3. Determinantlar

Bölüm Hedefi

Bu bölümde;

- Determinantın tanımını,
- Bir mertebeli determinantın hesaplanmasını,
- İki mertebeli determinantın hesaplanmasını,
- Üç mertebeli determinantın hesaplanması için Sarrus kuralını,
- n- mertebeli determinantı
- Minör ve kofaktör kavramlarını,
- Determinantın özelliklerini,
- n bilinmeyenli ve n denklemden oluşan Lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümü için Cramer metodunu,

öğrenmiş olacaksınız.

Bu bölümde determinantlar konusu anlatılacaktır. Her kare matris determinant adı verilen bir reel sayı ile ilişkilidir. Determinant kavramını anlatırken önce 2×2 tipindeki kare matrislerin determinantını, sonra 3×3 tipindeki matrislerin determinantını daha sonra da daha genel olan $n\times n$ tipindeki matrislerin determinantı anlatılacaktır. $n\times n$ tipindeki matrislerin determinantını anlarken kofaktör kavramı verilecek bu kavram $n\times n$ tipindeki matrislerin tersini bulmak için de kullanılabilecek bir kavram olarak anlatılacaktır. $n\times n$ tipindeki matrislerin tersi n bilinmeyenli n denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için de kullanılabilecektir. Daha sonra determinant kavramı yardımıyla yine n bilinmeyenli n denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için kullanılan Cramer metodu anlatılacaktır.

Tanım.

$n\times n$ tipindeki bütün kare matrislerin kümesinden reel sayılar kümesine tanımlanan bir fonksiyona determinant fonksiyonu denir. Bir A kare matrisinin determinantı

$$D(A)=|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & .a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi determinant fonksiyonunun nasıl hesaplandığını görelim.

3.1. Determinantların Hesaplanması

Determinantlar kare matrisler üzerinde hesaplanırken önce 1×1 mertebesinden bir elemanlı bir kare matrisin determinantı, sonra 2×2 mertebesinden bir kare matrisin determinantı, daha sonra üç mertebeli determinantlar, daha sonra da $n\times n$ mertebesinden bir kare matrisin, $n>3$ olması halinde determinantını hesaplamak için yöntemler anlatılacaktır.

3.1.1. Bir Mertebeli Determinantlar

1×1 mertebesinden bir elemanlı bir kare matrisin determinantı

$$A=[a_{11}] \text{ ise } \det A=|A|=|a_{11}|=a_{11}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek.

$$A=[7] \text{ ise } \det A=|7|=7$$

3.1.2. İki Mertebeli Determinantlar

2×2 mertebesinden bir kare matrisin determinantı

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$$

- +

şeklinde hesaplanır.

Örnek.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ise $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=1.4-(-2).3=10$ olur.

3.1.3. Üç Mertebeli Determinantlar

3.1.3.1. Sarrus Kuralı

3×3 mertebesinden bir kare matrisin determinantını hesaplamak için **“Sarrus Kuralı”** adı verilen bir kural kullanılır. Önce bu kuralı daha sonra da Sarrus Kuralı’nın pratik hesaplama kuralı verilecektir. Bu kuralda matrisin ilk iki satırı alta yada ilk iki sütunu sağa yana eklenerek hesap yapılır.

Önce ilk iki satırı en alta ekleyerek determinantın hesaplaması anlatılacaktır.

Önce ilk iki satır alta eklenir. Daha sonra matrisin esas köşegeni üzerindeki elamanlar çarpılır, sonra esas köşegenin altında kalan elamanlar aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi çarpılır. Daha sonra da bu çarpımlar toplanır. Ters köşegen üzerindeki elemanlar çarpılır ve şekilde görüldüğü gibi ters köşegene paralel olarak diğer elemanlar da çarpılır. Bu çarpımlarda önceki toplamdan çıkarılır.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{21}.a_{32}.a_{13}+a_{31}.a_{12}.a_{23}-\left(a_{31}.a_{22}.a_{13}+a_{11}.a_{32}.a_{23}+a_{21}.a_{12}.a_{33}\right)$$

Şimdi de ilk iki sütunu en sağa ekleyerek determinantın hesaplaması anlatılacaktır.

Bu yöntemde de benzer şeklide önce ilk iki sütun sağa eklenir. Daha sonra da aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi benzer şekilde esas köşegen ve ters köşegen üzerindeki elemanlar çarpılır. Esas köşegen üzerindeki çarpımlar toplanır, ters köşegen üzerindeki çarpımlar çıkarılır.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right|$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - \left(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}\right)$$

Örnek .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$ determinantını SARRUS kuralı ile hesaplayınız.

Çözüm.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{matrix} \right|$$

$$= 1.2.3 + (-2).4.3 + (-1).2.4 - \left(3.2.(-1) + 4.4.1 + 3.2.(-2)\right) = -26 - (-2) = -24$$

olur.

Eğer ilk iki satırı alta ekleyerek aynı determinantı hesaplanırsa aynı sonuç elde edilecektir. Hangi yolla yapılırsa yapılsın aynı sonuç elde edilir.

3×3 mertebesinden bir kare matrisin determinantını hesaplamak için SARRUS kuralının daha pratik olarak uygulanması aşağıdaki şekilde olur.

Adım 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

burada her üçlü çarpım toplamı pozitif alınır.

Adım 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

burada her üçlü çarpım toplamı negatif alınır.

Adım 3. Elde edilen bu iki sonuç toplanır. Bu kural kullanılarak yapılan hesapla

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - \left(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{11}.a_{32}.a_{23} + a_{21}.a_{12}.a_{33}\right)$$

olur.

Örnek .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$ determinantını bu kuralı kullanarak hesaplayınız.

Çözüm.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1.2.3 + (-2).4.3 + (-1).2.4 - \left(3.2.(-1) + 4.4.1 + 3.2.(-2)\right) = -26 - (-2) = -24$$

3.1.4. n Mertebeli Determinantlar

$n \times n$ mertebesinden bir kare matrisin, $n > 3$ olması halinde determinantını hesaplamak için SARRUS kuralı kullanılamaz. $n \times n$ mertebesinden bir kare matrisin determinantını hesaplamak için önce gerekli bazı tanımlar verilecektir. Bu tanımlar ileride matrislerin terslerini bulurken de kullanılacak tanımlardır.

Tanım .

Bir A kare matrisinin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun silindiğinde geriye kalan (n-1). mertebeden kare matrisin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir. $A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$ ifadesine de a_{ij} elemanının kofaktörü veya işaretli minörü adı verilir.

Örnek .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$ matrisinin a_{21} elemanının minörünü ve kofaktörünü bulunuz.

a_{21}

Çözüm.

a_{21} elemanının minörü

$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$ ve kofaktörü ise $A_{21} = (-1)^{2+1}.M_{21} = (-1).(-2) = 2$ olur.

Örnek.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin elemanlarının kofaktörlerini bulunuz.

Çözüm.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -13,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Tanım.

$n \times n$ mertebesinden bir kare matrisin determinantı, herhangi bir satır (yada sütun) elemanlarının her biri ile kofaktörlerinin çarpımının toplamına eşittir. Yani

$$|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \cdots + a_{in}.A_{in} \ , \ i \ \ sabit$$

yada

$$|A| = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \cdots + a_{nj}.A_{nj} \ , \ j \ \ sabit$$

dir.

Örnek.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını 2. satır ve 3. sütuna göre hesaplayınız.

Çözüm.

Önce 2. satıra göre hesaplayalım.

$$|A| = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23}$$

$$|A| = 2.(-13) + 3.12 + (-1).4 = 6$$

Şimdi de 3. sütuna göre hesaplayalım.

$$|A| = a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$$

$$|A| = (-3).(-2) + (-1).4 + (-2).(-2) = 6$$

Not. Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi bu yolla determinant hesabı yapılırken hangi satır veya hangi sütuna göre hesap yapılırsan yapılsın daima aynı sonuç elde edilecektir.