1. (a) $A, B \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda A+\mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = -\lambda A - \mu B = -(\lambda A + \mu B)$

$\to \lambda A + \mu B \in V$.

(b) $A \in V$; $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3}$

$\to A \in \langle E_1, E_2, E_3 \rangle$.

$\{E_1, E_2, E_3\}$ è LIN. INDIP. Infatti, $aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = 0 \to a=b=c=0$

$\to \dim V = 3$.

(c) $[c_1]$: linearità: $\phi(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda A + \lambda' A')B + B(\lambda A + \lambda' A') = \ldots = \lambda(AB+BA) + \lambda'(A'B+BA') =$
$= \lambda \phi(A) + \lambda' \phi(A')$

$[c_2]$: $\phi(V) \subseteq V$, cioè $\forall A \in V$, $\phi(A) \in V$, ovvero $\phi(A)^t = -\phi(A)$. Infatti:

$$\phi(A)^t = (AB+BA)^t = B^t A^t + A^t B^t = B(-A) + (-A)B = -\phi(A).$$

2. $v = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 = -2a + b + 5c \\ x_2 = a + 5b + 3c \\ x_3 = -b - c \\ x_4 = 3a + 4b - 2c \end{cases}$ (Equazioni parametriche)

$\begin{cases} x_1 + x_3 = -2a + 4c \\ x_4 + 4x_3 = 3a - 6c \end{cases} \to 3x_1 + 11x_3 + 2x_4 = 0$

$\begin{cases} x_2 - 5x_1 = 11a - 22c \\ x_1 + x_3 = -2a + 4c \end{cases} \to x_1 + 2x_2 + 11x_3 = 0$

Equazioni cartesiane

Il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Una base è $\{{}^t(-2,1,0,3), {}^t(1,5,-1,4)\}$

3. E' il sistema dell'esercizio 2, con $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, $x_3 = -1$, $x_4 = 7$. Ridotto con Gauss,

$\begin{cases} x + 5y + 3z = 6 \\ -y - z = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 1 - z. \end{cases}$

$Sol(\Sigma) = \{{}^t(1+2z, 1-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = {}^t(1,1,0) + \langle {}^t(2,-1,1) \rangle$; $\mathcal{B}_{\Sigma_0} = \{{}^t(2,-1,1)\}$.

4. $|A - \lambda \mathbb{1}| = -\lambda \left[\lambda^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\lambda + 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}/3$, $\lambda_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$\to$ è diagonalizzabile.

Si trova: $V_0 = \langle {}^t(0,0,1) \rangle$, $V_{-\sqrt{3}/3} = \langle {}^t(\sqrt{2}+\sqrt{3}, 1, 0) \rangle$, $V_{-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \langle {}^t\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right) \rangle$

5. $|A-\lambda \mathbb{1}| = (1-\lambda)(k-\lambda)\left[\lambda^2-(k+2)\lambda+2k+1\right]$ ha radici tutte in $\mathbb{R}$ se e solo se $k \leq 0 \vee k \geq 4$.

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = k, \quad \lambda_{3,4} = \dfrac{k+2 \pm \sqrt{k^2-4k}}{2}$

Per $k<0 \vee k>4$ le quattro radici reali sono distinte $\rightarrow$ A è diagonalizzabile.
Per $0<k<4$ non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

Per $k=0$, $\lambda_1 = 1$, $m_a(1)=3$
$\lambda_2 = 0$, $m_a(0)=1$
$V_1 = \{ {}^t(x,x,0,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$, $m_g(1)=1$ $\rightarrow$ non è diagonalizzabile

Per $k=4$, $\lambda_1 = 1$, $m_a(1)=1$
$\lambda_2 = 4$, $m_a(4)=1$
$\lambda_3 = \lambda_4 = 3$, $m_a(3)=2$
$V_3 = \{ {}^t(x,-x,0,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$, $m_g(3)=1$ $\rightarrow$ non è diagonalizzabile

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $k<0 \vee k>4$.

<u>CASO $k=0$</u> : $\dim \operatorname{Ker}(A-\mathbb{1}) = \dim V_1 = 1$, $\rightarrow$ un solo blocco di Jordan di ordine 3

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$