אותות ומערכות 044131 ־ חורף 2019
תרגיל מחשב 1

תאריך הגשה: 25.11.2019
בודק התרגיל: יונתן גת
כתובת מייל: yonatangat@campus.technion.ac.il

הנחיות כלליות:

- אסור להעתיק.

הגשה

- יש להגיש ־
  1. קובץ PDF יחיד עם כל הגרפים והתשובות המילוליות (והחישוביות).
  2. 4 קבצי Matlab, אחד לכל שאלה (ואם צריך קבצים לפונקציות עזר)
- אופן ההגשה: הקוד וקובץ התשובות יש לקבץ לקובץ עם סיומת zip.
- שם הקובץ יהיה מורכב ממספר ת.ז. של שני הסטודנטים ויתחיל בשם Wet1. לדוגמה, Wet1_987654321_123456789.zip
- כל זוג נדרש להגיש את המטלה פעם אחת, ע"י אחד מבני הזוג. אין להגיש את המטלה פעמיים.
- הגשה באתר ה־Moodle.

טיפים כללים לסדר:

1. בראשית כל Script שתכתבו כדאי להשתמש בפקודות הבאות:

```
close all;
clear;
% clc; %-- optional
```

- close all - סוגרת את כל ה־ figures הפתוחים.
- clear - פקודה שמוחקת את כל המשתנים שקיימים ב Workspace.
- clc - מסלקת את רשימת הפקודות שמופיעות ב־ Command Window.

2. עבור כל תרגיל, פתחו Script בשם Q#.m כאשר # הוא מספר התרגיל.
3. כל סעיף יש לכתוב ב Section נפרד. ניתן לעשות את זה ע"י %% באופן הבא

```
%% Here we start a new section
```

4. הקפידו על כותרות לגרפים ושמות בעלי משמעות לצירים.

1 חימום

- צרו קובץ Q1.m. ניתן לעשות זאת ע"י הפקודה:

```
edit Q1.m
```

כאשר מריצים קוד Matlab (או קוד Python), הקוד לא מקופמל (ניתן לקמפל אבל זה נושא מתקדם). לכן מומלץ לכתוב קוד יעיל בהתאם לשפה, נדגים זאת ע"י כפל מטריצות.

1. הגרילו שתי מטריצות אקראיות ריבועיות בגודל 4×4, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4\times4}$. עשו זאת ע"י שימוש בפונקית rand שמחזירה מטריצה אקראית ריבועיות בגודל $N \times N$.

```
N = 4;
A = rand(N);
B = rand(N);
```

ניתן לפתוח את התיעוד של פונקציה מסויימת ע"י:

```
doc <function_name>
%-- for example:
doc rand
```

2. כתבו קוד שמכפיל שתי מטריצות $\boldsymbol{A}$ ו־ $\boldsymbol{B}$ ומציב את התוצאה לתוך מטריצה חדשה $\boldsymbol{C}_1$. הקוד צריך להיות בשורה אחת פשוטה.
3. כתבו קוד שמכפיל שתי מטריצות $\boldsymbol{A}$ ו־ $\boldsymbol{B}$ ומציב את התוצאה לתוך מטריצה חדשה $\boldsymbol{C}_2$. קטע הקוד צריך להיות בעזרת לולאות for. כאשר מותר בתוך הלולאה להשתמש אך ורק בכפל בין סקלרים. שימו לב שבהס"כ יש להתשמש ב־3 לולאות.
4. וודאו שמתקיים $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2$.
5. ניתן למדוד זמן ריצה של קוד מסוים באופן הבא:

```
tic;
% some code
toc;
```

השוו (ודווחו) בין זמני הריצה של הקוד בסעיפים 2 ו־ 3 עבור $N = 1000$.

הערה: מומלץ לבדוק ששתי מטריצות שוות ע"י נורמת L_∞, לפי הקוד הבא (אפשר גם נורמת L_2 או L_1)

```
err = norm(C1(:) - C2(:), 'Inf')
```

שגיאה סבירה (שניתן להחשיב כאפס) תהיה באזור ה־10^{-12}.

2 מערכות

בחלק זה נכיר שתי מערכות פשוטות וחשובות ונתרגל הצגה של גרפים (צרו קובץ $\mathrm{Q2.m}$).

2.1 מערכת רוויה

נגדיר את המערכת הבאה:

$$\Psi\left\{x\right\}(t)=\begin{cases}1 & x(t)>1\\ x(t) & |x(t)|\leq 1\\ -1 & x(t)<-1\end{cases}$$

- סווגו את המערכת (רשמו פתרון **מלא** בדו"ח שלכם):
  - לינאריות, זיכרון, סיבתיות, קבועה בזמן והפיכות.
- צרו פונקציה (בקובץ חדש, או בסוף הסקריפט $\mathrm{Q2.m}$).
  השתמשו בתבנית הבאה:

```
function y = ThresholdSystem(x)
%-- Input:  vector x
%-- Output: vector y, y = Psi{x}

    y = x;
    %-- .....

end
```

- ממשו את הפונקציה (המערכת Ψ).
  הפונקציה תקבל אות כניסה x ותוציא אות יציאה y המקיים $y=\Psi\left\{x\right\}$.
  הערה: שימו לב שאין צורך לבצע לולאה, ניתן לרשום פקודות מהצורה הבאה:

```
y(abs(x) > 2) = 3;
```

- צרו ציר זמן המתחיל ב־$t=0$ ומסתיים ב־$t=10$ (לא כולל) בעל $N=1,000$ נקודות:

```
N = 1000;
t = linspace(0, 10, N + 1); t(end) = [];
```

- צרו את אות הכניסה הבא:

$$x(t)=2\sin\left(2\pi\frac{1}{5}t\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\cdot 3t\right)$$

- חשבו את $y=\Psi\left\{x\right\}$ בעזרת הפונקציה שמימשתם ושרטטו על אותה מערכת צריכים.
  את x בכחול ואת y באדום מקווקוו:

```
y = ThresholdSystem(x);

figure; hold on; grid on;
plot(t, x, 'b', 'LineWidth', 2)
plot(t, y, ':r', 'LineWidth', 2)
legend('x(t)', 'y(t)');
```

2.2 ממוצע רץ

- בעזרת ציר הזמן מהסעיף הקודם, הגדירו את אות הכניסה הבא (אות + רעש):

```
x  = sin(2*pi *.1 * t) + randn(1, N) / 10;
```

- הציגו את האות.
- כדי לנקות את האות מהרעש, נגדיר את המערכת הבאה:

$$y\left(t\right)=\Psi\left\{x\right\}\left(t\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-1}^{t+1}x\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

  - סווגו את המערכת (רשמו פתרון **מלא** בדו"ח שלכם):
    - לינאריות, זיכרון, סיבתיות, קבועה בזמן והפיכות.
- מצורף מימוש כמעט מלא של המערכת Ψ:

```
function [y, t2] = MovingAverage(x, t)
%-- Input:  1. x - input vector.
%--         2. t - time vector.

%-- Output: 1. y - output vector s.t. y = Psi{x}.
%--         2. t - valid output time vector.

Ts = t(2) - t(1);
Fs = round(1 / Ts);

X  = cumsum(x) * Ts;
X1 = X(2*Fs+1 :  end);
X2 = X(1      :  end-2*Fs);
t2 = t(Fs+1   :  end-Fs);

y  = ...; %-- Complete the code.

end
```

- נסו להבין את הקוד והשלימו את השורה האחרונה בקוד (רמז: Fs מציין את מספר הדגימות בשנייה אחת). הדרכה: מימוש המערכת נעשה באופן הבא:

$$y\left(t\right)=\Psi\left\{x\right\}\left(t\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-1}^{t+1}x\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left(X\left(t+1\right)-X\left(t-1\right)\right)$$

  כאשר X הינה הפונקציה הקדומה של x (כלומר, $X'=x$).
- חשבו את מוצא המערכת והציגו אותו ביחד עם האות המקורי:

```
[y, ty] = MovingAverage(x, t);

figure; hold on; grid on;
plot(t,  x, 'b', 'LineWidth', 1)
plot(ty, y, 'r', 'LineWidth', 2)
legend('x(t)', 'y(t)');
```

- ענו בדו"ח, מדוע אות המוצא קצר יותר (מה הבעיה בקצוות)?

3 מכפלה פנימית (לאותות מחזוריים)

עבור שני אותות מחזוריים המקיימים:

$$f(t) = f(t + T_0)$$
$$g(t) = g(t + T_0)$$

נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית (האוקלידית) באופן הבא (ביחד עם גורם נרמול):

$$\langle f, g\rangle_{T_0} \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)\,\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

כאשר $\overline{(\cdot)}$ מציין את פעולת הצמוד.

3.1 חישוב נומרי (קריאה בלבד)

מכיוון שבאופן כללי, אי אפשר לבצע את האינטגרל במחשב, אנחנו נקרב אותו באופן הבא:

$$\int_{T_0} f(t)\,\overline{g(t)}dt \approx \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\,\overline{g(nT_s)}\cdot T_s$$

כאשר T_s מציין את מרווח הדגימה ו־$N \cdot T_s = T_0$.
אם נסמן את שתי הסדרות בסכום בעזרת וקטורי עמודה באופן הבא:

$$\mathbf{f} \triangleq \begin{bmatrix} f(0) \\ f(T_s) \\ f(2T_s) \\ \vdots \\ f((N-1)T_s) \end{bmatrix},\ \mathbf{g} \triangleq \begin{bmatrix} g(0) \\ g(T_s) \\ g(2T_s) \\ \vdots \\ g((N-1)T_s) \end{bmatrix}$$

נקבל:

$$\int_{T_0} f(t)\,\overline{g(t)}dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n]\,\overline{\mathbf{g}[n]}\cdot T_s = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle \cdot T_s$$

כאשר $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$ זה המכפלה הפנימית הסטנדרטית (האוקלידית) בין שני וקטורים (ללא נרמול).
זיכרו שבכתיב מטריצי ניתן לרשום מכפלה פנימית באופן הבא:

$$\boxed{\langle f, g\rangle_{T_0} \approx \frac{T_s}{T_0}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} - & \mathbf{g}^H & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | \\ \mathbf{f} \\ | \end{bmatrix}}$$

הפעולה $\mathbf{g}^{\mathbf{H}}$ עושה הצמדה הרמיטית (שחלוף + צמוד) כלומר $\mathbf{g}^H \triangleq (\overline{\mathbf{g}})^T$.
ב־Matlab, בהינתן שני וקטורי **עמודה** $\mathbf{f}$ ו־ $\mathbf{g}$ ניתן לחשב את המכפלה הפנימית ע"י:

```
s = g' * f; %-- s = <f, g>
```

שימו לב שהצמוד הוא על $\mathbf{g}$.

3.2 אורתוגונליות

בחלק זה נדון בתכונת האורתוגונליות של פונקציות הרמוניות ($\sin$ ו־$\cos$).

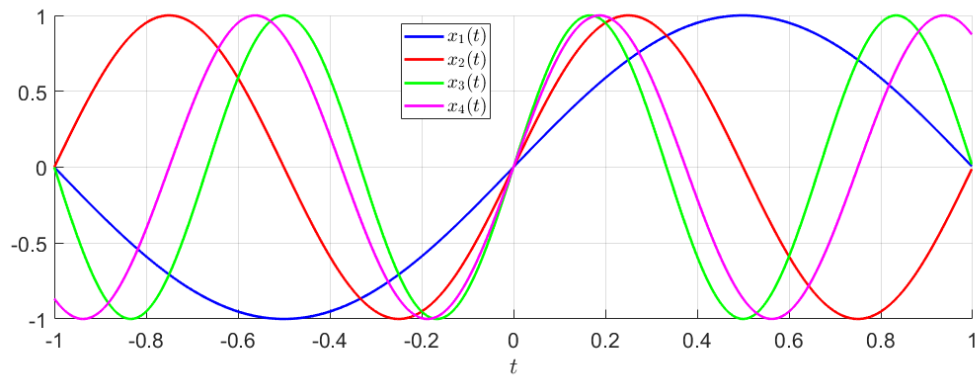
1. צרו ציר זמן (וקטור **עמודה**) המתחיל ב־$t=-1$, מסתיים ב־$t=1$ (לא כולל) ומכיל $N=1,000$ נקודות

```
N = 1000;
t = linspace(-1, 1, N + 1)'; t(end) = [];
```

2. הגידרו את האותות הבאים:

```
x1 = sin(2*pi * 1/2 * t);
x2 = sin(2*pi * 2/2 * t);
x3 = sin(2*pi * 3/2 * t);
x4 = sin(2*pi * 4/3 * t);
```

3. הציגו את האותות $x_{1,2,3,4}$ על אותה מערכת צירים עם legend מתאים:



נבחר $T_0=2$.

4. חשבו את המכפלה פנימית בין כל זוג אותות.
הדרכה, מומלץ לעבוד באופן מטריצי:

$$\boldsymbol{X} \triangleq \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{N}\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

כאשר $\boldsymbol{G}$ היא מטריצה 4 על 4 אשר מכילה את כל התוצאות.
בקוד:

```
X = [x1, x2, x3, x4];
G = X' * X / N
```

5. הביטו בתוצאת הסעיף הקודם וענו:
אלו וקטורים אורתגנלים זה לזה ואילו לא? מדוע לא כולם אורתוגנלים זה לזה?

3.3 מכפלה פנימית כהטלה אורתוגונלית

1. בעזרת ציר הזמן מסעיף קודם, הגדירו את האות הבא

$$x\left(t\right)=A_1\sin\left(2\pi\cdot t\right)+A_2\cos\left(2\pi\cdot 2t\right)+A_3\sin\left(2\pi\cdot 3t\right)$$

עבור:

$$\begin{cases} A_1=3\\ A_2=7\\ A_3=5 \end{cases}$$

2. בחלק זה נרצה למצוא את המקדמים A_i מתוך האות x.
הראו בדו"ח (עם פתרון מתמטי) שמתקיים:

$$\left\langle x,\sin\left(2\pi\left(\cdot\right)\right)\right\rangle_{T_0}=\frac{1}{T_0}\int\limits_{T_0}x\left(t\right)\sin\left(2\pi t\right)\mathrm{d}t=\frac{A_1}{2}$$

3. כעת הגדירו את 6 איברי הבסיס הבא:

```
s1 = 2 * sin(2*pi * 1 * t);
s2 = 2 * sin(2*pi * 2 * t);
s3 = 2 * sin(2*pi * 3 * t);
c1 = 2 * cos(2*pi * 1 * t);
c2 = 2 * cos(2*pi * 2 * t);
c3 = 2 * cos(2*pi * 3 * t);
```

וחשבו את המכפלה הפנימית בין x לכל אחד מאיברי הבסיס
(מומלץ לעשות זאת באופן מטריצי כפי שעשיתם בחלק הקודם).
רשמו את התוצאה. האם חילצתם את כל המקדמים A_i מתוך האות x?

4 טורי פורייה

להזכירכם, אות מחזורי ניתן לרשום כסכום של אותות הרמוניים:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^s[k]\, e^{j\omega_0 kt}$$

כאשר $x(t) = x(t+T_0)$ ו־ $\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{T_0}$.

1. ראשית נרצה להראות את השקילות בין $\sin(\cdot)$ ו־$\cos(\cdot)$ לבין $e^{j(\cdot)}$.
להזיכרם מתקיים:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right)$$
$$\sin(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)$$

הראו שכל צירוף לינארי $A\cos(t) + B\sin(t)$ ניתן לרשום באופן הבא:

$$A\cos(t) + B\sin(t) = \tilde{A}e^{jt} + \tilde{B}e^{-jt}$$

מצאו את $\tilde{A}$ ואת $\tilde{B}$ כפונקציה של A ו־ B (פתרו סעיף זה בדו"ח שלכם).

2. בהינתן אות מהצורה:

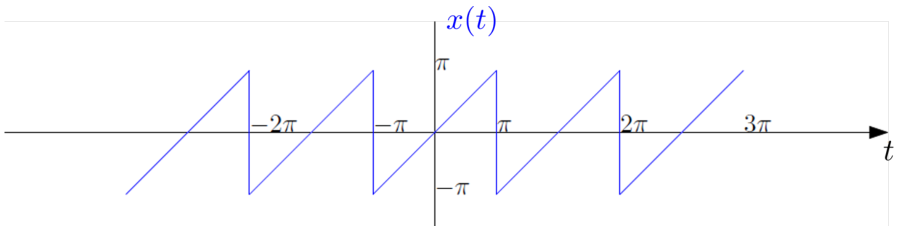
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^s[k]\, e^{j\omega_0 kt}$$

הראו שניתן למצוא את המקדם $X^s[k]$ (עבור k שלם כלשהו) בעזרת:

$$X^s[k] = \left\langle x, e^{j\omega_0 k(\cdot)}\right\rangle_{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{j\omega_0 kt}\mathrm{d}t$$

רמז: אורתוגונליות.

3. כעת נגדיר את האות המחזורי הבא:



איור 1: פונקצית גל שן־מסור

צרו ציר זמן (וקטור עמודה) המתחיל ב־$t=-\pi$ ומתסיים ב־$t=\pi$ (לא כולל) המכיל $N=10,000$ נקודות, וצרו וקטור (עמודה) המייצג את **המחזור הבסיסי** של האות x:

```
N = 10000;
t = linspace(-pi, pi, N + 1)'; t(end) = [];
x = t;
```

ציירו את המחזור הבסיסי של $x(t)$ כפונקצייה של הזמן.

4. חשבו בדו"ח את מקדמי פורייה של x, $X^s[k]$ עבור $k=-1,0,1$ בלבד (**אנליטית**). מדוע המקדמים הם מדומים? (רמז: האות x הינו אי־זוגי).

5. כעת נחשב את המקדמים באופן נומרי בעזרת Matlab.
נחשב את המקדמים עבור $k=-M,\dots,M$ (עבור $M\in\mathbb{N}$ כלשהו)
נתחיל עם $M=1$.
להזכירכם, ניתן לקרב האינטגרל באופן הבא:

$$X^s[k]\approx\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}_k\rangle$$

כאשר $\boldsymbol{x}$ זה הוקטור שייצרתם בסעיף קודם ו־$\boldsymbol{\varphi}_k$ זה הוקטור $e^{j\omega_0 kt}$.
כדי לחשב מספר מקדמים בפעם אחת ניתן להגדיר את מטריצה:

$$\boldsymbol{F}\triangleq\begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{\varphi}_{k_1} & \boldsymbol{\varphi}_{k_2} & \boldsymbol{\varphi}_{k3} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

ואז לחשב:

$$\begin{bmatrix} X^s[k_1] \\ X^s[k_2] \\ X^s[k_3] \end{bmatrix}\approx\frac{1}{N}\boldsymbol{F}^H\begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{x} \\ | \end{bmatrix}$$

את $\boldsymbol{F}$ ניתן ליצור ע"י הפקודה:

```
k = -M : M;
F = exp(1j * om0 * t * k);
```

חשבו נומרית את המקדמים עבור $M=1$ והשוו את התוצאות לסעיף הקודם (חישוב אנליטי).

6. הציגו על אותה מערכת צירים, את האות x המקורי, ואת האות:

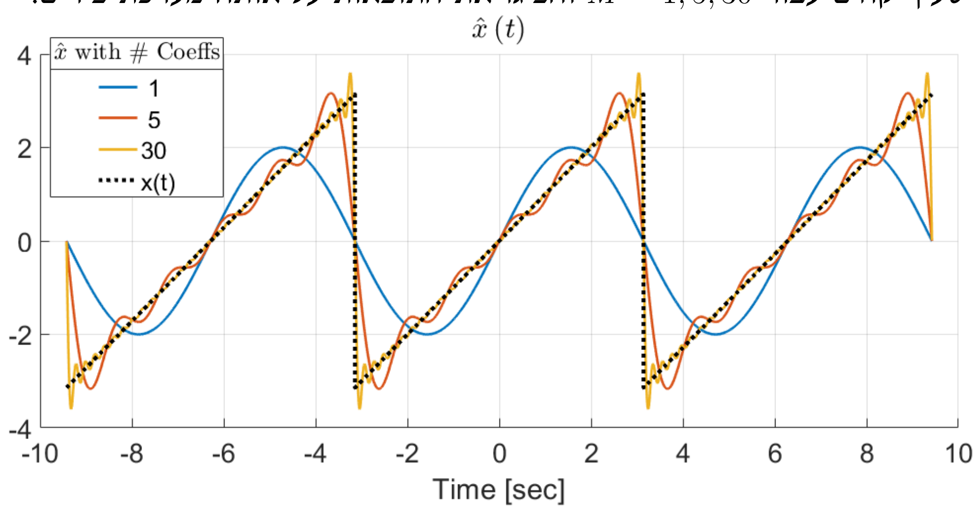
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-M}^{M} X^s[k] e^{j\omega_0 kt}$$

ניתן לעשות זאת בעזרת הפעולה הבאה:

$$\hat{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}^s$$

כאשר $\boldsymbol{X}^s$ הוא וקטור המקדמים שחישבתם בסעיף קודם.

7. חזרו על סעיף קודם עבור $M = 1, 5, 30$ והציגו את התוצאות על אותה מערכת צירים:



8. עבור $M = 1, 2, \ldots, 100$, הציגו גרף המתאר את שגיאת השחזור:

$$\text{err} = \|x - \hat{x}\|_2$$

ניתן להיעזר בפונקציה norm או לזכור שמתקיים:

$$\|x - \hat{x}\|_2^2 = \langle x - \hat{x}, x - \hat{x} \rangle$$

הערה: ניתן לממש את הסעיף הזה ללא שימוש בלולאה ולקבל זמן ריצה מהיר מאוד.