תרגיל 1

להגשה עד ה-22.4.18 בשעה 16:00

חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו.

1. תהי השפה $PRIMES=\{p \mid p \text{ is a prime number}\}$ מעל הא"ב $\{0,1\}^*$. הוכיחו כי $PRIMES\in NP\cap coNP$.

הדרכה: היעזרו במשפט הבא מתורת המספרים הקשור למשפט הקטן של פרמה:
p הוא מס' ראשוני אס"ם קיים מס' שלם $1<x<p$ כך ש: (1) המספר $x^{p-1}-1$ מתחלק ב-p ו-(2) לכל גורם ראשוני q של p-1, המספר $x^{(p-1)/q}-1$ אינו מתחלק ב-p.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. תהי S בעיית הכרעה כלשהי. קיימת רדוקציית קארפ מ- S לבעיית הכרעה כלשהי ב-NP אס"ם S שייכת ל-NP.
   ב. אם $NP\neq P$ וגם $NP=coNP$ אזי קיימות בעיות הכרעה ב-$NP\setminus P$ שיש להן רדוקציית קארפ למשלימה שלהן.
   ג. אם $NP\neq P$ וגם $NP\neq coNP$ אזי קיימות בעיות הכרעה ב-$NP\setminus P$ שאין להן רדוקציית קארפ למשלימה שלהן.

3. בהינתן א"ב סופי Σ נאמר שפונקציה $f:\Sigma^*\rightarrow\Sigma^*$ היא **פונקציה מקטינת א"ב** אם:
   - לכל $b\in\Sigma$ מתקיים $f(b)\in\Sigma$
   - לכל $a=a_1\cdots a_n\in\Sigma^*$ מתקיים $f(a)=f(a_1)\cdots f(a_n)$ (כלומר, הפונקציה f מוגדרת באופן בלעדי ע"י הערך הייחודי שהיא נותנת לכל תו בא"ב Σ).

   א. הוכיחו ש-NP סגורה תחת הקטנת א"ב, כלומר, הוכיחו שלכל שפה L ב-NP ולכל פונקציה מקטינת א"ב f על הא"ב של L, השפה $f(L)$ שייכת ל-NP (כאשר: $f(L)=\{f(a) \mid a\in L\}$).
   ב. הוכיחו שאם P סגורה להקטנת א"ב אזי $P=NP$.

4. נאמר שלבעיה חישובית S יש **רדוקציה עצמית יורדת** אם יש לה רדוקציה עצמית בה אורכן של כל השאילתות ל"קופסה השחורה" (האורקל) קצר יותר מהקלט לרדוקציה (כלומר, אם על קלט x הרדוקציה מבצעת שאילתה q הרי שמתקיים $|q|<|x|$).

נאמר שגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא **3-צביע** אם קיימת פונקציה $f:V\rightarrow\{1,2,3\}$ הנותנת לכל קדקוד בגרף צבע מסוים מבין 3 צבעים נתונים כך שאין זוג קדקודים שכנים בגרף בעלי אותו צבע. גרסת

ההכרעה של בעיית ה-3-Coloring מכילה את כל הגרפים שהם 3-צביעים. בגרסת החיפוש של בעיה זו בהינתן גרף G נדרש למצוא את הפונקציה f המוכיחה כי G הוא 3-צביע.

הראו רדוקציה עצמית יורדת לבעיית ה-3-Coloring.

5. שפה L תקרא **ניתנת לבחירה** אם קיימת פונקציה $f: \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ הניתנת לחישוב בזמן פולינומי כך שלכל $x,y \in \{0,1\}^*$ מתקיים:
   - $f(x,y)=x$ או $f(x,y)=y$
   - אם $x \in L$ או $y \in L$ אזי $f(x,y) \in L$

נגדיר את המחלקה P' להיות המחלקה המכילה את כל השפות הניתנות לבחירה.

א. הוכיחו כי $P \subseteq P'$.
ב. הוכיחו ש-P' סגורה למשלים (כלומר, אם $L \in P'$ אז גם השפה המשלימה של L שייכת ל-P').
ג. הוכיחו שאם קיימת שפה ב-P' שהיא NP-קשה אזי P=NP.

בהצלחה!