חלק ראשון

Add:

n	רשימה	עץ	n	רשימה	עץ	n	רשימה	עץ
50	25377	109112	4550	5510	64098	9050	5535	67165
150	19931	128429	4650	5604	64429	9150	8241	63471
250	18853	117629	4750	6878	63841	9250	5546	67251
350	18345	49059	4850	6464	64645	9350	6819	62689
450	18543	47070	4950	5671	65189	9450	5628	96642
550	24726	52602	5050	5597	64296	9550	6597	63882
650	34275	51428	5150	5797	65458	9650	6497	64017
750	21438	52500	5250	6945	63652	9750	5658	64493
850	19099	54133	5350	5557	65028	9850	5574	62682
950	18525	54182	5450	5574	64958	9950	6940	64523
1050	18431	56001	5550	5611	65095			
1150	27363	54971	5650	5595	63830			
1250	27295	57045	5750	5685	64799			
1350	18657	55306	5850	6929	64508			
1450	19178	57612	5950	5581	63632			
1550	18251	56159	6050	6589	63608			
1650	18380	57787	6150	5564	64547			
1750	23291	58027	6250	5596	79624			
1850	31527	57787	6350	5596	61948			
1950	5575	58520	6450	6826	60809			
2050	5564	58746	6550	5582	62738			
2150	5533	62010	6650	5562	60683			
2250	5630	61016	6750	6756	62126			
2350	7198	61166	6850	5540	60228			
2450	6721	60879	6950	5495	64179			
2550	5660	63430	7050	6890	60608			
2650	5514	63193	7150	5542	64240			
2750	5630	61869	7250	6607	63023			
2850	5564	62377	7350	5624	62546			
2950	6940	62699	7450	5751	64948			
3050	5621	76652	7550	5583	61419			
3150	5551	61857	7650	6872	63177			
3250	5571	61703	7750	5692	61914			
3350	5522	62036	7850	5524	76184			
3450	5513	73940	7950	5699	78749			
3550	6890	60292	8050	5584	79617			
3650	6598	60139	8150	6927	64521			
3750	5635	60513	8250	5604	62239			
3850	5608	58827	8350	5565	62766			
3950	6906	60907	8450	6644	60889			
4050	5540	58434	8550	5611	63580			
4150	6976	65476	8650	5600	62614			
4250	5560	64198	8750	6950	74719			
4350	5565	63048	8850	5631	65540			
4450	5669	64562	8950	5534	69965			

Find:

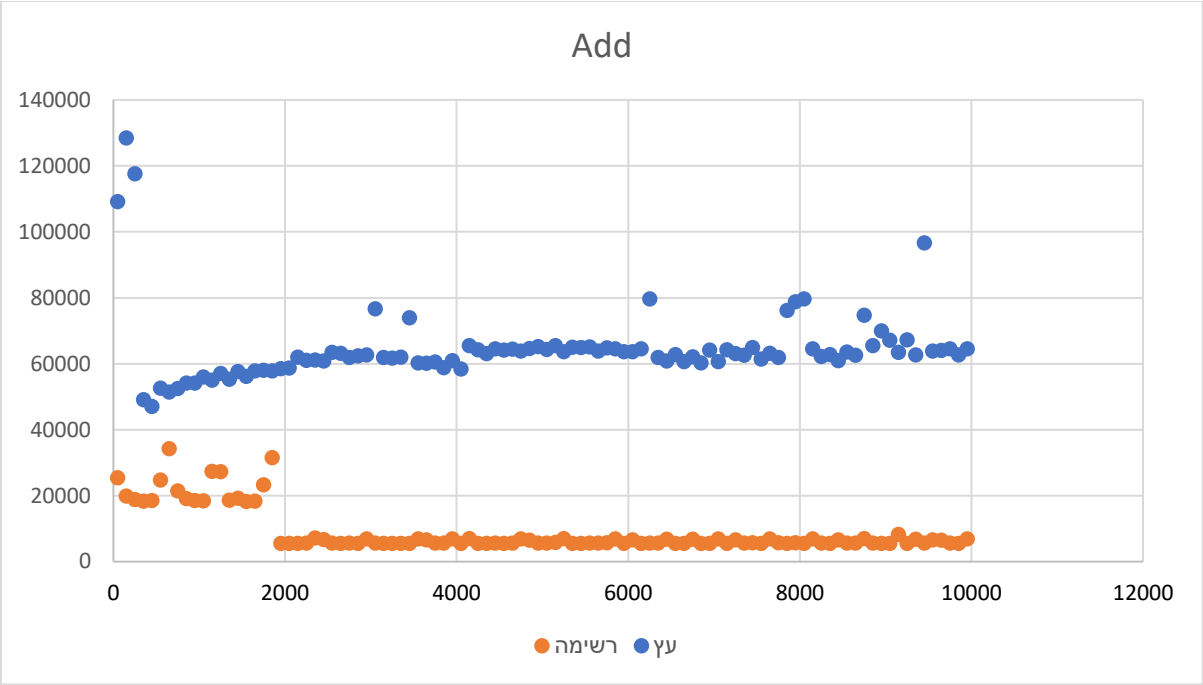
עץ	רשימה	n	עץ	רשימה	n	עץ	רשימה	n
9374	1831687	4600	11032	24768	2300	23887	85194	100
12658	19607	4600	8897	1070629	2400	23471	83696	100
9357	1837848	4700	10853	24818	2400	25636	145169	200
11891	19634	4700	8611	1111976	2500	23482	26067	200
9595	1871586	4800	10301	24833	2500	25172	118829	300
11161	19621	4800	8618	1162207	2600	26004	26059	300
9545	1884287	4900	10328	24701	2600	27962	164600	400
12069	19776	4900	8669	1233976	2700	25972	25878	400
9400	1968889	5000	10006	24797	2700	27190	210716	500
10764	19594	5000	8691	1277381	2800	25313	25871	500
9493	1899349	5100	10320	24682	2800	24837	272802	600
12336	18930	5100	8735	1313547	2900	26900	24815	600
9727	1929060	5200	10168	24697	2900	23055	304554	700
11887	19005	5200	8553	1406632	3000	27962	24746	700
9510	1964308	5300	10249	24797	3000	30068	345069	800
12336	19016	5300	11361	1409040	3100	28725	24690	800
9685	2002167	5400	10082	24810	3100	27938	389368	900
11455	18932	5400	11288	1517945	3200	26016	24707	900
9463	2046854	5500	10180	23688	3200	9393	433881	1000
12649	18985	5500	10787	1448699	3300	9176	24742	1000
9376	2090273	5600	10351	23637	3300	9209	479556	1100
12142	18981	5600	10433	1540610	3400	10211	24688	1100
9270	2141998	5700	10493	22771	3400	9020	524535	1200
11438	18358	5700	10619	1528528	3500	10669	24703	1200
9057	2118748	5800	9840	22864	3500	8638	570194	1300
11946	18977	5800	10158	1515629	3600	10223	24763	1300
9285	2178149	5900	10426	21084	3600	8638	615461	1400
11010	17780	5900	9893	1552719	3700	9966	26399	1400
9187	2113259	6000	10096	21867	3700	8284	708001	1500
12034	17844	6000	9838	1543769	3800	9639	25176	1500
9202	2148422	6100	10240	20394	3800	10655	738898	1600
11524	17810	6100	9619	1612768	3900	9618	25113	1600
15155	2138769	6200	10338	20345	3900	10769	753007	1700
14678	16762	6200	9657	2019082	4000	9827	24849	1700
12579	2106723	6300	10191	20740	4000	10050	822257	1800
12121	16741	6300	9506	1713192	4100	9518	24798	1800
11781	2145871	6400	10672	20367	4100	9790	895080	1900
10537	16883	6400	9300	1702352	4200	9690	25045	1900
11453	2180689	6500	13082	20330	4200	9589	893421	2000
12525	16302	6500	9431	1758202	4300	9518	24727	2000
11211	2200679	6600	11743	20298	4300	9221	931295	2100
11598	16274	6600	9364	1791102	4400	10914	24743	2100
11149	2234319	6700	12998	19742	4400	8919	976650	2200
12329	18214	6700	9451	1790979	4500	10732	24742	2200
11111	2259953	6800	11640	19614	4500	8796	1020842	2300

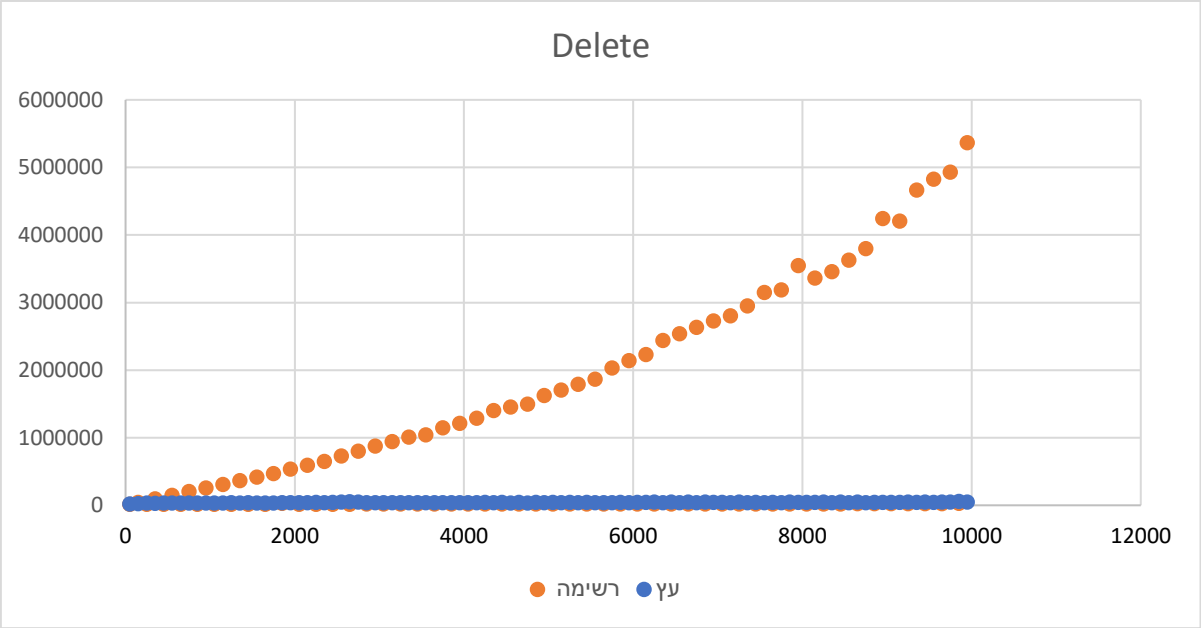
n	רשימה	עץ
6800	16518	11435
6900	2271956	10977
6900	15938	15859
7000	2237941	10757
7000	16015	11284
7100	2331551	10622
7100	16405	12272
7200	2387595	10478
7200	16318	12485
7300	2373261	10498
7300	15403	10559
7400	2266454	10460
7400	14629	12155
7500	2292155	10276
7500	14575	11099
7600	2278528	10326
7600	14568	12216
7700	2316319	10041
7700	14225	11311
7800	2334845	9661
7800	14310	11542
7900	2360419	9888
7900	14302	11031
8000	2384089	9856
8000	14602	10655
8100	2482297	9742
8100	14593	11722
8200	2414118	9708
8200	14282	12347
8300	2432799	9787
8300	14344	13725
8400	2468806	9547
8400	14204	13097
8500	2533331	9713
8500	14209	13663
8600	2534437	9505
8600	14208	12872
8700	2558272	9614
8700	14285	13530
8800	2639605	9704
8800	14267	13571
8900	2636280	10198
8900	14267	12812
9000	2663784	9683
9000	14212	13241

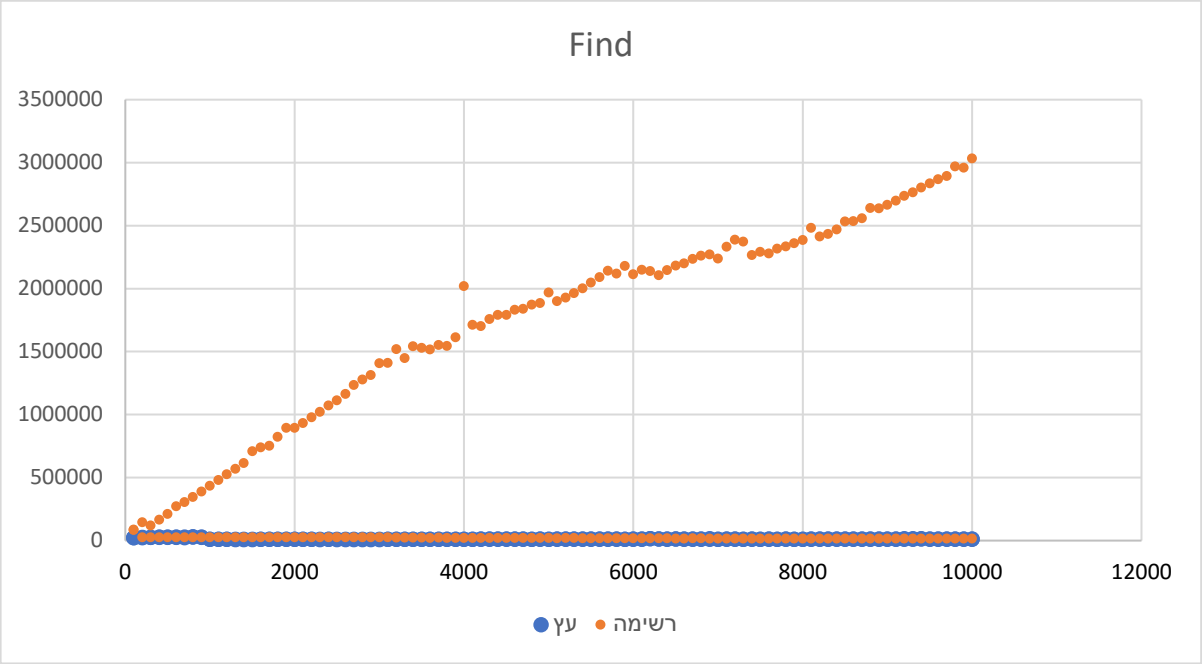
n	רשימה	עץ
9100	2697112	9664
9100	14229	12626
9200	2736649	9660
9200	14250	13969
9300	2763663	10100
9300	14263	14593
9400	2801450	13796
9400	14250	16421
9500	2835543	10047
9500	14342	12835
9600	2868636	9899
9600	14233	12101
9700	2893774	10583
9700	14189	13432
9800	2970470	9920
9800	14274	13016
9900	2959761	9583
9900	14317	13371
10000	3031929	9728
10000	14300	13092

Delete:

עץ	רשימה	n	עץ	רשימה	n	עץ	רשימה	n
44275	22671	9050	34181	1452378	4550	21052	16014	50
41653	4204834	9150	42238	17568	4650	26226	41959	150
45496	24732	9250	35318	1499042	4750	31378	15692	250
40862	4664138	9350	41347	17717	4850	29414	93980	350
48783	25879	9450	37591	1622260	4950	32145	15699	450
42714	4826002	9550	40804	18118	5050	32128	149306	550
47763	26113	9650	36406	1705806	5150	33061	15777	650
47672	4929020	9750	42444	17964	5250	33335	202612	750
55791	27504	9850	36872	1788189	5350	33402	15713	850
46319	5366416	9950	43865	18020	5450	35105	256391	950
			37165	1865101	5550	34022	15762	1050
			40260	18110	5650	33462	309605	1150
			38087	2033231	5750	37454	15688	1250
			43511	19146	5850	34959	362574	1350
			40141	2140416	5950	35944	15697	1450
			43130	19233	6050	34755	416181	1550
			41393	2231388	6150	35462	15701	1650
			46494	19781	6250	35473	469530	1750
			40125	2438630	6350	37434	28773	1850
			47571	20435	6450	37553	536457	1950
			38903	2540882	6550	37274	16083	2050
			46234	20511	6650	36192	591205	2150
			39101	2635594	6750	40993	16092	2250
			46738	20705	6850	37669	647808	2350
			41327	2728364	6950	42706	16111	2450
			44294	20436	7050	46589	728404	2550
			37435	2806165	7150	50154	16765	2650
			46416	20590	7250	46488	798913	2750
			36629	2950874	7350	36469	17032	2850
			44483	21385	7450	37856	875964	2950
			38751	3147792	7550	37242	17482	3050
			42711	21201	7650	35903	940874	3150
			38198	3185188	7750	40237	17629	3250
			45345	21178	7850	36967	1010918	3350
			41220	3548207	7950	38466	17037	3450
			43433	21119	8050	36827	1041509	3550
			41911	3364859	8150	38222	17182	3650
			45734	21192	8250	37323	1148524	3750
			40331	3456752	8350	38821	17507	3850
			47177	21299	8450	38546	1214464	3950
			40362	3628264	8550	38849	17524	4050
			45813	22004	8650	40034	1288821	4150
			38602	3798074	8750	44001	17708	4250
			44376	22100	8850	36501	1399721	4350
			40733	4242304	8950	43320	17635	4450


Add
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
רשימה
עץ


Delete
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
רשימה
עץ


Find
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
עץ
רשימה

חלק שני:

מבנה כללי:

מבנה מאגר התמונות שומר **עץ** AVL (מעתה ייקרא "$Images$") בעל מפתחות מספריים המסמלים את "מזהה התמונה" וערכים מסוג "תמונה".

כל ערך תמונה מכיל בתוכו מזהה תמונה, וכן **מערך ורשימה מקושרת דו כיוונית**.

המערך (מעתה ייקרא "$segments$") נועד לסמל את הסגמנטים של התמונה ואת התיוגים שלהם.

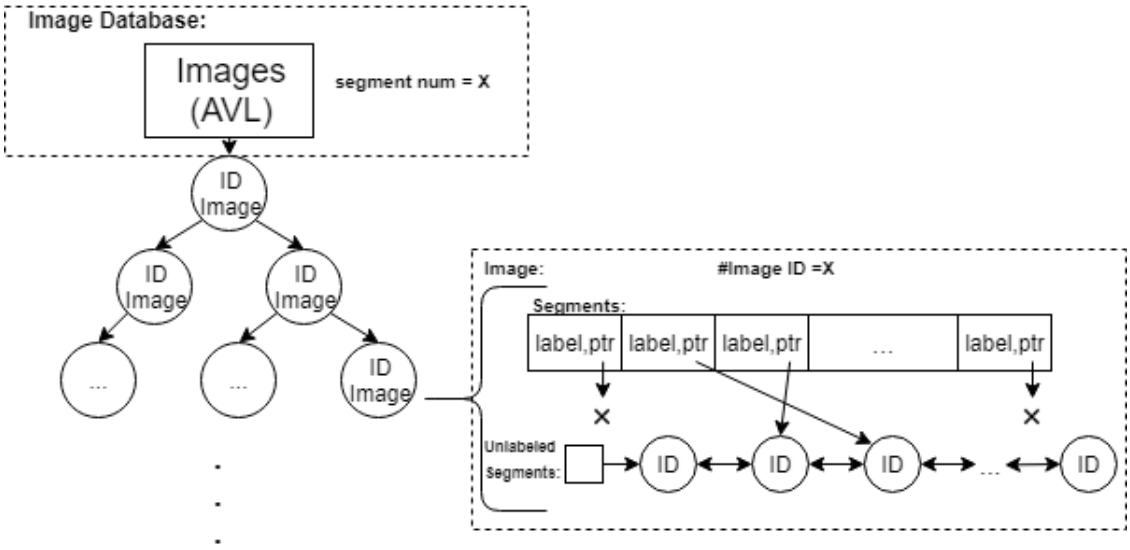
הרשימה המקושרת (מעתה תיקרא "$unlabeled$") נועדה להכיל מידע על הסגמנטים חסרי התיוג בתמונה.

המערך באורך זהה למספר הסגמנטים, כאשר כל תא במערך תואם באינדקס שלו למספר הסגמנט שהוא מייצג.

עבור כל תא במערך, הסגמנט שהוא מייצג יכול להיות משני סוגים:

- <u>עבור סגמנט מתויג:</u> התא המתאים במערך יכיל את הערך המספרי של התיוג ומצביע ל-$NULL$.
- <u>עבור סגמנט חסר תיוג:</u> התא המתאים במערך יכיל מצביע לחוליה מתאימה לסגמנט שתימצא ברשימה המקושרת, והערך המספרי בתא יהיה "ערך זבל" שאין להתייחס אליו כתיוג הסגמנט אם קיים בתא מצביע חוקי.

להלן תרשים הממחיש את המבנה הכללי:



מימוש הפעולות וסיבוכיות זמן:

$Init$:

מתבצע אתחול של העץ $Images$ כעץ ריק.
לאחר מכן שומרים בתוך המבנה את מספר הסגמנטים הקבוע לכל תמונה לשימוש עתידי.
מכיוון שאתחול עץ AVL והעתקת ערך מתבצעים ב־$O(1)$, זוהי גם הסיבוכיות הכוללת.

$AddImage$:

ראשית מתבצע חיפוש של התמונה בעץ. אם התמונה קיימת, מחזירים שגיאה.
אם התמונה שרוצים להוסיף היא אכן חדשה, מתבצעת יצירה של אובייקט התמונה שיש להכניס למבנה:
שומרים בתמונה את המזהה המספרי שלה, ולאחר מכן משום שביצירת תמונה, כל הסגמנטים בה חסרי תיוג, מכניסים בלולאה חוליה לרשימת $Unlabeled$ עבור כל סגמנט, המכילה את המזהה שלו.
במקביל, המצביע לכל חוליה נשמר בתא המתאים במערך $segments$.
מכיוון שהכנסת חוליה לרשימה מקושרת ושמירת במצביע שלה במערך המאפשר גישה ישירה מתבצעים ב־$O(1)$, נקבל שאתחול אובייקט תמונה מתבצע בסיבוכיות $O(n)$ כאשר עבור כל אחד מ־n הסגמנטים מתבצעות הפעולות הללו פעם אחת.
לאחר מכן מצביע לאובייקט התמונה החדש מוכנס לעץ $Images$ עם מזהה התמונה כמפתח.
סיבוכיות חיפוש והכנסה לעץ AVL כאשר במערכת k תמונות היא $O(\log(k))$.
לכן הסיבוכיות הכוללת היא: $O(\log(k)+n)$.

$DeleteImage$:

ראשית מתבצע חיפוש התמונה שיש למחוק בעץ $Images$ לפי המזהה שלה.
סיבוכיות החיפוש בעץ AVL בעל k תמונות: $O(\log(k))$.
אם התמונה נמצאה, מוציאים אותה מהעץ (בסיבוכיות $O(\log(k))$ בעץ AVL) ומוחקים את אובייקט ה־$Image$.
במחיקת האובייקט, מתבצע שחרור בלולאה של כל סגמנט במערך, ולאחר מכן שחרור כל חוליה ברשימה המקושרת.
מכיוון ששניהם מכילים לכל היותר n סגמנטים, ושחרור תא במערך או חוליה ברשימה מתבצע ב־$O(1)$, סיבוכיות ההריסה היא $O(n)$.
לכן הסיבוכיות הכוללת היא: $O(\log(k)+n)$.

$AddLabel$:

ראשית מתבצע חיפוש בעץ $Images$ של התמונה שלתוכה יש להוסיף תיוג.

חיפוש בעץ AVL בעל k תמונות הוא בסיבוכיות $O(\log(k))$.

אם התמונה נמצאה, מתבצעת גישה ישירה לתא במערך $segments$ שלה שמייצג את הסגמנט שיש לתייג.

אם מהבדיקה עולה שהסגמנט כבר מתויג (המצביע בתא $NULL$) מוחזרת שגיאה.

אם הסגמנט אינו מתויג, מתייגים את התא המתאים במערך ובאמצעות המצביע השמור בתא לחוליה המתאימה ברשימת $Unlabeled$ ניתן להוציא ולהרוס אותה בסיבוכיות $O(1)$ מכיוון שזו רשימה דו כיוונית.

לאחר מכן מסמנים את הסגמנט בתא המתאים כ"מתויג" על ידי השמה של $NULL$ למצביע החוליה בתוכו.

מכיוון שלאחר מציאת התמונה, כל הפעולות מתבצעות בגישה ישירה ובסיבוכיות $O(1)$, הסיבוכיות הכוללת היא: $O(\log(k))$ (ובפרט $O(\log(k)+n)$)

$GetLabel$:

ראשית מתבצע חיפוש בעץ $Images$ של התמונה שממנה רוצים לקרוא את התיוג.

חיפוש בעץ AVL בעל k תמונות הוא בסיבוכיות $O(\log(k))$.

אם התמונה לא נמצאה, מוחזרת שגיאה, ואחרת מבצעים גישה ישירה בתמונה למערך הסגמנטים ובודקים את מצב הסגמנט המבוקש.

אם הסגמנט המבוקש אינו מתויג, נדע זאת בסיבוכיות $O(1)$ מכך שהמצביע בתא המתאים במערך לא יהיה $NULL$, ונחזיר שגיאה.

אם הסגמנט המבוקש מתויג, נקרא את התיוג בגישה ישרה מהמערך ב־$O(1)$ ונחזיר אותו.

בסך הכול חיפוש ומספר קבוע של גישות ישירות הם בסיבוכיות כוללת של $O(\log(k))$.

$DeleteLabel$:

ראשית מתבצע חיפוש בעץ $Images$ של התמונה שבה מבקשים למחוק התיוג.

חיפוש בעץ AVL בעל k תמונות הוא בסיבוכיות $O(\log(k))$.

אם התמונה לא נמצאה מוחזרת שגיאה, ואחרת מבצעים גישה ישירה בתמונה למערך הסגמנטים ובודקים את מצב הסגמנט המבוקש.

בדומה לפעולה ב־$GetLabel$, אם הסגמנט אינו מתויג נוכל להחזיר שגיאה בסיבוכיות $O(1)$.

אם הסגמנט מתויג, כל שיש לעשות כדי לסמנו כ"לא מתויג" הוא ליצור חוליה חדשה ל־$Unlabeled$ עם מספר הסגמנט, להכניס אותה לרשימה בסיבוכיות $O(1)$ (כי זו הסיבוכיות שבה נתבקשנו לממש הכנסה לרשימה), ולאחר מכן להכניס את המצביע אליה לתא במערך $segments$ המסמל את הסגמנט שאת תיוגו מחקנו. מעתה בכל גישה למבנה הנתונים נוכל לראות שמצביע זה אינו $NULL$ ולכן לפי הצורה בה הגדרנו את המבנה, הסגמנט אכן אינו מתויג.

מספר קבוע של פעולות השמה והכנסת חוליה לרשימה מקושרת מתבצעים ב־$O(1)$.

לכן הסיבוכיות הכוללת היא $O(\log(k))$.

$GetAllUnlabeledSegments$:

ראשית מתבצע חיפוש בעץ $Images$ של התמונה שממנה יש למצוא סגמנטים.
חיפוש בעץ AVL בעל k תמונות הוא בסיבוכיות $O(\log(k))$.
אם התמונה אינה קיימת, נחזיר שגיאה ונבצע השמה של ערכי $NULL$ מתאימים ב־$O(1)$ למצביע שהועבר לפונקציה.
לאחר מכן נבצע ספירה של האזורים שאינם מתויגים בתמונה שנמצאה.
הספירה מתבצעת בסיבוכיות $O(1)$ משום שהרשימה המקושרת $Unlabeled$ ממומשת בחלק 1 באופן ששומר את שדה הגודל שלה ומחזיר אותו ב־$O(1)$.
לכן נוכל לדעת ב־$O(1)$ האם לא קיים בתמונה אזור פנוי (גודל $Unlabeled$ יהיה 0).
אם קיימים בתמונה אזורים פנויים, נקצה מקום למערך שיכיל את מספריהם (שאת אורכו השגנו לאחר הספירה).
נבצע סריקה של הרשימה $Unlabeled$ ונעתיק את תוכנה למערך (כלומר מקבלים מערך של כל מספרי הסגמנטים הלא מתויגים).
ההעתקה מתבצעת ב־$O(1)$ מכיוון שהערכים ב־$Unlabeled$ הם רק int.
לבסוף נחזיר את המערך החדש שבנינו שמכיל את כל הסגמנטים הלא מתויגים, דרך המצביע שהועבר לפונקציה.
לפי הגדרת הרשימה $Unlabeled$ כרשימה שמכילה רק את מספרי הסגמנטים הלא מתויגים: נקבל שאורכה s, ומכיוון שעבור כל חוליה שלה מתבצעות פעולות ב־$O(1)$ נקבל שסיבוכיות המעבר על הרשימה היא $O(s)$.
לכן הסיבוכיות הכוללת היא $O(\log(k)+s)$.

$GetAllSegmentsByLabel$:

ראשית נבצע סיור על העץ $Images$ על מנת לחלץ ממנו מערך המכיל מצביעים לכל התמונות.
סיור מתבצע על עץ חיפוש בעל k תמונות ב־$O(k)$.
לאחר מכן נעבור על מערך התמונות בלולאה ועבור כל תמונה נסכום את מספר הסגמנטים שהם בעלי התיוג הרצוי.
עבור כל תמונה, הספירה מתבצעת על ידי מעבר בלולאה על מערך $segments$ שלה והחזקת מונה של מספר הסגמנטים שנמצאו מתויגים ובעלי התיוג הרצוי.
לכן עבור כל תמונה נוכל לספור את הסגמנטים הרלוונטיים בה ב־$O(n)$.
לכן הסכימה על כל k התמונות מתבצעת ב־$O(k \cdot n)$.
לאחר מכן נקצה שני מערכי מספרים בגודל שחילצנו מהסכימה (הקצאה ב־$O(1)$).
נבצע שוב איטרציה על מערך התמונות. עבור כל תמונה, נחלץ מתוכה מערך של כל הסגמנטים שהם בעלי התיוג הרצוי.
הדבר מתבצע על ידי איטרציה על מערך $segments$ והעתקת מספרי הסגמנטים הרצויים למערך נפרד.
לאחר בניית מערך הסגמנטים בעלי התיוג הרצוי, נבצע איטרציה עליו, ועבור כל סגמנט עם התיוג הרצוי, נעתיק את מספרו ואת מספר התמונה שבה הוא נמצא למערכים שבנינו.
על מנת לחלץ את מערך הסגמנטים הרצויים בכל תמונה, הסיבוכיות היא סיבוכיות איטרציה על מערך $segments$ וביצוע העתקות ב־$O(1)$ עבור כל תא בו, כלומר סיבוכיות $O(n)$.
לאחר מכן סיבוכיות איטרציה נוספת על מערך הסגמנטים הרצויים גם היא ב־$O(n)$ משום שמערך זה מכיל לכל היותר את כל הסגמנטים בתמונה.

לכן עבור כל תמונה מצבעים פעולות בסיבוכיות $O(n)$, כלומר הסיבוכיות הכוללת עבור כל התמונות היא $O(k \cdot n)$ מכיוון שעבור כל סגמנט מבצעים מספר קבוע של פעולות ובדיקות ב־$O(1)$.

מכיוון שבעץ $Images$, התמונות שמורות ממוינות לפי המזהים שלהם מתכונות עץ חיפוש, וסיור $Inorder$ שומר על תכונה זו כאשר אנו מעתיקים את התמונות למערך, וכמו כן בתוך כל תמונה אנו מבצעים איטרציה על מערך ה־$segments$ מההתחלה לסוף, נקבל שמערכי התוצאה ממוינים כמבוקש לפי מזהה תמונה בסדר עולה, ועם סידור פנימי בסדר עולה של סגמנטים בתמונה משותפת.

לבסוף נהרוס את מערך מצביעי התמונות שחילצנו מהעץ איבר־איבר. מכיוון שהמערך מכיל מצביעים לתמונות, ולא את התמונות עצמן, נוכל להרוס כל מצביע (תא במערך) בסיבוכיות $O(1)$. כלומר המערך כולו נהרס בסיבוכיות $O(k)$: אורך המערך.

בסך הכול ביצענו רצף פעולות בסיבוכיות $O(k + k \cdot n + k \cdot n + k) = O(k \cdot n)$.

$Quit$:

מתבצע מעבר על העץ $Images$ ושחרור כל תמונה בתוכו.

במימוש מחלק 1 של העץ, סיבוכיות השחרור של מבנה העץ בעל k התמונות היא $O(k)$.

אך בנוסף עבור כל תמונה בעץ קיימת סיבוכיות של שחרור השדות בתמונה:

עבור כל תמונה בעץ נעבור על מערך הסגמנטים בלולאה ונשחרר את הזיכרון המוקצה לכל תא ב־$O(1)$.

כלומר סיבוכיות ההריסה של המערך באורך n היא $O(n)$.

לאחר מכן נעבור חוליה־חוליה על הרשימה המקושרת $Unlabeled$ ונהרוס כל חוליה בסיבוכיות $O(1)$.

הרשימה מכילה לכל היותר את כל n הסגמנטים בתמונה, לכן הסיבוכיות של הריסתה היא $O(n)$.

בסך הכול סיבוכיות הריסה של כל תמונה היא $O(n)$, ולכן סיבוכיות הריסת כל k התמונות היא $O(k \cdot n)$, וכזו גם הסיבוכיות הכוללת.

סיבוכיות מקום:

במבנה בעל k תמונות קיים עץ AVL ששומר אותן, ולכן סיבוכיות המקום שלו היא $O(k)$.

בנוסף, סיבוכיות המקום בכל תמונה היא סיבוכיות שמירה של מערך באורך n הסגמנטים, רשימה שמכילה לכל היותר את כל הסגמנטים ולכן באורך לכל היותר n, וכן מספר קבוע של ערכים ומצביעים.

לכן סיבוכיות המקום של אחסון תמונה היא $O(n)$, ולכן סיבוכיות אחסון כל k התמונות, שהיא הסיבוכיות הכוללת של המבנה, היא $O(k \cdot n)$.

כעת נותר להוכיח שסיבוכיות המקום של רקורסיות והקצאות מערכים (פרט למערכים השמורים במבנה) בפעולות אינן חורגות מסיבוכיות זו:

$Init$:

אין הקצאת מערכים או מקום נוסף, וללא רקורסיות.

$Quit, AddImage, DeleteImage, AddLabel, GetLabel, DeleteLabel$:

בכל הפונקציות הללו אין הקצאת מקום נוסף.

הרקורסיה שמתבצעת בהן היא רקורסיה בפעולות הריסה, חיפוש, הכנסה והוצאה לעץ AVL.

מכיוון שהעץ בעומק k, מתכונות עץ AVL הפעולות הללו הן בעומק לכל היותר גובה העץ, כלומר $\log(k)$.

לכן סיבוכיות המקום הנוסף ברקורסיה בכל הפעולות הללו היא $O(\log(k))$ ובפרט $O(k \cdot n)$.

$GetAllUnlabeledSegments$:

כמו בפעולות הקודמות, ברקורסיה מבצעים פעולות על עץ AVL בסיבוכיות מקום $O(\log(k))$.

בנוסף מתבצעת הקצאה של מערך הסגמנטים הלא מתויגים, שהוא לכל היותר באורך $k \cdot n$ (אם כל הסגמנטים בכל התמונות אינם מתויגים).

לכן סיבוכיות המקום הנוסף היא $O(k \cdot n)$.

$GetAllSegmentsByLabel$:

באופן דומה לפעולה הקודמת, קיימת סיבוכיות מקום רקורסיבית של $O(\log(k))$.

בנוסף מקצים מערך זמני לשמירה של כל התמונות, באורך k ולכן בסיבוכיות מקום נוסף $O(k)$.

מערך זה נהרס בסוף הפעולה, ולכן הסיבוכיות אינה מצטברת במבנה.

בנוסף מתבצעת הקצאה של המערכים המוחזרים מהפונקציה, שהם לכל היותר מערך של כל k התמונות ומערך של כל $k \cdot n$ הסגמנטים.

כלומר סיבוכיות המקום הנוסף היא עדיין $O(k \cdot n)$.

בסך הכול הראינו שסיבוכיות המקום במבנה וסיבוכיות המקום הנוסף בפונקציות היא $O(k \cdot n)$, ולכן זו סיבוכיות המקום הכוללת כנדרש.