Time Series Midterm Exam (2016/10/18)

※ **모든 문항에서 유도 또는 계산 과정을 제시할 것**

1. 다음의 Constant Process에 대해 아래의 문항에 답하라

$$Z_t = \beta_0 + a_t$$

단 a_t 는 평균이 0, 분산이 σ^2 인 백색잡음(white noise) 과정이다.

1) 깊이가 m인 단순이동평균(MA), $M_t = \sum_{j=0}^{m-1} Z_{t-j} / m$ 에 대해 아래에 답하여라

i) 시차가 k 인 두 이동평균의 공분산(covariance), $Cov(M_t, M_{t+k})$ 을 구하여라.

ii) 시점 n 에서의 이동평균 M_n 로 $n+k$ (단, $k \geq 1$) 시점의 시계열값 Z_{n+k} 을 예측할 때, 예측오차 $e_n(k) = (Z_{n+k} - M_n)$ 의 분산 $Var[e_n(k)]$ 을 구하여라

2) 시점 n 에서의 단순지수평활값 S_n 의 갱신식은 $S_n = \omega Z_n + (1-\omega) S_{n-1}$ 이다. 한 시점 앞 예측값으로 S_n 을 사용할 때, 예측오차는 $e_n(1) = Z_{n+1} - S_n$ 가 된다.

i) $Z_{n+1} - Z_n = e_n(1) - (1-\omega) e_{n-1}(1)$ 가 성립하는지 여부를 판단하여라.

ii) 한 시점 앞 예측오차의 분산, $Var(e_n(1))$ 을 구하여라.

iii) 위의 S_n 에서 $\omega = 0.2$ 가 적용되었다고 할 때, 평활 정도가 거의 같은 이동평균 M_n 의 깊이(depth) m 은 무엇인가?

← average age의 관점에서 가장 가까운 정수를 제시할 것

2. 계절성과 선형 추세성이 있는 시계열 Z_t 의 분석에서 다음 모형이 고려되었다.

$$Z_t = T_t + S_t + I_t$$

단, 추세는 $T_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t$, 계절 요인은 S_t , 랜덤요인은 I_t 라 표기한다.

1) 계절주기가 $s = 4$ 이고, 지수함수모형으로 분석하고자 다음의 계획행렬(design matrix)을 적용하였다고 한다. 타당한 모형을 제시하고, 계수 δ_1 의 의미를 설명하여라

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \beta_0 & \beta_1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2) 위 시계열 Z_t 를 Winters' seasonal model로 분석한다고 할 때; 계절요인 S_t 에 대한 가정(assumption)을 제시하고, 분석 과정에서 1) 모형과 어떤 차이가 있는지 설명하라(5줄 이내).

3. 시계열 Z_t 의 모형이 다음과 같다.

$$Z_t = 1.0 + 0.5 \cdot t + a_t - 0.5a_{t-1} \quad \text{단,} \quad a_t \sim I.I.N(0,1)$$

1) Z_t 가 정상(Stationary) 시계열인지 여부를 판단하여라.

2) $Y_t = Z_t - Z_{t-1}$ 이라고 할 때, Y_t 가 정상시계열인지 여부를 판단하여라.

4. 시계열 Z_t 의 모형이 다음과 같다.

$$Z_t = 1.0 + 0.5Z_{t-4} + a_t. \quad \text{단,} \quad a_t \sim I.I.N(0,1)$$

1) Z_t 가 Linear Process로, 즉 $Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \cdots$, 표현될 수 있는지를 밝히고 정상시계열 인지 여부를 판단하여라.
($\psi_j, j = 1, \cdots$을 구체적으로 밝히고 주장의 근거를 제시할 것)

2) Z_t 의 공분산, $\gamma_k = \mathrm{cov}(Z_t, Z_{t+k}), k = 1, 2, \cdots$ 을 구체적으로 구하고, ACF $\rho_k = corr(Z_t, Z_{t+k}), k = 1, \cdots$의 패턴은 어떤 특징이 있는지를 설명하라.

5. 시계열 Z_t 의 시계열도표(time series plot), 자기상관함수(ACF), 편자기상관함수(PACF)가 아래의 그림과 같다. 이 시계열은 어떤 모형을 따른다고 할 수 있는지를 설명하라. 또한 이 모형의 특징이 있다면 그 특징을 기술하여라.