Örnek.

Bu örnekte bir lineer sistemi baştan ele almak yerine ilaveli matrisin eşolon haline getirilmiş hali direk olarak ele alınmıştır. Bir lineer sistemin ilaveli matrisinin eşolon formu aşağıdaki matris olsun.

$$[C \vdots d]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

bu eşolon formdan

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+5x_4+4x_5&=6 \\ x_2+3x_3+2x_4+x_5&=5 \\ x_3+4x_4+3x_5&=-2 \\ x_4+2x_5&=3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} &x_5=a, \ (\text{herhangi bir reel sayı}) \\ &x_4=3-2x_5 \\ &x_3=-2-4x_4+3x_5 \\ &x_2=5-3x_3+2x_4+x_5 \\ &x_1=6-3x_2+2x_3+5x_4+4x_5 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x_5=a$ herhangi bir reel sayı olduğundan verilen lineer sistem sonsuz çözüme sahiptir.

Örnek.

Bu örnekte bir lineer sistem yine baştan ele almak yerine ilaveli matrisin eşolon haline getirilmiş hali direk olarak ele alınmıştır. Bir lineer sistemin ilaveli matrisinin eşolon formu aşağıdaki matris olsun.

$$[C \vdots d]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Buradaki $[C \vdots d]$ sisteminin çözümü yoktur. Çünkü

$$0.x_1+0.x_2+0.x_3+0.x_4=2$$

denklemi hiç bir x_1, x_2, x_3, x_4 için sağlanmaz. Dolayısıyla sistemin hiç bir çözümü yoktur.

2.5. Homogen Lineer Sistemler

Eğer lineer bir sistemde sistemin sağ tarafındaki sabitlerin hepsi de sıfır ise yani sistem

$$\begin{array}{l} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+\cdots+a_{1n}.x_n=0 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+\cdots+a_{2n}.x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+\cdots+a_{mn}.x_n=0 \end{array}$$

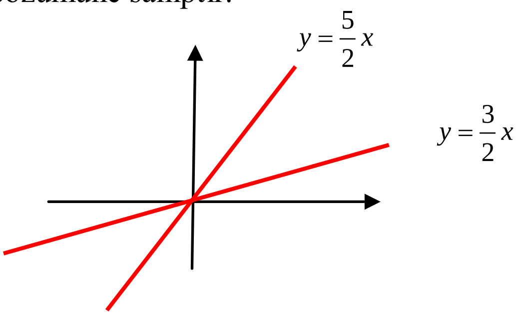
şeklinde ise sisteme homogen lineer sistem adı verilir. Homogen lineer sistemi kısaca $Ax=0$ şeklinde yazmak ta mümkündür.

Her homogen lineer sistem tutarlıdır. Çünkü bütün böyle sistemler $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ aşikâr çözümüne sahiptir. Eğer sistemin aşikâr çözüm haricinde çözümleri var ise o çözümlere aşikar olmayan çözüm adı verilir. Homogen lineer sistemler her zaman aşikâr çözüme sahip olduğundan çözümleri ile ilgili olarak sadece iki ihtimal vardır. Sistem ya sadece aşikâr çözüme sahiptir ya da aşikâr çözüme ilave olarak sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

Bu durumu iki değişkenli özel durumda incelediğimizde doğruluğunu görebiliriz.

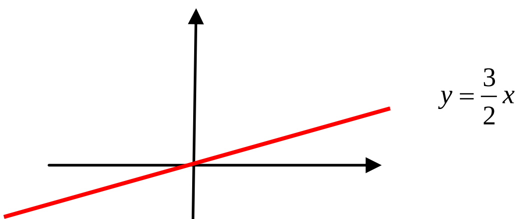
Örnek.

$$\begin{aligned} 2x-3y&=0 \\ 5x-2y&=0 \end{aligned}$$ homogen lineer sistemini göz önüne alalım. Bu sistemdeki denklemlerin her biri orijinden geçen doğruları göstermektedir. Dolayısıyla bu sistem sadece $x=0, y=0$ aşikar çözümüne sahiptir.



Örnek.

$$\begin{aligned} 2x-3y&=0 \\ 4x-6y&=0 \end{aligned}$$ homogen lineer sistemini göz önüne alalım. Bu sistemdeki denklemlerin her biri orijinden geçen doğruları göstermektedir ve bu doğrular çakışıktır. Dolayısıyla bu doğrular sonsuz sayıda kesim noktasına sahiptir. Yani homogen lineer sistem sonsuz sayıda çözüme sahiptir.



Teorem.

Homogen lineer sistemlerde bilinmeyen sayısı denklem sayısından daha fazla olduğunda sistemin aşikar olmayan çözümü olur. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3\quad\quad\;\, +x_5&=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4+4x_5&=0 \\ x_2+x_3\quad\quad\quad\quad\quad\;\;&=0 \end{aligned}$$

Homogen lineer sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], -2r_1 + r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], -\frac{1}{3} r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], -r_2 + r_3 \to r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right], \frac{3}{7} r_3 \to r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{array}\right]$$

Elde edilir. Bu eşolon ilaveli matris yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 &= 0 \\ x_3 + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$x_5 = b,$(herhangi bir reel sayı)

$x_4 = a,$(herhangi bir reel sayı)

$$x_3 = -\frac{1}{7}x_4 + \frac{1}{7}x_5$$

$$x_2 = \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3 - x_5$$

çözümü elde edilir. $x_5 = b,$(herhangi bir reel sayı), $x_4 = a,$(herhangi bir reel sayı) olduğundan sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

2.6. Elementer Matris ve Ters Matris

Tanım.

Elementer satır işlemlerinden biri yardımı ile birim matristen elde edilen matrislere **elementer matris** adı verilir.

Örnek.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Burada E matrisi bir elementer matristir.

Teorem. Bir A matrisini E matrisi ile çarpıldığında birim matrise uygulanılan elementer satır işlemi A matrisine uygulanmış gibi sonuç elde edilir. Yani A matrisi $m \times n$ tipimde bir matris ve B de elementer işlemlerin A matrisine uygulanması ile elde edilen bir matris ve E de A matrisine uygulanan elementer işlemlerin aynısının I birim matrisine uygulanması ile elde edilen matris ise $B = E.A$dır.

Örnek. Yukarıdaki örnekteki E matrisini bir A matrisi ile çarpalım.

$$E.A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} r_2\leftrightarrow r_3 \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

Böylece bir matrisin satırca eşolon forma indirgenebilmesi soldan ardışık olarak elementer matrisler ile çarpılması ile mümkün olabilir. Başka bir değişle eğer B matrisi elementer satır işlemleri ile A matrisinden elde edilen bir matris ise

$$B=\left(E_t\cdots E_2E_1\right)A$$

olacak şekilde $E_1,E_2,\cdots,E_t$ elementer matrisleri vardır.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\4&5&-2\end{bmatrix}$ olsun. $C.A$ bir üst üçgen matris olacak şekilde bir C matrisi bulunuz.

A matrisini ve I birim matrisini birlikte ele alalım. A matrisini üst üçgen matris haline getirirken uyguladığımız elementer satır işlemlerinin aynısını adım adım I birim matrisine de uygulayalım.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-3\\2&3&-1\\4&5&-2\end{bmatrix} \quad \mathrm{r}_2\leftrightarrow r_1 \; I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&1&-3\\4&5&-2\end{bmatrix} \quad -2\mathrm{r}_1+r_3\to r_3 \; E_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 + r_3 \to r_3 \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Böylece istenen C matrisi $C = E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

Gerçekten de

$$C.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

2.6.1. Elementer Matrislerin Tersleri

- E_1 matrisi elementer satır işlemlerinden $i.$ ve $j.$satırlarının değişimi ile I birim matrisinden elde edilen bir elementer matris olsun. $E_1.A$ çarpma işleminin sonucunda aynı işlemin A matrisi için gerçekleşeceğini hatırlayalım. Eğer A matrisi yerine E_1 matrisini alırsak $E_1.E_1$ işleminin sonucunda E_1 matrisinin $i.$ ve $j.$satırları değişecektir. Böylece işlem geriye alınmış olur. Yani

$$E_1.E_1 = I$$

  Bu da E_1 matrisinin terslenebilir bir matris olduğunu ve $E_1^{-1} = E_1$ olduğunu gösterir.

- E_2 matrisi elementer satır işlemlerinden I birim matrisinin bir satırının bir k sabit ile çarpıldığı bir matris olsun. E_2^{-1} matrisi ise I birim matrisinin o satırının $\frac{1}{k}$ ile çarpılarak elde edildiği bir matris olsun. Böylece

$$E_2^{-1}.E_2 = E_2.E_2^{-1} = I$$

olduğu açıktır. Böylece gerçekten de E_2^{-1} matrisi E_2 matrisinin ters matrisidir.

- E_3 matrisi elementer satır işlemlerinden I birim matrisinin bir $i.$ satırının k katının $j.$ satıra eklenmesi ile elde edilen bir matris olsun. E_3^{-1} matrisi ise I birim matrisinin bir $i.$ satırının $-k$ katının $j.$ satıra eklenmesi ile elde edilen bir matris olsun. Bu durumda

$$E_3^{-1}.E_3 = E_3.E_3^{-1} = I$$

olduğu açıktır. Böylece gerçekten de E_3^{-1} matrisi E_3 matrisinin ters matrisidir.

Böylelikle her elementer matrisin terslenebilir olduğunu ve onların terslerinin nasıl elde edildiğini görmüş olduk.

Örnek.

Aşağıdaki elementer matrislerin terslerini bulunuz.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Çözüm.

E_1 birim matrisin 1. ve 2. satırının değiştirilmesi elde edilen bir matris olduğundan

$$E_1^{-1} = E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülür.

E_2 birim matrisin 1. satırının $-\frac{1}{6}$ ile çarpılması ile elde edilen bir matris olduğundan bu işlemi geri alabilmek için 1. satırı -6 ile çarpmalıyız. Dolayısıyla

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu açıktır.

E_3 birim matrisin 1. satırının -2 katının 3. satıra eklenmesi ile elde edilen bir matristir. Bu işlemi geri alabilmek için birim matrisin 1. satırının 2 katının 3. satıra eklenmesi gerekir. O halde

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu açıktır.

2.6.2. Matrisin Tersinin Elementer Matris Yardımı İle Hesaplanması

Eğer varsa A^{-1} matrisinin bulunması için önce $\left[A|I\right]$ parçalanmış matrisi oluşturulur. Daha sonra $\left[A|I\right]$ parçalanmış matrisine Gauss-Jordan indirgeme metodu uygulanarak $\left[I|B\right]$ matrisi elde edilir. Bu işlemden sonra istenen $B = A^{-1}$ matrisidir. Eğer indirgeme uygulanarak $\left[I|B\right]$matrisi elde edilebilirse A^{-1} matrisi var demektir. Aksi takdirde A^{-1} matrisi yoktur.

Örnek.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] -2r_1 + r_2 \to r_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right] -\frac{1}{7} r_2 \to r_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$-6r_2+r_1 \to r_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

elde edilir. Böylece

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ elde edilmiş olur.

Teorem. (A^{-1} **matrisinin varlığı için şartlar)**

Bir A, $n \times n$ kare matrisi için aşağıdaki şartlar eşdeğerdir.

1. A matrisi terslenebilirdir.

2. A matrisi satırca I birim matrisine denktir.

3. A matrisi elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilir.

Örnek.

Teoremdeki A matrisi elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilme şartının doğru olduğunu gösterelim.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

$$r_2 \leftrightarrow r_1,\ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2r_1 + r_2 \to r_2,\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{7}r_2 \to r_2,\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$-6r_2+r_1\to r_1,\; E_4=\begin{bmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Böylece $E_4E_3E_2E_1A=I$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix}$ olsun. A matrisi terslenebilir ise tersini bulunuz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] r_2\leftrightarrow r_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] -2r_1+r_3\to r_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$r_2+r_3\to r_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] -r_3+r_2\to r_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$-3r_2+r_1\to r_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & -1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] -3r_1+r_3\to r_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}-6 & 0 & 0 & 1 & 13 & -8\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{6}r_1\to r_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] -\frac{1}{3}r_3\to r_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

elde edilir. Böylece