סיבוכיות חישוב 3 — רביעי, 21/3/18

יחס שאינו ניתן לרדוקציה עצמית

הטענה הייתה שלכל שפה $L\in NPC$ יש רדוקציה עצמית.

נניח ש- $NP\cap co\text{-}NP\neq P$, נראה כי קיימת בעיית חיפוש (יחס) ב- PC שאין לה רדוקציה עצמית.

נראה שקיים יחס שאינו ניתן לרדוק' עצמית:

תהי $S\in NP\cap co\text{-}NP$ וגם $S\notin P$.

$S\in NP\Rightarrow$ קיים מוודא פולי' דט' V_S כך שלכל $x\in S$ קיים y כך ש- $|y|=p(|x|)$ ו- $V_S(x,y)=1$, ולכל $x\notin S$ מתקיים שלכל y $V_S(x,y)=0$.

$S\in co\text{-}NP\Rightarrow\bar{S}\in NP\Rightarrow$ קיים מוודא פולי' דט' $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\in\bar{S}$ קיים y כך ש- $|y|=p(|x|)$ ו- $V_{\bar{S}}(x,y)=1$, ולכל $x\notin\bar{S}$ ולכל y מתקיים $V_{\bar{S}}(x,y)=0$.

כלומר, קיים מוודא פולי' דט' $V_{\bar{S}}$ כך שלכל $x\notin S$ קיים y כך ש- $|y|=p(|x|)$ ו- $V_{\bar{S}}(x,y)=1$ ולכל $x\in S$ ולכל y מתקיים $V_{\bar{S}}(x,y)=0$.

בעזרת שני המוודאים — נגדיר שני יחסים:

$$R_1=\{(x,y)\mid V_S(x,y)=1\}$$
$$R_2=\{(x,y)\mid V_{\bar{S}}(x,y)=1\}$$

שני היחסים שהגדרנו שייכים למחלקה PC כיוון שניתן לזהות שייכות של זוג (x,y) ל- R_1 או ל- R_2 ע"י הרצת המוודאים $V_S, V_{\bar{S}}$. מוודאים אלו הם פולי' דט'.

נשים לב שהיחסים גם חסומים פולי' בגלל שהעד y חסום פולי' באורך x כהגדרת NP.

נשים לב שמתקיים: $S=\{x\mid R_1(x)\neq\emptyset\}=\{x\mid R_2(x)=\emptyset\}$ ולכל יחס R_i מוגדר $R(x)=\{y\mid(x,y)\in R\}$

נגדיר יחס R: $R=\{(x,1y)\mid(x,y)\in R_1\}\cup\{(x,0y)\mid(x,y)\in R_2\}$. (bit)

שפת ההכרעה של היחס R: $S_R=\{x\mid R(x)\neq\emptyset\}$ (זכר הגדרה כללית, שפת הכרעה)

במקרה שלנו מתקיים $S_R=\{0,1\}^*$. מדוע?

נניח בשלילה שקיים $x\notin S_R\Rightarrow$ לפי ההגדרה לכל y מתקיים $(x,y)\notin R_1$ וכמו כן לכל y $(x,y)\notin R_2$

$\Rightarrow$ לכל y $V_S(x,y)=0$ ולכן $x\notin S$ וגם לכל y $V_{\bar{S}}(x,y)=0$ ולכן $x\notin\bar{S}$, כלומר $x\in S$

$\Rightarrow$ קיבלנו $x\notin S$ וגם $x\in S$ $\Rightarrow$ סתירה. $\Rightarrow S_R\in P$

לכן הוכחנו ש- $S_R=\{0,1\}^*$. מה ניתן להסיק לגבי R?

לכן $\boxed{S_R\in P}$

נשים לב, שהיחס $\boxed{R\in PC}$ בגלל שניתן להשתמש במוודאים הפולי' הדט' $V_S, V_{\bar{S}}$ כדי לזהות שייכות ליחס, וכמו כן - היחס חסום פולי'.

מנגד, $\boxed{R\notin PF}$. למה?

נניח בשלילה $R\in PF\Rightarrow$ קיים אלגו' M פולי' דט' שבהינתן x מוצא y כך ש- $(x,y)\in R$ או מחזיר שלא קיים y שכזה.

נבנה אלגו' M' המכריע את Σ בזמן פולי' כך' באופן הבא:
בהינתן x, ניתן להריץ את M על x ולקבל y כך ש- $(x,y)\in R$.
אם הביט הראשון של y הוא 1 - נחזיר 1, שכן קיים y' כך ש- $y=1y'$, $(x,y')\in R_1$
$\Leftarrow V_{\Sigma}(x,y')=1 \Leftarrow x\in\Sigma$.
לעומת זאת, אם הביט הראשון של y הוא 0 $\Leftarrow$ קיים y'' כך ש- $y=0y''$, $(x,y'')\in R_2$
$\Leftarrow V_{\bar\Sigma}(x,y'')=1 \Leftarrow x\in\bar\Sigma \Leftarrow x\notin\Sigma$.

$\Leftarrow \Sigma\in P$ - בסתירה להנחה שלנו ש- $\Sigma\in(NP\cap coNP)\setminus P$
$\Leftarrow R\notin PF$, $R\in PC$, $\Sigma_R\in P$
$\Leftarrow R$ יחס שלא ניתן לרדוק' עצמית. שכן אם היה רדוקציה עצמית ל-R אז היה ניתן להשתמש בה כדי שבהינתן x נמצא בזמן פולי' y כך ש- $(x,y)\in R$, אבל $R\notin PF$ ולכן מהגדרה לא קיימת רדוק' שכזו.
נשים לב שהתמשנו בשקילות הרדוקציה העצמית (אם היא כזו) הוא פולי', שכן הנחנו $\Sigma_R\in P$.

רדוק' קוק לעומת רדוק' קארפ:
תרגיל: הכרע עבור הטענות הבאות האם הן נכונות או לא:
א. לכל בעיית הכרעה Σ קיימת רדוק' קוק למשלים שלה $(\bar\Sigma)$ - נכון.
רעיון ההוכחה: ניתן להפוך את התשובה.
ב. לכל בעיית הכרעה קיימת רדוק' קארפ למשלים שלה $(\bar\Sigma)$ - לא נכון.
נראה דוגמא נגדית: $\Sigma=\emptyset$, $\bar\Sigma=\Sigma^*$ (במקרה הזה אין לנו למה למפות עבור $x\notin\Sigma$ - כי אין אפילו אחד שהוא לא במשלים!)
ג. לכל בעיית הכרעה $\Sigma\in P$ שאינה טריוויאלית (לא $\emptyset$ ולא Σ^*) קיימת רדוק' קארפ למשלים שלה. - נכון
רעיון ההוכחה: נבחר $x_1\in\bar\Sigma$, $x_2\notin\bar\Sigma$ (בהכרח יש כאלה כי לא טריוויאלית). $f(x)=\begin{cases} x_1 & x\in\Sigma \\ x_2 & x\notin\Sigma\end{cases}$
וזה ניתן לחישוב בזמן פולי' כי $\Sigma\in P$