

Solutions for Midterm Exam (2010)

1. $Z_t = \beta_0 + a_t$ and $S_n = \omega Z_n + (1-\omega)S_{n-1}$

i)
$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \text{Var}\{\omega Z_n + (1-\omega)S_{n-1}\} = \omega^2 \text{Var}(Z_n) + (1-\omega)^2 \text{Var}(S_{n-1}) \quad \leftarrow Z_n \perp S_{n-1} \\ &= \omega^2 \sigma^2 + (1-\omega)^2 \text{Var}(S_{n-1}) \end{aligned}$$

$\rightarrow \text{Var}(S_n) = \sigma^2 \omega^2 / \{1 - (1-\omega)^2\} = \sigma^2 \omega^2 / (2\omega - \omega^2) = \sigma^2 \omega / (2 - \omega)$

ii)
$$\begin{aligned} \text{Var}[e_n(3)] &= \text{Var}[Z_{n+3} - S_n] = \text{Var}[Z_{n+3}] + \text{Var}[-S_n] \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \omega / (2 - \omega) = 2\sigma^2 / (2 - \omega) \end{aligned}$$

iii)
$$M_t = \begin{cases} \beta_0 & t \leq T_0 - 1 \\ \beta_0 + (t - T_0 + 1)\delta / m & T_0 \leq t \leq T_0 + m - 1 \\ \beta_0 + \delta & t \geq T_0 + m \end{cases}$$

$t \leq T_0 - 1$ 에서 평균이 β_0 로 일정한 값으로 유지되지만, $T_0 \leq t \leq T_0 + m - 1$ 에서는 기울기가 δ / m 로 증가하다가, $t \geq T_0 + m$ 에서 $\beta_0 + \delta$ 로 유지된다.

2. $Z_t = T_t + S_t + I_t$ and $T_t = \beta_0 + \beta_1 t$ with $s = 4$

i)
$$\begin{matrix} \beta_0 & \beta_1 & I_1 & I_2 & I_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ii) Decomposition method에서는 각 요인을 각각 추정하고, Winters' method에서는 각 요인을 추정할 때 다른 요인의 추정 값을 결합적으로 적용하여 추정

3. 1) $Z_t = 2.0 + a_t + 0.2a_{t-1} - 0.48a_{t-2}$

→ $\psi_1 = 0.2$, $\psi_2 = -0.48$ 인 order가 2인 linear process

→ stationary process이다.

$$E[Z_t] = E\{2.0 + a_t + 0.2a_{t-1} - 0.48a_{t-2}\} = 2.0$$

$$Var[Z_t] = (1 - 0.2 - (-0.48)) = 0.28$$

2) $Z_t = 2.0 + a_t + 0.2a_{t-1} - 0.48a_{t-2}$

→ $\psi_1 = 0.2$, $\psi_2 = -0.48$ 인 order가 2인 linear process이므로 stationary process이다.

4. Process의 level (평균 수준)이 $t=80$ 에서부터 증가하기 시작

→ Winters' fitted value는 변경된 level 수준이 한동안 일부분만 반영되어 시계열의 변동을 충분히 반영하지 못함

→ Level과 Trend의 평활상수를 0.05보다 높게, 예를 들어 0.20으로 설정하면 level과 trend의 변화를 좀 더 빠른 시간에 반영할 수 있을 것임.