Fondamenti di Algebra e Geometria

Cognome……………………………………Nome……………………………………Matricola ……………………

Griglia di valutazione

Esercizio	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	Totale
Punteggio							

TEMPO A DISPOSIZIONE: 2,5 ore

1. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che nella base canonica $\mathcal{E}$ è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che l'insieme $\mathcal{B} := \left\{ {}^t(1,0,-2), {}^t(0,1,3), {}^t(2,1,0) \right\}$ costituisce una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice di ϕ nella base $\mathcal{B}$ e scrivere la matrice di cambio di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$.

2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{k^2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{h^2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori $h, k \in \mathbb{R}$ la matrice A: *a*) esiste; *b*) è simmetrica; *c*) è invertibile.

3. Verificare con un calcolo diretto che l'unica soluzione in $\mathbb{C}^3$ del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

è la soluzione banale $(0,0,0)$.

4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Discutere la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

senza utilizzare il teorema spettrale.

5. Determinare una possibile forma canonica di Jordan di una matrice $A \in M_{15}(\mathbb{C})$ sapendo che ha un solo autovalore distinto $\lambda = 1$, $rk(A - I) = 8$, $rk(A - I)^2 = 3$ e $rk(A - I)^3 = 2$.

6. Quali sono le *operazioni elementari* sulle righe di una matrice? Qual è la loro utilità? Da quali matrici sono rappresentate?

Ogni esercizio vale 5 punti