Fondamenti di Algebra e Geometria

Cognome..Nome..Matricola ....

Griglia di valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
Punteggio							

TEMPO A DISPOSIZIONE: 2,5 ore

1. Siano U e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così definiti:$W=<^t(1,1,-1,-1),^t(3,-2,8,5)>$. $U=<^t(1,-1,3,2),^t(-1,2,-6,-4),^t(-1,3,-9,-6)>$. Determina la dimensione e una base di $U+W$ e $U\cap W$.

2. Calcolare il determinante

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & b_1^2 \\ a_2^2 & a_2b_2 & b_2^2 \\ a_3^2 & a_3b_3 & b_3^2 \end{vmatrix}$$

Generalizzare l'espressione così ottenuta per un determinante della forma

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & .. & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & .. & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & .. & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Calcolare D_2 nel caso particolare $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$.

3. Stabilisci se il seguente sistema lineare Σ è compatibile e, in caso affermativo, determina le soluzioni

$$\begin{cases} 8x+7y-2z=4 \\ x-7y+5z=4 \\ x+2y-z=0. \end{cases}$$

Determina una base per il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato a Σ.

4. Siano $a,b,c\in\mathbb{R}$. Discutere la diagonalizzabilità di una matrice della forma

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

nel caso particolare $b=0\wedge c=-1$.

5. Determinare una possibile forma canonica di Jordan della matrice seguente:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $J_2(2)^3$, essendo $J_2(2)$ il blocco di Jordan di ordine 2 relativo all'autovalore 2.

6. Determinante di un endomorfismo: definizione, proprietà, calcolo.
Determinante di una matrice: definizione, proprietà, calcolo.

Ogni esercizio vale 5 punti