

אותות ומערכות 044131 - חורף 2019

תרגיל מחשב 2

הגשה תאריך: 27.12.2018
בודק התרגיל: יונתן גת
כתובת מייל: yonatangat@campus.technion.ac.il

הנחיות כלליות:

- אסור להעתיק.

הגשה

- יש להגיש:

1. קובץ PDF יחיד עם כל הגרפים והתשובות המילוליות (והחשוביות).
 2. קבצי הקוד שהכתבתם - קובץ לכל שאלה (3 שאלות) וקבצי עזר שכתבתם (פונקציות כלליות)
- אופן ההגשה: את כל קבצי הקוד, וקובץ התשובות יש לקבץ לקובץ עם סיומת zip.
 - שם הקובץ יהיה מורכב ממספר ת.ז. של שני הסטודנטים ויתחיל בשם Wet2. לדוגמה, Wet2_987654321_123456789.zip.
 - כל זוג נדרש להגיש את המטלה פעם אחת, ע"י אחד מבני הזוג. אין להגיש את המטלה פעמיים.
 - הגשה באתר ה-Moodle.

1 התמרת פורייה

1.1 חישוב נומרי (קריאה בלבד)

בשאלה זאת נכין שתי פונקציות הממשות התמרת פורייה והתמרת פורייה הפוכה. התמרת פורייה ניתנת ע"י:

$$X^F(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega) = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

מכיוון שבאופן כללי, אי אפשר לבצע את האינטגרל במחשב, אנחנו נקרב אותו באופן הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=-N}^N x(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t} \cdot \Delta t$$

אם נסמן את שתי הסדרות בסכום בעזרת וקטורי עמודה באופן הבא:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x(-N\Delta t) \\ \vdots \\ x(-\Delta t) \\ x(0) \\ x(\Delta t) \\ \vdots \\ x(N\Delta t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_\omega \triangleq \begin{bmatrix} e^{j\omega(-N\Delta t)} \\ \vdots \\ e^{j\omega(-\Delta t)} \\ 1 \\ e^{j\omega\Delta t} \\ \vdots \\ e^{j\omega N\Delta t} \end{bmatrix}$$

נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=-N}^N x(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t} \cdot \Delta t = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_\omega \rangle \cdot \Delta t$$

בסה"כ:

$$X^F(\omega_0) \approx \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_{\omega_0} \rangle \cdot \Delta t = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{\varphi}_{\omega_0}^H & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{x} \\ | \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

הפעולה \mathbf{v}^H עושה הצמדה הרמיטית (שחלוף + צמוד) כלומר $\mathbf{v}^H \triangleq (\bar{\mathbf{v}})^T$.

ב-Matlab, בהינתן שני וקטורי עמודה \mathbf{v}_1 ו- \mathbf{v}_2 ניתן לחשב את המכפלה הפנימית ע"י:

```
s = v2' * v1; %-- s = <v1,v2>
```

שימו לב שהצמוד הוא על \mathbf{v}_2 .

1.2 שימוש בכפל מטריצות (קריאה בלבד)

חישוב התמרת פורייה במספר נקודות, למשל $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ניתן ע"י:

$$\begin{bmatrix} X^F(\omega_1) \\ X^F(\omega_2) \\ X^F(\omega_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \varphi_{\omega_1} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \varphi_{\omega_2} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \varphi_{\omega_3} \rangle \end{bmatrix} \cdot \Delta t = \begin{bmatrix} - & \varphi_{\omega_1}^H & - \\ - & \varphi_{\omega_2}^H & - \\ - & \varphi_{\omega_3}^H & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{x} \\ | \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

או במילים אחרות אם נסמן את המטריצה (שימו לב שפה אין צמוד):

$$\mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} | & | & | \\ \varphi_{\omega_1} & \varphi_{\omega_2} & \varphi_{\omega_3} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

נקבל:

$$\begin{bmatrix} X^F(\omega_1) \\ X^F(\omega_2) \\ X^F(\omega_3) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^H \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{x} \\ | \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

1.3 מימוש ב-Matlab

1.3.1 סעיף 1 - התמרת פורייה

ממשו ב-Matlab את הפונקציה:

```
function Xf = FourierTransform(x, t, w)
    %-- Enter your code here...
end
```

כאשר

1. ארגומנטים:

- (א) x (וקטור עמודה באורך N) - הוא אות הכניסה x בזמנים t .
- (ב) t (וקטור עמודה באורך N) - מייצג את ציר זמן עליו מוגדר x .
- (ג) w (וקטור עמודה באורך M) - מייצג את ציר התדר עליו יהיה מוגדר אות המוצא X^F .

2. אות המוצא Xf (וקטור עמודה באורך M) הוא אות המוצא X^F בתדרים w .

הדרכה:

1. בנו את המטריצה \mathbf{F} (בשורה אחת פשוטה).

2. חשבו:

$$\mathbf{X}^F = \mathbf{F}^H \mathbf{x} \cdot \Delta t$$

1.3.2 סעיף 2 - התמרה הפוכה

ממשו ב-Matlab את הפונקציה:

```
function x = InvFourierTransform(Xf, w, t)
    %-- Enter your code here...
end
```

1. ארגומנטים:

- (א) Xf (וקטור עמודה באורך M) - הוא אות הכניסה X^F בתדרים w .
- (ב) w (וקטור עמודה באורך M) - מייצג את ציר התדר עליו מוגדר X^F .
- (ג) t (וקטור עמודה באורך N) - מייצג את ציר הזמן עליו יהיה מוגדר אות המוצא x .
- 2. אות המוצא x (וקטור עמודה באורך N) הוא אות המוצא x בזמנים t .

הדרכה:

- 1. היעזרו בתכונת הדואליות וממשו פונקציה זאת בשורה אחת ע"י קריאה ל-FourierTransform.

1.4 בדיקה

- פתחו קובץ חדש בשם Q1.m (ניתן לעשות זאת ע"י הפקודה: edit Q1.m) ובנו ציר זמן ותדר באופן הבא:

```
close all
clear

%%
dt = 0.01;
Ws = 2 * pi / dt;
T = 1;
t = (-T : dt : T)'; t(end) = [];
N = length(t);
w = Ws / 2 * linspace(-1, 1, N + 1)'; w(end) = [];
```

1.4.1 סעיף 3 - בדיקה אקראית

- הגרילו אות מרוכב x ובדקו שמתקיים:

$$\|x - \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x\}\}\|_2 \approx 0$$

```
%% Random Test:
x = randn(N, 1) + 1j * randn(N, 1);
Xf = FourierTransform(x, t, w);
norm(x - InvFourierTransform(Xf, w, t))
```

- הריצו קוד זה מספר פעמים לבדוק עקביות.

1.4.2 השוואה לתוצאות אנליטיות

- הגדירו את האות:

$$x(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 3t) + 3 \sin(2\pi \cdot 7t)$$

סעיף 4

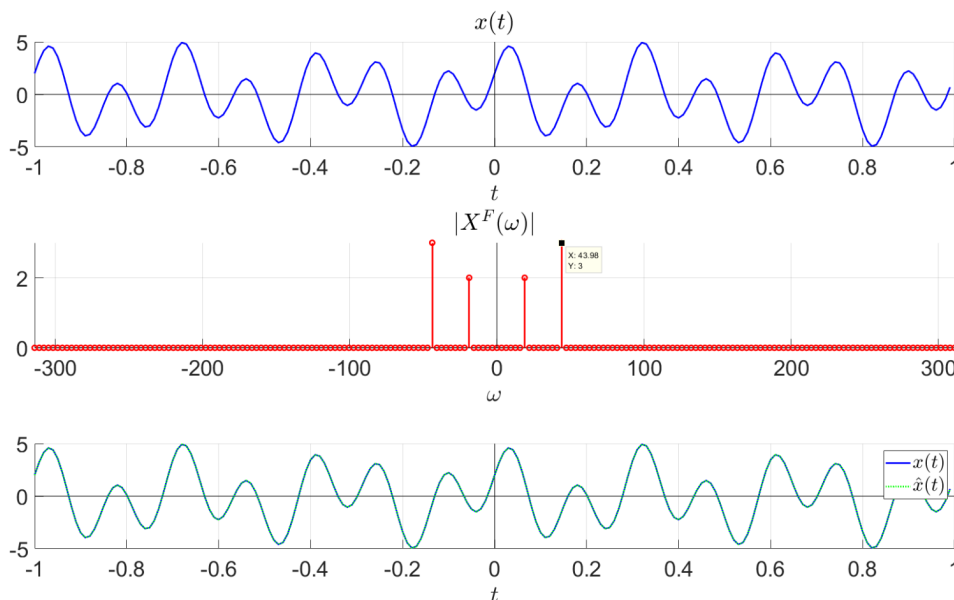
הכינו figure חדש עם 3 מערכות צירים באופן הבא (היעזרו ב-subplot):

1. subplot(3,1,1) - האות x .

2. subplot(3,1,2) - האות $|X^F|$.

3. subplot(3,1,3) - שני האותות x ו- \hat{x} על אותה מערכת צירים כאשר: $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x\}\}$ (כדי להימנע מאזהרות, הציגו את החלק הממשי בלבד של \hat{x})

ה-figure צריך להיראות דומה לאיור הבא:



- כמובן שיש להקפיד על כותרות ולצרף את הגרפים לדו"ח.

סעיף 5

- השתמשו בטבלת ההתמרות שב-Moodle ובצעו חישוב אנליטי להתמרת הפורייה:

$$X^F(\omega) = ?$$

פתרו תרגיל זה בדו"ח שאתם מגישים.

- בדקו בעזרת ה-Data Cursor שמיקום הדלתאות אכן במקום הנכון.



הערה: Data Cursor מתקבל ע"י לחיצה על האייקון . ניתן לבחור מספר נקודות ע"י החזקת כפתור ה-Alt.

2 סינון

- צרו קובץ חדש בשם Q2.m והגדירו את ציר הזמן והתדר (w ו- t) כמו שעשיתם בשאלה 1.
- הגדירו כמו מקודם את האות:

$$x(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 3t) + 3 \sin(2\pi \cdot 7t)$$

בשאלה זאת נרצה לסנן את האות x כך שה- \sin בתדר הגבוה יתאפס ונישאר רק עם ה- \cos בתדר הנמוך. נרצה לעשות זאת בעזרת מסנן מעביר נמוכים (Low Pass Filter) LPF:

$$h(t) = A \operatorname{sinc}(\omega_c t)$$

סעיף 1

פתרו סעיף זה בדו"ח.

- מהם הערכים A ו- ω_c אשר מקיימים:

$$y(t) = (x * h)(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 3t)$$

בפרט, רשמו את A המתאים לכל ω_c , כלומר את $A(\omega_c)$. מהו התחום $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$ אשר יעמוד בדרישה הנ"ל על המוצא y . (רמז: התמרת פורייה)

סעיף 2

- כעת בחרו:

$$\begin{cases} \omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ A = A(\omega_c) \end{cases}$$

כאשר ω_1 ו- ω_2 מצאתם בסעיף קודם, והגדירו בקוד את ה- h המתאים.

הערה:

Matlab מגדיר sinc באופן הבא: $\operatorname{sinc}^{\text{Matlab}}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
ובקורס אנחנו מגדירים: $\operatorname{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(t)}{t}$
לכן מומלץ להגדיר Sinc חדש באופן הבא (פונקציה אנונימית):

```
Sinc = @(t) sinc(t / pi);
```

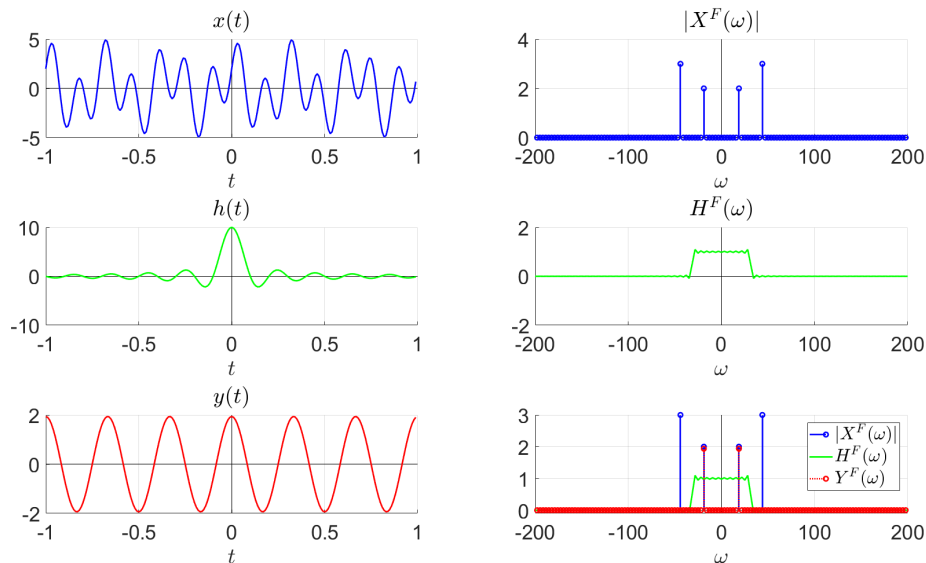
ואז להשתמש ב-Sinc שמגודר באופן זה לקורס שלנו.

סעיף 3

הכינו figure חדש בתצורה של subplot(3,2,·):

1. subplot(3,2,1) - גרף של x .
2. subplot(3,2,2) - גרף של $|X^F|$.
3. subplot(3,2,3) - גרף של h .
4. subplot(3,2,4) - גרף של H^F .
5. subplot(3,2,5) - גרף של y .
6. subplot(3,2,6) - גרף של $|X^F|$, H^F ו- Y^F על אותה מערכת צירים.

הערה: חשבו קודם את Y^F ואז את y בעזרת Y^F .
ה-figure צריך להיראות דומה לגרף הבא:



סעיף 4

ענו על השאלות בדו"ח.

1. מדוע H^F בגרפים לא זהה לחישוב האינליטי של $\mathcal{F}\{h\}$?
2. כיצד בעזרת h הייתם מגדירים מסנן מעביר גבוהים (High Pass Filter) HPF?
רשמו ביטוי עבור \tilde{h} כפונקציה של h כך ש- \tilde{h} יהיה HPF.
3. האם h מסנן סיבתי?

3 עיבוד אות מוזיקלי

3.1 בדיקת שמיעה

- פתחו קובץ חדש בשם Q3.m.
- ייצרו ב-Matlab אות המכיל תדר בודד והקשיבו לו:

```
%% Sound Test
Fs = 2^16;
dt = 1 / Fs;
T = 1;
t = 0 : dt : T; t(end) = [];

x = cos(2 * pi * f0 * t);

playblocking(audioplayer(x, Fs));
```

כאשר אתם צריכים לשחק עם הערכים של f_0 .

סעיף 1

קבעו $f_0 = 500$ והקשיבו לתדר זה

סעיף 2

האוזן שלנו מסוגלת לשמוע תדרים בין $20 - 20,000$ Hz. ככל שמתבגרים היכולת לשמוע תדרים גבוהים ונמוכים נפגעת.

- כעת שנו את ערכו של f_0 (למעלה ולמטה) ודווחו באיזה תדרים אתם מפסיקים לשמוע (חסם תחתון ועליון).

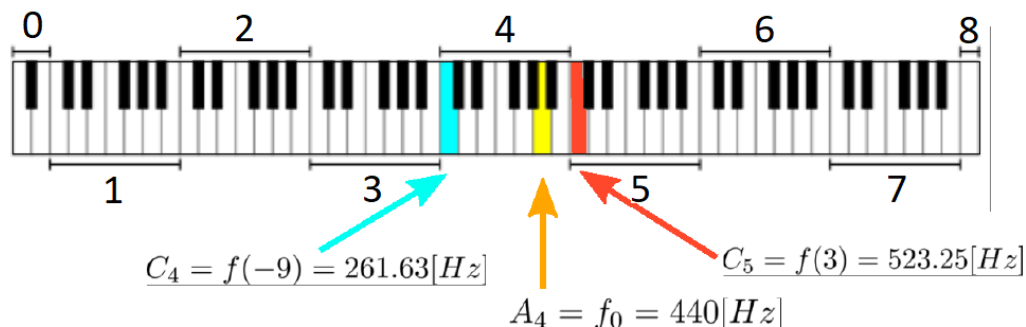
הערות:

1. התדרים הגבוהים יכולים להיות מעט צורמים לאוזן, הנמיכו את הווליום במידה וצריך.
2. התדר f_0 הינו ביחידות של הרץ [Hz], בקורס אנחנו עובדים עם תדר זוויתי $\omega_0 = 2\pi f_0$ ונמדד ביחידות של רדיאנים לשנייה $\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$.

3.2 שעת תרבות

3.2.1 הקדמה

הביטו באיור הבא:



- הקשה על קליד בפסנתר מייצרת תדר מסוים.
- הקלידים בצד שמאל מייצרים תדרים נמוכים והקלידים בצד ימין מייצרים תדרים גבוהים.
- הקלידים ממוספרים כך שהקליד הצהוב באיור הינו $n = 0$.
- כל קפיצה ימינה (כולל שחורים) מגדילה את n ב-1.
- כל קפיצה שמאלה (כולל שחורים) מקטינה את n ב-1.

הקשה על הקליד ה- n מייצרת את התדר:

$$f(n) = 2^{\frac{n}{12}} f_0$$

כאשר $f_0 = 440 [Hz]$.

למשל, הקשה על הקליד הכחול שהינו דו (C_4) מייצרת את התדר:

$$f(-9) = 2^{-\frac{9}{12}} f_0 = 261.63 [Hz]$$

סעיף 3

צרו את הפונקציה הבאה:

```
function note = MakeNote(n, T, dt)
    f0 = 440;
    tau = 0.4;

    %-- Enter code here...
end
```

1. ארגומנטים:

(א) n (סקלר) - מספר התו.

(ב) T (סקלר) - משך התו בשניות.

(ג) dt (סקלר) - מגדיר את המרווח הדגימה בציר הזמן (באופן דומה לתרגילים הקודמים).

2. אות המוצא $note$ (וקטור עמודה באורך $\lfloor \frac{T}{dt} \rfloor$) המקיים:

$$note(t) = \cos(2\pi f(n)t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

הערה: האיבר $e^{-\frac{t}{\tau}}$ מגדיר את דעיכת התו עם הזמן (עם קבוע דעיכה τ).

- אם ממשנתם את הפונקציה נכון, קטע הקוד הבא צריך להשמיע לכם את סולם C-major (עולה ויורד) אשר ניתן לשמוע אותו גם בקישור הבא:

https://en.wikipedia.org/wiki/C_major

```
% C major
Fs = 2^13;
dt = 1 / Fs;
T = 0.4; %-- 0.4 [sec]
cMajor = [];
for n = [-9, -7, -5, -4, -2, 0, 2, 3, 2, 0, -2, -4, -5, -7, -9]
    cMajor = [cMajor; MakeNote(n, T, dt)];
end
playblocking(audioplayer(cMajor, Fs));
```

- שימו לב שמפה והלאה נעבוד עם $F_s = 2^{13}$.

3.2.2 קריאת תווים

הביטו באיור הבא:

C ₄	261.63
C [#] ₄ /D ^b ₄	277.18
D ₄	293.66
D [#] ₄ /E ^b ₄	311.13
E ₄	329.63
F ₄	349.23
F [#] ₄ /G ^b ₄	369.99
G ₄	392.00
G [#] ₄ /A ^b ₄	415.30
A ₄	440.00
A [#] ₄ /B ^b ₄	466.16
B ₄	493.88
C ₅	523.25

בקטע זה מופיעה מנגינה אשר מכילה 3 תווים שונים C_4 , D_4 ו- E_4 ("דו", "רה" ו-"מי").
 תו מלא (רבע) ינוגן באורך $T_j = T = 0.4$ [sec] ותו חלול (חצי) ינוגן באורך $T_j = 2T = 0.8$ [sec].
 השתמשו ב- $dt = 2^{-13}$.

סעיף 4

- צרו בקובץ Q3.m קוד המייצר אות x המכיל את המנגינה שבקטע.
- הקשיבו למנגינה שייצרתם וודאו שקיבלתם את "Mary had a little lamb".

סעיף 5

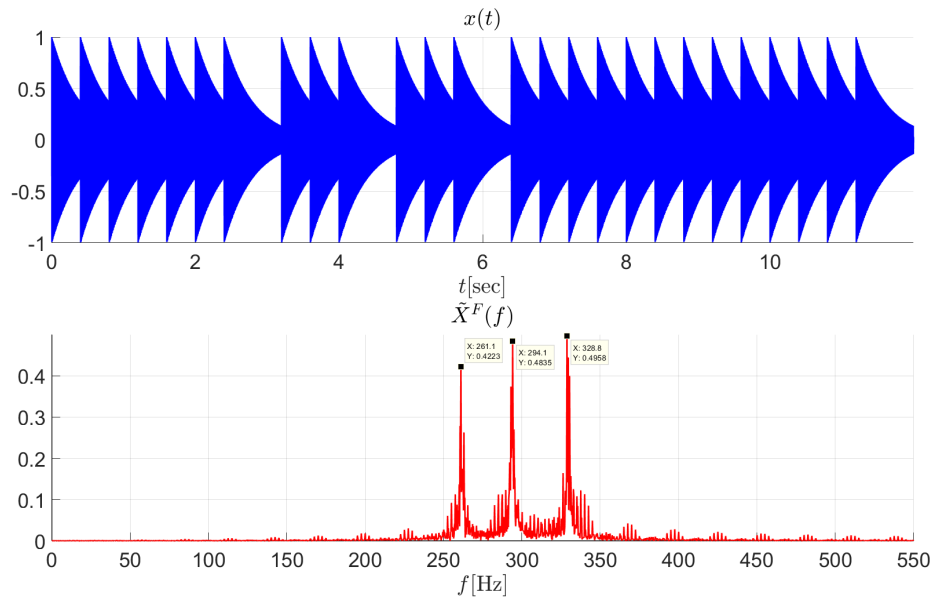
- הגדירו:

```
%%
N = length(x);
t = (0 : (N - 1))' * dt;
M = 2000;
f = linspace(0, 550, M)';
```

והציגו את ה-figure הבא:

1. subplot(2,1,1) - האות $x(t)$.
2. subplot(2,1,2) - האות $\tilde{X}^F(f)$ כאשר $\tilde{X}^F(f) \triangleq X^F(2\pi f)$ עבור ציר f המוגדר בקוד. שימו לב, ציר x הוא ביחידות של [Hz].

ה־figure צריך להראות דומה לאיור הבא:



- בדקו שמיקום ה"דלתאות" אכן במקומות הנכונים.
- שימו לב שבאות $x(t)$ קל להבחין באורך כל תו ובאות $\tilde{X}^F(f)$ קל אילו תדרים קיימים באות.

סעיף 6

ענו על השאלות הבאות בדו"ח:

1. מדוע לא מתקבלות דלתאות מושלמות כמו בשאלות הקודמות?
2. מדוע חישבנו את התמרת הפורייה רק עבור תדרים חיוביים? מה ניתן להגיד על התדרים השליליים באות x ?
רמז: $x(t) \in \mathbb{R}$ לכל t .

סעיף 7

- בצעו את קטע הקוד הבא:

```
%%
figure; spectrogram(x, round(T * Fs), 0, 2^11, Fs, 'Yaxis'); ylim([0 0.6]);
```

נסו להבין מה רואים בתמונה.

- צרפו את התמונה לדו"ח והסבירו (בקצרה) מה המשמעות של ציר x , ציר y והתמונה המתקבלת.

3.2.3 תוספת רעש

סעיף 8

- טענו לתוך ה-workspace את האות המצורף בקובץ noise.mat וחתכו אותו שיהיה באותו אורך כמו האות x .

```
%%  
load noise.mat      %-- load noise (a row vector)  
noise = noise(1:N)'; %-- noise -> column vector of length N
```

- האזינו ל-noise, האם אתם מזהים?

סעיף 9

- הגדירו את האות z :

$$z = x + \text{noise}$$

- האזינו ל- z

המטרה כעת היא לחלץ את האות x מתוך האות z תוך שימוש במידע שאין תדרים משותפים בין x ו-noise.

3.2.4 תכנון מסנן

סעיף 10

- הגדירו

```
%%  
M = 2000;  
w = 2 * pi * linspace(0, 1000, M)';
```

- הכינו figure חדש בתצורה subplot(2,1,.)

- הציגו ב-subplot(2,1,1) את $|Z^F(\omega)|$

- סמנו את 3 התדרים המשויכים למנגינה הרצויה (האות x).

- ענו בדו"ח: באיזה מסנן h כדאי להשתמש כדאי לקבל:

$$z * h \approx x$$

הערה: אל תשכחו להתייחס לתדרים השליליים

סעיף 11

כעת נרצה לממש את המסנן h שהצעתם בסעיף קודם. שימו לב שהאות z מאוד ארוך ואין צורך לייצר מסנן h באורך זהה.

- הגדירו ציר זמן קצר יותר:

```
%%  
t2 = (-2 : dt : 2)';
```

- צרו מסנן h בהתאם לדרישה המוגדר על וקטור הזמנים $t2$ (רמז: h צריך להיות אות ממשי).
- הוסיפו לאיור הקודם subplot(2,1,1) את $|H^F(\omega)|$. השתמשו בפקודה:

```
Hf = FourierTransform(h, t2, w);
```

3.2.5 סינון

סעיף 12

כעת נרצה לבצע את הסינון:

$$y = z * h$$

הפעם נעשה זאת במישור הזמן.

- בצעו את הפקודה:

```
y = conv(z, h, 'Same') * dt;
```

- הוסיפו ל-figure ב-subplot(2,1,2) שרטוט של $|Y^F(\omega)|$.
- בדקו שאכן נשארו רק התדרים הרלוונטיים.

סעיף 13

- האזינו ל- y וודאו שאכן שחזרתם את המנגינה "Mary had a little lamb".
- ענו בדו"ח: האם קיבלתם שחזור מושלם? אם לא, מדוע לא?