סיבוכיות - תרגול 2

בעיות הכרעה

בעיות הכרעה מתוארות בעזרת קבוצות.

הגדרה: תהי S קבוצה. נאמר ש- $S \in P$ אם קיים אלגוריתם פולינומי A כך ש:

$$x \in S \Rightarrow A(x)=1$$
$$x \notin S \Rightarrow A(x)=0$$

הגדרה: תהי S קבוצה. נאמר כי $S \in NP$ אם קיים פולינום p ואלג' פול' V כך ש:

$$x \in S \Rightarrow \exists y.\ |y| \le p(|x|): V(x,y)=1$$
$$x \notin S \Rightarrow \forall y.\ V(x,y)=0$$

דוג': $SAT \in NP$

נגדיר את הפולינום $p(n)=n$ ואת המוודא $V(x,y)$ - שיבדוק ש-x נוסחה הבנויה בצורת CNF ו-y השמה מספקת ל-x. אם כן - יחזיר 1 אחרת יחזיר 0.

בעיות חיפוש

בעיות חיפוש מתוארות בעזרת יחסים.

הגדרה: יהי R יחס נאמר כי $R \in PF$ אם קיים אלג' פול' φ שבהינתן x מחזיר y כך ש $(x,y) \in R$ או $\perp$ אם לא קיים y כזה.

הגדרה: יחס R נקרא חסום פולינומית אם קיים פולינום p כך שלכל $(x,y) \in R$ מתקיים $|y| \le p(|x|)$

הגדרה: יהי R יחס. נאמר כי $R \in PC$ אם:

1. R חסום פולינומית
2. קיים אלג' פול' V כך ש: $V(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in R \\ 0 & (x,y) \notin R \end{cases}$

דוג': $PC \ni R_{SAT} = \{(x,y) \mid$ x נוסחת CNF ו-y השמה מספקת ל-$x\}$

הערה: לכל בעיית חיפוש R מוגדרת בעיית ההכרעה $S_R = \{x \mid \exists y: (x,y) \in R\}$ ומתקיים ש: $R \in PC \Rightarrow S_R \in NP$.

- הוכח בהרצאה:
  1. $PF \not\subseteq PC$
  2. $P = NP \Leftrightarrow PC \subseteq PF$

סוגי רדוקציות

הגדרה: רדוקציה קוק מבעיה A לבעיה B הינה אלג' פול' הפותר את A בעזרת גישה לאורקל הפותר את B.

הגדרה: רדוקציה קארפ מבעיית הכרעה S לבעית הכרעה S' היא פונקציה f הניתנת לחישוב בזמן פול' כך ש $f(x)\in S' \Leftrightarrow x\in S$

תרגיל: הוכיחו או הפריכו: את הטענות הבאות:

① לכל בעיית הכרעה קיימת רדוקציה קארפ למשלים שלה.

② אותו דבר עם רדוקציה קוק.

③ לכל בעיית הכרעה $S\in P$ $S\neq\emptyset,\Sigma^*$ קיימת רדוקציה קארפ למשלים שלה.

פתרון: ① הפרכה. תהי $S=\Sigma^*$. נניח בשלילה שקיימת רדוקציה קארפ f מ-S ל-$\bar{S}$. יהי x כלשהו. $x\in\Sigma^*=S$, ולכן לפי הגדרה $f(x)\in\bar{S}=\emptyset$ בסתירה. (אין שם איבר לרדוקציה).

② הוכחה: תהי S בעיית הכרעה. נבנה אלג' פול' A המכריע את S בעזרת גישה לאורקל ל-$\bar{S}$. בהינתן קלט x, A ישאל את האורקל אם $x\in\bar{S}$ ויחזיר תשובה הפוכה.

③ הוכחה: נסמן $x_1\in S$, $x_2\notin S$ ונגדיר
$$f(x)=\begin{cases}x_2 & x\in S\\ x_1 & x\notin S\end{cases}$$

f ניתנת לחישוב בזמן פול' ע"י הרצת האלג' שמכריע את S והחזרת x_1,x_2 בהתאם.

הגדרה: תהי S בעיית הכרעה. נאמר כי S היא NP-קשה ($S\in NP\text{-}H$) אם לכל $S'\in NP$ קיימת רדוקציית קארפ ל-S ונאמר כי S היא NP-שלמה ($S\in NPC$) אם בנוסף $S\in NP$.

הערה: אם קיימת בעיה S כך ש- $S\in NPC$ וגם $S\in P$ אז $P=NP$.

תרגיל: נגדיר את הבעיה הבאה: $Big\text{-}Clique=\{G \mid$ קיים ב-G קליק בגודל $n-4\}$

תחת ההנחה ש $P\neq NP$ הוכח או הפרך $Big\text{-}Clique\in NPC$.

פתרון: הפרכה. נראה כי $Big\text{-}Clique\in P$

האלג' יעבור על כל הקבוצות בגודל $n-4$ ויבדוק שכל הקשתות מופיעות. אם ימצא קבוצה כזאת יחזיר 1, אחרת, יחזיר 0. מס' הקבוצות: $\binom{n}{n-4}\le n^4$

זמן בדיקה לכל קבוצה $\le n^2$

סה"כ זמן הריצה $\le n^6$.