수리통계 II 중간고사

2015. 10. 27.

1. X_1, X_2, X_3는 모두 정규분포 $N(\theta, 1)$을 따르며 서로 독립일 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 두 통계량 $T_1(\boldsymbol{X}) = \dfrac{X_1 + X_2}{2} - X_3$와 $T_2(\boldsymbol{X}) = \dfrac{X_1 + X_2}{2} + X_3$은 모수 θ에 대해 정보를 거지고 있는지 설명하여라.

① $T_1 \sim N(0, \frac{3}{2})$ does not depend on θ → 정보없음
② $T_2 \sim N(2\theta, \frac{3}{2})$ depend on θ → 정보있음

(b) 통계량 $T(\boldsymbol{X}) = X_1 + X_2$는 모수 θ에 대한 충분통계량인지 설명하여라.

① $T(X) \mid X \sim X_3$ depend, $X_3 \sim N(\theta, 1)$ → 충분통계량 아님
② Factorization Thm

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수 $f(x|\theta) = \dfrac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, $-\infty < x < \infty$인 랜덤샘플일 때, 다음 물음에 답하여라.

$f(x|\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum |x_i|}{\theta}}$, $T(X) = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

(a) θ에 대한 충분통계량을 구하여라.

(b) $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$는 θ에 대한 완비통계량인지 확인하여라.

$E(X_i) = 0$ $E(T(X)) = 0$ ⇒ $T(X)$는 완비통계량이 아님

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수 $f(x|\theta) = \dfrac{\theta^3}{2} x^2 e^{-\theta x}$, $x > 0$인 랜덤샘플일 때, 다음 물음에 답하여라.

Gamma(3, θ)

(a) θ의 적률추정량을 구하여라. (a) $E(X) = \frac{3}{\theta}$ ⇒ $\frac{3}{\theta} = \bar{X}$ ⇒ $\hat{\theta} = \frac{3}{\bar{X}}$

(b) 로그가능도함수를 구하여라. (b) $L(\theta) = \left(\frac{\theta^3}{2}\right)^n (x_1 \cdots x_n)^2 e^{-\theta \sum x_i}$

(c) θ의 최대가능도추정량을 구하여라.

⇒ $l(\theta) = n \log \frac{\theta^3}{2} + 2 \log(x_1 \cdots x_n) - \theta \sum x_i$

⇒ $l'(\theta) = \frac{3n}{\theta} - \sum x_i = 0$ $l''(\theta) < 0$ $\hat{\theta} = \frac{3}{\bar{X}}$

4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수 $f(x|\theta) = \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$인 $\exp\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$로부터의 랜덤샘플일 때, θ의 두 추정량 $\hat{\theta}_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$와 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{(n-2)}{n} \overline{X}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(a) $E(\hat{\theta}_1) = \theta$, $E(\hat{\theta}_2) = \frac{n-2}{n}\theta$
unbiased 편향

(a) 두 추정량이 비편향추정량인지 확인하여라.

(b) 두 추정량이 일치추정량인지 확인하여라.

(b) ① $Bias(\hat{\theta}_1) = 0$, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{2}{4}\theta^2$) not consistent
② $Bias(\hat{\theta}_2) = -\frac{2}{n}\theta$, $Var(\hat{\theta}_2) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \frac{\theta^2}{n} \to 0$ consistent

5. 확률변수 X_n 이항분포 $B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수일 때 다음 물음에 답하여라.

(a) $Y_n = \dfrac{2X - n}{\sqrt{n}}$의 적률생성함수를 구하여라. 단, $B(n, p)$의 적률생성함수는 $[(1-p) + pe^t]^n$이다.

$M_{Y_n}(t) = E(e^{\frac{2}{\sqrt{n}} t X} e^{-\sqrt{n} t}) = M_{X_n}(\frac{2}{\sqrt{n}} t) e^{-\sqrt{n} t} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{2}{\sqrt{n}} t}\right)^n e^{-\sqrt{n} t}$

(b) 위의 적률생성함수의 극한을 구하고, 이를 이용하여 Y_n이 분포수렴(convergence in distribution)하는 극한을 구하여라.

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{2}{\sqrt{n}} t}\right)^n e^{-\frac{t}{\sqrt{n}} \cdot n} = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2} e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{2}(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} \cdots) + \frac{1}{2}(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} \cdots)\right)^n$

$= \left(1 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}\right)^n \to e^{\frac{t^2}{2}}$