Time Series Midterm Exam (2015/Fall)

※ **<u>모든 문항에서 유도 또는 계산 과정을 제시할 것</u>**

1. 다음의 Constant Process 에 대해 아래의 문항에 답하라

$$Z_t = \beta_0 + a_t$$

단 a_t 는 평균이 0, 분산이 σ^2 인 백색잡음(white noise) 과정이다.

1) 깊이(depth)가 5 $(=m)$인 단순이동평균(MA) $M_t = \sum_{j=0}^{4} Z_{t-j}/5$ 에 대해 답하라

i) 시차가 k 인 두 이동평균의 상관관계가 다음을 만족함을 증명하라.

$$Corr(M_t, M_{t+k}) = \begin{cases} 1-|k|/5 & k = 0, 1, \cdots \\ 0 & k \geq 5 \end{cases},$$

ii) 시점 n 에서 $n+2$ 시점의 시계열 값을 이동평균으로 예측한다고 할 때 (즉 $\hat{Z}_n(2) = M_n$), 예측오차 $e_n(2) = (Z_{n+2} - M_n)$ 의 분산 $Var[e_n(2)]$ 을 구하여라

2) $m = 5$ 인 symmetric MA $CM_t = \sum_{j=-2}^{2} Z_{t-j}/5$ 에 대해, 시차가 k 인 두 이동평균의 상관관계 $Corr(CM_t, CM_{t+k})$ 를 구하고 (모든 k 에 대해 답을 제시할 것), 문항 1)-i)의 $Corr(M_t, M_{t+k})$ 와 크기 및 특성을 비교/설명하여라

3) 시점 n 에서의 단순지수평활값 S_n 의 갱신식은 $S_n = \omega Z_n + (1-\omega) S_{n-1}$ 와 같다. 한 시점 앞 예측값으로 S_n 을 사용할 때, 예측오차는 $e_n(1) = Z_{n+1} - S_n$ 가 된다.

i) $S_{n+1} = S_n + \omega e_n(1)$ 가 성립하는가? 성립한다면 그 의미를 설명하라

ii) 위의 S_n 에서 $\omega = 0.2$ 가 적용하였다고 하자. 문항 1)-i)의 MA과 S_n 중에서 어느 것이 더 평활(smooth)한가? (average age의 관점에서 고려할 것)

2. 계절성과 선형 추세성이 있는 시계열 Z_t 는 Winters Seasonal Mode로 분석될 수 있다. 추세는 $T_t (= \beta_0 + \beta_1 t)$, 계절은 S_t, 랜덤요인은 I_t 라 표기할 때; Winters의 가법(Additive)모형과 승법(Multiplicative)모형의 <u>모형 식</u>과 계절요인 S_t 에 대한 <u>가정(assumption)</u>을 제시하고 <u>두 모형의 차이</u>를 설명하라(5줄 이내).

3. 시계열 Z_t 의 모형이 다음과 같다.

$$Z_t = 1.0 + 0.5 Z_{t-2} + a_t. \text{ 단, } a_t \sim I.I.N(0,1)$$

i) Linear Process, 즉 $Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots$ 로 표현될 수 있는지를 밝혀라 (주장하는 근거/과정을 밝힐 것)

ii) Z_t 가 정상시계열(Stationary)인지 여부를 판정하라.

4. 시계열 $Z_t = 2.0 + a_t - 0.5 a_{t-2}$. 단, $a_t \sim I.I.N(0,1)$ 에서 Z_t 의 평균 $E(Z_t) = \mu$, 분산 $\gamma_0 = Var(Z_t)$, 공분산 $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k})$ 을 구하고, Z_t 가 정상(Stationary) 시계열인지 여부를 판정하여라.