$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ olarak elde edilmiş olur.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisini elementer matrislerin çarpımı olarak yazınız.

Çözüm.

Yukarıdaki örnekte A matrisini birim matris haline getirmek için uyguladığımız elementer satır işlemlerini I birim matrisine uygulayarak aşağıdaki elementer matrisleri elde ederiz.

$$E_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_5=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_6=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_7=\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_8=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}E_8^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Örnek.

Eğer varsa $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Üçüncü satır, üçüncü sütunda pivot bulunmadığından A matrisi birim matris haline getirilemiyor. A matrisi satırca I birim matrisine denk olduğunda ters matris mevcuttur. A matrisi satırca I birim matrisine denk olmadığından A matrisinin tersi yoktur.

2.7. Lineer Cebirsel Denklem Sisteminin Çözümünün Ters Matris ile Bulunması

A matrisi $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere n bilinmeyenli ve sistemin sağ tarafında n tane bilinen değer bulunan

$$A.x = b$$

lineer cebirsel denklem sistemini göz önüne alalım. Bu lineer cebirsel denklem sisteminin her iki tarafını soldan A^{-1} matrisi ile çarpalım. Bu durumda

$$A^{-1}.A.x = A^{-1}.b$$

$$I.x = A^{-1}.b$$

$$x = A^{-1}.b$$

elde edilir. Böylece bir lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü elde etmek için sistemin sağ tarafının A^{-1} matrisi ile çarpılmasının yeterli olduğunu görmüş olduk.

Örnek.

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere verilen lineer cebirsel denklem sistemi

$$A.x = b$$

şeklinde yazılabilir. Çözüm

$$x = A^{-1}.b$$

olduğundan $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ matrisinin hesaplanmasıyla

$$x = A^{-1}.b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Yani $x_1 = \frac{19}{2}$, $x_2 = -8$, $x_3 = -3$ olarak elde edilmiş olur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde;

- Lineer denklem kavramını,
- Homogen ve homogen olmayan denklemi,
- Lineer cebirsel denklem sistemlerini,
- Lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümünü,