1) $v_1 = {}^t(1,0,-2)$, $v_2 = {}^t(0,1,3)$, $v_3 = {}^t(2,1,0)$

$\phi(e_1) = {}^t(-3,-2,0)$, $\phi(e_2) = {}^t(6,4,0)$, $\phi(e_3) = {}^t(-2,-1,1)$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è lin. indip., $\rightarrow$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\phi(v_1) = \phi(e_1) - 2\phi(e_3) = {}^t(1,0,-2) = v_1$

$\phi(v_2) = \phi(e_2) + 3\phi(e_3) = {}^t(0,1,3) = v_2$

$\phi(v_3) = 2\phi(e_1) + \phi(e_2) = {}^t(0,0,0)$

$\Rightarrow$ Nella base $B$ l'endomorfismo $\phi$ ha matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Poiché $e_1 = -3v_1 - 2v_2 + 2v_3$, $e_2 = 6v_1 + 4v_2 - 3v_3$, $e_3 = -2v_1 - v_2 + v_3$,
la matrice di cambio di base è

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) a) $k^2 h \geq 0 \rightarrow (k \neq 0 \wedge h \geq 0) \vee (k = 0)$

b) $(h,k) = (1,k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$ $\vee$ $(h,k) = (-1,0)$

c) $h \neq 0 \wedge k \neq 0 \wedge h \neq 1 \wedge h > 0$

3) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=-x-y \\ \text{---} \\ x^3+y^3+(-x-y)^3=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} z=-x-y \\ \text{---} \\ xy(x+y)=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} z=-x-y \\ \text{---} \\ xyz=0 \end{cases}$ $\rightarrow x=0 \vee y=0 \vee z=0$

Per simmetria, basta studiare il caso $x=0$: $\begin{cases} y+z=0 \\ y^2+z^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=-y \\ 2y^2=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $x=0 \wedge y=0 \wedge z=0$.

4) $|A-\lambda I| = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 2b^2\right] = 0$

$\lambda_1 = a$, $\lambda_{2,3} = a \pm b\sqrt{2}$. Per $b \neq 0$ si hanno 3 autovalori distinti.

Per $b=0$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ è diagonale. In ogni caso, $A$ è diagonalizzabile $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

5) $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 7$ (blocchi elementari di Jordan totali)

$\dim \operatorname{Ker}(A-I)^2 - \dim \operatorname{Ker}(A-I) = 5$ (blocchi di Jordan di ordine almeno 2)

$\rightarrow$ 2 blocchi di ordine 1

$\dim \operatorname{Ker}(A-I)^3 - \dim \operatorname{Ker}(A-I)^2 = 1$ (blocco di Jordan di ordine almeno 3)

$\rightarrow$ 4 blocchi di ordine 2

$\rightarrow$ 1 blocco di ordine 5.

$\Rightarrow J_A = \operatorname{diag}\left(J_1(1), J_1(1), J_2(1), J_2(1), J_2(1), J_2(1), J_5(1)\right)$.