FONDAMENTI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

COGNOME………………………………………NOME………………………………………MATRICOLA ………………………

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

ESERCIZIO	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	TOTALE
PUNTEGGIO							

TEMPO A DISPOSIZIONE: 2,5 ore

1. Sia $V = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) | A^t = -A\right\}$. Sia ϕ l'applicazione definita da $\phi(A) = AB + BA$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che V è un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$;
(b) determinare la dimensione di V e una sua base;
(c) verificare che ϕ è un endomorfismo di V.

2. Determinare equazioni parametriche, equazioni cartesiane e una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori ${}^t(-2, 1, 0, 3), {}^t(1, 5, -1, 4), {}^t(5, 3, -1 - 2)$.

3. Stabilire se il seguente sistema lineare ammette soluzioni in $\mathbb{R}^3$ e, solo in caso affermativo, calcolare le sue soluzioni:

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 6 \\ -2x + y + 5z = -1 \\ -y - z = -1 \\ 3x + 4y - 2z = 7 \end{cases}$$

Determinare, inoltre, una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

4. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[FACOLTATIVO][1] In caso affermativo, trovare una base di autovettori.

5. Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice seguente è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[SOLO PER L'ESAME DA 9 CREDITI] Determinare la forma di Jordan di $\mathcal{A}$ nel caso $k = 0$.

6. *Determinante* di una matrice quadrata: definizione, proprietà, applicazioni.

Ogni esercizio vale 5 punti

[1] *Vale 2 punti in più oltre al valore dell'esercizio.*