Örnek. R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $M_{2\times 2}$ vektör uzayındaki

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}\right)$$

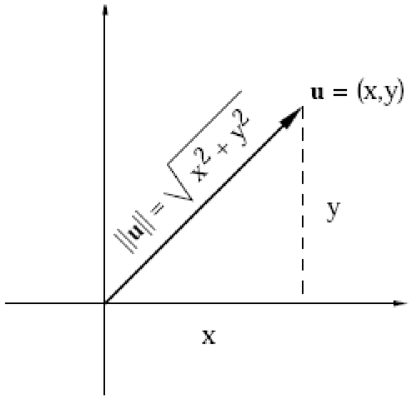
$$=\sum_{i=1}^{2}\left(a_{i1}b_{i1}+a_{i2}b_{i2}\right)$$

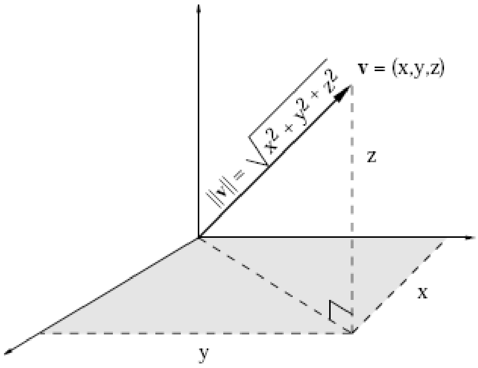
$$=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$$

$$=1.2+2.0+3.1+4.(-3)=-7$$

5.2. Vektör Normları

Lineer cebirin önemli bir kısmı aslında doğada geometriktir, çünkü konuların çoğu R^2 ve R^3 te yer alan temel geometrisini görsel olmayan yüksek boyutlu alanlara genelleme ihtiyacından doğmuştur. Genel yaklaşım R^2 ve R^3'teki geometrik kavramları koordine etmek ve daha sonra sıralı çiftler ve üçlülerle ilgili ifadeleri R^n ve C^n'deki sıralı n-lilere genişletmektir. Örneğin, bir $\mathbf{u}\in R^2$ veya $\mathbf{v}\in R^3$ vektörlerinin aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bir üçgenin hipotenüsünün uzunluğunun hesaplanmasıyla Pisagor teoreminden elde edilir.





Bu uzunluğun $\|\mathrm{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ve $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ölçüleri R^2 ve R^3'te Öklid Normu ***(euclidean norm)*** olarak adlandırılır. Bu tanım daha yüksek boyutlar için genelleştirilebilir.

Tanım. (Öklidyen Vektör Normu)
Bir $x_{n\times 1}$ vektörü için x' in Öklidyen Normu

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T x}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek.

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ise } \|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Örnek.

$P_2(R)$ deki $p(x) = x^2 + 1$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.
Çözüm.

$$\begin{aligned}
\|p(x)\| &= \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} \\
&= \sqrt{\int_0^1 p(x)\,p(x)\,dx} \\
&= \sqrt{\int_0^1 p^2(x)\,dx} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{28}{15}}
\end{aligned}$$

Örnek.

R reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $M_{2\times 2}$ vektör uzayındaki

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}a_{ij}\right)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(a_{i1}a_{i1}+a_{i2}a_{i2}\right)}$$

$$=\sqrt{a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}+a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}}$$

$$=\sqrt{1.1+2.2+3.3+4.4}=\sqrt{30}$$

Örnek.

$x,y\in R^2$ için $\langle x,y\rangle = x_1y_1+2x_2y_2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun iç çarpım fonksiyonuna göre $x=(3,4)$ vektörünün normunu hesaplayınız.

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{x_1x_1+2x_2x_2}=\sqrt{3.3+2.4.4}=\sqrt{41}$$

Not: Öklidyen Vektör Normunun tanımından aşağıdakiler sağlanır.

i. $\|x\|\geq 0$

ii. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

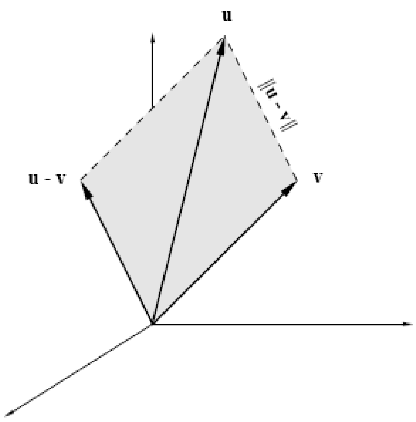
iii. Her α skaleri için $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

$x\neq 0$ vektörü verildiğinde, x ile aynı yöne işaret eden (yani x'in pozitif bir katıdır) ancak birim uzunluğuna sahip başka bir vektörün olması genellikle uygundur. Böyle bir vektör oluşturmak için $u=\frac{x}{\|x\|}$ ayarlayarak x'i normalleştiririz. Bunu görmek oldukça kolaydır.

$$\|u\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{1}{\|x\|}\|x\|=1.$$

Tanım. (Vektörlerin arasındaki uzaklık)

R^3 teki vektörlerin arasındaki uzaklığı paralel kenar kuralı ile aşağıdaki şekilde olduğu gibi gösterebiliriz. R^n deki **u** ve **v** vektörleri arasındaki uzaklık d(**u** , **v**) = || **u-v**|| ile tanımlıdır.



Örnek. $\mathrm{u}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ ve $v=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

$$\|\text{u-v}\|=\sqrt{(-1-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

Örnek. $\mathrm{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ve $v=\begin{bmatrix}-4\\3\\5\end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

$$\|\text{u-v}\|=\sqrt{(1-(-4))^2+(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{30}$$

Örnek.

$x,y\in R^2$ için $\langle x,y\rangle = x_1y_1+2x_2y_2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun iç çarpım fonksiyonuna göre $x=(3,4), y=(2,3)$ vektörlerinin arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\sqrt{(x_1-y_1)(x_1-y_1)+2(x_2-y_2)(x_2-y_2)}$$

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(1,1)\|=\sqrt{1.1+2.1.1}=\sqrt{3}$$

Teorem. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

Kabul edelim ki **u** ve **v** vektörleri bir iç çarpım uzayında iki vektör olsun. Bu durumda

$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|.\|v\|$ dir.

Teorem.

Kabul edelim ki **u** ve **v** vektörleri bir iç çarpım uzayında iki vektör ve c bir skaler olsun. Bu durumda

a. $\|u\| \ge 0$

b. $\|u\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $u = 0$ olmasıdır.

c. $\|c.u\| = |c|\|u\|$

d. $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ Bu eşitsizlik genellikle üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

Teorem.

Kabul edelim ki **u** , **v** ve **w** vektörleri bir iç çarpım uzayında vektörler olsun. Bu durumda,

a. $d(u,v) \ge 0$

b. $d(u,v) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $u = v$ olmasıdır.

c. $d(u,v) = d(v,u)$

d. $d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v)$ Genellikle üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım.

Kabul edelim ki **u** ve **v** vektörleri bir iç çarpım uzayında iki vektör olsun. Bu durumda eğer $\langle u,v\rangle = 0$ ise **u** ve **v** vektörleri ortogonaldir denir.

Şunu belirtmekte fayda var ki bir iç çarpım uzayına göre ortogonal olan **u** ve **v** vektörleri başka bir iç çarpım uzayına göre ortogonal olmayabilir.

Örnek.

$v_1 = (2,0,-1)$, $v_2 = (0,-1,0)$ ve $v_3 = (2,0,4)$ vektörleri R^3 te tanımlanan standart iç çarpıma göre ortogonal kümenin elemanlarıdır. Yani

$\langle v_1,v_2\rangle = 2.0 + 0.(-1) + (-1).0 = 0$

$\langle v_1, v_3 \rangle = 2.2 + 0.0 + (-1).4 = 0$

$\langle v_2, v_3 \rangle = 0.2 + (-1).0 + 0.4 = 0$

Teorem. (Bir iç çarpım uzayında Pisagor Teoremi)

Kabul edelim ki **u** ve **v** vektörleri bir iç çarpım uzayında ortogonal iki vektör olsun. Bu durumda

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

dir.

Tanım. (Ortonormal Küme)

Kabul edelim ki S bir iç çarpım uzayında vektörlerin bir kümesi olsun.

a. Eğer S deki vektörlerden her farklı vektör çifti ortogonal ise S kümesine ortogonal küme adı verilir.

b. Eğer S kümesi bir ortogonal küme ve aynı zamanda S kümesindeki her bir vektörün normu 1 ise S kümesine ortonormal küme adı verilir.

Örnek.

$v_1 = (2, 0, -1)$, $v_2 = (0, -1, 0)$ ve $v_3 = (2, 0, 4)$ vektörleri R^3 te verilmiş vektörler olsun.

a. Bu vektörlerden oluşan kümenin R^3 için tanımlanan standart iç çarpım altında bir ortogonal küme olduğunu fakat ortonormal küme olmadığını gösteriniz.

b. Bu kümeyi R^3 için tanımlanan standart iç çarpım altında bir ortonormal küme haline getiriniz.

Çözüm.

a. Ortogonal bir küme oluşturduklarını göstermek için burada tek yapmamız gereken tüm olası çiftlerin iç çarpımını hesaplamak ve hepsinin sıfır olduğunu göstermektir.

$\langle v_1, v_2 \rangle = 2.0 + 0.(-1) + (-1).0 = 0$

$\langle v_1, v_3 \rangle = 2.2 + 0.0 + (-1).4 = 0$

$\langle v_2, v_3 \rangle = 0.2 + (-1).0 + 0.4 = 0$

Böylece ortogonal bir küme oluştururlar. Ortonormal bir küme oluşturmadıklarını göstermek için sadece en az birinin 1 normuna sahip olmadığını göstermemiz gerekir. Uygulama için tüm normları hesaplayacağız.

$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$$\|v_2\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Yani, bunlardan birinin 1 normu vardır, ancak diğer ikisinin yoktur ve bu nedenle onlar bir ortonormal vektör kümesi değildir.

b. Aslında problemin bu kısmı için herhangi bir **v** vektörünü aşağıdaki şekilde normuna böldüğümüzde normu 1 olan bir vektör oluşturabileceğimizi görmüştük.

$$\frac{1}{\|v\|}v$$

Bu yeni vektörün 1 normu olacaktır. Dolayısıyla, yukarıdaki vektörlerin her birini 1 nolu normlara sahip bir vektör grubuna dönüştürebiliriz.

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{1}{1}(0,-1,0) = (0,-1,0)$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Geriye kalan tek şey, bu yeni vektör setinin hala dik olduğunu göstermektir.

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}.0 + 0.(-1) + \frac{(-1)}{\sqrt{5}}.0 = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}} + 0.0 + \frac{(-1)}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = 0.\frac{1}{\sqrt{5}} + (-1).0 + 0.\frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

ve böylece üç vektörü bir ortonormal küme oluşturan bir vektörler kümesine dönüştürdük.

Teorem Kabul edelim ki $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ bir iç çarpım uzayında sıfır olmayan vektörlerin ortogonal bir kümesidir, o zaman *S* aynı zamanda lineer bağımsız bir vektörler kümesidir.

İspat: Vektörlerin sıfır olmayan vektörler olması gerektiğine dikkat edin, çünkü sıfır vektörleri bir dizi ortogonal vektörler olabilir ve yine de bir küme sıfır vektörü içeriyorsa lineer bağımlı olacağını biliriz.

Şimdi, bu vektörlerin lineer bağımsız olma şansı olduğunu bildiğimize göre (sıfır vektörünü hariç tuttuğumuz için) denklemi oluşturalım,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

ve burada bunu sağlayan tek skalerlerin

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$$

olduğunu göstermemiz gerekecek.

Aslında bunu tek bir adımda yapabiliriz. Tek yapmamız gereken,

$$v_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

ye göre her iki tarafın iç çarpımını almak ve daha sonra işleri biraz yeniden düzenlemek için iç çarpımın özelliklerini kullanmaktır.

$$\langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, v_i \rangle = 0$$

$$\langle c_1 v_1, v_i \rangle + \langle c_2 v_2, v_i \rangle + \cdots + \langle c_n v_n, v_i \rangle = 0$$

$$c_1 \langle v_1, v_i \rangle + c_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + c_n \langle v_n, v_i \rangle = 0$$

Şimdi, S'deki vektörlerin ortogonal olduğunu bildiğimiz için

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, i \neq j$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$c_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$$

elde edilir. Daha sonra, vektörlerin sıfırdan farklı olduğunu bildiğimiz için

$$\langle v_i, v_i \rangle > 0$$

dir ve bunun sıfır olabilmesinin tek yolu $c_i = 0$ olmasıdır. Böylece $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğunu göstermiş olduk. Böylece bu vektörler lineer bağımsızdır.

Tamam, şimdi bu bölümün ana konusuna geçmeye hazırız. Ortogonal vektörlerin bir kümesi aynı zamanda lineer bağımsız olduğundan eğer çalışmış olduğumuz vektör uzayını gererlerse aynı zamanda vektör uzayının baz vektörleri olurlar.

Tanım.

Kabul edelim ki $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ bir iç çarpım uzayı için bir baz olsun.

a. Eğer S aynı zamanda bir ortogonal bir küme ise o zaman S bir ortogonal bazdır.

b. Eğer S aynı zamanda bir ortonormal bir küme ise o zaman S bir ortonormal bazdır.

Burada R^n nin standart baz vektörlerinin ortogonal olduğunu belirtelim.

Aşağıdaki teorem bize ortogonal / ortonormal bazlar hakkında çok güzel özelliklerden birini verir.

Teorem.

Kabul edelim ki $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ bir iç çarpım uzayı için ortogonal bir baz ve u iç çarpım uzayından herhangi bir vektör olsun. Bu durumda

$$u=\frac{\langle u,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1+\frac{\langle u,v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2+\cdots+\frac{\langle u,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}v_n$$

olur. İlave olarak eğer $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ bir ortonormal baz ise bu durumda

$$u=\langle u,v_1\rangle v_1+\langle u,v_2\rangle v_2+\cdots+\langle u,v_n\rangle v_n$$

olur.

Bu teorem bize verilen sonlu boyutlu vektör uzayının herhangi bir bazı için ortogonal/ortonormal bazlar oluşturabileceğimizi göstermektedir.

Gram-Schmidt Yöntemi

Kabul edelim ki V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun ve $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ V için bir baz olsun. Bu durumda V için ortogonal olan $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ baz vektörleri aşağıdaki işlemle elde edilir.

$$u_1=v_1$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}$$

Baz vektörlerini ortonormal bir baz vektörlerine çevirmek için basitçe bütün yeni baz vektörleri normlarına bölünür. Aynı zamanda inşa sürecinden dolayı

$$span\{u_1, u_2, \cdots, u_k\} = span\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$$

olur. Ve u_k vektörü $span\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$ ye ortogonal olur.

Örnek.

$v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (1, 0, -1)$ ve $v_3 = (3, 7, -1)$ vektörleri R^3 için verilen baz vektörleri olsun ve kabul edelim ki standart Öklid iç çarpımını kullanarak R^3 için bir ortogonal baz oluşturalım.

Çözüm.

Yukarıdaki vektör kümesinin aslında R^3 için bir baz olduğunu doğrulamalısınız. Şimdi, Gram-Schmidt sürecinden birkaç kez geçmemiz gerekecek. İlk adım kolaydır.

$$u_1 = v_1 = (2, -1, 0)$$

Kalan iki adımda biraz daha fazla iş olacak, ama o kadar da kötü olmayacak. Ortogonal bazımızdaki ikinci vektör için formül.

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

ve işte ihtiyacımız olan tüm büyüklükler.

$$\langle v_2, u_1 \rangle = 2, \ \|u_1\|^2 = 5$$

İkinci vektör,

$$u_2 = (1, 0, -1) - \frac{2}{5}(2, -1, 0) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -1\right)$$

Üçüncü (ve son vektör) için formül

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

dir ve işte bu adım için ihtiyacımız olan miktarlar.

$$\langle v_3, u_1 \rangle = -1, \langle v_3, u_2 \rangle = \frac{22}{5}, \|u_1\|^2 = 5, \ \|u_2\|^2 = \frac{6}{5}$$

Üçüncü vektör,

$$u_3=(3,7,-1)-\frac{-1}{5}(2,-1,0)-\frac{\frac{22}{5}}{\frac{6}{5}}\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-1\right)=\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3},\frac{8}{3}\right)$$

Bunların aslında ortogonal bir küme oluşturduğunu doğrulamalısınız.

Örnek.

$v_1=(2,-1,0), v_2=(1,0,-1)$ ve $v_3=(3,7,-1)$ vektörleri R^3 için verilen baz vektörleri olsun ve kabul edelim ki standart Öklid iç çarpımını kullanarak R^3 için bir ortonormal baz oluşturalım.

Çözüm

Birincisi, bunun bir öncekiyle neredeyse aynı soru olduğunu unutmayın, ancak bu sefer ortogonal bir baz yerine ortonormal bir baz arıyoruz. Buna yaklaşmanın iki yolu vardır. Birincisi genellikle en kolay yoldur ve bu, dik bir bazımız olduğunu ve bunu sadece her bir vektörün normlarına bölerek ortonormal bir baza dönüştürebileceğimizi kabul etmektir. Hadi bu şekilde yapalım ve ne elde ettiğimize bakalım. Bir önceki örnekteki vektörlerin normları şunlardır.

$$\|u_1\|=\sqrt{5},\|u_2\|=\frac{\sqrt{30}}{5},\|u_3\|=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Mümkün olduğunca çok sayıda kare kökü ortadan kaldırmak için buradaki kesirlerin paydalarını rasyonelleştirdiğimize dikkat edin.

Normlara bölmek aşağıdaki vektörleri verir.

$$w_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0\right),w_2=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},-\frac{5}{\sqrt{30}}\right),w_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Böylece, bunu yapmanın ilk yolu tamamlanmış oldu.

İkinci yol Gram-Schmidt sürecinden geçmektir ve bu sefer her yeni vektörü bulduğumuzda normlara bölünür. Bunun iki etkisi olacaktır. İlk olarak, üzerinde çalışmamız gereken vektörlere oldukça fazla kök koyacaktır. İkincisi, yeni vektörleri Gram-Schmidt formülündeki normun bir uzunluğu olan vektörlere dönüştürdüğümüz için de 1 olacak ve buna gerek yok. Size sadece farklılıkları göstermek için bunu bir kez inceleyelim.

İlk yeni vektör,

$$u_1=\frac{1}{\|v_1\|}v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0\right)$$

Şimdi, ikinci vektörü elde etmek için önce şunu hesaplamamız gerekir,

$$w = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$$

ancak bunu u_2 olarak adlandırmayacağız, çünkü işimiz bittiğinde normlarına bölmemiz gerekecek. Ayrıca u_1 normunun 1 olduğunu kabul ettiğimizi ve formülde buna ihtiyacımız olmadığını da unutmayın. İşte bu adım için ihtiyacımız olan iç çarpım.

$$\langle v_2, u_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

İşte yeni dik vektör.

$$w = (1,0,-1) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -1\right)$$

Bunun bir önceki örnekte bulduğumuz ikinci vektörle aynı olduğuna dikkat edin. Bu durumda, istediğimiz vektörü elde etmek için normuna bölmemiz gerekir.

$$u_2 = \frac{1}{\|w\|} w = \frac{5}{\sqrt{30}}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

Son olarak, üçüncü ortogonal vektör için formül,

$$w = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2$$

ve yine ilk iki vektörün normlarının 1 olacağını ve bu formülde gerekli olmadığını kabul ettik. İşte ihtiyacımız olan nokta iç çarpımlar.

$$\langle v_3, u_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \ \langle v_3, u_2\rangle = \frac{22}{\sqrt{30}}$$

Ortogonal vektör,

$$w = (3,7,-1) - -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) - \frac{22}{\sqrt{30}}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Yine, bu bir önceki Örnek'de bulduğumuz üçüncü ortogonal vektörtür. İşte bu problem için üçüncü ortonormal vektörümüzü elde etmek için son adım şudur.

$$u_3 = \frac{1}{\|w\|} w = \frac{3}{8\sqrt{6}}\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Böylece, yine bir önceki Örnek'deki sonuçları kullandığımızda yaptığımız gibi tamamen aynı vektörlere sahibiz. Tabii ki bu durum burada olmasını beklememiz gereken bir şeydir.

Dolayısıyla, önceki örnekte gördüğümüz gibi, herhangi bir bazdan ortonormal bir baz elde etmenin iki yolu vardır. Her birinin artıları ve eksileri vardır ve hangi yöntemi kullanacağınıza karar vermeniz gerekir. İlk önce ortogonal bazı hesaplar ve hepsini sonra normlarına bölersek, kare köklerle fazla çalışmamız gerekmez, ancak aksi halde ihtiyaç duymayacağımız normları hesaplamamız gerekir. Yine, kullanmanız için en iyi yöntemin ne olduğunu belirlemek size kalmış olacaktır.

Örnek.

$v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,1,1,0), v_3=(1,1,0,0)$ ve $v_4=(1,0,0,0)$ vektörleri R^4 için verilen baz vektörleri olsun ve kabul edelim ki standart Öklid iç çarpımını kullanarak R^4 için bir ortonormal baz oluşturalım.

Çözüm.

Şimdi, ortonormal bir baz arıyoruz ve bu yüzden burada nasıl ilerleyeceğimize dair iki seçeneğimiz var. İlk durumda, ortogonal bir baz oluşturacağız ve daha sonra bunu en sonunda ortonormal bir baz haline getireceğiz.

İlk vektör,

$$u_1=v_1=(1,1,1,1)$$

İşte ikinci vektör için ihtiyacımız olan iç çarpım ve norm.

$$\langle v_2,u_1\rangle=3,\ \|u_1\|^2=4$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=(1,1,1,0)-\frac{3}{4}(1,1,1,1)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$$

Üçüncü vektör için aşağıdaki iç çarpımlara ve normlara ihtiyacımız olacaktır.

$$\langle v_3,u_1\rangle=2,\langle v_3,u_2\rangle=\frac{1}{2},\|u_1\|^2=4,\ \|u_2\|^2=\frac{3}{4}$$

Böylece üçüncü ortogonal vektör

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2$$

$$u_3=(1,1,1,0)-\frac{2}{4}(1,1,1,1)-\frac{1/2}{3/4}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)$$

olur. Ve son olarak dördüncü ortogonal vektör için ihtiyacımız olanlar

$$\langle v_4,u_1\rangle=1,\langle v_4,u_2\rangle=\frac{1}{4},\langle v_4,u_3\rangle=\frac{1}{3},\|u_1\|^2=4,\ \|u_2\|^2=\frac{3}{4},\|u_3\|^2=\frac{2}{3}$$

dır. Böylece

$$u_4=v_4-\frac{\langle v_4,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle v_4,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2-\frac{\langle v_4,u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3$$

$$u_4 = (1,0,0,0) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{1/3}{3/4}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right) - \frac{1/3}{2/3}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right)$$

elde edilmiş olur.

Böylece ortogonal form şu şekilde elde edildi.

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right),\ u_3 = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right),\ u_4 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,0\right)$$

Daha sonra, normlarına ihtiyacımız olacak, böylece bu kümeyi ortonormal bir baza dönüştürebiliriz.

$$\|u_1\| = 2,\ \|u_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \|u_3\| = \frac{\sqrt{6}}{3},\ \|u_4\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Böylece ortonormal baz vektörleri aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$w_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$w_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)$$

$$w_4 = \frac{1}{\|u_4\|}u_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$$