수리통계 II 중간고사

2014. 10. 31.

1. (a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 이산형 확률분포 $X = \begin{cases} 1, \text{ with probabilty} & \theta \\ 2, \text{ with probability} & 1-\theta \end{cases}$ (단, $0 \le \theta \le 1$)로부터의 랜덤샘플일 때, θ의 적률추정량을 구하여라.

(b) $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$인 랜덤샘플일 때, θ의 최대가능도추정량을 구하여라.

2. 9 (1)

2. 8. 9

(a) $E(X) = \theta + 2(1-\theta) = 2-\theta \quad \therefore \bar{X} = 2-\theta \Rightarrow \hat{\theta} = 2-\bar{X}$

(b) $f(\underline{x}|\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \Rightarrow \log f(\underline{x}|\theta) = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^n x_i$

$\Rightarrow l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \therefore \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$

2. X_1, X_2, X_3는 $N(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플일 때, 다음 물음에 답하여라.

5.

(a) $T(X) = (X_1 + X_2, X_3)$는 θ에 대한 충분통계량인지 확인하여라.

2. 17 (b) $T(X) = (X_1 + X_2, X_3)$는 θ에 대한 완비통계량인지 확인하여라.

5

(a) $f(x_1, x_2, x_3|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 (x_i-\theta)^2}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 x_i^2 + \theta\sum_{i=1}^3 x_i - \frac{3}{2}\theta^2\right\}$

$\therefore (X_1+X_2, X_3)$의 함수이므로 $T(\underline{X}) = (X_1+X_2, X_3)$는 충분통계량

(b) $E[(X_1+X_2) - 2X_3] = 0$ for all $\theta \Rightarrow T(\underline{X}) = (X_1+X_2, X_3)$는 완비통계량이 아님

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Uniform$\left(0, \frac{\theta}{2}\right)$로부터의 랜덤샘플일 때, $Y_n = n\left(\frac{\theta}{2} - X_{(n)}\right)$이 분포수렴(convergence in distribution)하는 극한을 구하여라. 단 $\cancel{X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$이다.

15. 18

$P(Y_n \le y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - P\left(n\left(\frac{\theta}{2} - X_{(n)}\right) > y\right) = 1 - P\left(X_{(n)} < \frac{\theta}{2} - \frac{y}{n}\right)$

$= 1 - P\left(X_1 < \frac{\theta}{2} - \frac{y}{n}\right)^n = 1 - \left(\frac{\frac{\theta}{2} - \frac{y}{n}}{\frac{\theta}{2}}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{2y}{n\theta}\right)^n, \quad 0 \le y \le \frac{n\theta}{2}$

$\to 1 - e^{-\frac{2y}{\theta}}, \; y \ge 0 \quad \therefore Y_n \to \mathrm{Exp}\left(\frac{2}{\theta}\right)$ (or $Y_n = \frac{n}{2}(\theta - 2X_{(n)}) = \frac{1}{2} \cdot n(\theta - 2X_{(n)})$, $2X_i \sim \mathrm{Uni}(0, \theta)$, $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$)

4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\theta, 1)$로부터의 랜덤샘플일 때, θ의 추정량 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$에 대한 다음 물음에 답하여라. (단, a_i들은 상수)

2. ($\sum a_i = 1$)

(a) $\hat{\theta}$가 θ의 비편향추정량(unbiased estimator)이 되기 위한 a_i들에 대한 조건을 구하여라.

(b) $\hat{\theta}$가 위의 비편향추정량일 조건을 만족할 때, θ의 일치추정량(consistent estimator)이 되기 위한 a_i들에 대한 조건을 구하여라.

2 5 ($\sum a_i^2 \to 0$)

(a) $E(\hat{\theta}) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \theta \sum_{i=1}^n a_i \quad \therefore \sum_{i=1}^n a_i = 1$ 일때 unbiased estimator

(b) $MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \therefore \sum_{i=1}^n a_i^2 \to 0$ 일때 consistent estimator

10
5 17
2.

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 확률밀도함수가 $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$인 $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$로부터의 랜덤샘플일 때, θ^2의 best unbiased estimator를 구하여라.

$f(x|\theta) = \exp\{-\frac{x}{\theta} - \log\theta\}$: Exponential family

$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$: 완비충분통계량

$E(T(\underline{X})) = n\theta, \quad Var(T(\underline{X})) = n\theta^2$

$\therefore E(T^2(\underline{X})) = n\theta^2 + (n\theta)^2 = \theta^2(n^2+n)$

$\Rightarrow E\left(\frac{1}{n(n+1)} T^2(\underline{X})\right) = \theta^2 \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum X_i\right)^2$: best unbiased estimator of θ^2.

$n\bar{x}^2$

$\frac{n}{n+1}\bar{X}^2$