סמינר בנושא אריזת כדורים במימד 8

אוהד רביד

תוכן עניינים

1. הקדמה

אריזת כדורים (Sphere Packing) היא בעיה גיאומטרית העוסקת בשאלה פשוטה לכאורה:

מה היא הדרך היעילה ביותר למקם כדורים במרחב?

ולא רק שהשאלה פשוטה לכאורה, אפילו קל לנחש את התשובה הנכונה:

לדוגמה, במרחב התלת המימדי ערימת התפוזים הנפוצה בסופר היא אכן היעילה ביותר!

את העומק והקושי האמיתיים נמצא בבואנו לנסות ולהוכיח כי זו אכן התשובה הנכונה: כלומר, שלא ניתן למצוא סידור יעיל אף יותר.

סמינר זה יעסוק בתשובה (ובשאלה!) ב- $\mathbb{R}^8$, אחד מבין שני המימדים הגבוהים היחידים בהם התשובה ידועה.

1.1. תוכנית פעולה

נפתח, כצפוי, בהגדרות שבאמצעותן נוכל לדבר על הבעיה בדיוק הנדרש (למה הכוונה ב"צפיפות יעילה ביותר"? ואיך מגדירים "אריזה"?), ונציג את האריזה המרכזית בה נעסוק, הנקראת E_8.

לאחר מכן, נכין את הקרקע ונביא את הטענה התיאורטית המרכזית הראשונה שלנו, התוצאה של Cohn ו Elkies, שבאמצעותה נוכל להפוך את הבעיה הגיאומטרית לבעיה באנליזה:
נראה כי מציאתה של פונקציה המקיימת מספר תכונות ייחודיות, מאפשרת להוכיח כי עבור מימד מסויים ישנו חסם לצפיפות המירבית, ולכן אם אריזה מסוימת הינה בעלת אותה צפיפות, היא גם היעילה ביותר במימד מסוים.

לבסוף, נוכיח כי הפונקציה שמצאה Viazovska אכן מקיימת את כל התכונות האלו, ולפיכך מוכיחה כי E_8 היא האריזה היעילה ביותר ב- $\mathbb{R}^8$.

2. הגדרות ראשונות

בעיית אריזת הכדורים עוסקת בשאלה: מה הוא החלק הגדול ביותר של $\mathbb{R}^n$ הניתן לכיסוי בכדורים בעלי רדיוס שווה שאינם נחתכים?

אריזת כדורים (*sphere packing*) היא תת קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}^n$ של כדורים בעלי רדיוס שווה, שהפנימים שלהם זרים זה לזה (אך מותר שיהיו משיקים).

אנו נסמן ב- $B_r^n(x)$ כדור סגור ברדיוס r שמרכזו ב x.

הצפיפות העליונה (*upper density*) של אריזה כלשהי $\mathcal{P}$ היא

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_r^n(0) \cap \mathcal{P})}{\mathrm{vol}(B_r^n(0))}$$

כאשר אנו משתמשים במרחב האוקלידי הרגיל ו vol הינה מידת לבג.

צפיפות אריזת הכדורים ב- $\mathbb{R}^n$, אותה נסמן ב- $\Delta_{\mathbb{R}^n}$, היא הסופרימום של כל הצפיפויות העליונות.

על פניו, הגדרה זו אינה מבטיחה כי צפיפות זו אכן מתקבלת על ידי אריזה כולשהי, אך אנו נסתמך על תוצאה שהוכיח Groemer [1], לפיה קיימת אריזה $\mathcal{P}$ עבורה

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_r^n(x) \cap \mathcal{P})}{\mathrm{vol}(B_r^n(x))} = \Delta_{\mathbb{R}^n}$$

במידה שווה לכל $x \in \mathbb{R}^n$. הווה אומר - ישנה אריזה עבורה מתקבלת הצפיפות המירבית.

2.1. סְרִיגִים ואריזות מחזוריות

סָרִיג (*lattice*) ב- $\mathbb{R}^n$ הוא תת חבורה מדרגה n, אשר מורכבת מבסיס של $\mathbb{R}^n$ בתוספת כל צירוף לינארי בעל מקדמים שלמים של בסיס זה (לצירוף כזה נקרא גם *צירוף אינטגרלי*, ולבסיס נקרא *בסיס אינטגרלי*).

פורמאלית, אם B הוא בסיס מסוים של $\mathbb{R}^n$, אז הסריג Λ ניתן להצגה בצורה הבאה:

$$\Lambda := \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{Z}, v_i \in B\}$$

באמצעות מושג הסריג נוכל להגדיר גם *אריזה מחזורית*.

אריזת כדורים $\mathcal{P}$ היא *מחזורית* (*periodic*) אם קיים סריג Λ כך ש $\mathcal{P}$ נשמרת תחת הזזה בכל איבר מ- Λ. או, בסימנים:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} + v, \forall v \in \Lambda$$

אריזת סריג (*lattice packing*) היא אריזה מחזורית בה כל מרכזי הכדורים נמצאים על סריג, עד כדי הזזה (כי סריג תמיד כולל את הראשית, מגבלה שאינה רצויה עבור אריזות).

לדוגמה, אם ניקח את הבסיס

$$B = \{(0,4),(4,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

נוכל לבנות באמצעותו את הסריג

$$\Lambda = \{(4n, 4m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

מכיוון שהתחלנו מסריג, גם האריזה $\mathcal{P}_1 = \{B_1^2(x) \mid x \in \Lambda\}$ היא אריזת סריג,
וגם $\mathcal{P}_2 = \{B_1^2(x + (1,1)) \mid x \in \Lambda\}$ היא אריזת סריג.

אך ישנן כמובן אריזות מחזוריות שאינן אריזות סריג.

למשל,

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ B^2_{1/2}(x) \mid x \in \Lambda \cup (\Lambda + (1,0)) \right\}$$

הינה אריזה מחזורית (וודאי שהיא נשמרת תחת הזזה בכל איבר מ- Λ), אך היא אינה אריזת סריג. נוכל להראות זאת כך:
נניח כי קבוצת מרכזי הכדורים ב- $\mathcal{P}_3$ היא סריג, שנסמנו Λ_B, ונסמן את הבסיס המתאים $B = \{(a,b),(c,d)\}$.

נשים לב כי וקטור (x,y) בסריג אם ורק אם

$$x \bmod 4 \in \{0,1\}$$
$$y \bmod 4 = 0$$

ווקטור שאינו בסריג כמובן שאינו איבר של הבסיס, וקל גם לראות כי $(1,t) \notin B$, כי אחרת $(2,2t) \in \Lambda_B$.

למעשה, כל ווקטור (x,y) עבורו $x \bmod 4 = 1$ לא יכול להיות איבר של הבסיס מאותה הסיבה,
ונסיק כי a,b,c,d מתחלקים כולם ב- 4. אבל אז לא נוכל לקבל למשל $(5,0) \in \Lambda_B$.

כלומר לא קיים בסיס כזה, ולכן האריזה אינה אריזת סריג.

2.2. צפיפות של אריזת סריג

מכיוון שאנו עוסקים בצפיפות של אריזות כדורים, טבעי שנרצה לחשב צפיפות של אריזות סריג.

נוכל לעשות זאת ביתר קלות אם נחשוב על הסריג כריצוף של המרחב באמצעות מקבילונים.

התא היסודי (*fundamental cell*) של אריזת כדורים המבוססת על סריג Λ שהבסיס שלו הוא B ניתן להצגה כך:

$$C := \{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \mid 0 \le x_i \le 1, v_i \in B\}$$

הזזות של התא היסודי באמצעות איברים של Λ מרצפת את המרחב, ואריזת הסריג הינה מיקום של כדורים בכל צומת של ריצוף זה.

מכיוון שבמרחב ישנו כדור אחד לכל עותק של התא, עבור רדיוס r כלשהו נוכל לחשב את הצפיפות באמצעות היחס

$$\frac{\mathrm{vol}(B^n_r)}{\mathrm{vol}(C)}$$

כאשר את נפח הכדור נקבל מהנוסחה

$$\mathrm{vol}(B^n_r) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n$$

מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 3, ואת נפח המקבילון נוכל לחשב באמצעות הדטרמיננטה.

בסך הכל, נקבל כי הצפיפות של אריזת סריג היא

$$\frac{\mathrm{vol}(B^n_r)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \tag{2.1}$$

את הרדיוס מקובל לבחור באמצעות *אורך הווקטור המינימאלי* של הסריג Λ, שהוא האורך הקטן ביותר של ווקטור בסריג (שאינו ווקטור האפס).

אם אורכו של ווקטור זה הוא d, אז הרדיוס הגדול ביותר בו נוכל להשתמש הוא $r = d/2$ מכיוון שבאמצעותו נקבל כדורים משיקים.

2.3. הגדרה ותכונות בסיסיות של E_8

אנו נעסוק באריזה E_8, שהיא אריזת כדורים סימטרית במיוחד במימד $\mathbb{R}^8$.

נציג את הסריג עליו היא מבוססת, Λ_8, ונוכיח מספר תכונות חשובות וייחודיות שלו.

$$\Lambda_8 = \left\{ (x_1, ..., x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \right\}$$

כלומר, הסריג שמכיל את כל הווקטורים שכל מקדמיהם שלמים או שכל מקדמיהם נבדלים בחצי משלם, ושסכומם זוגי.

נוכל גם לראות כי Λ_8 סגור לחיבור, אם נשים לב שכאשר

$$x \in \Lambda_8, y \in \Lambda_8$$

אז $\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \cup \mathbb{Z}^8 \ni x + y$, כי בדיוק אחד מהמקרים הבאים מתקיים:

$$x, y \in \mathbb{Z}^8 \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}^8$$

$$x \in \mathbb{Z}^8 \wedge y \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow x + y \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8$$

$$y \in \mathbb{Z}^8 \wedge x \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow x + y \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8$$

$$x, y \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}^8$$

ומכיוון שסכום זוגיים הינו זוגי,

$$\sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \wedge \sum_{i=1}^{8} y_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i + y_i = \sum_{i=1}^{8} x_i + \sum_{i=1}^{8} y_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$$

האריזה E_8 היא אריזת הסריג המבוססת על Λ_8.

2.3.1. בחירת בסיס עבור Λ_8

מכיוון ש E_8 הינה אריזת סריג, נרצה לפנות להגדרת הסריג על מנת להוכיח את התכונות שידרשו לנו בהמשך. לשם כך, דרוש לנו בסיס.

נשתמש בבסיס הבא, אותו נגדיר ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^8$, $e_1, ..., e_8$:
$B = \{v_1, ..., v_8\}$ כאשר $v_i = e_i - e_{i+1}$ עבור $1 \leq i \leq 6$, $v_7 = e_6 + e_7$ ו- $v_8 = -\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_8)$.

נראה כי זה הוא אכן בסיס אינטגרלי לסריג.

נתחיל בכך שנראה כי כל צירוף אינטגרלי של אברי הבסיס נמצא בסריג. נסמן

$$u = z_1 v_1 + ... + z_8 v_8 = (t_1, ..., t_8) \mid z_i \in \mathbb{Z}$$

ראשית, נשים לב כי תכונת הזוגיות של Λ_8 מתקיימת:

$$z_1(-1+1) + .. + z_6(-1+1) + z_7(1+1) + z_8\left(-\frac{1}{2} * 8\right) = 2z_7 - 4z_8 \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$$

מכיוון ש:

$$\begin{aligned}
t_1 &= z_1 - \frac{1}{2} z_8 \\
t_2 &= z_2 - z_1 - \frac{1}{2} z_8 \\
&\vdots \\
t_5 &= z_5 - z_4 - \frac{1}{2} z_8 \\
t_6 &= z_6 - z_5 + z_7 - \frac{1}{2} z_8 \\
t_7 &= z_7 - z_6 - \frac{1}{2} z_8 \\
t_8 &= -\frac{1}{2} z_8
\end{aligned}$$

אז כאשר $z_8 \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$, נקבל כי $t_i \in \mathbb{Z}$ ולכן $u \in \mathbb{Z}^8$, ואילו אם $z_8 \equiv 1(\operatorname{mod} 2)$, אז $u \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8$, כלומר $u \in \Lambda_8$, כפי שרצינו.

בכיוון השני, יהי $w = (t_1, ..., t_8) \in \Lambda_8$. נראה כי קיימים $z_i \in \mathbb{Z}$ כך ש $w = z_1 v_1 + ... + z_8 v_8$.

נסתמך על אותן משוואות שמצאנו מקודם, ונבחר $z_8 = t_8 * -2$. מיד נקבל $z_1 = t_1 - t_8$, $z_2 = t_2 + t_1 - 2t_8$ כאשר תכונת הסריג מבטיחות כי נקבל שלמים בכל צעד.

נוכל להמשיך לפתור את המשוואות שראינו מקודם, אחת אחרי השניה עד $z_5 = t_5 + t_4 + t_3 + t_2 + t_1 - 5t_8$.

לאחר מכן, נקבל

$$\begin{aligned}
t_6 &= z_6 - (t_5 + ... + t_1 - 5t_8) + z_7 + t_8 \\
t_7 &= z_7 - z_6 + t_8
\end{aligned}$$

נוכל לסכום ולקבל

$$2z_7 = t_1 + ... + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 - 8t_8$$

אנו יודעים כי $\sum_{i=1}^{8} t_i \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$, וכמובן שגם $8t_8$ זוגי, ולכן ישנו z_7 המבוקש, ובאמצעותו נוכל למצוא גם את z_6.

כלומר, מצאנו ייצוג של w באמצעות צירוף אינטגרלי של אברי הבסיס, כפי שרצינו.

2.3.2. מטריצת **Gram** של Λ_8

במקום להוכיח תכונות ישירות באמצעות אברי הבסיס, נוכל להשתמש במטריצת Gram שלו.

קל לראות כי $\langle v_i, v_i\rangle = 2$, וכי $\langle v_i, v_{i+1}\rangle = -1$, מלבד המקרה $\langle v_6, v_7\rangle = 0$.

בנוסף, המכפלה $\langle v_i, v_j\rangle$ מתאפסת בכל מקרה אחר, מלבד $\langle v_5, v_7\rangle = -1$.

כלומר, המטריצה המתאימה הינה

$$\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{1\le i,j\le 8} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

המטריצה כמובן סימטרית, וקל לראות כי היא גם חיובית לחלוטין.

הפולינום האופייני של המטריצה, שהוא

$$t^8 - 16t^7 + 105t^6 - 364t^5 + 714t^4 - 784t^3 + 440t^2 - 96t + 1$$

תמיד חיובי כאשר $t < 0$, מכיוון שאז אין לו איברים שליליים, ולכן נוכל להסיק כי כל האפסים שלו, כלומר הערכים העצמיים של המטריצה, חיוביים ממש, ולכן היא אכן חיובית לחלוטין.

2.3.3. תכונות נוספות של Λ_8

Λ_8 הוא *סריג אינטגרלי* (*integral lattice*), כלומר כל המכפלות הפנימיות בין אברי הבסיס שלו שלמות (כפי שראינו מקודם).

בנוסף, Λ_8 הוא *סריג זוגי* (*even lattice*), כלומר ריבוע האורך של כל ווקטור בו הוא שלם וזוגי. נוכל לראות זאת אם נשים לב שלכל $m_i \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$|m_1v_1 + \ldots + m_8v_8|^2 = 2m_1^2 + \ldots + 2m_8^2 + \sum_{1\le i,j\le 8} 2m_im_j\langle v_i, v_j\rangle$$

אז ממטריצת גראהם שראינו נובע כי גם ריבוע האורך זוגי, ובפרט כי המרחק בין כל שתי נקודות ב- Λ_8 הוא מהצורה $\sqrt{2k}$, ובין שתי נקודות סמוכות הוא $\sqrt{2}$.

מכך נובע כי נוכל לבחור אריזת סריג בעלת $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, אותה נסמן ב- E_8.

צפיפותה, על פי (2.1), מתקבלת על ידי

$$\frac{\mathrm{vol}\left(B^8_{\sqrt{2}/2}\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8)} = \frac{\pi^4}{384\,\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8)}$$

וכל שנותר לנו הוא לחשב את $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8)$ על מנת שנוכל לחשב את צפיפות האריזה.

מתכונות הדטרמיננטה, נקבל כי

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8) = \left|\det\begin{bmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \leftarrow v_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_8 \rightarrow \end{bmatrix}\right|$$

אבל את מטריצת גראהם שמצאנו מקודם נוכל גם לכתוב בתור

$$\begin{bmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \leftarrow v_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow v_8 \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

ולכן

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8) = \sqrt{\left(\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{1\le i,j\le 8}\right)}$$

אבל מהפולינום האופייני אנו יודעים כי

$$\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{1\le i,j\le 8} = 1$$

ולכן

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^8/\Lambda_8) = 1$$

ולמעשה הוכחנו כי הצפיפות של E_8 היא

$$\frac{\pi^4}{384} = 0.2538... \tag{2.2}$$

2.3.4. הדואליות של Λ_8

לבסוף, אנו זקוקים לתכונה אחת נוספת של Λ_8: שהוא יהיה *הסריג הדואלי* (*dual lattice*) של עצמו.

עבור סריג Λ בעל בסיס מסוים $v_1, ..., v_n$ ישנו סריג Λ^*, לו נקרא הסריג הדואלי שהוא בעל הבסיס $v_1^*, ..., v_n^*$ המקיים

$$\langle v_i, v_j^* \rangle = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j, \text{and} \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

זהו הסריג הדואלי, ואם $\Lambda = \Lambda^*$ אז נאמר ש Λ הוא הסריג הדואלי של עצמו.

נוכיח כי Λ_8 הוא כזה באמצעות טענה כללית יותר: כל סריג שמטריצת Gram שלו היא *אוּנִימוֹדוּלָרִית* (*unimodular*), כלומר מטריצה שכל איבריה שלמים ובעלת דטרמיננטה 1 או -1, הוא הדואלי של עצמו.

יהי סריג Λ בעל מטריצה A כזו.

המטריצה המצורפת, $\text{adj}(A)$, מקיימת $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ (מסקנה 4.7.3 בקורס אלגברה לינארית 1).

מכיוון שהיא מבוססת על מינורים של המטריצה המקורית, $\text{adj}(A)$ אינטגרלית, ומכך שהדטרמיננטה של A היא 1 או -1, נקבל כי גם A^{-1} אינטגרלית.

נסמן ב- $M : Z^n \to \mathbb{R}^n$ את ההעתקה הלינארית ביחס לבסיס $B = \{v_1, ..., v_n\}$ של Λ, כלומר

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} := a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

אז M היא מטריצה שעמודותיה הם ווקטורי הבסיס, ומטריצת Gram של Λ היא $A = M^T M$.

על פי הגדרת הסריג,

$$\Lambda = M\mathbb{Z}^n$$

נסמן ב- D את הבסיס של הסריג הדואלי Λ^*.

ישירות מההגדרה נקבל כי $M^T D = I$, כלומר $D = \left(M^T\right)^{-1}$.

אבל שוב מהגדרת הסריג

$$\Lambda^* = D\mathbb{Z}^n = \left(M^T\right)^{-1}\mathbb{Z}^n$$

נוכל להחליף $\left(M^T\right)^{-1} = M\left(M^T M\right)^{-1}$ ולקבל

$$\Lambda^* = M\left(M^T M\right)^{-1}\mathbb{Z}^n = MA^{-1}\mathbb{Z}^n$$

אבל מכיוון ש- A^{-1} אינטגרלית, נקבל כי $A^{-1}\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$.

אבל גם A אינטגרלית, ולכן $A\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$. אז $I\mathbb{Z}^n = A^{-1}A\mathbb{Z}^n \subseteq A^{-1}\mathbb{Z}^n$.

כלומר

$$A^{-1}\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$$

ולכן

$$\Lambda^* = M\mathbb{Z}^n = \Lambda$$

כפי שרצינו להוכיח.

כבר ראינו כי מטריצת Gram של Λ_8 בעלת איברים שלמים וכי הדטרמיננטה שלה היא 1, ולכן נוכל להסיק כי הוא הדואלי של עצמו.

3. שימוש באנליזה הרמונית למציאת חסמים לצפיפות

לאחר שהגדרנו מה היא צפיפות, ואחרי שהגדרנו את אריזת הסריג E_8 ואת התכונות העיקריות שלה, ניגש לבעיה המרכזית בה נעסוק: כיצד ניתן להוכיח מה היא הצפיפות הגבוהה ביותר האפשרית במימד מסוים?

אם נוכל להוכיח כי הצפיפות הגבוהה ביותר האפשרית ב $\mathbb{R}^8$ שווה לצפיפות של E_8, הרי שבכך נוכיח כי היא אריזה אופטימאלית במימד זה.

בעיה זו מקבלת מענה בעבודתם של Cohn ו Elkies, שהוכיחו כי ניתן להשתמש בפונקציות עזר בעלות תכונות מסוימות, אותן נפרט מיד, כדי לחסום את הצפיפות המירבית האפשרית במימד מסוים.

הדבר נראה מפתיע, שכן טיבם של הסריגים הוא שאינם רציפים, ובעית הצפיפות הינה בכלל בעיה גיאומטרית. כיצד אנליזה של פונקציות תוכל לסייע לנו?

התובנה העיקרית נמצאת בקשר הקיים בין פונקציה והתמרת פורייה שלה, באמצעות *נוסחת הסכימה של פואסון*. נציג את עיקרי התיאוריה בחלק הבא, ואז נפנה להוכחת המשפט העיקרי באמצעותה.

3.1. פונקציות שוורץ

אנו נעסוק בפונקציות מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}$ (ולעתים בפונקציות מרוכבות של משתנה ממשי).

פונקציות שוורץ (*Schwartz functions*) הן משפחה של פונקציות אותן נסמן ב- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ או בקיצור, $\mathcal{S}$.

אלו הן כל הפונקציות הניתנות לגזירה אינסוף פעמים, ושמקיימות

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x)\right| < \infty$$

לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, כאשר $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ היא סדרה של α גזירות חלקיות (לפי סדרה כולשהי של משתנים).

כלומר, קבוצת הפונקציות הזו הינה מרחב (במשמעות הרגילה של מרחב פונקציות) הכולל את כל הפונקציות שערכן, והערך של כל נגזרת שלהן, פוחת "מהר מאוד", כלומר מהר יותר מכל פולינום.

התוצאות שנוכיח מתקיימות גם בתנאים מחמירים פחות, אך בכך שנגביל את עצמנו לעיסוק בפונקציות שוורץ נוכל להימנע מקשיים טכנים רבים, ומכיוון שההוכחה של Viazovska, בה יעסקו הפרקים הבאים, הינה בנייה של פונקציות שוורץ - תוצאות אלו יספיקו לנו בהחלט.

3.2. התמרות פורייה ב- $\mathbb{R}^n$ של פונקציות שוורץ

נגדיר את התמרת פורייה של פונקציית שוורץ f כך:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n$$

אנו מבצעים אינטגרציה על המרחב כולו, כאשר $x \cdot \xi$ מסמן את המכפלה הפנימית בין שני הווקטורים.

אנו נשתמש גם בסימון המקובל $f(x) \to g(\xi)$ כדי לציין ש- g היא התמרת פורייה של f.

להתמרת פורייה של פונקציות שוורץ מספר תכונות מעניינות:

תהי $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, אז

1. $f(x+h) \to \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot h}$ כאשר $h \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(x)e^{-2\pi i x\cdot h} \to \hat{f}(\xi + h)$ כאשר $h \in \mathbb{R}^n$.
3. $f(\delta x) \to \delta^{-n}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ כאשר $\delta > 0$.
4. $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) \to (2\pi i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$.
5. $(-2\pi i x)^\alpha f(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha\hat{f}(\xi)$.

נביא את ההוכחות לתכונות 4 ו- 5 למקרה החד מימדי.

תהי $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. אז עבור תכונה 4 נוכל למצוא את $\hat{f}'$ באמצעות אינטגרציה בחלקים. עבור $N \in \mathbb{N}$, נקבל כי

$$\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x = \left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{-N}^{N} + 2\pi i\xi\int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

נוכל לקחת את הגבול כאשר $N \to \infty$, ולקבל כי אכן $f'(x) \to 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$.

עבור תכונה 5, נראה כי $\hat{f}$ גזירה, ונראה כי היא שווה להתמרת פורייה של $-2\pi ixf$.

נראה כי ההפרש ביניהם קטן מכל מספר חיובי, ולכן הנגזרת קיימת והם שווים. נקבל כי

$$\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-2\pi ixf})(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\right]\mathrm{d}x$$

אנו יודעים שגם $f(x)$ וגם $xf(x)$ פוחתות מהר (כי הן פונקציות שוורץ).

יהי $\varepsilon > 0$. אז ישנו $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\int_{|x|\geq N}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$, וכן $\int_{|x|\geq N}|x|\;|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

בנוסף, עבור $|x| \leq N$, מכיוון ש- $e^{-2\pi ixh}$ גזירה (כפונקציה של h) בסביבה של 0 ונגזרת שם היא $-2\pi ix$, נסיק כי קיים h_0, כך שלכל $|h| < h_0$,

$$\left|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\right| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

כלומר, לכל h כזה

$$\left|\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-2\pi ixf})(\xi)\right| \leq \int_{-N}^{N}\left|f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\right]\right|\mathrm{d}x + C\varepsilon \leq C'\varepsilon$$

כלומר, הנגזרת קיימת והיא מתקבלת על ידי התמרת פורייה של $-2\pi ixf(x)$.

משתי התכונות האחרונות נוכל להסיק כי התמרת פורייה מחליפה גזירה בכפל (עד כדי כפל בפולינום פשוט), כלומר $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ **סגור להתמרת פורייה**.

עבור פונקציות שוורץ מתקיימת גם הזהות החשובה הבאה:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{3.1}$$

שהיא *התמרת פורייה ההפוכה*.

3.3. פונקציות רדיאליות

אנו נקרא לפונקציה f *רַדְיָאלִית* (*radial*) אם היא תלויה אך ורק ב $|x|$.

כלומר, אם ישנה פונקציה $f_0(u), u \geq 0$ כך ש $f(x) = f_0(|x|)$.

תכונה חשובה של פונקציות רדיאליות היא שהן מקיימות $\hat{\hat{f}} = f$, כפי שנובע מהתמרת פורייה ההפוכה (3.1):

$$\begin{aligned}\hat{\hat{f}}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot(-y)}\,\mathrm{d}\xi\\ &= f(-y)\\ &= f_0(|-y|) = f_0(|y|) = f(y)\end{aligned}$$

3.4. נוסחת הסכימה של פואסון

כדי שנוכל להפעיל כלים מתחום האנליזה על בעיית הצפיפות, נשתמש בנוסחת הסכימה של פואסון (*Poisson Summation Formula*).

נוסחה זו מביעה את הדואליות שבין סכימת ערכים של פונקציה על סריג, לסכימה של התמרת פורייה שלה על הסריג הדואלי.

נוסחת הסכימה של פואסון טוענת כי עבור $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, מתקיימת הזהות

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) \tag{3.2}$$

כלומר, הן שוות עד כדי כפל בקבוע.

נתחיל מהוכחת התוצאה למקרה החד מימדי.

נוסחת הסכימה של פואסון עבור $\mathbb{R}$ טוענת כי לכל $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \tag{3.3}$$

נסמן

$$F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

מכיוון ש f פוחתת מהר מאוד (במובן שהגדרנו עבור פונקציות שוורץ), הסדרה מתכנסת בהחלט על הישר ולכן הפונקציה רציפה. קל לראות כי הפונקציה החדשה היא 1-מחזורית.

באמצעות פיתוח פורייה נוכל להגיע לפונקציה נוספת, שגם היא 1-מחזורית:

$$F_2(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

ניתן לראות את הקשר לפיתוח פורייה אם נסתכל על פונקציה זו בתור הגרסה הדיסקרטית של

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} \,\mathrm{d}\xi$$

אנו יודעים כי שתי פונקציות זהות אם פיתוח פורייה שלהן זהה.

עבור F_2, המקדם ה-m-י הוא בדיוק $\hat{f}(m)$. עבור F_1, מתקיים

$$\begin{aligned}
a_m &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i m x} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} \,\mathrm{d}y \\
&= \hat{f}(m)
\end{aligned}$$

כאשר החלפת סדר הסכימה והאינטגרציה מותרת כי $f \in \mathcal{S}$.

נסיק כי אכן $F_1 = F_2$, ואת התוצאה הסופית נקבל אם נציב $x = 0$.

ההכללה למימד n מיידית, ונקבל כי

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(x) \tag{3.4}$$

אך אם נתייחס ל- $\mathbb{Z}^n$ בתור סריג, איך נוכל להרחיב את התוצאה עבור סריגים כלליים?

כפי שעשינו בסעיפים הקודמים, נסמן ב- $M : Z^n \to \mathbb{R}^n$ את ההעתקה הלינארית ביחס לבסיס $B = \{v_1, ..., v_n\}$ של Λ. אז M היא מטריצה שעמודותיה הם ווקטורי הבסיס, ו- $\Lambda = M\mathbb{Z}^n$.

ראשית,

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(Mx)$$

כדי שנוכל להשתמש ב- (3.4), דרושה לנו התמרת פורייה של $f(Mx)$.

נסמן $g(x) = f(Mx)$ ומהנוסחה נקבל כי

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x$$

נמשיך לפתח ונקבל

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)e^{-2\pi i\xi\cdot(M^{-1}Mx)}\frac{1}{|\det(M)|}|\det(M)|\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{|\det(M)|}\int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)e^{-2\pi i\xi\cdot(M^{-1}Mx)}|\det(M)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

אנחנו יודעים ש- $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) = |\det(M)|$, ונוכל לבצע החלפת משתנים $u = Mx$ ולקבל

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i\xi\cdot(M^{-1}u)}\,\mathrm{d}u$$

נשתמש בזהות $\xi\cdot(M^{-1}u) = \left(M^{-1}\right)^T\xi\cdot u$, ונקבל

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i(M^{-1})^T\xi\cdot u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\hat{f}\left(\left(M^{-1}\right)^T\xi\right)$$

נציב חזרה ונקבל כי

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(Mx) \underbrace{=}_{(3.4)} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}\left(\left(M^{-1}\right)^T\xi\right)$$

אבל אם נסמן ב- D את הבסיס של הסריג הדואלי Λ^*, אז כפי שראינו ב- 2.3.4, $D = \left(M^T\right)^{-1}$ ולכן $\Lambda^* = D\mathbb{Z}^n = \left(M^T\right)^{-1}\mathbb{Z}^n$.

כלומר

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\sum_{y\in\Lambda^*}\hat{f}(y)$$

כמבוקש.

3.5 חסמים המתקבלים מתכנון לינארי

ברשותנו כל הכלים הדרושים להוכחת המשפט המרכזי בעבודתם של Cohn ו Elkies.

תהי $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ויהי מספר ממשי $0 < r \in \mathbb{R}$, כך ש:

1. $f(0) = \hat{f}(0) > 0$
2. $\hat{f}(y) \geq 0$ לכל $y \in \mathbb{R}^n$
3. $f(x) \leq 0$ לכל $|x| \geq r$

אז הצפיפות המרבית ב- $\mathbb{R}^n$ היא לכל היותר $\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)$.

נוכיח את הטענה תחילה עבור אריזות סריג, ולאחר מכן נרחיב את התוצאה לאריזות כלליות.

יהי Λ סריג ב- $\mathbb{R}^n$. נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות כי Λ בעל אורך וקטור מינימאלי r, שכן צפיפות אריזת הסריג תישאר זהה אם נרחיב או נכווץ את הסריג (ואיתו את אורך הווקטור המינימאלי) בסקלר. אז ישנה אריזת סריג המבוססת עליו ומורכבת מכדורים ברדיוס $r/2$, וכפי שראינו ב- (2.1), נובע מכך שהצפיפות שלה היא

$$\frac{\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

ולכן, אנו נרצה להוכיח כי $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$.

ע"פ נוסחת הסכימה של פואסון (3.2),

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$$

אבל, אם נביע את הסכום השמאלי כך

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) = f(0) + \sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} f(x)$$

ונזכור כי מלבד $x = 0$, לכל $x \in \Lambda$ מתקיים כי $|x| \geq r$, אז משילוב דרישות (1) ו- (3) נוכל להסיק כי

$$\sum_{x\in\Lambda} f(x) \leq f(0)$$

באופן דומה, נוכל לחסום את הסכום הימני

$$\hat{f}(0) \leq \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$$

כלומר,

$$\frac{\hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y)$$

ונקבל כי

$$\frac{\hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \leq f(0)$$

אבל דרשנו כי $f(0) = \hat{f}(0)$ ולכן

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$$

כפי שרצינו להוכיח.

3.5.1. הרחבה לאריזות מחזוריות ואריזות כלליות

הוכחנו כי כאשר ישנה פונקציה המקיימת התנאים, אין אריזת **סריג** בעלת צפיפות גדולה יותר. אך מה לגבי אריזות כלליות?

כל אריזה כללית ניתנת לקירוב על ידי אריזה **מחזורית**. נוכל לקחת את כל הכדורים בתיבה גדולה ככל שנרצה ולחזור עליה עבור המרחב כולו, והצפיפות שתאבד בתהליך תהיה זניחה.

אם כך, מספיק שנוכיח את הטענה עבור אריזות מחזוריות. אם נראה כי גם עבורן מתקיים החסם, אז לא ייתכן כי ישנה אריזה כללית בעלת צפיפות גבוהה יותר (שכן אז היינו יכולים לקרבה על ידי אריזה מחזורית מעבר לחסם שמצאנו).

תהי אריזה מחזורית של כדורים שמרכזיהם נמצאים על הזזות של הסריג Λ באמצעות N הווקטורים $t_1, \ldots, t_N$.

כמקודם, נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות כי רדיוס הכדורים הינו $r/2$. צפיפותה של אריזה זו תהיה, אם נתבסס על (2.1),

$$\frac{N\,\mathrm{vol}\left(B_{r/2}^n\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

כלומר, עלינו להוכיח כי $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq N$.

מקודם, הפעלנו את הפונקציה על כל הנקודות שעל הסריג וסכמנו את התוצאה. הפעם, הסכום יקבל את הצורה הבאה:

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{x\in\Lambda} f\left(t_j - t_k + x\right)$$

כזכור, התמרת פורייה מחליפה הזזה בכפל, ולכן אם נשתמש שוב בנוסחת הסכימה של פואסון (3.2) נקבל

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{x\in\Lambda} f\left(t_j - t_k + x\right) = \sum_{j,k=1}^{N} \left[\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) e^{2\pi i y\cdot\left(t_j - t_k\right)}\right]$$

נוכל להכניס את הטור הסופי ולהפרידו כך: $\sum_{j,k=1}^{N} e^{2\pi i y\cdot t_j} \cdot e^{-2\pi i y\cdot t_k} = \left(\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i y\cdot t_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{N} e^{-2\pi i y\cdot t_k}\right)$.

אבל אם נשתמש בתכונות המשלים המרוכב נקבל כי

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{x\in\Lambda} f\left(t_j - t_k + x\right) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) \left|\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i y\cdot t_j}\right|^2$$

בדומה לדרך בה פעלנו מקודם, משילוב דרישות (1) ו- (3) נוכל להסיק כי

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{x\in\Lambda} f\left(t_j - t_k + x\right) \leq N f(0)$$

ואת הסכום הימני נוכל לחסום כך:

$$N^2 \hat{f}(0) \leq \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) \left|\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i y\cdot t_j}\right|^2$$

ונקבל כי

$$\frac{N^2 \hat{f}(0)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \leq N f(0)$$

ומכיוון ש $f(0) = \hat{f}(0)$, אז

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq N$$

כפי שרצינו להוכיח.

3.6. האפסים של הפונקציה ומסקנות נוספות

לפני שנפנה לחיפוש אחר פונקציות אשר יתאימו לתנאים המפורטים בסעיף 3.5, נוכל לשים לב כי ישנן מספר תכונות כללית שיעזרו לנו בחיפוש.

ראשית, כל התנאים על הפונקציה המבוקשת הינם לינארים ונשמרים תחת סיבוב.
לכן, נוכל לחשוב על f בתור פונקציה *רדיאלית*, כלומר פונקציה של משתנה יחיד ($|x|$).

תכונה נוספת, אותה נוכל להסיק מהדרך בה הוכחנו את הטענה, היא שפונקציה העונה על התנאים חייבת לקבל אפסים על הסריג (מלבד בראשית) - וכך גם התמרת פורייה שלה.

ננסח ונוכיח: תהי f פונקציה כזו, ויהי Λ סריג ב- $\mathbb{R}^n$ בעל אורך ווקטור מינימאלי r.

אז צפיפות אריזת הסריג Λ שווה לחסם $\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)$ אם ורק אם

1. $x \in \Lambda/\{0\} \Rightarrow f(x) = 0$
2. $y \in \Lambda^*/\{0\} \Rightarrow \hat{f}(y) = 0$

נתחיל בכך שנקבל מ- (2.1) כי הצפיפות שווה לחסם אם ורק אם

$$\frac{\mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} = \mathrm{vol}\left(B^n_{r/2}\right)$$

כלומר, $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) = 1$.

השתמשנו בנוסחת הסכימה של פואסון (3.2) כי לקבל את השוויון

$$f(0) + \sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} f(x) = \sum_{x\in\Lambda} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*} \hat{f}(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\hat{f}(0) + \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*, y\neq 0} \hat{f}(y)$$

בכיוון אחד, אם $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) = 1$ אז נקבל כי

$$f(0) + \sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{y\in\Lambda^*, y\neq 0} \hat{f}(y)$$

אבל דרישה (1) ב- 3.5 הינה ש $f(0) = \hat{f}(0)$ ולכן

$$\sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} f(x) = \sum_{y\in\Lambda^*, y\neq 0} \hat{f}(y)$$

ומדרישות (2) ו- (3) ב 3.5 נקבל מיד כי כל האיברים בשני הסכומים הינם 0.

הכיוון השני מידי, שכן נוכל להציב את האפסים ולקבל

$$f(0) + \sum_{x\in\Lambda, x\neq 0} 0 = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\hat{f}(0) + \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y\in\Lambda^*, y\neq 0} 0$$

ובצירוף דרישה (1) ב- 3.5 נקבל

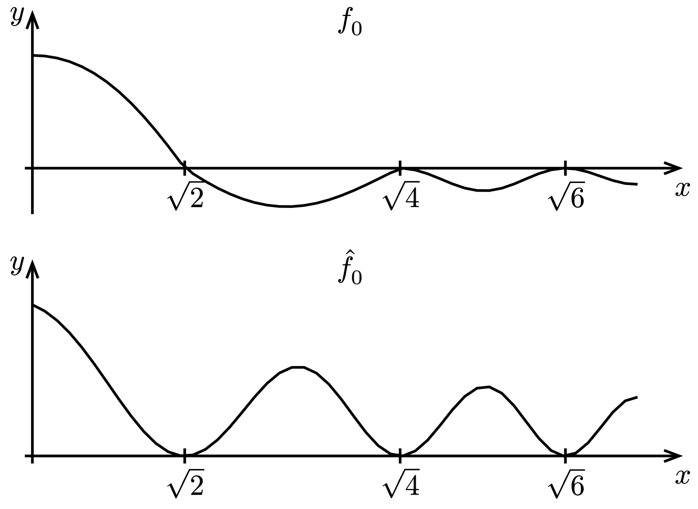
$$1 = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \Rightarrow \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) = 1$$

מכיוון שידוע לנו כי הפונקציה נשארת לא חיובית עבור $|x| \geq r$, נוכל להסיק כי אם f היא פונקציית הקסם הדרושה שלנו, אז היא מתאפסת על הסריג E_8 (מלבד בראשית).

מכיוון שנוכל לחשוב עליה בתור פונקציה רדיאלית $f_0(x)$, נסיק כי יש לה אפסים בכל $x = \sqrt{2k}, k = 1, 2, ...$ וכולם מסדר זוגי מלבד במקרה של $k = 1$, שם נצפה לאפס מסדר אי זוגי.

באופן דומה ומכיון ש E_8 צמוד לעצמו, נסיק כי $\hat{f}_0$ מקבלת אפסים מסדר זוגי לכל $y = \sqrt{2k}, k = 1, 2, ...$.

נוכל אפילו לצייר (באופן סכמתי), את הצורה המצופה של הפונקציה ושל התמרת פורייה שלה:



תרשים 3.1: תיאור סכמתי של הפונקציות

4. תבניות מוֹדוּלָרִיוֹת

על פניו, התקדמנו מאוד: לא רק שאנו בקיאים בהגדרות ובהוכחות הנדרשות, יש לנו גם "מתכון" למציאת הפונקציה המבוקשת: עלינו למצוא פונקציה של משתנה יחיד, שמקבלת אפסים בכל הסריג E_8, וכך גם התמרת הפורייה שלה.

אולם, בעיה זו מתבררת כקשה מאוד.

בעוד שניתן לבנות פונקציה בעלת אפסים במקומות הנדרשים, וניתן לבנות פונקציה שהתמרת פורייה שלה מקבלת אפסים כאלו, אין דרך כללית או פשוטה לבנות פונקציה המקיימת את שתי הדרישות בו זמנית.

עם זאת, ישנו פישוט נוסף שנוכל לבצע כבר עתה. כפי שראינו בסעיף 3.3, לכל פונקציה רדיאלית מתקיים $\hat{\hat{f}} = f$.

לפיכך, לכל f המקיימת את התנאים הנדרשים, נוכל לקחת

$$g_{+1} = \frac{f + \hat{f}}{2}, \qquad g_{-1} = \frac{f - \hat{f}}{2}$$

ואם נפעיל עליהן את התמרת פורייה, נקבל

$$\widehat{g_{+1}} = \frac{\hat{f} + f}{2} = g_{+1}, \qquad \widehat{g_{-1}} = \frac{\hat{f} - f}{2} = -g_{-1}$$

פונקציה עצמית של התמרת פורייה היא פונקציה המקיימת עבור סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ כולשהו $\hat{f} = \alpha f$.

אז g_{+1} היא פונקציה עצמית עם $\alpha = 1$, ו- g_{-1} היא פונקציה עצמית עם $\alpha = -1$.

שתיהן מקבלות את השורשים הנדרשים בדיוק כמו f, ונוכל לקבל באמצעותן חזרה את f כך:

$$f = g_{+1} + g_{-1} \Rightarrow \hat{f} = g_{+1} - g_{-1}$$

הבעיה עדיין קשה מאוד, אבל שתי הפונקציות החדשות בלתי תלויות אחת בשניה, ולכן נוכל לבנות כל אחת מהן בנפרד.

4.1. התמרת לפלס

העיסוק שלנו בתבניות מודולריות, להן סגולות תיאורטיות במגוון רחב של תחומים, קשור לחיפוש שלנו אחר אבני בניין לפונקציה המיוחדת אותה אנו מחפשים באמצעות *התמרת לפלס של גאוסיאנים*.
הגאוסיאן (*Gaussian*), $f(x) = e^{-t\pi|x|^2}$, הינה פונקציה המקיימת

$$e^{-t\pi|x|^2} \to t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2/t}$$

מכיוון שקל לנו מאוד לחשב התמרת פורייה של גאוסיאן, נוכל לבחור פונקציה פשוטה $g(t)$ כולשהי, ולהשתמש בה על מנת לבחור צירוף של גאוסיאנים:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g(t)\,\mathrm{d}t$$

הנוסחה הנ"ל נקראת *התמרת לפלס* של הפונקציה g.
כל עוד g פשוטה למדי, נוכל לנצל את תכונות הגאוסיאן ולקבל את התמרת פורייה של f באמצעות החלפה פשוטה:

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2/t} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi|y|^2 t} t^{\frac{n}{2}-2} g(1/t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.1}$$

כלומר, עבור $\varepsilon = \pm 1$, אם מתקיים

$$g(1/t) = \varepsilon t^{2-\frac{n}{2}} g(t)$$

אז $\hat{f} = \varepsilon f$, ולכן אנו מחפשים פונקציות המקיימות משוואה כזו.

4.2. מבוא לתבניות מוֹדוּלָרִיוֹת

תבניות מוֹדוּלָרִיוֹת (*modular forms*) הן משפחה של פונקציות המקיימות משוואות פונקציונאליות מסויימות.

אנו נתמקד במספר קטן של תבניות שימושיות במיוחד למקרה שלנו.

נסמן ב- $\mathfrak{h}$ את חצי המישור העליון, כלומר

$$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

עבור פונקציה F ו- $k \in \mathbb{Z}$, אנו נגיד ש- F היא *תבנית מוֹדוּלָרִית חלשה* בעלת משקל k
(*weakly modular form of weight k*), אם היא מקיימת

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k F(z)$$

לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

אנו נקרא ל- F *תבנית מוֹדוּלָרִית* (*modular form*) אם בנוסף לכך היא הולומורפית ב- $\mathfrak{h}$ וחסומה כאשר $\operatorname{Im} z \to \infty$.

4.3. פונקציית תטא של סריג - $\Theta_\Lambda(z)$

לכל סריג Λ נוכל להגדיר פונקציה, לה נקרא פונקציית תטא, כך

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i |x|^2 z}$$

פונקציה זו מתכנסת כאשר $\operatorname{Im} z > 0$ ומגדירה פונקציה אנליטית ב- $\mathfrak{h}$.

לפונקציה זו תכונה חשובה:

לכל סריג Λ ב- $\mathbb{R}^n$, מתקיים

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \left(\frac{i}{z}\right)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z)$$

לכל $z \in \mathfrak{h}$.

נוכיח זאת באמצעות נוסחת הסכימה של פואסון על הפונקציה הפנימית, $e^{-t\pi|x|^2}$.

כפי שראינו מקודם, פונקציה זו, שהיא הגאוסיאן, מקיימת

$$e^{-t\pi|x|^2} \to t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2/t}$$

נוכל לבצע המשכה אנליטית לפונקציה זו, ולקבל את אותה התוצאה עבור $t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} t > 0$.

נוסחת הסכימה של פואסון (3.2) נותנת לנו

$$\sum_{x \in \Lambda} e^{-t\pi|x|^2} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2/t}$$

נציב $z = it$, אז $t = -iz$ ונקבל

$$\sum_{x \in \Lambda} e^{zi\pi|x|^2} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} (-iz)^{-\frac{n}{2}} e^{\pi|y|^2/zi}$$

נוכל לפשט את הגורם הראשון בסכום הימני:

$$(-iz)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{n}{2}}$$

בנוסף, אם נציב $-\frac{1}{z}$ ב Θ_{Λ^*}, נקבל

$$\Theta_{\Lambda^*}\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{y\in\Lambda^*} e^{-\pi i\frac{|y|^2}{z}} = \sum_{y\in\Lambda^*} e^{\pi|y|^2/zi}$$

נציב בחזרה ונקבל

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}\left(\frac{i}{z}\right)^{n/2}\Theta_{\Lambda^*}(-1/z)$$

כפי שרצינו להוכיח.

אנו נשתמש בפונקציות תטא הבאות, המוגדרות על הסריג $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\theta_{00}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}\\ \theta_{01}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left((-1)^n e^{\pi i n^2 z}\right)\\ \theta_{10}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}\end{aligned} \tag{4.2}$$

הן מקיימות כי

$$\begin{aligned}z^{-2}\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{z}\right) &= -\theta_{00}^4(z)\\ z^{-2}\theta_{01}^4\left(-\frac{1}{z}\right) &= -\theta_{10}^4(z)\\ z^{-2}\theta_{10}^4\left(-\frac{1}{z}\right) &= -\theta_{01}^4(z)\end{aligned}$$

וכן

$$\begin{aligned}\theta_{00}^4(z+1) &= \theta_{01}^4(z)\\ \theta_{01}^4(z+1) &= \theta_{00}^4(z)\\ \theta_{10}^4(z+1) &= -\theta_{10}^4(z)\end{aligned}$$

4.4. טור Eisenstein - E_k

טור Eisenstein הינו פונקציה אותה נגדיר כך

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

כאשר ζ היא פונקצית זטא של רימן ($\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$).

אומנם ישנה חפיפה בסימון בין האריזה E_8 לבין E_k כאשר $k = 8$, אך למזלנו נשתמש אך ורק ב $k \in \{2, 4, 6\}$, ולכן נרשה לעצמנו להיצמד לסימונים המקובלים ולא להגדיר סימון שונה.

לכל k זוגי וגדול מ-2, נוכל לקבל את הזהויות

$$E_k(z+1) = E_k(z), \quad E_k(-1/z) = z^k E_k(z) \tag{4.3}$$

על ידי הצבה פשוטה.

ובפירוט:

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m(z+1)+n)^k} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+m+n)^k} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left(m\left(-\frac{1}{z}\right)+n\right)^k} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left(\frac{nz-m}{z}\right)^k} = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{z^k}{(nz-m)^k} = z^k \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

בהתאם להגדרות בתחילת הפרק, E_k הינן תבניות מדולריות ממשקל k, כאשר $k > 2$.

עבור $k = 2$, אנו נתקלים בבעיה: הסכום מתכנס *בתנאי* ולא *בהחלט*. הסתמכנו על התכנסות בהחלט על מנת שנוכל לשנות את סדר הסכימה של הטור, ובמקרה הזה לא נוכל לעשות זאת.

נוכל לבחור להגדיר את סדר הסכימה כך:

$$\begin{aligned} E_k(z) &= \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^k} + \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{m\neq 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \end{aligned} \tag{4.4}$$

וכמובן שהתוצאות הקודמות ימשיכו להתקיים כאשר $k > 2$.

עבור $k = 2$, נוכל לקבל שוב באמצעות הצבה את הזהות

$$E_2(z+1) = E_2(z)$$

אך המקבילה של הזהות

$$E_k(-1/z) = z^k E_k(z)$$

תקבל צורה מעט שונה:

$$E_2(-1/z) = z^2 E_2(z) - 6iz/\pi \tag{4.5}$$

אנו נאמר ש- E_2 היא *תבנית כְּמוֹ-מוֹדוּלָרִית* (*quasimodular form*) ממשקל 2.

נוכיח משוואה זו.

4.4.1. מציאת משוואה פונקציונאלית ל E_2

אם נסתכל על הטור המקורי שהגדרנו, עבור $k = 2$ היינו מקבלים את הטור

$$\frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2}$$

כדי לפשט חלק מהחישובים בהמשך, נשתמש בנרמול הבא:

$$G_2(z) = \zeta(2) E_2(z)$$

מכיוון ש $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, נקבל כי $E_2(z) = \frac{6}{\pi^2} G_2(z)$.

הטור אומנם אינו מתכנס בהחלט, אך הוא מאוד קרוב לכך. כל כך קרוב, למעשה, שלכל $\varepsilon > 0$, נוכל לסמן

$$G_{2,\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2 \ |mz+n|^{2\varepsilon}}$$

ולקבל טור מתכנס בהחלט. הפונקציה החדשה מקיימת את המשוואה

$$G_{2,\varepsilon}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 \ |cz+d|^{2\varepsilon} \ G_{2,\varepsilon}(z)$$

אנו נראה מיד שהגבול $\lim_{\varepsilon\to 0} G_{2,\varepsilon}(z)$ קיים, וכי

$$G_2^*(z) := \lim_{\varepsilon\to 0} G_{2,\varepsilon}(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{2\,\mathrm{Im}(z)}$$

מכיוון ש G_2^* מתנהגת בדומה לתבנית מודלרית ממשקל 2, נקבל כי

$$G_2^*\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 G_2^*(z)$$

ובפרט,

$$G_2(-1/z) - \frac{\pi}{2\,\mathrm{Im}(-\frac{1}{z})} = z^2 \left[G_2(z) - \frac{\pi}{2\,\mathrm{Im}(z)}\right]$$

אבל אם נסמן $z = x + iy$, נוכל לחשב כי $\mathrm{Im}(-1/z) = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

כלומר

$$G_2(-1/z) - \frac{\pi(x^2+y^2)}{2y} = z^2 \left[G_2(z) - \frac{\pi}{2y}\right]$$
$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) + \frac{\pi}{2y}(x^2+y^2-z^2)$$
$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) + \frac{\pi}{2y}(-2xyi+2y^2)$$
$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) - \pi i z$$

ולכן גם

$$E_2(-1/z) = z^2 E_2(z) - 6iz/\pi$$

כפי שרצינו.

נותר לנו להוכיח את קיום הגבול וערכו.

נתחיל בכך שנגדיר את G_2 ישירות באמצעות הטור מנוסחה (4.4), ולא באמצעות E_2:

$$G_2(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2}$$

נגדיר פונקצית עזר $I_\varepsilon(z)$ לכל $z\in\mathfrak{h}$ ו- $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ כך:

$$I_\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+t)^2|z+t|^{2\varepsilon}}\,\mathrm{d}t$$

אז לכל $\varepsilon > 0$ נוכל לרשום

$$\begin{aligned}G_{2,\varepsilon} - \sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(mz) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}\\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(mz+n)^2\ |mz+n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1}\frac{1}{(mz+t)^2|mz+t|^{2\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

את הביטוי בסוגריים המרובעים נוכל להעריך באמצעות משפט ערך הביניים: מכיוון שלכל פונקציה גזירה, $f(t)-f(n)$ חסום ב- $n\le t\le n+1$ על ידי $\max_{n\le u\le n+1}|f'(u)|$, נוכל להסיק כי הוא $O(|mz+n|^{-3-2\varepsilon})$.

אז הסכומים בצד הימני של המשוואה מתכנסים בהחלט, ומקומית גם במידה שווה. לכן הגבול קיים כאשר $\varepsilon\to 0$, ואם נחליף את ε ב-0 נקבל בדיוק את G_2:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(mz+n)^2} - \int_n^{n+1}\frac{1}{(mz+t)^2}\,\mathrm{d}t\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(mz+n)^2} - 0\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2}\right)\\ &= G_2(z)\end{aligned}$$

מצד שני, עבור $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x+iy) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+iy+t)^2|x+iy+t|^{2\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+iy+t)^2\left((x+t)^2+y^2\right)^{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

נוכל להחליף את t ב $u=t+x$, ולקבל, לאחר שינוי שם המשתנה חזרה, כי

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t+iy)^2\left(t^2+y^2\right)^{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t$$

אז נוכל להוציא את y בתור גורם משותף, לבצע החלפת משתנים $u=\frac{t}{y}\Rightarrow u'=\frac{1}{y}$ ולקבל (לאחר שינוי שם המשתנה) כי

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x+iy) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2\left(\frac{t}{y}+i\right)^2 y^{2\varepsilon}\left(\frac{t^2}{y^2}+1\right)^{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^{2+2\varepsilon}}\frac{1}{(t+i)^2\left(t^2+1\right)^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y^{1+2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t+i)^2\left(t^2+1\right)^{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

אם נסמן

$$I(\varepsilon) = I_\varepsilon(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+i)^2(t^2+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}t$$

נקבל כי

$$I_\varepsilon(x+iy) = \frac{I(\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}}$$

נשים לב שעבור $I(0)$, נקבל כי

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+i)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t+i}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

וכי עבור $I'(0)$, נוכל למצוא את $I'(\varepsilon)$ על ידי

$$\begin{aligned} I'(\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+i)^2(t^2+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{(t+i)^2(t^2+1)^\varepsilon}\right]\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1+t^2)}{(i+t)^2(1+t^2)^\varepsilon}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

אז

$$I'(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(t^2+1)}{(t+i)^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1+\log(t^2+1)}{t+i} - \frac{1}{\tan(t)}\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\pi$$

נוסיף לכך את העבודה כי $\zeta(1+2\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} + O(1)$, ונסיק כי

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(\varepsilon)\zeta(1+2\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}2\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I'(0)}{2\varepsilon\cdot 2y^{1+2\varepsilon}\log(y) + 2y^{1+2\varepsilon}} \\ &= -\frac{\pi}{2y} \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\left[G_{2,\varepsilon}(z) - \sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(mz)\right] &= G_2(z) \\ G_2^*(z) - \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{I(\varepsilon)}{(my)^{1+2\varepsilon}} &= G_2(z) \\ G_2^*(z) - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+2\varepsilon}} &= G_2(z) \\ G_2^*(z) - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\varepsilon)\zeta(1+2\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}} &= G_2(z) \\ G_2^*(z) + \frac{\pi}{2y} &= G_2(z) \end{aligned}$$

ולכן $G_2^*(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{2\,\mathrm{Im}(z)}$, כפי שרצינו להוכיח.

4.4.2. פיתוח פורייה של E_k

במקרה הכללי, לפונקציה 1-מחזורית ישנו פיתוח פוריה בעל הצורה הבאה:

$$g(z) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

נמשיך מכאן והלאה לסמן $q = e^{2\pi i z}$.

כדי למצוא פיתוח פורייה ל- (4.4), נשתמש בזהות הבאה:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}, \;\; z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \tag{4.6}$$

את הסכום משמאל, המתכנס בתנאי, נפרש בתור הגבול כאשר $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \left(\frac{1}{z+n}\right)$.

הפונקציה מימין הינה 1-מחזורית, ופיתוח פורייה שלה מתקבל על ידי

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi i \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = -\pi i \frac{1+q}{1-q} = -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} q^r \right)$$

אם נגזור את (4.6) איבר-איבר $k-1$ פעמים נקבל (לאחר חילוק ב- $(-1)^{k-1}(k-1)!$) כי

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{\pi}{\tan(\pi z)} \right)$$

אז נוכל להציב ולקבל (שוב לאחר גזירה איבר-איבר) כי

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^r$$

נשים לב כי זהות זו מתקיימת לכל $z \in \mathfrak{h}, k \geq 2$.

נציב בחזרה ב- (4.4) ונקבל את פיתוח פורייה הבא:

$$\begin{aligned} E_k(z) &= 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^{mr} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^m \\ &= 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^m \end{aligned} \tag{4.7}$$

כאשר $\sigma_{k-1}(m)$ היא פונקציה המחזירה את סכום המחלקים של m, כאשר כל אחד מהם מועלה בחזקת $k-1$.

4.4.3. שימושים ל- E_k

נציג עתה את j, הנקראת גם *elliptic j-invariant*. זו היא תבנית מודולרית בעלת התכונה הבסיסית

$$j(-1/z) = j(z)$$

היא מוגדרת כך

$$j = \frac{1728E_4^3}{E_4^3 - E_6^2} \tag{4.8}$$

במבט ראשון, הביטוי נראה משונה מאוד, מדוע לבחור שבר המורכב מ"פולינום" של תבניות מודולריות?

אבל, אם נבחן את התכונות של E_k שראינו ב- (4.3), ובפרט הזהות $E_k(-1/z) = z^k E_k(z)$, נקבל כי אכן

$$j(-1/z) = \frac{1728E_4^3\left(-\frac{1}{z}\right)}{E_4^3\left(-\frac{1}{z}\right) - E_6^2\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1728z^{12}E_4^3(z)}{z^{12}E_4^3(z) - z^{12}E_6^2(z)} = j(z)$$

כלומר, j היא אכן אינווריאנטית במובן זה. כמובן, באופן מיידי נוכל לקבל גם כי $j(z) = j(z+1)$.

בזכות הפיתוח, מתבררים תפקידיהם של ה- E_k-ים השונים, וכן החזקות הספציפיות שנבחרו עבורם. מיד גם נראה מהיכן מגיע הקבוע 1728 במונה.

4.4.4. שימוש בפיתוח פורייה של E_k

אם נשתמש בפיתוח פורייה שראינו ב- (4.7), נקבל כי

$$\begin{aligned} E_4(z) &= 1 + \frac{2}{\zeta(-3)}(\sigma_3(1)q^1 + \sigma_3(2)q^2 + ...) \\ &= 1 + \frac{2}{\frac{1}{120}}(1 \cdot q^1 + 9 \cdot q^2) \\ &= 1 + 240q + 2160q^2 + ... \end{aligned} \tag{4.9}$$

באופן דומה, נקבל כי

$$\begin{aligned} E_6 &= 1 - 504q - 16632q^2 - ... \\ E_2 &= 1 - 24q - 72q^2 - ... \end{aligned} \tag{4.10}$$

באמצעות פיתוחים אלו נוכל גם לחשב את הפיתוחים של חזקות שונות של E_k, למשל:

$$\begin{aligned} E_4^2 &= \left(1 + 240q + 2160q^2 + ...\right)^2 = 1 + 480q + ... \\ E_4^3 &= 1 + 720q + ... \\ E_6^2 &= 1 - 1008q + ... \end{aligned} \tag{4.11}$$

הצירוף $E_4^3 - E_6^2$ שימושי בפני עצמו. את פיתוח פורייה שלו נקבל מיד על ידי

$$E_4^3 - E_6^2 = 1728q + ...$$

נוכל לנרמל אותו ולסמנו בתור

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$$

כלומר,

$$j(z) = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

לבסוף, נוכל להשתמש בכלי אוטומאטי על מנת לקבל גם פיתוח עבור j, לכל חזקה שנרצה:

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856256q^4 + O(q^5) \tag{4.12}$$

נרצה גם למצוא נוסחה אסימפטוטית עבור המקדם a_n של תבנית מודולרית.

הנוסחה עצמה מורכבת (ושונה מעט בין תת משפחות של תבניות מודולריות) ולא נביאה כאן, אך נשתמש ביכולת לחסום את המקדמים בשלב מאוחר יותר על מנת למצוא קירובים טובים מספיק (כלומר, בעלי שגיאה חסומה קטנה מספיק).

אם זאת, נבחן מקרה פשוט במיוחד.

מ- (4.7) נוכל להסיק כי כאשר $n \geq 1$, המקדם ה- n בפיתוח פורייה של E_k מקיים $a_n = O(n^{k-1})$,
וזאת מכיוון ש- $n^{k-1} \leq \sigma_{k-1}(n) < \zeta(k-1)n^{k-1}$.

אז לדוגמה, המקדם ה- n בפיתוח פורייה של E_2 מקיים, כאשר $n \geq 1$,

$$\left|c_{E_2(z)}(n)\right| \leq C_1 n$$

ראינו כבר כי $c_{E_2(z)}(0) = 1$, ולכן

$$|E_2(z)| = \left|1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{E_2(z)}(n)e^{2\pi inz}\right| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 n\left|e^{2\pi inz}\right| = 1 + C_1\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi n\operatorname{Im}(z)}$$

אז לכל $\operatorname{Im}(z) > 0$ התור מתכנס ו-

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi n\operatorname{Im}(z)} = \frac{e^{2\pi\operatorname{Im}(z)}}{\left(1 - e^{2\pi\operatorname{Im}(z)}\right)^2}$$

אז גם

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2\pi\operatorname{Im}(z)} &= e^{-2\pi\operatorname{Im} z} + \sum_{n=2}^{\infty} ne^{-2\pi n\operatorname{Im}(z)} \\
&= e^{-2\pi\operatorname{Im} z} + \frac{e^{-2\pi\operatorname{Im}(z)}\left(2e^{2\pi\operatorname{Im}(z)} - 1\right)}{\left(e^{2\pi\operatorname{Im}(z)} - 1\right)^2} \\
&= e^{-2\pi\operatorname{Im} z}\left(1 + \frac{2e^{2\pi\operatorname{Im}(z)} - 1}{\left(e^{2\pi\operatorname{Im}(z)} - 1\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

וכאשר $\operatorname{Im}(z) > 1/2$ ניתן לחסום את הביטוי בסוגריים ללא תלות ב- z, ולכן גם

$$|E_2(z)| \leq 1 + C_2 e^{-2\pi\operatorname{Im} z} \tag{4.13}$$

5. הפונקציה של Viazovska

5.1. בניה של פונקציה בעלת שורשים מתאימים

ראינו בפרק הקודם כי תבניות מודולריות, בשילוב עם התמרת לפלס, מתאימות לחיפוש שלנו אחר פונקציות עצמיות של התמרת פורייה.

אך כיצד נוכל לבנות פונקציה בעלת השורשים המתאימים? דרך אחת וישירה מאוד היא באמצעות כפל בפונקציה פשוטה המקבלת שורשים דומים, וזו הדרך בה הצליחה Viazovska להוכיח את קיומן של הפונקציות הנדרשות.

הפונקציה $\sin^2(\pi|x|^2/2)$ מקבלת אפסים מסדר שני לכל $x = \sqrt{2k}, k = 1, 2, \ldots$. כפי שראינו בתרשים 3.1 אלו הם כמעט האפסים בהם אנו מעוניינים, מלבד אפס לא רצוי מסדר רביעי עבור $x = 0$, והאפס עבור $x = \sqrt{2}$ שהינו מסדר שני ולא מסדר ראשון (או מסדר אי זוגי אחר). אבל אלו הן בעיות הניתנות (כמסתבר) לגישור.

אם ניקח את התמרת לפלס מהסעיף הקודם, נקבל תבנית שתוכל להתאים לשתי הפונקציות העצמיות אותן אנו מחפשים:

$$\sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

נשים לב שעל מנת שנוכל להשתמש בתבנית זו, לא מספיק שרק נמצא פונקציות עצמיות: עלינו גם לפצות על השורשים הלא מתאימים וגם לוודא כי הפונקציה הסופית מקיימת את החסמים המתאימים מסעיף 3.5.

5.2. תנאים לפונקציות עצמיות מתאימות

נתחיל בחיפוש אחר הפונקציה העצמית בעלת הערך העצמי 1, כלומר, אם נניח כי יש לנו פונקציה:

$$a(x) = \sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g_0(t)\,\mathrm{d}t$$

אנחנו רוצים לדעת מתי $\hat{a} = a$. בתור התחלה, נניח כי $|x| > \sqrt{2}$, כי שם התנהגות הפונקציה צריכה להיות פשוטה יותר.

חשוב לזכור, שאנחנו מחפשים תנאים *שאינם הכרחיים*. לא דרושים לנו כלים לאפיון *כל* הפונקציות שיכולות לשמש להוכחת החסם, אלא דוגמה לפונקציה אחת כולשהי. ננסה לבצע ניחושים מושכלים על מנת לצמצם את "איזור החיפוש", ונזכור באילו הנחות השתמשנו כדי להגיע לשם.

נתחיל בכך שננסה להתקרב לצורה של התמרת לפלס, כי ראינו שעבור צירוף פשוט מספיק של גאוסייאנים נוכל לקבל את התמרת פורייה של הפונקציה בקלות רבה יותר.

נשים לב לנקודה טכנית שקשורה גם לסימון: כאשר ניסחנו את הטענות על התמרת פורייה בסעיפים הקודמים, עסקנו בפונקציות $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ וסימנו את התמרת פורייה שלהן ב- $\hat{f}(y)$, אך בסעיף 3.6 ראינו כי נוכל להתמקד בחיפושנו אחר פונקציה רדיאלית המוגדרת עבור $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

אז נגדיר את $a(r)$ בתור פונקציה של משתנה $r \geq 0$. כדי שנהיה אחידים בסימון, בכל פעם שנרצה לדבר על התמרת פורייה שלה נתייחס אליה בתור $a(x)$, תוך החלפה של r^2 בריבוע הנורמה של הווקטור x. כמובן, נהיה צריכים להצדיק הרחבה זו מאוחר יותר, אבל לא יהיה בכך קושי רב.

כפי שראינו ב (4.1), אנו מעוניינים לקבל את הצורה הבאה עבור התמרת פורייה של הפונקציה שלנו:

$$a(x) \to \int_0^\infty e^{-\pi|y|^2 t} t^2 f(1/t)\,\mathrm{d}t$$

אז אם נניח ש a הינה פונקציה עצמית (כלומר, $\hat{a} = a$), נוכל לטייב את ההגדרה שלה מעט אם נבחר $g_0(t) = h_0(1/t)t^2$, כלומר

$$a(r) = \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^\infty e^{-\pi r^2 t} t^2 h_0(1/t)\,\mathrm{d}t$$

מעבר מקדים נוסף אותו נוכל לעשות הוא לשנות את תחום האינטגרציה. אנו רוצים לעבוד ב- $\mathfrak{h}$, חצי המישור העליון, על מנת שנוכל להשתמש בתוצאות השימושיות שהוכחנו עבור תבניות מודולריות.

יתרה מכך, נוכל לפשט אף יותר אם נחפש פונקציה $\phi_0 : i\mathbb{R} \to i\mathbb{R}$.

נוכל לסמן

$$i\phi_0\left(\frac{1}{it}\right) = h_0\left(\frac{1}{t}\right)$$

הבחירה היכן "למקם" את ה- i-ים היא מעט שרירותית, אבל היא תתאים מאוד לצעד הבא שלנו, כפי שתכף נראה.

נציב

$$a(r) = \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^\infty e^{-\pi r^2 t} t^2 i\phi_0\left(\frac{1}{it}\right) \mathrm{d}t$$

וכדי לעבור לקטע האינטגרציה $(0, i\infty)$, נבצע החלפת משתנים $z = it \Rightarrow t = -iz$ כדי לקבל

$$\begin{aligned}
a(r) &= \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^{i\infty} (-iz)' e^{-\pi r^2(-iz)} i\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)(-iz)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \sin^2(\pi r^2/2) \int_0^{i\infty} -ie^{\pi r^2 iz} i\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)(-1)z^2 \,\mathrm{d}z \\
&= -\sin^2(\pi r^2/2) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{z\pi i r^2} \,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

עד עכשיו, לא העמדנו דרישות נוספות על הפונקציה אותה אנו מחפשים (בהנחה והאינטגרל הרשום מוגדר היטב).

מה יקרה אם ננסה להתקרב אף יותר לצורה של התמרת לפלס? כלומר, אנו רוצים ש $e^{z\pi i r^2}$ יהיה אחד מגורמי המכפלה בתוך האינטגרל, ולהימנע מגורמים מחוצה לו.

אם נתבסס על הזהות

$$\sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{i\pi r^2/2} - e^{-i\pi r^2/2}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i\pi r^2} - 2 + e^{-i\pi r^2}\right)$$

נוכל לקבל כי

$$a(r) = \frac{1}{4}\int_0^{i\infty} \left[\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{(z+1)\pi i r^2} - 2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{z\pi i r^2} + \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{(z-1)\pi i r^2}\right] \mathrm{d}z$$

מכיוון שהגדרנו בצורה יחסית שרירותית את $a(r)$, נוכל לכפול אותה בסקלר המתאים כדי לשמור על צורה זו של הפונקציה פשוטה יותר. כלומר, נגדיר:

$$a(r) := -4\sin^2(\pi r^2/2) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \,\mathrm{d}z \tag{5.2}$$

מעתה, לא נשנה יותר את a, ונתמקד בפונקציה הפנימית, ϕ_0.

נקבל, כפי שראינו מקודם

$$a(r)=\int_0^{i\infty}\left[\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z+1)}-2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2 z}+\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z-1)}\right]\mathrm{d}z$$

הבעיה הבאה אותה נרצה לפתור היא החזקות $z+1, z-1$ בגורמים $e^{\pi i r^2(z\pm 1)}$, שכן הם "מפריעים" לנו להגיע להתמרת לפלס (ואיתה המעבר הפשוט להתמרת פורייה).

נוכל לבצע החלפת משתנים בכל אחד מהמחוברים, ולקבל:

$$\int_0^{i\infty}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z+1)}\,\mathrm{d}z=\int_1^{i\infty+1}\phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^{i\infty}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2(z-1)}\,\mathrm{d}z=\int_{-1}^{i\infty-1}\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

כלומר

$$\begin{aligned}a(r)=\int_{-1}^{i\infty-1}\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_0^{i\infty}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\+\int_1^{i\infty+1}\phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{5.3}$$

אומנם לא קיבלנו ביטוי פשוט, אבל התקרבנו מאוד לצורה של התמרת לפלס, ועכשיו ננסה לנצלה.

נסתכל על הביטוי

$$\int_{ia}^{ib}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z,\ \ a,b\in[-\infty,\infty]$$

אנו מחפשים פונקציה עצמית, ואנחנו יודעים שהתמרת פורייה המתאימה (אם נניח כי מתקיימים כל התנאים הדרושים לכך שנוכל לבצעה), תראה כך

$$\int_{ia}^{ib}\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2z^{-4}e^{\pi i|y|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z$$

דרך אחת לקרב את הביטוי השני לראשון היא באמצעות "תיקון" המקדם בחזקה. נוכל לעשות זאת באמצעות החלפת משתנים $w=-\frac{1}{z}$:

$$\int_{i\frac{1}{a}}^{i\frac{1}{b}}\phi_0(w)\left(-\frac{1}{w}\right)^{-2}e^{\pi i|y|^2 w}\left(-\frac{1}{w}\right)'\,\mathrm{d}w=\int_{i\frac{1}{a}}^{i\frac{1}{b}}\phi_0(w)e^{\pi i|y|^2 w}\,\mathrm{d}w$$

כאן, תבניות מודולריות יכולות לסייע לנו, אבל רק במידה מסויימת.

גם אם נניח כי יש לנו דרך לעבור בין $\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2\leftrightarrow\phi_0(z)$, שינוי תחום האינטגרציה מפריע לנו לחזור לאותה הפונקציה ממש.

אבל, ביחס לקטעים המופיעים ב- (5.3), נוכל למשל לחלק את הקטע $(0,i\infty)$ ל- $(0,i)$ ו- $(i,i\infty)$, ונקבל כי כל אחד מהם הוא תמונת מראה של השני תחת התמרת פורייה וההחלפה שביצענו.

אם כך, נדרוש כי עבור $r>\sqrt{2}$, האינטגרנד יקיים $\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2e^{\pi i r^2 z}\to 0$ כאשר $\mathrm{Im}(z)\to\infty$, ואז נוכל לשנות את מסלול האינטגרציה.

ננסה לאסוף יחד את כל האינטגרלים בקטעים המתאימים, תוך הימנעות מאינטגרציה על הציר הממשי (שבו לא נוכל להשתמש בתבניות מודולריות):

את האינטגרציה לאורך הקטעים $(\pm 1, i\infty)$ נשנה להיות על הקטעים $(i, i\infty) \to (\pm 1, i)$.

את האינטגרציה לאורך הקטע $(0, i\infty)$ נשנה להיות על הקטעים $(i, i\infty) \to (0, i)$.

בסך הכל, נקבל

$$\begin{aligned}a(r) = &\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{i}^{i\infty} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ &-2\int_{0}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z - 2\int_{i}^{i\infty} \phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ &+\int_{1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{i}^{i\infty} \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

נאסוף יחד את האיטגרלים על הקטע $(i, i\infty)$ ונקבל

$$\begin{aligned}a(r) = &\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ &-2\int_{0}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ &+\int_{1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ &+\int_{i}^{i\infty} \Big[\phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} - 2\phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i r^2 z} + \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z}\Big]\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{5.4}$$

ראינו שישנה סימטריה מסוימת בין הקטעים $(i, i\infty)$ ו $(i, 0)$. סימטריה דומה קיימת בין הקטעים $(-1, i)$ ו- $(1, i)$. שמתבררת כסימטריה מלאה בין האינטגרלים, תחת התמרת פורייה.

נסתכל על התמרת פורייה של האינטגרל בקטע $(-1, i)$:

$$\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i |x|^2 z}\,\mathrm{d}z \to \int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 z^{-4} e^{\pi i |y|^2 (-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z$$

נבצע החלפת משתנים כמו מקודם, $w = -\frac{1}{z}$, ונקבל

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 z^{-4} e^{\pi i |y|^2 (-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z =\\ &\int_{1}^{i} \phi_0\left(-\frac{1}{(-\frac{1}{w})+1}\right)\left(-\frac{1}{w}+1\right)^2\left(-\frac{1}{w}\right)^{-4} e^{\pi i |y|^2 w}\left(-\frac{1}{w}\right)'\,\mathrm{d}w =\\ &\int_{1}^{i} \phi_0\Big(-1-\frac{1}{w-1}\Big)(w-1)^2 e^{\pi i |y|^2 w}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

זהו כמעט האינטגרל בקטע $(1, i)$ ב- (5.4)! מספיק שנדרוש ש ϕ_0 תהיה 1-מחזורית (תכונה שכבר הוכחנו עבור תבניות מודולריות), ונקבל $\phi_0\big(-1-\frac{1}{w-1}\big) = \phi_0\big(1+-1-\frac{1}{w-1}\big) = \phi_0\big(-\frac{1}{w-1}\big)$.

נסכם זאת כך: במשוואה שקיבלנו ב- (5.4), החלק המורכב מהאינטגרלים על הקטעים $(\pm 1, i)$ הוא למעשה פונקציה עצמית (תחת ההנחה ש $\phi_0(z+1) = \phi_0(z)$).

כלומר, כדי ש- $a(r)$ כולה תהיה פונקציה עצמית, חייב להתקיים כי החלק השני של הפונקציה, כלומר החלק המורכב מהקטעים $(0, i)$ ו- $(i, i\infty)$ גם הוא פונקציה עצמית.

נתחיל מהביטוי הפשוט יותר, כלומר האינטגרל על הקטע $(0, i)$. התמרת פורייה שלו הינה

$$-2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |x|^2 z}\,\mathrm{d}z \to -2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 z^{-4} e^{\pi i |y|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z$$

נבצע שוב החלפת משתנים $w = -\frac{1}{z}$, ונקבל

$$-2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 z^{-4} e^{\pi i |y|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z =$$
$$-2\int_{i\infty}^i \phi_0(w)\left(-\frac{1}{w}\right)^{-2} e^{\pi i |y|^2 w}\left(-\frac{1}{w}\right)'\,\mathrm{d}w =$$
$$2\int_i^{i\infty} \phi_0(w) e^{\pi i |y|^2 w}\,\mathrm{d}w$$

קיבלנו ביטוי קרוב אך לא זהה לפונקציה המקורית. אז איך נשלים את הביטוי כדי שכן תתקבל פונקציה עצמית?

למעשה, אנחנו יודעים לפחות על רכיב אחד שצריך להיות לתוצאה של התמרת פורייה: האינטגרל המקורי על הקטע $(0, i)$!

כלומר, אנחנו מחפשים צירוף כזה:

$$-2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |x|^2 z}\,\mathrm{d}z + ??? \to 2\int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i |y|^2 z}\,\mathrm{d}z - 2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |y|^2 z}\,\mathrm{d}z$$

אבל מה יקרה אם נפעיל את התמרת פורייה על התוצאה? נקבל מיד:

$$2\int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i |y|^2 z}\,\mathrm{d}z - 2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |y|^2 z}\,\mathrm{d}z \to -2\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i |x|^2 z}\,\mathrm{d}z + 2\int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i |x|^2 z}\,\mathrm{d}z$$

אבל, בפיתוח שקיבלנו ב- (5.4) יש לנו אינטגרל מתאים בקטע $(i, i\infty)$, ולכן אם

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 - 2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 + \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 = 2\phi_0(z) \qquad (5.5)$$

אז גם החלק השני של $a(r)$ יהיה פונקציה עצמית, כלומר $a(r)$ כולה תהיה בדיוק הפונקציה העצמית אותה אנו מחפשים!

נסכם זאת כך: אם נמצא פונקציה 1-מחזורית שמקיימת את משוואה (5.5), אז הגדרה (5.2) אכן מובילה אותנו אל הפונקציה העצמית המבוקשת.

עלינו לעמוד בעוד מספר תנאים טכניים, כמו קיום והתכנסות בהחלט של האינטגרלים המבוקשים, ונעשה זאת מיד.

לפני כן, נענה על מגבלה אחרת. כאשר הגדרנו את (5.2), התייחסנו אך ורק למקרה בו $r > \sqrt{2}$.

אבל תוך כדי הפיתוח, קיבלנו למעשה ביטוי שימושי יותר: אם נציב את (5.5) ב- (5.4), נקבל, לכל $x \in \mathbb{R}^8$:

$$\begin{aligned} a(x) = &\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z \\ &-2\int_{0}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z + 2\int_{i}^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{5.6}$$

היתרון של הצורה הנ"ל של הפונקציה העצמית הוא כי תחת ההנחה כי $\phi_0(z) = O(e^{-2\pi i z})$ כאשר $\operatorname{Im} z \to \infty$, האינטגרלים מתכנסים בהחלט ובמידה שווה, ולכן הביטוי אכן מוגדר לכל ווקטור.

נסכם: עלינו למצוא פונקציה, אותה סימנו ב- ϕ_0, כך ש:

1. ϕ_0 היא 1-מחזורית, כלומר $\phi_0(z) = \phi_0(z+1)$.
2. ϕ_0 מקיימת את (5.5).
3. $\phi_0(z) = O(e^{-2\pi i z})$ כאשר $\operatorname{Im} z \to \infty$, עבור ההתכנסות במ"ש ובהחלט של האינטגרלים.
4. $\phi_0\big(-\frac{1}{z}\big) z^2 e^{\pi i r^2 z} \to 0$ כאשר $\operatorname{Im}(z) \to \infty$, כדי שנוכל לשנות את מסלול האינטגרציה.

אם נדרוש גם כי $a(x)$ עצמה תהיה פונקציית שוורץ, תנאים אלה יבטיחו שבאמצעות הגדרה (5.6) נקבל פונקציה עצמית.

אנו יודעים כי היא תקבל את האפסים הנדרשים כאשר $r > \sqrt{2}$ בגלל (5.2), אבל יהיה עלינו לבדוק את האפס הנוסף כאשר $r = \sqrt{2}$.

בנוסף, את התנאים האחרים של 3.5 נוכל להוכיח רק כאשר נמצא גם את הפונקציה העצמית השניה, ובפרט נרצה לדעת את את ערכה של $a(r)$ ב- $r = 0$.

5.3. פונקציה המקיימת את התנאים

בדומה לפונקציה j שהגדרנו ב- (4.8), נגדיר שתי פונקציות עזר:

$$\varphi_{-2} := \frac{-1728 E_4 E_6}{E_4^3 - E_6^2}$$
$$\varphi_{-4} := \frac{1728 E_4^2}{E_4^3 - E_6^2}$$

אלו פונקציות להן התכונות

$$\varphi_{-2}(-1/z) = \frac{-1728 E_4(-1/z) E_6(-1/z)}{E_4^3(-1/z) - E_6^2(-1/z)} = \frac{-1728 z^4 E_4(z) z^6 E_6(z)}{z^{12} E_4^3(z) - z^{12} E_6^2(z)} = z^{-2} \varphi_{-2}(z)$$
$$\varphi_{-4}(-1/z) = z^{-4} \varphi_{-4}(z)$$

(וכמובן ששתיהן 1-מחזוריות)

אלו הן "אבני בניין" בהן נוכל להשתמש בכל פעם שנרצה להיפטר מחזקות לא רצויות של z.

באמצעות פונקציות אלו, נגדיר

$$\phi_{-4} := \varphi_{-4}$$
$$\phi_{-2} := \varphi_{-4} E_2 + \varphi_{-2}$$
$$\phi_0 := \varphi_{-4} E_2^2 + 2\varphi_{-2} E_2 + j - 1728$$

ונוכיח כי ϕ_0 מקיימת את כל התכונות הדרושות לנו.

כדי להוכיח כי הזהות (5.5) מתקיימת, מספיק שנשים לב כי

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) = \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi} \cdot \frac{1}{z} \phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{z^2} \phi_{-4}(z) \tag{5.7}$$

כדי להראות זאת, נשתמש בתכונה של E_2 שקיבלנו ב- (4.5), ונציב:

$$\begin{aligned}
\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) &= \varphi_{-4}\left(-\frac{1}{z}\right)\left(E_2\left(-\frac{1}{z}\right)\right)^2 + 2\varphi_{-2}\left(-\frac{1}{z}\right) E_2\left(-\frac{1}{z}\right) + j\left(-\frac{1}{z}\right) - 1728 \\
&= z^{-4}\varphi_{-4}\big(z^2 E_2(z) - 6iz/\pi\big)^2 + 2z^{-2}\varphi_{-2}\big(z^2 E_2(z) - 6iz/\pi\big) + j - 1728 \\
&= z^{-4}\varphi_{-4}\big(z^4 E_2^2 - 12iz^3 E_2/\pi - 36z^2/\pi^2\big) + 2\varphi_{-2} E_2 - \left(\frac{12i}{\pi} \cdot \frac{1}{z}\right)\varphi_{-2} + j - 1728 \\
&= \varphi_{-4} E_2^2 - \frac{12i}{\pi z}\varphi_{-4} E_2 - \frac{36}{\pi^2 z^2}\varphi_{-4} + 2\varphi_{-2} E_2 - \left(\frac{12i}{\pi} \cdot \frac{1}{z}\right)\varphi_{-2} + j - 1728 \\
&= \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z}\varphi_{-4} E_2 - \frac{36}{\pi^2 z^2}\varphi_{-4} - \left(\frac{12i}{\pi} \cdot \frac{1}{z}\right)\varphi_{-2} \\
&= \phi_0(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2}\phi_{-4}(z) - \frac{12i}{\pi z}(\varphi_{-4} E_2 + \varphi_{-2}) \\
&= \phi_0(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2}\phi_{-4}(z) - \frac{12i}{\pi z}\phi_{-2}(z)
\end{aligned}$$

עתה, נוכל להציב את (5.7) ב- (5.5) ולקבל

$$
\begin{aligned}
&\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2-2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right)z^2+\phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2=\\
&\qquad \phi_0(z+1)(z+1)^2-2\phi_0(z)z^2+\phi_0(z-1)(z-1)^2\\
&\qquad -\frac{12i}{\pi}[\phi_{-2}(z+1)(z+1)-2\phi_{-2}(z)z+\phi_{-2}(z-1)(z-1)]\\
&\qquad\qquad -\frac{36}{\pi^2}[\phi_{-4}(z+1)-2\phi_{-4}(z)+\phi_{-4}(z-1)]=2\phi_0(z)
\end{aligned}
$$

כנדרש.

הראנו כי משוואה (5.5) מתקיימת, וכל שנותר לנו הוא להראות כי שאר התנאים הנדרשים מתקיימים גם הם, והדרך הפשוטה ביותר לעשות זאת היא באמצעות פיתוח פורייה.

5.3.1. פיתוח פורייה של ϕ_0

מכיוון שיש בידנו את נוסחה (4.7), נוכל לחשב כל מקדם של פיתוח פורייה שנרצה לכל אחת מהפונקציות שהגדרנו.

נבחן את האיברים הראשונים של כל פיתוח, משום שהם יהיו החשובים ביותר לתכונות הראשונות אותן נרצה להוכיח.

נתחיל עם ϕ_{-4}. ראינו כבר את פיתוחי פורייה של המכנה ושל המונה ב- (4.11), ולכן

$$
\begin{aligned}
\phi_{-4}&=\frac{1+480q+...}{q-24q^2+252q^3+...}=(1+480q+...)(q^{-1}+24-324q+...)\\
&=q^{-1}+504+...
\end{aligned}
$$

עבור ϕ_{-2}, מכיוון ש-

$$
\varphi_{-2}=-q^{-1}+240+141444q+...
$$

אז נוכל להשתמש ב- (4.10) ולחשב כי

$$
\begin{aligned}
\phi_{-2}&=(q^{-1}+504+...)(1-24q-72q^2-...)+-q^{-1}+240+141444q+...\\
&=720+203040q+....
\end{aligned}
$$

ולבסוף נוכל להשתמש גם בפיתוח פרוייה של j שראינו ב- (4.12) ולקבל כי

$$
\begin{aligned}
\phi_0&=(q^{-1}+504+...)(1-24q-72q^2-...)^2\\
&\quad+2(-q^{-1}+240+...)(1-24q-72q^2-...)\\
&\quad+(q^{-1}+774+...)\\
&\quad-1728\\
&=q^{-1}-2(q^-1)+q^{-1}+504-48+2(240+24)+744-1728+...
\end{aligned}
$$

נשים לב כי הגורם q^{-1} מתאפס, וכך גם הגורם הקבוע!

את החישוב המלא נוכל להשאיר שוב לכלי אוטומאטי. בסך הכל, נקבל את פיתוחי פורייה הבאים:

$$
\begin{aligned}
\phi_{-4}(z)&=q^{-1}+504+73764q+2695040q^2+54755730q^3+O(q^4)\\
\phi_{-2}(z)&=720+203040q+9417600q^2+223473600q^3+3566782080q^4+O(q^5)\\
\phi_0(z)&=518400q+31104000q^2+870912000q^3+15697152000q^4+O(q^5)
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

5.3.2. בדיקה כי $a(x)$ היא פונקציית שוורץ

נזכיר כי לאורך הפיתוח, הגענו להגדרה (5.6):

$$a(x) := \int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z$$
$$-2\int_{0}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z + 2\int_{i}^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i|x|^2 z}\,\mathrm{d}z$$

מפיתוח פורייה שראינו, נסיק כי $\phi_0(z) = O(e^{-2\pi i z})$ כאשר $\mathrm{Im}(z) \to \infty$, ולכן האינטגרלים מתכנסים בהחלט ובמידה שווה והפונקציה $a(x)$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}^8$. קל גם לראות ש- $\phi_0\big(-\frac{1}{z}\big) z^2 e^{\pi i r^2 z} \to 0$ כאשר $\mathrm{Im}(z) \to \infty$, ולכן נוכל לשנות את מסלול האינטגרציה כפי שעשינו במהלך הפיתוח.

אז ϕ_0 עונה על כל הדרישות לקבלת פונקציה עצמית, ונותר לנו לוודא כי $a(x)$ הינה פונקציית שוורץ.

כפי שהזכרנו בפרק 4, לא רק שניתן לחשב את המקדמים של פיתוח פורייה של תבניות מודולריות, אפשר גם למצוא חסמים אסימפטוטיים עבורם. נשתמש בכך על מנת להעריך את המחובר הראשון.

ראשית, המקדמים של פיתוח פורייה של ϕ_0 מקיימים

$$c_{\phi_0}(0) = 0, |c_{\phi_0}(n)| \le 2e^{4\pi\sqrt{n}}$$

אז בדומה להערכה שקיבלנו ב- (4.13), עם התאמה קלה כי $c_{\phi_0}(0) = 0$, נקבל כי ישנו קבוע C כך שלכל $\mathrm{Im}(z) > \frac{1}{2}$,

$$|\phi_0(z)| \le C e^{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}$$

נשתמש בכך כדי לקבל את ההערכה הבאה כאשר $r \ge 0$:

$$\left|\int_{-1}^{i} \phi_0\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{i\infty}^{-1/(i+1)} \phi_0(z) z^{-4} e^{\pi i r^2(-1/z-1)}\,\mathrm{d}z\right| \le$$
$$C_1 \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t}\,\mathrm{d}t \le C_1 \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t}\,\mathrm{d}t$$

את האינטגרל האחרון ניתן להעריך באמצעות *פונקציית בסל מותאמת מהסוג השני* (*modified Bessel function of the second kind*) המסומנת ב- $K_\alpha(x)$. נסתפק בכך שנציין כי $K_\alpha(x)$ היא פתרון למשוואה דיפרנציאלית מסוג מסויים, וכי היא דועכת בצורה אקספוננציאלית (כאשר $x \to \infty$, אז $K_\alpha(x) \sim (\pi/(2x))^{1/2} e^{-x}$).

ההערכה המתקבלת הינה

$$C_1 \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t}\,\mathrm{d}t \le C_2 r K_1\big(2\sqrt{2}\pi r\big)$$

באופן דומה ניתן להעריך גם את המחוברים השני והשלישי.

את המחובר האחרון נעריך כך:

$$\left|\int_{i}^{\infty} \phi_0(z) e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\right| \le C \int_{1}^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t = C_3 \frac{e^{-\pi(r^2+2)}}{r^2+2}$$

ובסך הכל, נקבל כי

$$|a(x)| \le 4C_2 r K_1\big(2\sqrt{2}\pi r\big) + 2C_3 \frac{e^{-\pi(r^2+2)}}{r^2+2}$$

נסיק כי $a(x)$ דועכת מהר יותר מכל פולינום. הערכות דומות ניתן לקבל גם לכל נגזרת שלה, ולכן היא פונקציית שוורץ.

5.4. מציאת ערכי הפונקציה על הסריג ובראשית

מכיוון שאנו יודעים ש- $a(x)$ מקבלת את הצורה (5.2) כאשר $x > \sqrt{2}$, נסיק כי שם היא אכן מתאפסת על הסריג, כפי שרצינו. נותר לנו למצוא את ערכיה של $a(r)$ עבור $r = 0$ ו- $r = \sqrt{2}$.

כדי לעשות זאת, נציג את a בצורה שלישית, שתהיה נוחה לשם כך.

$$a(r) = 4i\sin^2(\pi r^2/2)\Bigg(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} + \int_0^\infty \left(t^2\phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2 e^{2\pi t}} + \frac{8640}{\pi t} - \frac{18144}{\pi^2}\right)e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t\Bigg) \tag{5.9}$$

הצגה זו מוצדקת, שכן אם נתחיל מ- (5.2) ונבצע את ההחלפה $t = z/i$, נקבל

$$a(r) = 4i\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^\infty \phi_0\left(\frac{i}{t}\right)t^2 e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

נוכל להשתמש ב (5.7) כדי לקבל

$$\begin{aligned}\phi_0\left(\frac{i}{t}\right)t^2 &= \phi_0(it)t^2 - \frac{12i}{\pi}\cdot\frac{t^2}{it}\phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2}\frac{t^2}{(it)^2}\phi_{-4}(it)\\ &= \phi_0(it)t^2 - \frac{12t}{\pi}\phi_{-2}(it) + \frac{36}{\pi^2}\phi_{-4}(it)\end{aligned}$$

בזכות פיתוחי פורייה שראינו ב- (5.8) נוכל להסיק כי כאשר $t \to \infty$, מתקיים כי $\phi_0(it)t^2 = O(t^2e^{-2\pi t})$.

עבור שתי הפונקציות האחרות, נקבל כי כאשר $t \to \infty$ הן מקיימות

$$\begin{aligned}\phi_{-4}(it) &= e^{2\pi t} + 504 + O(e^{-2\pi t})\\ \phi_{-2}(it) &= 720 + O(e^{-2\pi t})\end{aligned}$$

נסיק כי

$$\begin{aligned}\phi_0\left(\frac{i}{t}\right)t^2 &= -\frac{12t}{\pi}\cdot 720 + \frac{36}{\pi^2}(e^{2\pi t}+504) + O(t^2e^{-2\pi t})\\ &= \frac{36}{\pi^2}e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi}t + \frac{18144}{\pi^2} + O(t^2e^{-2\pi t})\end{aligned} \tag{5.11}$$

אבל, עבור $r > \sqrt{2}$ נוכל לחשב

$$\int_0^\infty \left(\frac{36}{\pi^2}e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi}t + \frac{18144}{\pi^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2}$$

ולכן (5.9) מתקיימת עבור $r > \sqrt{2}$.

נשים לב כי ההערכה שמצאנו עבור $\phi_0(i/t)t^2$ מראה כי הצד הימני של משוואה (5.9) הינו פונקציה אנליטית בסביבה כולשהי ב- $[0,\infty)$. אבל, נוכל להסיק מ- (5.6) שגם $a(r)$ שהגדרנו ב- (5.10) אנליטית בסביבה כולשהי ב $[0,\infty)$, כלומר (5.9) מתקיימת בכל $[0,\infty)$.

נשתמש בה על מנת למצוא את הערכים המבוקשים.

נשיב לב כי באמצעות ההערכה שמצאנו ב- (5.11), נקבל כי האינטגרל שהגדרנו מקיים

$$\left|\int_0^\infty \left(t^2\phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2 e^{2\pi t}} + \frac{8640}{\pi t} - \frac{18144}{\pi^2}\right) e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty \left|Ct^2 e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2 t}\right|\mathrm{d}t \le C_1 \int_0^\infty t^2 e^{-(2+r^2)\pi t}\,\mathrm{d}t$$

ולכן הוא מקבל ערך סופי. נסיק מכך כי כאשר הסינוס אפס, גם המכפלה שלהם אפסה.

אז עבור $r = 0$, מספיק שנחשב את הגבול

$$\begin{aligned} a(0) &= \lim_{r\to 0} 4i\sin^2(\pi r^2/2)\left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2}\right) \\ &= \lim_{r\to 0} -4i\pi^2 r^4/4 \cdot \frac{8640}{\pi^3 r^4} \\ &= \frac{-i8640}{\pi} \end{aligned}$$

באופן דומה, עבור $r = \sqrt{2}$ נקבל

$$\begin{aligned} a\left(\sqrt{2}\right) &= \lim_{r\to\sqrt{2}} 4i\sin^2(\pi r^2/2)\left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2}\right) \\ &= \lim_{r\to\sqrt{2}} -4i\pi^2\left(r^2-2\right)^2/4 \cdot \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.5. הפונקציה העצמית הנוספת

עדיין דרושה לנו פונקציה המקיימת $b(x) = -\hat{b}(x)$.

באופן דומה לפיתוח של $a(x)$, נשתמש בפונקציות שהגדרנו ב- (4.2), ונסמן

$$\psi_I := 128\frac{\theta_{00}^4+\theta_{01}^4}{\theta_{10}^8} + 128\frac{\theta_{01}^4-\theta_{10}^4}{\theta_{00}^8}$$

באמצעות התכונות של פונקציות תטא שהוכחנו, נציב ונסמן:

$$\begin{aligned}\psi_T(z) &:= \psi_I(z+1) = 128\frac{\theta_{01}^4+\theta_{00}^4}{\theta_{10}^8} + 128\frac{\theta_{00}^4+\theta_{10}^4}{\theta_{01}^8} = \psi_I(z-1)\\ \psi_S(z) &:= z^2\psi_I(-1/z) = 128\frac{-\theta_{00}^4-\theta_{10}^4}{\theta_{01}^8} + 128\frac{-\theta_{10}^4+\theta_{01}^4}{\theta_{00}^8}\end{aligned} \tag{5.12}$$

בפרט, מתקיים כי:

$$\begin{gathered}\psi_I(z) = \psi_I(z+1) + z^2\psi_I(-1/z)\\ \psi_T(z) + \psi_S(z) = \psi_I(z)\end{gathered} \tag{5.13}$$

באמצעותן, נגדיר את

$$b(r) := -4\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z \tag{5.14}$$

לכל $r > \sqrt{2}$.

גם כאן, קיימות ההרחבות הנדרשות ל- $b(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}^8$, והצגה המאפשרת לחשב ערכים של הפונקציה בנוחות.

נסתפק בכך שנראה כי $b(x)$ היא אכן הפונקציה העצמית הנדרשת. בדומה לשיטה בה השתמשנו בתחילת הסעיף, נשתמש בהגדרת הסינוס והחלפת משתנים על מנת לקבל

$$b(r) = \int_{-1}^{i\infty-1}\psi_I(z+1)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z - 2\int_0^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_1^{i\infty+1}\psi_I(z-1)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

פיתוחי פורייה של ψ_I, ψ_T ו- ψ_S הינם

$$\begin{aligned}\psi_I(z) &= q^{-1} + 144 - 5120q^{1/2} + 70524q - 626688q^{3/2} + 4265600q^2 + O\big(q^{5/2}\big)\\ \psi_T(z) &= q^{-1} + 144 + 5120q^{1/2} + 70524q + 626688q^{3/2} + 4265600q^2 + O\big(q^{5/2}\big)\\ \psi_S(z) &= -10240q^{1/2} - 1253376q^{3/2} - 48328704q^{5/2} - 1059078144q^{7/2} + O\big(q^{9/2}\big)\end{aligned} \tag{5.15}$$

ובפרט $\psi_I(z) = e^{-2\pi i z} + O(1)$ כאשר $\mathrm{Im}(z) \to \infty$. אז נוכל לשנות את מסלול האינטגרציה, ובאמצעות (5.12) נקבל

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{i\infty-1}\psi_I(z+1)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z &= \int_{-1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_i^{i\infty}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ \int_1^{i\infty+1}\psi_I(z-1)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z &= \int_1^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_i^{i\infty}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\\ \int_0^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{i}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_i^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

נאסוף אותם ונקבל

$$b(r)=\int_{-1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z+\int_{1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z+$$
$$2\int_{i}^{i\infty}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_{0}^{i}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_{i}^{i\infty}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

כלומר

$$b(r)=\int_{-1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z+\int_{1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_{0}^{i}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z+2\int_{i}^{i\infty}(\psi_T(z)-\psi_I(z))e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

מ- (5.13) נובע כי

$$b(r)=\int_{-1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z+\int_{1}^{i}\psi_T(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_{0}^{i}\psi_I(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z-2\int_{i}^{i\infty}\psi_S(z)e^{\pi i r^2 z}\,\mathrm{d}z$$

נוכל להפעיל את התמרת פורייה ולקבל

$$\hat{b}(x)=\int_{-1}^{i}\psi_T(z)z^{-4}e^{\pi i|x|^2(-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z+\int_{1}^{i}\psi_T(z)z^{-4}e^{\pi i|x|^2(-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z$$
$$-2\int_{0}^{i}\psi_I(z)z^{-4}e^{\pi i|x|^2(-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z-2\int_{i}^{i\infty}\psi_S(z)z^{-4}e^{\pi i|x|^2(-\frac{1}{z})}\,\mathrm{d}z$$

נבצע החלפת משתנים $w=-\frac{1}{z}$:

$$\hat{b}(x)=\int_{i}^{1}\psi_T\left(-\frac{1}{w}\right)w^2e^{\pi i|x|^2w}\,\mathrm{d}w+\int_{-1}^{i}\psi_T\left(-\frac{1}{w}\right)w^2e^{\pi i|x|^2w}\,\mathrm{d}w$$
$$-2\int_{i\infty}^{i}\psi_I\left(-\frac{1}{w}\right)w^2e^{\pi i|x|^2w}\,\mathrm{d}w-2\int_{i}^{0}\psi_S\left(-\frac{1}{w}\right)w^2e^{\pi i|x|^2w}\,\mathrm{d}w$$

וכל שנותר הוא להשתמש ב- (5.12):

$$\hat{b}(x)=\int_{i}^{1}-\psi_T(z)e^{\pi i|x|^2z}\,\mathrm{d}z+\int_{-1}^{i}-\psi_T(z)e^{\pi i|x|^2z}\,\mathrm{d}z$$
$$2\int_{i}^{i\infty}\psi_S(z)e^{\pi i|x|^2z}\,\mathrm{d}z+2\int_{0}^{i}\psi_I(z)e^{\pi i|x|^2z}\,\mathrm{d}z$$

כלומר

$$b(x)=-\hat{b}(x)$$

כפי שרצינו.

עבור b נוכל להשתמש בהצגה הבאה

$$b(r)=4i\sin^2(\pi r^2/2)\left(\frac{144}{\pi r^2}+\frac{1}{\pi(r^2-2)}+\int_{0}^{\infty}(\psi_I(it)-144-e^{2\pi t})e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t\right)$$

על מנת לקבל את הערכים הבאים בנקודות החשובות לנו:

$$b(0)=0,b\left(\sqrt{2}\right)=0$$

5.6. בדיקת החסמים המתאימים

נגדיר את

$$g(x) := \frac{\pi i}{8640}a(x) + \frac{i}{240\pi}b(x)$$

ונוכיח כי היא פונקציית הקסם הדרושה לנו, ומקיימת כל הדרישות של 3.5.

נתחיל בהוכחת הדרישה השלישית, קרי ש $g(x) \leq 0$ לכל $|x| > \sqrt{2}$ (אנו יודעים כי $g(x) = 0 \Leftarrow |x| = \sqrt{2}$).

אנו יודעים כי במקרה זה, נוכל להציג את הפונקציה כך

$$g(r) = \frac{\pi}{2160}\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^\infty A(t)e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$A(t) = -t^2\phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it)$$

אם נראה ש- $A(t) < 0$ בקטע האינטגרציה, נוכל להסיק כי g אינה מקבלת ערכים חיוביים לכל $r > \sqrt{2}$.

נשתמש בשתי הצגות שונות של $A(t)$, אשר יאפשרו לנו להעריך אותה בדיוק מספיק בקטעים $(0,1]$ ו- $[1,\infty)$ בהתאמה:

$$A(t) = -t^2\phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2}t^2\psi_S(i/t)$$

$$A(t) = -t^2\phi_0(it) - t\frac{12i}{\pi}\phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2}\phi_{-4}(it) - \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it)$$

כאשר $t \to 0$, נסמן:

$$A(t) = A_0^{(n)}(t) + O\big(t^2 e^{-\pi n/t}\big)$$

כלומר, $A_0^{(n)}(t)$ היא פונקציה המקרבת את $A(t)$ בסביבת 0, עד כדי גורם $t^2 e^{-\pi n/t}$.

באופן דומה, כאשר $t \to \infty$ נסמן:

$$A(t) = A_\infty^{(n)}(t) + O\big(t^2 e^{-\pi n t}\big)$$

כפי שהזכרנו בפרק 4, נוכל למצוא חסמים אסימפטוטיים על המקדמים בפיתוח פורייה של תבניות מודלריות הולומרפיות בצורה חלשה. בפרט, המקדם ה n-י בפיתוח פורייה של ψ_I, שאותו נסמן $c_{\psi_I}(n)$, מקיים:

$$|c_{\psi_I}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$$

באופן דומה, ישנם חסמים עבור המקדמים של כל אחת מהפונקציות $\psi_S, \phi_0, \phi_{-2}, \phi_{-4}$:

$$|c_{\psi_S}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$$

$$|c_{\phi_0}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$|c_{\phi_{-2}}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$|c_{\phi_{-4}}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

נוכל להשתמש בחסמים אלו על מנת לחסום את השגיאה שנקבל אם נשתמש בהערכות $A_0^{(n)}$ ו- $A_\infty^{(n)}$:

$$\left|A(t) - A_0^{(m)}(t)\right| \leq \left(t^2 + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}} e^{-\pi n/t}$$

$$\left|A(t) - A_\infty^{(m)}(t)\right| \leq \left(t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}} e^{-\pi n t}$$

באמצעות פיתוחי פורייה שקיבלנו ב- (5.8) ו- (5.15), נוכל לחשב את $A_0^{(6)}$ ו- $A_\infty^{(6)}$. עבור $A_0^{(6)}$ נקבל:

$$A_0^{(6)}(t) = t^2\left(-\frac{368640}{\pi^2}e^{-\pi/t} - 518400e^{-2\pi/t} - \frac{45121536}{\pi^2}e^{-3\pi/t} - 31104000e^{-4\pi/t} - \frac{1739833344}{\pi^2}e^{-5\pi/t}\right)$$

הפיתוח של $A_\infty^{(6)}$ מתקבל בדרך דומה אך ארוך אף יותר ולא נביאו כאן.

קל לראות שלכל $t \in (0,1]$, מתקיים $A_0^{(6)}(t) < 0$.

בנוסף, בקטע זה ניתן לחשב כי

$$\left|A(t) - A_0^{(6)}(t)\right| \leq \left|\left(t^2 + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{n=6}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}} e^{-\pi n/t}\right| \leq \left|A_0^{(6)}(t)\right|$$

באופן דומה, גם עבור $A_\infty^{(6)}$ מתקיים לכל $t \in [1,\infty)$ כי $A_\infty^{(6)}(t) < 0$ וכן ש-

$$\left|A(t) - A_\infty^{(6)}(t)\right| \leq \left|\left(t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{n=6}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}} e^{-\pi n t}\right| \leq \left|A_\infty^{(6)}(t)\right|$$

כלומר, $A(t) < 0$ כאשר $t \in (0,\infty)$. לכן, הדרישה השלישית מתקיימת, כפי שרצינו להוכיח.

עבור התמרת פורייה של g, המקבלת את הצורה

$$\hat{g}(r) = \frac{\pi}{2160}\sin^2(\pi r^2/2)\int_0^\infty B(t)e^{-\pi r^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$B(t) = -t^2\phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it)$$

הערכות דומות מאפשרות להראות כי $B(t) > 0$ כאשר $t \in (0,\infty)$, ולכן הדרישה השניה, קרי $\hat{f}(y) \geq 0$ לכל $y \in \mathbb{R}^n$, מתקיימת גם היא.

לבסוף, מכיוון ש $a(0) = \frac{-i8640}{\pi}$ ו- $b(0) = 0$, נקבל גם כי $g(0) = \hat{g}(0) = 1 > 0$.

בכך, הראנו כי $g(x)$ היא פונקציית הקסם הדרושה, ועל כן הצפיפות המירבית ב- $\mathbb{R}^8$ הינה

$$\mathrm{vol}\left(B^8_{\sqrt{2}/2}\right) = \frac{\pi^4}{384} = 0.2538...$$

מכיוון שזו הצפיפות שקיבלנו עבור E_8 ב- (2.2), הוכחנו כי היא אכן אריזה בעלת הצפיפות הגבוהה ביותר האפשרית במימד זה.

6. ביבליוגרפיה

ההגדרות והתוצאות על פונקציות שוורץ וההוכחה של סכימת פואסון מבוססות על [2].

ההוכחה של פונקציית הקסם מבוססת כמובן על [4], וכן על [3], שעליו בנויות גם ההגדרות וההוכחות על סריגים, וההוכחה המרכזית על החסמים לצפיפות אריזות.

ההגדרות הבסיסיות של תבניות מודולריות וכן ההערכה של K_α נלקחו מ- [5], והפיתוח של E_k ושאר התבניות המודולריות מבוסס על [6], כמו גם פיתוח הבסיס ל- Λ_8.

הוכחת הדואליות של E_8 מבוססת על [7].

1. Groemer H (1963) Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum.. Mathematische Zeitschrift 81:260–278
2. Stein E, Shakarchi R (2011) Fourier Analysis: An Introduction. Princeton University Press
3. Cohn H (2017) A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing. Notices of the American Mathematical Society 64:102–115. https://doi.org/10.1090/noti1474
4. Viazovska M (2017) The sphere packing problem in dimension 8. Annals of Mathematics 185:. https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.7
5. Cohen H (2018) An Introduction to Modular Forms
6. Ranestad K, Bruinier J, Geer G van der, et al (2008) The 1-2-3 of Modular Forms: Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway. Springer Berlin Heidelberg
7. Mares B (2022) Why is a unimodular lattice self-dual?. https://math.stackexchange.com/q/4465380