

# אותות ומערכות 044131

## תרגיל בית 1

### 1 מד"ר ומושגי יסוד

א. מצא את מרחב הפתרונות ההומוגניים לשני המד"רים הבאים:

$$y'' - y = x \quad (1)$$

$$y'' + y = x \quad (2)$$

• עבור מד"ר מספר 2, היעזר בתוצאה מתרגול מס' 1 (עמוד אחרון) ורשום את הפתרון בעזרת פונקציות  $\sin$  ו- $\cos$ .

• ענה על השאלה הבאה עבור שני הפתרונות שקיבלת:

בהינתן תנאי התחלה ידוע כלשהו, האם מובטח שהפתרון שקיבלת  $y_H(t)$  חסום? הסבר.  
(הערה: אות  $x$  נקרא חסום אם  $x \in \ell_\infty$ , כלומר, קיים  $M > 0$  כך שמתקיים:  $|x(t)| < M$  לכל  $t$ )

ב.

הוכח או הפרד:

בהינתן מד"ר (עם מקדמים קבועים ובמנוחה התחלתית). פונקציות מהצורה  $e^{s_0 t}$  ( $s_0 \in \mathbb{C}$ ) הינם אותות עצמיים של המד"ר.

ג.

בהינתן מד"ר עם מקדמים קבועים וממשיים ובמנוחה התחלתית.

1. הוכח שעבור אות כניסה מהצורה  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  ( $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ) נקבל אות יציאה מהצורה  $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

2. רשום ביטוי ל- $A$  ו- $\phi$  כפונקציה של מקדמי המד"ר (נסמן אותם ב- $\{a_n\}$  ו- $\{b_m\}$ ).

3. מה התנאים על המקדמים  $\{a_n\}$  ו- $\{b_m\}$  אשר יגרמו ל- $\cos(\omega_0 t)$  להיות אות עצמי?

(היעזר בפונקציית התמסורת שפגשנו בתרגול מס' 1).

## 2 לינאריות

בתוצאה של תרגיל זה נשתמש המון לאורך כל הקורס ולכן מומלץ להפנים את התוצאה. (כמובן שהשימוש בתוצאה זו לאורך הקורס ישפר את ההבנה גם כן).

נתון:

- $N \in \mathbb{N}$  מספר טבעי.
- סט של סקלרים (מרוכבים)  $\{\alpha[s] \in \mathbb{C}\}_{s=1}^N$
- סט של אותות (בזמן רציף).  $\{x_s(t)\}_{s=1}^N$
- $\Psi$  - מערכת לינארית.

1. הוכח (לפי הגדרה) שמתקיים לכל  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\Psi \left\{ \sum_{s=1}^N \alpha[s] x_s \right\} = \sum_{s=1}^N \alpha[s] \Psi \{x_s\}$$

(רמז: אינדוקציה)

2. קרא את העירות הבאות:

(א) ניתן להשאיר את  $N$  לאינסוף ולקבל:

$$\Psi \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \alpha[s] x_s \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha[s] \Psi \{x_s\}$$

(יש מקרים בהם השוויון לא יתקיים, או שהגבול לא יהיה קיים אך לא ניתקל במקרים כאלו בקורס שלנו)

(ב) מכיוון שאינטגרל זה בסה"כ סכום (עם גבול), **תוצאה שימושית** נוספת:

$$\Psi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) x_s ds \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) \Psi \{x_s\} ds$$

3. עבור מערכת לינארית  $\Psi$  ידוע שמתקיים:

$$\Psi \{x_n\}(t) = t^n$$

עבור סדרת אותות  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  ידועה כלשהי. חשב את מוצא המערכת עבור הכניסה הבאה:

$$\Psi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x_n \right\}(t) = ?$$

### 3 קביעות בזמן

הגדרות:

- אות  $x$  הינו מחזורי אם קיים  $T \neq 0$  אשר מקיים  $x(t) = x(t+T)$  לכל  $t$ .
- זמן המחזור של אות מחזורי הינו ה-  $T > 0$  הקטן ביותר אשר מקיים  $x(t) = x(t+T)$  לכל  $t$ .

אות מחזורי  $x$  עם זמן מחזור  $T_x$  נכנס למערכת קבועה בזמן (TI)  $\Psi$ .  
הוכח או הפרד:  
אות המוצא בהכרח יהיה גם מחזורי וזמן המחזור שלו יהיה בדיוק  $T_x$ .

### 4 סיבתיות

הוכח שמד"ר (עם מקדמים קבועים) אשר הינה לינארית וסיבתית היא בהכרח במנוחה התחלתית.  
(היעזר בהרצאות)

### 5 סיווג מערכות

#### 5.1

נתונה המערכת הבאה:

$$y(t) = \Psi\{x\}(t) = \int_{t+d}^{t+c} (ax(\alpha\tau) + b) d\tau, \quad d \neq c, \alpha > 0$$

מצא את התנאים על הפרמטרים הממשיים  $a, b, c, d, \alpha$  כך שמתקיים (כל מקרה לחוד):

1. המערכת לינארית

2. המערכת קבועה בזמן

3. המערכת סיבתית

#### 5.2

נתונה המערכת הבאה:

$$y(t) = x(e^{-t})u(t) + x(-e^{-t})u(-t)$$

האם המערכת (הוכח את תשובתך):

1. לינארית?

2. סיבתית?

3. בעלת זכרון?

4. קבועה בזמן?

5. הפיכה?