T(x_1) = T(x_2)$ olsun.

$T(x_1) - T(x_2) = 0$
$T(x_1 - x_2) = 0$, $x_1 - x_2 \in$ Çek T. Böylece $x_1 - x_2 = 0$ ve $x_1 = x_2$ olup T bire-birdir.

2.7. Örnek

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T(x, y) = (x, x + y, x - y)$

lineer dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterelim: Bunun için Çek T yi bulalım,

$\text{Çek } T = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = 0 \}$

$T(x, y) = (x, x + y, x - y) = (0, 0, 0)$

$x = 0 \quad , \quad y = 0$ olur.

Çek T = { 0 } bulunur. O halde dönüşümü bire-bir dir.

2.8. Örnek

$$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$$
$$T(x, y, z) = (x + y, x + z)$$

lineer dönüşümün bire-bir olup olmadığını araştıralım:

$$\text{Çek } T = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x, y, z) = 0 \}$$
$$T(x, y, z) = (x + y, x + z) = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

sistemin sonsuz çözümü vardır. $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$ için $(1, -1, -1) \in \text{Çek } T$ dir. Buna göre T dönüşümü bire-bir değildir. Yani farklı iki elemanın görüntüleri aynı olabilir: Örneğin

$$(1, 2, 3) \neq (2, 1, 2)$$

olmasına karşın,

$$T(1, 2, 3) = T(2, 1, 2) = (3, 4)$$

bu da T nin bire-bir olmadığını gösterir.

2.9. Teorem

$T : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer V sonlu boyutlu ise,

$$\text{boy } V = \text{boy Çek } T + \text{boy Gör } T$$

dir. Bu teoremin kanıtını vermeyeceğiz.

Teoremi bir örnekle doğrulayalım:

2.10. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$T(x, y, z) = x + 2y + 3z$ verilsin.

(i) T nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
(ii) Çek T, Gör T için birer taban yazınız.
(iii) boy Çek T, boy Gör T yi belirtiniz.

Çözüm

(i) T nin lineer dönüşüm olduğu kolayca görülür.

(ii) $\text{Çek } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$

$\text{Çek } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \}$

$$\text{Çek } T = \left\{ \left(x_1, x_2, -\frac{x_1 + 2x_2}{3} \right) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

bulunur. Çek T için bir taban bulalım.

$x_1 = 1 \ , x_2 = 0$ için $x_3 = -\frac{1}{3}$ ve $\left(1 , 0 , -\frac{1}{3}\right) \in$ Çek T

$x_1 = 0 \ , x_2 = 1$ için $x_3 = -\frac{2}{3}$ ve $\left(0 , 1 , -\frac{2}{3}\right) \in$ Çek T

ve çekirdeğin herhangi bir öğesi

$$\left(x_1 , x_2, -\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right) = x_1 \left(1 , 0 , -\frac{1}{3}\right) + x_2 \left(0 , 1 , -\frac{2}{3}\right)$$

yazılabildiğinden,

$$\left\{ \left(1 , 0 , -\frac{1}{3}\right), \left(0 , 1 , -\frac{2}{3}\right) \right\}$$

kümesi Çek T yi germektedir. Bu kümenin lineer bağımsız olduğunu da siz gösteriniz. Böylece $\left\{ \left(1 , 0 , -\frac{1}{3}\right), \left(0 , 1 , -\frac{2}{3}\right) \right\}$ kümesi Çek T için bir tabandır. Buradan da boy Çek T = 2 olur.

$\varnothing \neq T(\mathbf{R}^3) \subseteq \mathbf{R}$ olduğundan boy $T(\mathbf{R}^3) = 1$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{boy } \mathbf{R}^3 &= \text{boy Çek T} + \text{boy Gör T} \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

eşitliği doğrulanmış olur.

2.11. Örnek

$$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$$
$$T(x, y, z, u) = (x + y, z + u, x + z)$$

lineer dönüşümü verilsin.

(i) Gör T, Çek T yi bularak birer taban yazınız.
(ii) boy Gör T, boy Çek T yi belirtiniz.

Çözüm

(i) $\text{Gör } T = T(\mathbf{R}^4) = \{ T(x, y, z, u) \mid (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4 \}$
$\qquad = \{ (x + y, z + u, x + z) \mid x, y, z, u \in \mathbf{R} \}$

dir.

$(x + y, z + u, x + z) \in \text{Gör } T$ vektörünü

$$(x + y, z + u, x + z) = x(1, 0, 1) + y(1, 0, 0) + z(0, 1, 1) + u(0, 1, 0)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$(1, 0, 1), \ (1, 0, 0), \ (0, 1, 1), \ (0, 1, 0)$$

vektörlerinin kümesi lineer bağımlıdır ($\mathbf{R}^3$ teki 4 vektör). Satırları bu vektörler olan matrisi yazarak basamak biçime indirgeyelim. Böylece Gör T yi geren lineer bağımsız kümeyi, yani Gör T nin bir tabanını bulmuş oluruz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ kümesi Gör T yi geren lineer bağımsız kümedir. Bir başka deyişle Gör T nin tabanıdır. Buradan Gör T $= \mathbf{R}^3$ olur (nedenini açıklayınız) ve boy Gör T $= 3$ tür.

Çek T $= \{ (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4 \mid T(x, y, z, u) = 0 \}$

$T(x, y, z, u) = (x + y, z + u, x + z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \mathbf{n} + \mathbf{i} = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

sistemin katsayılar matrisinin rankı 3, bilinmeyen sayısı 4 olduğundan 1 bağımsız değişkene bağlı çözümleri vardır. Bağımsız değişken u alınırsa u ya bağlı çözümler $x = u$, $y = -u$, $z = -u$ olur.

Çek T $= \{ (u, -u, -u, u) \mid u \in \mathbf{R} \} = \{ u(1, -1, -1, 1) \mid u \in \mathbf{R} \}$ bulunur. Buna göre $\{(1, -1, -1, 1)\}$ kümesi Çek T nin bir tabanıdır. Buradan boy Çek T $= 1$ dir. Böylece

$$\text{boy } \mathbf{R}^4 = \text{boy Gör T} + \text{boy Çek T}$$
$$4 = 3 + 1$$

eşitliği doğrulanmış olur.

3. Lineer Dönüşümlerle işlemler

Lineer dönüşümler arasında toplama, çıkarma, skalerle çarpma, bileşke gibi çeşitli işlemler tanımlanabilir.

3.1. Tanım

$T\,,\ S\ :\ V \rightarrow W$ birer lineer dönüşüm olsun.

(i) T ve S dönüşümlerinin toplam ve farkı

$$T\,,S:\ V \rightarrow W$$
$$(T \pm S)(x) = T(x) \pm S(x)$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) $c \in \mathbf{R}$ skaleri ile T nin çarpımı,

$$c\,T:\ V \rightarrow W$$
$$(c\,T)(x) = c\,T(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan $T \pm S$ ve $c\,T$ nin lineer dönüşüm olduklarını gösterelim:

$\forall\, x , y \in V$ için

$(T + S)(x + y) = T(x + y) + S(x + y)$	Tanımdan
$= T(x) + T(y) + S(x) + S(y)$	T , S lineer olduğundan
$= T(x) + S(x) + T(y) + S(y)$	
$= (T + S)(x) + (T + S)(y)$	

olur. $c \in \mathbf{R}$ için

$(T + S)(c\,x) = T(c\,x) + S(c\,x)$	Tanımdan
$c\,T(x) + c\,S(x) = c\,(T(x) + S(x)) = c\,(T + S)(x)$	T , S lineer olduğundan

böylece iki lineer dönüşümün toplamının bir lineer dönüşüm olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de $c\,T$ nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösterelim:

$x , y \in V$ için

$$(cT)(x + y) = (cT(x + y)) = c\,(T(x) + T(y))$$
$$= c\,T(x) + c\,T(y)$$

$k \in \mathbf{R}$ için

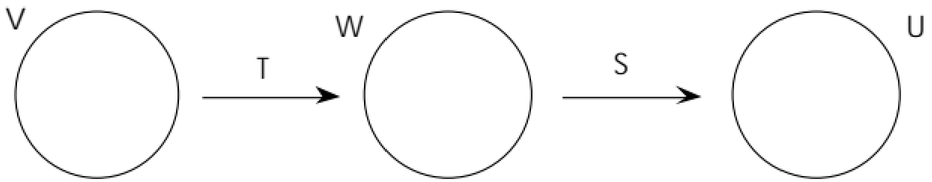
$$(c\,T)(k\,x) = c\,(T(k\,x)) = c\,(k\,T(x)) = k\,(c\,T(x))$$

böylece $c\,T$ bir lineer dönüşüm olur.

3.2. Tanım

$T : V \to W$

$S : W \to U$ birer lineer dönüşüm olsunlar.



T ile S nin bileşke fonksiyonu

$S \circ T : V \to U$

$(S \circ T)(x) = S(T(x))$

biçiminde tanımlanır.

Sizde $S \circ T$ nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

3.3. Örnek

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad S: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y) = (2x, x + y, y), \quad S(x, y) = (x - y, 3y, x)$

lineer dönüşümleri verilsin.

(i) $(3T + S)(1, 2)$ değerini hesaplayınız.

(ii) $(T - 4S)(1, 1)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm

(i) $$\begin{aligned}(3T + S)(1, 2) &= 3T(1, 2) + S(1, 2)\\ &= 3(2, 3, 2) + (-1, 6, 1)\\ &= (6, 9, 6) + (-1, 6, 1)\\ &= (5, 15, 7)\end{aligned}$$

olur.

(ii) $$\begin{aligned}(T - 4S)(1, 1) &= T(1, 1) - 4S(1, 1)\\ &= (2, 2, 1) - 4(0, 3, 1)\\ &= (2, -10, -3)\end{aligned}$$

bulunur.

3.4. Örnek

$$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad S: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (z, x, 0) \ , \ S(x, y, z) = (0, x, y)$$

lineer dönüşümleri veriliyor.

(i) $T \circ T = T^2$ olmak üzere, Çek T^2 ve Gör T^2 yi bularak birer taban yazınız.
(ii) $(S \circ T)(1, 2, 3)$ değerini bulunuz.

Çözüm

(i) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) = (z, x, 0)$$

olduğuna göre önce $T^2(x, y, z)$ yi bulalım:

$$T^2(x, y, z) = T(T(x, y, z)) = T(z, x, 0) = (0, z, 0) \quad \text{olur.}$$

$$T^2(x, y, z) = (0, z, 0) \quad \text{bulunur.}$$

$\text{Çek}\, T^2 = \{ (x, y, z) \mid T^2 (x, y, z) = 0 \}$

$T^2 (x, y, z) = (0, z, 0) = (0, 0, 0)$

buradan $z = 0$ bulunur. O halde

$\text{Çek}\, T^2 = \{ (x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R} \}$ kümesi olur.

Bu kümede xy- düzlemidir.
Çek T^2 için bir taban bulalım:

$(x, y, 0) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0)$ yazılırsa $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$ kümesi Çek T^2 için bir taban olur.

Buradan boy Çek $T^2 = 2$ olur.

Gör T^2 yi bulalım:

$\text{Gör}\, T^2 = T^2 (\mathbf{R}^3)$ yazabiliriz.
$\text{Gör}\, T^2 = \{ (0, z, 0) \mid z \in \mathbf{R} \}$ olup, y-eksenidir. $\{ (0, 1, 0) \}$ kümesi Gör T^2 için bir tabandır.

(ii) $(S \circ T)(1, 2, 3) = S (T (1, 2, 3))$
$= S (3, 1, 0) = (0, 3, 1)$

bulunur.