אריזת כדורים במימד 8

סמינר במתמטיקה

05.11.2024

אוהד רביד, מנחה: ד"ר שוני גלבוע

בעיית אריזת הכדורים

אריזת כדורים (Sphere Packing) היא בעיה גיאומטרית העוסקת בשאלה פשוטה לכאורה:

מה היא הדרך היעילה ביותר למקם כדורים במרחב?

1 סְרִיגִים ואריזות

הגדרות ראשונות

אנו נסמן ב- $B_r^n(x)$ כדור סגור ברדיוס r שמרכזו ב- x.

אריזת כדורים (*sphere packing*)

תת קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}^n$ של כדורים בעלי רדיוס שווה, שהפנימים שלהם זרים זה לזה

הצפיפות העליונה (*upper density*) של אריזה כלשהי $\mathcal{P}$ היא

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_r^n(0)\cap\mathcal{P})}{\mathrm{vol}(B_r^n(0))}$$

כאשר אנו משתמשים במרחב האוקלידי הרגיל ו vol הינה מידת לבג.

צפיפות אריזת הכדורים ב- $\mathbb{R}^n$, אותה נסמן ב- $\Delta_{\mathbb{R}^n}$, היא הסופרימום של כל הצפיפויות העליונות.[1]

[1] הגדרה זו אינה מבטיחה כי צפיפות זו אכן מתקבלת על ידי אריזה כולשהי, אך ניתן להוכיח זאת (Groemer, 1963).

סְרִיגִים ואריזות מחזוריות

סָרִיג (*lattice*)

תת חבורה מדרגה n המורכבת מבסיס של $\mathbb{R}^n$ בתוספת כל צירוף ליניארי בעל מקדמים שלמים שלו

אם B הוא בסיס מסוים של $\mathbb{R}^n$, אז הסריג Λ ניתן להצגה בצורה הבאה:

$$\Lambda := \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{Z}, v_i \in B\}$$

אריזת כדורים *מחזורית* (*periodic*)

אריזת כדורים שקיים עבורה סריג Λ כך שהיא נשמרת תחת הזזה בכל איבר של הסריג

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} + v, \forall v \in \Lambda$$

אריזת סריג (*lattice packing*)

אריזה מחזורית בה כל מרכזי הכדורים נמצאים על סריג, עד כדי הזזה

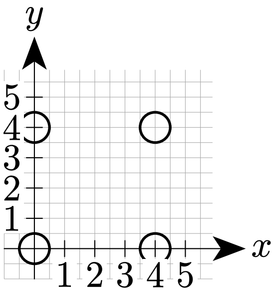
$$\mathcal{P} = \Lambda + x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

ניקח את הבסיס $B = \{(0,4),(4,0)\}$. נקבל את הסריג $\Lambda = \{(4n,4m) \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$.

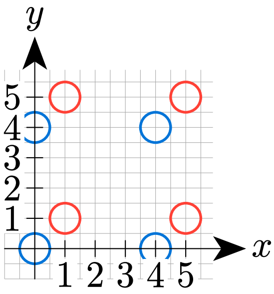
אז $\mathcal{P}_1 = \left\{B^2_{1/2}(x) \mid x \in \Lambda\right\}$ היא אריזת סריג, בעוד ש-

$$\mathcal{P}_2 = \left\{B^2_{1/2}(x) \mid x \in \Lambda \cup (\Lambda + (1,1))\right\}$$

הינה אריזה מחזורית שאינה אריזת סריג.



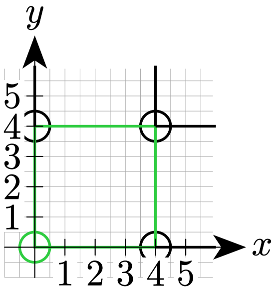
$\mathcal{P}_1$



$\mathcal{P}_2$

צפיפות של אריזת סריג

נחשוב על הסריג כריצוף של המרחב באמצעות מקבילונים.



התא היסודי (*fundamental cell*) של אריזת כדורים המבוססת על סריג Λ שהבסיס שלו הוא B ניתן להצגה כך:

$$C := \{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \mid 0 \le x_i \le 1, v_i \in B\}$$

הזזות של התא היסודי באמצעות איברים של Λ מרצפת את המרחב,
ואריזת הסריג הינה מיקום של כדורים בכל צומת של ריצוף זה.

מכיוון שבמרחב ישנו כדור אחד לכל עותק של התא, הצפיפות מתקבלת על ידי $\operatorname{vol}(B_r^n)/\operatorname{vol}(C)$.
נשתמש בכך ש- $\operatorname{vol}(C) = \operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$, ונקבל שהצפיפות של אריזת סריג היא:

$$\frac{\operatorname{vol}(B_r^n)}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

הגדרה ותכונות בסיסיות של E_8

אנו נעסוק באריזה E_8, שהיא אריזת כדורים במימד $\mathbb{R}^8$. נציג את הסריג עליו היא מבוססת, Λ_8:

$$\Lambda_8 = \left\{ (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \pmod 2 \right\}$$

Λ_8 הוא סריג *אינטגרלי* (*integral lattice*), כלומר כל המכפלות הפנימיות בין אברי הבסיס שלו שלמות.
Λ_8 הוא סריג *זוגי* (*even lattice*), כלומר ריבוע האורך של כל ווקטור בו הוא שלם וזוגי.
בפרט, המרחק בין כל שתי נקודות ב- Λ_8 הוא מהצורה $\sqrt{2k}$, ובין שתי נקודות סמוכות הוא $\sqrt{2}$.

נבחר אריזת סריג בעלת $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, אותה נסמן ב- E_8. הצפיפות המתקבלת היא:

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8) = 1, \qquad \frac{\mathrm{vol}\left(B^8_{\sqrt{2}/2}\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8)} = \frac{\pi^4}{384} = 0.2538\dots$$

הדואליות של Λ_8

אנו זקוקים לתכונה אחת נוספת של Λ_8: הוא *הסריג הדואלי* של עצמו.

עבור סריג Λ בעל בסיס מסוים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ נגדיר:

הסריג הדואלי (*dual lattice*) של Λ

הסריג בעל הבסיס $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ כך ש-

$$\langle v_i, v_j^* \rangle = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j, \text{ and} \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

את הסריג הדואלי נסמן ב- Λ^*, ואם $\Lambda = \Lambda^*$ אז נאמר ש Λ הוא הסריג הדואלי של עצמו.

2 שימוש באנליזה הרמונית למציאת חסמים לצפיפות

אם נוכל להוכיח כי הצפיפות הגבוהה ביותר האפשרית ב $\mathbb{R}^8$ שווה לצפיפות של E_8, הרי שבכך נוכיח כי היא אריזה אופטימאלית במימד זה.

בעיה זו מקבלת מענה בעבודתם של Cohn ו- Elkies, שהוכיחו כי ניתן להשתמש בפונקציות עזר בעלות תכונות מסוימות, אותן נפרט מיד, כדי לחסום את הצפיפות המירבית האפשרית במימד מסוים.

התובנה העיקרית נמצאת בקשר הקיים בין פונקציה והתמרת פורייה שלה, באמצעות *נוסחת הסכימה של פואסון*.

פונקציות שוורץ

אנו נעסוק בפונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}$ (ולעתים בפונקציות מרוכבות של משתנה ממשי).

פונקציות שוורץ (Schwartz functions) - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

כל הפונקציות הניתנות לגזירה אינסוף פעמים, ושמקיימות

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)\right|<\infty$$

לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, כאשר $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ היא סדרה של α גזירות חלקיות (לפי סדרה כולשהי של משתנים).

כלומר, קבוצת הפונקציות הזו הינה מרחב הפונקציות שערכן, והערך של כל נגזרת שלהן, פוחת "מהר מאוד", כלומר מהר יותר מכל פולינום.

התמרת פורייה ב- $\mathbb{R}^n$ של פונקציות שוורץ

נגדיר את התמרת פורייה של פונקציית שוורץ f כך:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n$$

אנו נשתמש גם בסימון המקובל $f(x) \to g(\xi)$ כדי לציין ש- g היא התמרת פורייה של f.

עבור פונקציות שוורץ מתקיימת גם *התמרת פורייה ההפוכה*:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

פונקציה רַדְיָאלִית (*radial*)

פונקציה התלויה אך ורק ב $|x|$

תכונה חשובה של פונקציות רדיאליות היא שהן מקיימות $f = \hat{\hat{f}}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot y} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot (-y)} \,\mathrm{d}\xi \\
&= f(-y) \\
&= f_0(|-y|) \qquad\qquad = f(y)
\end{aligned}
$$

נוסחת הסכימה של פואסון

כדי שנוכל להפעיל כלים מתחום האנליזה על בעיית הצפיפות, נשתמש בנוסחת הסכימה של פואסון (*Poisson Summation Formula*).

נוכיח למקרה החד מימדי. *נוסחת הסכימה של פואסון עבור* $\mathbb{R}$ אומרת כי לכל $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

אנו יודעים כי שתי פונקציות זהות אם פיתוח פורייה שלהן זהה.

נגדיר שתי פונקציות 1-מחזוריות, נמצא את המקדמים של פיתוחי פורייה שלהן, וכך נראה כי הן זהות.

ראשית:

$$F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

F_1 היא 1-מחזורית, ומכיוון ש- f פוחתת מהר מאוד (במובן שהגדרנו עבור פונקציות שוורץ), הסדרה מתכנסת בהחלט על הישר ולכן F_1 רציפה.

באמצעות פיתוח פורייה נוכל להגיע לפונקציה נוספת, שגם היא 1-מחזורית:

$$F_2(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

נוכל לחשוב על F_2 בתור הגרסה הדיסקרטית של $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, \mathrm{d}\xi$

עבור $F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$, המקדם ה-$m$-י הוא בדיוק $\hat{f}(m)$.
עבור $F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$, מתקיים:

$$
\begin{aligned}
a_m &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi imx} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi imx} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi imy} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi imy} \,\mathrm{d}y \qquad = \hat{f}(m)
\end{aligned}
$$

כאשר החלפת סדר הסכימה והאינטגרציה מותרת כי $f \in \mathcal{S}$.

נסיק כי אכן $F_1 = F_2$, ואת התוצאה הסופית נקבל אם נציב $x = 0$.

נוכל להכליל את התוצאה למימד n ולקבל:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(x)$$

כדי להרחיב את התוצאה עבור סריגים כלליים, נסמן ב- $M : Z^n \to \mathbb{R}^n$ את ההעתקה הלינארית ביחס לבסיס $B = \{v_1, ..., v_n\}$ של Λ. אז M היא מטריצה שעמודותיה הם ווקטורי הבסיס, ו- $\Lambda = M\mathbb{Z}^n$.

אז

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(Mx)$$

נסמן $g(x) = f(Mx)$ ומהנוסחה נקבל כי $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx) e^{-2\pi i \xi \cdot x} \, \mathrm{d}x$.

באמצעות מעט מניפולציות אלגבריות נקבל כי

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i \left(M^{-1}\right)^T \xi \cdot u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Lambda)} \hat{f}\left(\left(M^{-1}\right)^T \xi\right)$$

נציב חזרה ונקבל כי

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(Mx) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}\Big(\left(M^{-1}\right)^T \xi\Big)$$

נסמן ב- D את הבסיס של הסריג הדואלי Λ^*. ישירות מההגדרה נקבל כי $M^T D = I$,
אז $D = \left(M^T\right)^{-1}$ ולכן $\Lambda^* = D\mathbb{Z}^n = \left(M^T\right)^{-1}\mathbb{Z}^n$. כלומר:

$$\boxed{\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)}$$

וזו היא נוסחת הסכימה של פואסון לסריגים ב- $\mathbb{R}^n$.

חסמים המתקבלים מתכנון ליניארי

המשפט המרכזי בעבודתם של Cohn ו- Elkies:

תהי $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ויהי מספר ממשי $0 < r \in \mathbb{R}$, כך ש:

1. $f(0) = \hat{f}(0) > 0$
2. $\hat{f}(y) \geq 0$ לכל $y \in \mathbb{R}^n$
3. $f(x) \leq 0$ לכל $|x| \geq r$

אז הצפיפות המרבית ב- $\mathbb{R}^n$ היא לכל היותר $\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)$.

נוכיח את הטענה תחילה עבור אריזות סריג, ולאחר מכן נרחיב את התוצאה לאריזות כלליות.

יהי Λ סריג ב- $\mathbb{R}^n$.

ללא הגבלת הכלליות נניח כי Λ בעל אורך ווקטור מינימאלי r.[1]

אז ישנה אריזת סריג המבוססת עליו ומורכבת מכדורים ברדיוס $r/2$ ובעלת צפיפות

$$\frac{\operatorname{vol}\left(B^n_{r/2}\right)}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

כלומר, אנו צריכים להוכיח כי $\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$.

[1] צפיפות אריזת הסריג תישאר זהה אם נרחיב או נכווץ את הסריג (ואיתו את אורך הווקטור המינימאלי) בסקלר.

ע"פ נוסחת הסכימה של פואסון, $\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$

עבור הסכום הימני,

$$\hat{f}(0) \leq \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$$

ולכן

$$\frac{\hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$$

ואם נביע את הסכום השמאלי כך

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = f(0) + \sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} f(x)$$

דרשנו כי $f(0) > 0$ ו- $f(x) \leq 0$ לכל $|x| \geq r$ (ובפרט לכל $x \in \Lambda, x \neq 0$). אז נקבל:

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) \leq f(0)$$

נקבל כי

$$f(0) \geq \sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) \geq \frac{\hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

כלומר

$$\frac{\hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \leq f(0)$$

אבל דרשנו גם ש- $f(0) = \hat{f}(0)$ ולכן

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$$

הרחבה לאריזות מחזוריות ואריזות כלליות

הוכחנו כי כאשר ישנה פונקציה המקיימת התנאים, אין אריזת **סריג** בעלת צפיפות גדולה יותר. אך מה לגבי אריזות כלליות?

כל אריזה כללית ניתנת לקירוב על ידי אריזה **מחזורית**. נוכל לקחת את כל הכדורים בתיבה גדולה ככל שנרצה ולחזור עליה עבור המרחב כולו, והצפיפות שתאבד בתהליך תהיה זניחה.

עבור אריזה מחזורית של כדורים שמרכזיהם נמצאים על הזזות של הסריג Λ באמצעות N הווקטורים $t_1, \ldots, t_N$, נוכל שוב להניח ללא הגבלת הכלליות כי אורך הווקטור המינימאלי הינו r ולכן רדיוס הכדורים הינו $r/2$, וצפיפותה תהיה $N \cdot \mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right) / \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$.

את החסם הדרוש, $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq N$, ניתן לקבל באופן דומה באמצעות הסכום

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{x \in \Lambda} f\left(t_j - t_k + x\right)$$

האפסים של הפונקציה ומסקנות נוספות

הצפיפות של אריזת סריג של כדורים ברדיוס $r/2$ היא:

$$\frac{\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

ולכן, אם ישנה פונקציה כזו ו- $r>0$ כזה, אז צפיפותה שווה לחסם כאשר $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)=1$.

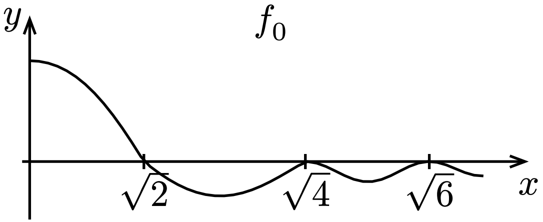
נציב בנוסחת הסכימה של פואסון:

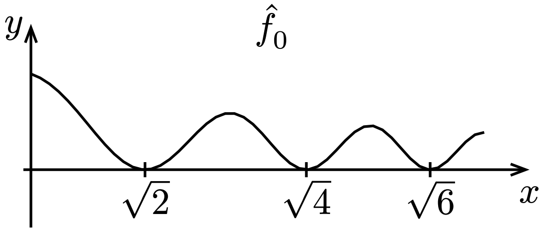
$$f(0)+\sum_{x\in\Lambda,x\neq 0} f(x)=\hat{f}(0)+\sum_{y\in\Lambda^*,y\neq 0}\hat{f}(y)$$

ועל פי הדרישות נסיק כי כל האברים בשני הסכומים אפסים. ולכן פונקציה העונה על התנאים חייבת לקבל אפסים על הסריג (מלבד בראשית) - וכך גם התמרת פורייה שלה על הסריג הדואלי.

כל התנאים על הפונקציה המבוקשת הינם לינארים ונשמרים תחת סיבוב ולכן נוכל לחשוב על f בתור פונקציה רדיאלית $f_0(x), x \geq 0$.

ביחס לסריג Λ_8, נוכל גם להסיק את זוגיות הסדר של כל אפס, ולצייר באופן סכמתי את הצורה המצופה של הפונקציה ושל התמרת פורייה שלה:





3 תבניות מוֹדוּלָרִיּוֹת

על פניו, התקדמנו מאוד: יש לנו "מתכון" למציאת הפונקציה המבוקשת: עלינו למצוא פונקציה של משתנה יחיד, שמקבלת אפסים בכל הסריג E_8, וכך גם התמרת הפורייה שלה.

אולם, בעיה זו מתבררת כקשה מאוד.

בעוד שניתן לבנות פונקציה בעלת אפסים במקומות הנדרשים, וניתן לבנות פונקציה שהתמרת פורייה שלה מקבלת אפסים כאלו, אין דרך כללית או פשוטה לבנות פונקציה המקיימת את שתי הדרישות בו זמנית.

כפי שראינו, לכל פונקציה רדיאלית מתקיים $f = \hat{\hat{f}}$. אז ל- f המקיימת את התנאים, נוכל לקחת:

$$g_{+1} = \frac{f + \hat{f}}{2}, \qquad g_{-1} = \frac{f - \hat{f}}{2}$$

תחת התמרת פורייה נקבל $\widehat{g_{+1}} = \left(\hat{f} + f\right)/2 = g_{+1}, \widehat{g_{-1}} = \left(\hat{f} - f\right)/2 = -g_{-1}$.

פונקציה *עצמית* של התמרת פורייה

פונקציה המקיימת עבור סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו $\hat{f} = \alpha f$.

אז g_{+1} היא פונקציה עצמית עם $\alpha = 1$, ו- g_{-1} היא פונקציה עצמית עם $\alpha = -1$.

הן מקבלות את השורשים הנדרשים כמו f, ונוכל לקבל באמצעותן חזרה את f שכן $f = g_{+1} + g_{-1}$.

שתי הפונקציות החדשות בלתי תלויות אחת בשניה, ולכן נוכל לבנות כל אחת מהן בנפרד.

התמרת לפלס

כדי למצוא פונקציות עצמיות כאלו, נפנה *להתמרת לפלס של גאוסיאינים*.

התמרת לפלס

עבור פונקציה g, נגדיר את התמרת לפלס שלה באמצעות:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g(t)\,\mathrm{d}t$$

כל עוד g פשוטה למדי, נוכל לקבל את התמרת פורייה של f באמצעות החלפה פשוטה:

$$\hat{f}(y) = \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2/t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\pi|y|^2 t} t^{\frac{n}{2}-2} g(1/t)\,\mathrm{d}t$$

אם מתקיים $g(1/t) = \varepsilon t^{2-\frac{n}{2}} g(t)$ אז $\hat{f} = \varepsilon f$, ולכן אנו מחפשים פונקציות המקיימות משוואה כזו.

הגדרות ראשונות

תבניות מוֹדוּלָרִיּוֹת (*modular forms*) הן משפחה של פונקציות המקיימות משוואות פונקציונאליות מסויימות.

נסמן ב- $\mathfrak{h}$ את חצי המישור העליון, כלומר $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

תבנית מוֹדוּלָרִית חלשה בעלת משקל k (*weakly modular form of weight k*)

עבור פונקציה $F : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ ו- $k \in \mathbb{Z}$, F היא תבנית מודולרית חלשה ממשקל k אם היא מקיימת:

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k F(z)$$

לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

F תיקרא *תבנית מוֹדוּלָרִית* (*modular form*) אם היא גם הולומורפית ב- $\mathfrak{h}$ וחסומה כאשר $\operatorname{Im} z \to \infty$.

טור Eisenstein - E_k

טור Eisenstein הינו פונקציה אותה נגדיר כך[1]

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

כאשר ζ היא פונקצית זטא של רימן ($\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$).

כאשר k זוגי וגדול מ-2, נקבל על ידי הצבה:

$$E_k(z+1) = E_k(z), \quad E_k(-1/z) = z^k E_k(z)$$

ו- E_k הינן תבניות מדולריות ממשקל k.

---

[1] אומנם ישנה חפיפה בסימון בין האריזה E_8 לבין E_k כאשר $k=8$, אך נשתמש אך ורק ב $k \in \{2,4,6\}$.

עבור $k=2$, הסכום מתכנס *בתנאי* ולא *בהחלט*.

נגדיר את סדר הסכימה כך:

$$E_k(z)=\frac{1}{2\zeta(k)}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^k}+\frac{1}{2\zeta(k)}\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^k}$$

עבור $k=2$, נוכל לקבל שוב באמצעות הצבה את הזהות $E_2(z+1)=E_2(z)$, אך המקבילה של הזהות $E_k(-1/z)=z^kE_k(z)$ הינה:

$$E_2(-1/z)=z^2E_2(z)-6iz/\pi$$

אנו נאמר ש- E_2 היא *תבנית כְּמוֹ-מוֹדוּלָרִית* (*quasimodular form*) ממשקל 2.

סקיצה של של ההוכחה: לכל $\varepsilon > 0$, נוכל לסמן

$$G_{2,\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2\ |mz+n|^{2\varepsilon}}$$

ולקבל טור מתכנס בהחלט. הפונקציה החדשה מקיימת את המשוואה

$$G_{2,\varepsilon}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2\ |cz+d|^{2\varepsilon}\ G_{2,\varepsilon}(z)$$

הגבול $G_2^*(z) := \lim_{\varepsilon\to 0} G_{2,\varepsilon}(z)$ קיים, ושווה ל- $\zeta(2)E_2(z) - \pi/(2\,\mathrm{Im}(z))$.

G_2^* מתנהגת בדומה לתבנית מודלרית ממשקל 2, והצבה במשוואה הפונקציונאלית נותנת את התוצאה הרצויה.

פיתוח פורייה של E_k

לפונקציה 1-מחזורית ישנו פיתוח פורייה בעל הצורה הבאה: $g(z) \ \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$.

נמשיך מכאן והלאה לסמן $q = e^{2\pi i z}$. כדי למצוא פיתוח פורייה ל- E_k נשתמש בזהות הבאה:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)} = -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} q^r\right), \ \ z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

ובאמצעות k גזירות איבר-איבר, נוכל לקבל פיתוח ל- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k}$. בסך הכל, נקבל כי:

$$E_k(z) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^m$$

כאשר $\sigma_{k-1}(m)$ מחזירה את סכום המחלקים של m, כאשר כל אחד מהם מועלה בחזקת $k-1$.

פונקציית תטא של סריג - $\Theta_\Lambda(z)$

לכל סריג Λ נוכל להגדיר פונקציה, לה נקרא פונקציית תטא, כך

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{x\in\Lambda} e^{\pi i |x|^2 z}$$

פונקציה זו מתכנסת כאשר $\operatorname{Im} z > 0$ ומגדירה פונקציה אנליטית ב- $\mathfrak{h}$.

לפונקציה זו תכונה חשובה: לכל סריג Λ ב- $\mathbb{R}^n$, מתקיים

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \left(\frac{i}{z}\right)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z)$$

לכל $z \in \mathfrak{h}$.

ההוכחה - באמצעות נוסחת הסכימה של פואסון על הפונקציה הפנימית, $e^{-t\pi|x|^2}$.

אנו נשתמש בפונקציות תטא הבאות, המוגדרות על הסריג $\mathbb{Z}$:

$$\theta_{00}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$$

$$\theta_{01}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 z}$$

$$\theta_{10}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}$$

$$\theta_{00}^4(z+1) = \theta_{01}^4(z)$$

$$\theta_{01}^4(z+1) = \theta_{00}^4(z)$$

$$\theta_{10}^4(z+1) = -\theta_{10}^4(z)$$

$$z^{-2}\theta_{00}^4(-1/z) = -\theta_{00}^4(z)$$

$$z^{-2}\theta_{01}^4(-1/z) = -\theta_{10}^4(z)$$

$$z^{-2}\theta_{10}^4(-1/z) = -\theta_{01}^4(z)$$

4 הפונקציה של Viazovska

בניה של פונקציה בעלת שורשים מתאימים

תבניות מודולריות, בשילוב עם התמרת לפלס, מתאימות לחיפוש שלנו אחר פונקציות עצמיות של התמרת פורייה.

אך כיצד נוכל לבנות פונקציה בעלת השורשים המתאימים? דרך אחת וישירה מאוד היא באמצעות כפל בפונקציה פשוטה המקבלת שורשים דומים, וזו הדרך בה הצליחה Viazovska להוכיח את קיומן של הפונקציות הנדרשות.

הפונקציה $\sin^2(\pi|x|^2/2)$ מקבלת אפסים מסדר שני לכל $x = \sqrt{2k}, k = 1, 2, \ldots$.

בשילוב עם התמרת לפלס נקבל תבנית שתתאים לשתי הפונקציות העצמיות אותן אנו מחפשים:

$$\sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} f(t)\, \mathrm{d}t$$

תנאים לפונקציות עצמיות מתאימות

נתחיל בחיפוש אחר הפונקציה העצמית בעלת הערך העצמי 1. אם נניח כי יש לנו פונקציה:

$$a(x) = \sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g_0(t)\,\mathrm{d}t$$

אנחנו רוצים לדעת מתי $\hat{a} = a$.

אנחנו מחפשים תנאים *שאינם הכרחיים*. לא דרושים לנו כלים לאפיון כל הפונקציות שיכולות לשמש להוכחת החסם, אלא דוגמה לפונקציה אחת כולשהי.

ננסה לבצע ניחושים מושכלים על מנת לצמצם את "איזור החיפוש".

בתור התחלה, נניח כי $|x| > \sqrt{2}$, כי שם התנהגות הפונקציה צריכה להיות פשוטה יותר.

נוכל גם לחשוב על a בתור פונקציה רדיאלית המוגדרת[1] עבור $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
ראינו שהתמרת פורייה של התמרת לפלס מקבל את הצורה הבאה:

$$\int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g(t)\, \mathrm{d}t \to \int_0^\infty e^{-\pi|y|^2 t} t^2 g(1/t)\, \mathrm{d}t$$

אז אם נניח ש a הינה פונקציה עצמית (כלומר, $\hat{a} = a$), אז נוכל להתקרב לצורה הרצויה אם נבחר $g_0(t) = h_0(1/t)t^2$, כלומר

$$a(r) = \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^\infty e^{-\pi r^2 t} t^2 h_0(1/t)\, \mathrm{d}t$$

[1] כאשר נדבר על התמרת פורייה, נמשיך לסמן $a(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ואת ההתמרה ב- $\hat{a}(y)$ תוך החלפה של r^2 בריבוע הנורמה של הווקטור x.

אנו רוצים לעבוד ב- $\mathfrak{h}$, חצי המישור העליון כדי להשתמש בתבניות מודולריות, ונוכל לפשט אף יותר אם נחפש פונקציה $\phi_0 : i\mathbb{R} \to i\mathbb{R}$. נוכל לסמן:

$$i\phi_0\left(\frac{1}{it}\right) = h_0\left(\frac{1}{t}\right)$$

נציב ונעבור לקטע האינטגרציה $(0, i\infty)$ באמצעות החלפת משתנים $z = it \Rightarrow t = -iz$:

$$\begin{aligned} a(r) &= \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^\infty e^{-\pi r^2 t} t^2 i\phi_0\left(\frac{1}{it}\right) \mathrm{d}t \\ &= -\sin^2(\pi r^2/2) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{z\pi i r^2} \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

מה יקרה אם ננסה להתקרב אף יותר לצורה של התמרת לפלס? כלומר, אנו רוצים ש $e^{z\pi i r^2}$ יהיה אחד מגורמי המכפלה בתוך האינטגרל, ולהימנע מגורמים מחוצה לו.

נוכל לעשות זאת באמצעות הזהות

$$\sin^2(\pi r^2/2) = -\frac{1}{4}\left(e^{i\pi r^2} - 2 + e^{-i\pi r^2}\right)$$

אז נגדיר:

$$a(r) := -4\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z}\, \mathrm{d}z$$

מעתה, לא נשנה יותר את a, ונתמקד בפונקציה הפנימית, ϕ_0.

נשתמש בזהות ונקבל

$$a(r)=\int_0^{i\infty}\left[\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z+1)}-2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2 z}+\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z-1)}\right]\mathrm{d}z$$

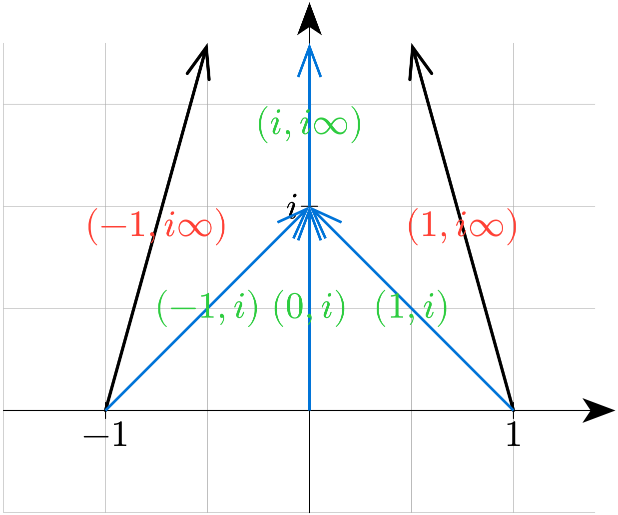
נטפל בחזקות $z+1, z-1$ בגורמים $e^{\pi i r^2(z\pm 1)}$, שמפריעים לנו להגיע להתמרת לפלס.

נוכל לבצע החלפת משתנים בכל אחד מהמחוברים, ולקבל:

$$\int_0^{i\infty}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z+1)}\,\mathrm{d}z=\int_1^{i\infty+1}\phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^{i\infty}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z-1)}\,\mathrm{d}z=\int_{-1}^{i\infty-1}\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

נניח שניתן לעבור בין $\phi_0(z) \leftrightarrow \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2$. שינוי תחום האינטגרציה בעייתי לנו:



$$\int_{ia}^{ib} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |x|^2 z} \, \mathrm{d}z \to$$

$$\int_{i\frac{1}{a}}^{i\frac{1}{b}} \phi_0(w) e^{\pi i |y|^2 w} \, \mathrm{d}w, \;\; a, b \in [-\infty, \infty]$$

נחלק את הקטע $(0, i\infty)$ ל- $(0, i)$ ו- $(i, i\infty)$, ונקבל כי כל אחד מהם הוא תמונת מראה של השני.

את האינטגרציה לאורך הקטעים $(\pm 1, i\infty)$ נשנה להיות על הקטעים $(i, i\infty) \to (\pm 1, i)$.

$$
\begin{aligned}
a(r) = \int_{-1}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
-2\int_{0}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
+\int_{1}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
+\int_{i}^{i\infty} \Bigg[\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} \\
-2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} + \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\Bigg]\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

נסתכל על התמרת פורייה של האינטגרל בקטע $(-1,i)$ תחת החלפת משתנים $w=-\frac{1}{z}$, נקבל:

$$\int_{-1}^{i}\phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2e^{\pi i|x|^2z}\,\mathrm{d}z\to\int_{1}^{i}\phi_0\Big(-1-\frac{1}{w-1}\Big)(w-1)^2e^{\pi i|y|^2w}\,\mathrm{d}w$$

ונקבל זהו כמעט האינטגרל בקטע $(1,i)$!

אם ϕ_0 היא 1-מחזורית (תכונה שכבר הוכחנו עבור תבניות מודולריות), אז

$$\phi_0\Big(-1-\frac{1}{w-1}\Big)=\phi_0\Big(1+-1-\frac{1}{w-1}\Big)=\phi_0\Big(-\frac{1}{w-1}\Big)$$

כלומר החלק המורכב מהאינטגרלים על הקטעים $(\pm1,i)$ הוא למעשה פונקציה עצמית (תחת ההנחה ש- $\phi_0(z+1)=\phi_0(z)$).

$$
\begin{aligned}
a(r) = &\int_{-1}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
&-2\int_{0}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
&+\int_{1}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \\
&+\int_{i}^{i\infty} \Bigg[\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} \\
&\qquad -2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} + \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\Bigg]\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

כדי ש- $a(r)$ כולה תהיה פונקציה עצמית, חייב להתקיים כי החלק השני של הפונקציה, כלומר החלק המורכב מהקטעים $(0,i)$ ו- $(i,i\infty)$ גם הוא פונקציה עצמית.

נוכל להפעיל עליו את התמרת פורייה ולהשוות, ולקבל כי אם:

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2-2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2+\phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2=2\phi_0(z)$$

אז גם החלק השני של $a(r)$ יהיה פונקציה עצמית, כלומר $a(r)$ כולה תהיה בדיוק הפונקציה העצמית אותה אנו מחפשים!

פונקציה המקיימת את התנאים

נציג עתה את j, הנקראת גם *elliptic j-invariant*.

היא מוגדרת כך:

$$j = \frac{1728E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}$$

נוכל לבדוק ולקבל כי אכן

$$j(-1/z) = \frac{1728E_4^3\left(-\frac{1}{z}\right)}{E_4^3\left(-\frac{1}{z}\right) - E_6^2\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1728z^{12}E_4^3(z)}{z^{12}E_4^3(z) - z^{12}E_6^2(z)} = j(z)$$

כלומר, j היא אכן אינווריאנטית במובן זה. באופן מיידי נוכל לקבל גם כי $j(z) = j(z+1)$.

בדומה לפונקציה j, נגדיר שתי פונקציות עזר:

$$\varphi_{-2} := \frac{-1728E_4E_6}{E_4^3 - E_6^2}, \qquad \varphi_{-4} := \frac{1728E_4^2}{E_4^3 - E_6^2}$$

אלו פונקציות להן התכונות

$$\varphi_{-2}(-1/z) = z^{-2}\varphi_{-2}(z)$$
$$\varphi_{-4}(-1/z) = z^{-4}\varphi_{-4}(z)$$

(וכמובן ששתיהן 1-מחזוריות)

באמצעות פונקציות אלו, נגדיר

$$\phi_0 := \varphi_{-4}E_2^2 + 2\varphi_{-2}E_2 + j - 1728$$

ו- ϕ_0 מקיימת את כל התכונות הדרושות לנו! המשוואה הפונקציונאלית נובעת מכך ש-

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) = \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi} \cdot \frac{1}{z}(\varphi_{-4}E_2 + \varphi_{-2}) - \frac{36}{\pi^2}\frac{1}{z^2}\varphi_{-4}(z)$$

ואת מרבית התכונות האחרות ניתן להוכיח באמצעות פיתוח פורייה של ϕ_0, שניתן לחישוב באמצעות כלי אוטומאטי:

$$\phi_0(z) = 518400q + 31104000q^2 + 870912000q^3 + 15697152000q^4 + O(q^5)$$

בשילוב עם חסמים אסימפטוטיים על המקדמים.

מציאת ערכי הפונקציה על הסריג ובראשית

כדי למצוא את הערכים של $a(r)$ עבור $r=0$ ו- $r=\sqrt{2}$, נשתמש בהערכה הבאה של ϕ_0:

$$\phi_0\left(\frac{i}{t}\right)t^2=\frac{36}{\pi^2}e^{2\pi t}-\frac{8640}{\pi}t+\frac{18144}{\pi^2}+O(t^2e^{-2\pi t})$$

עבור $r>\sqrt{2}$ נוכל לחשב את האינטגרל המתאים על שלושת הגורמים הראשונים ולקבל:

$$\tilde{a}(r)=4i\sin^2(\pi r^2/2)\left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)}-\ldots+\int_0^\infty\left(t^2\phi_0\left(\frac{i}{t}\right)-\frac{36}{\pi^2e^{2\pi t}}+\ldots\right)e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{dt}\right)$$

$\tilde{a}(r)$ אנליטית בסביבה כולשהי ב- $[0,\infty)$ וכך גם $a(r)$. אז הן שוות בתחום כולו, ובאמצעות גבול נקבל:

$$a(\sqrt{2})=\lim_{r\to\sqrt{2}}4i\sin^2(\pi r^2/2)\left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)}-\ldots\right)=0,\;a(0)=\frac{-i8640}{\pi}$$

הפונקציה העצמית הנוספת

עדיין דרושה לנו פונקציה המקיימת $b(x) = -\hat{b}(x)$. נשתמש בפונקציות מקודם ונסמן

$$\psi_I := 128\frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8} + 128\frac{\theta_{01}^4 - \theta_{10}^4}{\theta_{00}^8}$$

באמצעותה, נגדיר את הפונקציה הבאה

$$b(r) := -4\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

ו- $b(x)$ היא הפונקציה העצמית הנדרשת, ו- $b(0) = 0, b\left(\sqrt{2}\right) = 0$.

בדיקת החסמים המתאימים

נגדיר את

$$g(x) := \frac{\pi i}{8640} a(x) + \frac{i}{240\pi} b(x)$$

וזו היא פונקציית הקסם הדרושה לנו!

נוכל להציב ולקבל כי $g(x) = 0 \Leftarrow |x| = \sqrt{2}$.

מכיוון ש- $a(0) = \frac{-i8640}{\pi}$ ו- $b(0) = 0$, נקבל גם כי $g(0) = \hat{g}(0) = 1 > 0$.

נותר לנו רק להוכיח את שני התנאים האחרים, כלומר:

$$\hat{g}(y) \geq 0 \text{ לכל } y \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x) \leq 0 \text{ לכל } |x| \geq r$$

סקיצה של ההוכחה לכך ש- $g(x) \leq 0$ לכל $|x| > \sqrt{2}$. נציג את הפונקציה כך:

$$g(r) = \frac{\pi}{2160}\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^\infty A(t)e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t,\ \ A(t) = -t^2\phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it)$$

נראה ש- $A(t) < 0$ בקטע האינטגרציה, ונסיק כי g אינה מקבלת ערכים חיוביים לכל $r > \sqrt{2}$.

בקטע $(0,1]$ נסמן את $A_0^{(n)}$: $A(t) = A_0^{(n)}(t) + O\left(t^2 e^{-\pi n/t}\right)$.

באמצעות חסמים על המקדמים של פיתוח פורייה, ניתן לחסום את השגיאה $\left|A(t) - A_0^{(m)}(t)\right|$.

$A_0^{(6)}(t) < 0$, ו- $\left|A_0^{(6)}(t)\right| \leq \left|A(t) - A_0^{(6)}(t)\right|$, ולכן $A(t) < 0$ כאשר $t \in (0,1]$.

הערכות דומות ניתן לקבל בקטע $(1,\infty)$, ותהליך דומה מאפשר להוכיח כי $\hat{g}(y) \geq 0$ לכל $y \in \mathbb{R}^n$.

אז, $g(x)$ היא פונקציית הקסם הדרושה, ועל כן הצפיפות המירבית ב- $\mathbb{R}^8$ הינה

$$\mathrm{vol}\left(B^8_{\sqrt{2}/2}\right) = \frac{\pi^4}{384} = 0.2538...$$

מכיוון שזו הצפיפות שקיבלנו עבור E_8, הוכחנו כי היא אכן אריזה בעלת הצפיפות הגבוהה ביותר האפשרית במימד זה. $\square$