

Problem 1

Question 1.1

정답

- 대입연산: n^3
- 더하기연산: $n^3 - n^2$ (4번째에서는 더하기 연산이 없음)
- 곱하기연산: n^3

Question 1.2

정답

- $T(n) = \Theta(n^3)$

Question 1.3

정답

- $S(n) = \Theta(n^2)$

Problem 2

Question 2.1

정답 (올바른 것)

- $c=17$ & $n_0=2$
- $c=6$ & $n_0=10$

풀이: $4n^3 + 10n^2 + 3n \leq cn^3$

- $c=17$ & $n_0=2$ [Correct]
 - $4 * 8 + 10 * 4 + 3 * 2 = 78 \leq 17 * 8 = 136$
- $c=15$ & $n_0=1$ [Wrong]
 - $4 * 1 + 10 * 1 + 3 * 1 = 17 \geq 15$
- $c=5$ & $n_0=10$ [Wrong]
 - $4 * 1000 + 10 * 100 + 3 * 10 = 5030 \geq 5 * 1000 = 5000$
- $c=6$ & $n_0=10$ [Correct]
 - $4 * 1000 + 10 * 100 + 3 * 10 = 5030 \leq 6 * 1000 = 6000$

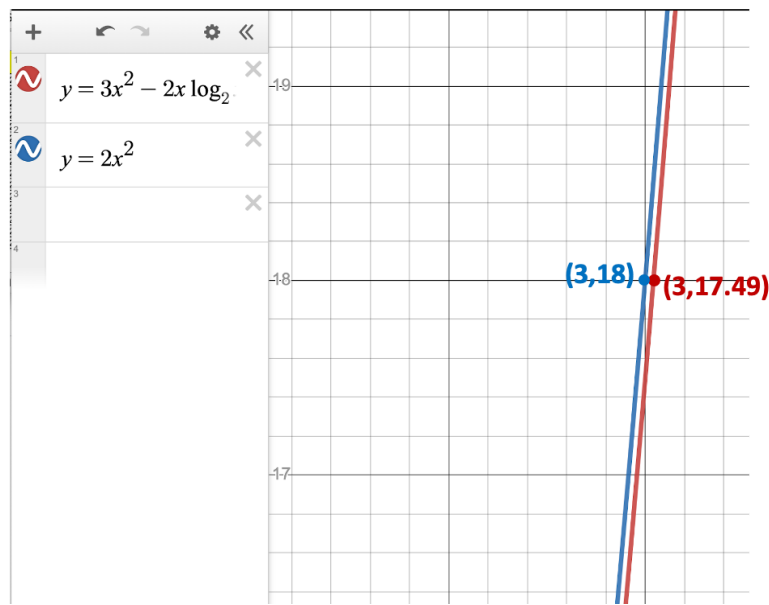
Question 2.2

정답 (올바른 것)

- $c=1$ & $n_0=16$

풀이: $3n^2 - 2n \log n \geq cn^2$

- $c=3$ & $n_0=1$ [Wrong]
 - $n=1$ 이후로 우변이 항상 크기 때문에 틀림
- $c=2$ & $n_0=1$ [Wrong]
 - $n=3$ 일때 아래와 같이 성립하지 않음



- $c=3$ & $n_0=2$ [Wrong]
 - $12 - 4 = 8 \leq 12$ 틀림
- $c=1$ & $n_0=16$ [Correct]
 - $3 \cdot 256 - 128 = 640 \geq 16$ 성립

Question 2.3

정답: $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

풀이:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 12n^2 + n \log \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \right) + n \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \log n^i \\
 &= 12n^2 + n \log 2^n + n \log n \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i \\
 &= 12n^2 + n^2 + n \log n \left(\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)}{2} \right) \\
 &= 13n^2 + \frac{1}{2} n \log n (n + \sqrt{n}) \\
 &= 13n^2 + \frac{1}{2} n^2 \log n + \frac{1}{2} n^{1.5} \log n = \Theta(n^2 \log n)
 \end{aligned}$$

Problem 3

Question 3.1

- 정답: $T(n) = 2T(n/2) + Cn$
 - Cn 뒤에 상수 c 가 더해져서 $Cn + c$ 로 표현해도 되지만 Cn 이 c 를 압도하므로 c 를 생략해도 된다.

Question 3.2

- 정답: $2^2T(n/2^2) + 2Cn$

Question 3.3

- 정답: $2^kT(n/2^k) + kCn$

Question 3.4

- 정답: $Cn \log n + Cn$

Problem 4

Question 4.1

- 정답: 8
 - $k/2 + 4 < k \Leftrightarrow k > 8$, 즉, 8을 초과하는 자연수 (9부터)에 대해서 모두 성립한다.
 - 부등호에 등호가 없으므로 8이 해당 범위내 가장 작은 자연수임

Question 4.2

- 정답: 16
 - $k/2 + 4 \leq 3k/4 \Leftrightarrow k \geq 16$, 즉 16 이상의 자연수에 대해서 모두 성립
 - 부등호에 등호가 있으므로 16이 해당 범위내 가장 작은 자연수임

Question 4.3

- 정답: $-C/(\log 3 - \log 4)$
 - $c \log 3 - c \log 4 + C \leq 0 \Leftrightarrow c \log(3/4) \leq -C \Leftrightarrow c \geq -C/\log(3/4)$
 - $\log 3/4$ 는 음수 (-0.124xx)

Problem 5

Question 5.1

- 정답: $T(n) = 4T(n/8) + Cn$

Question 5.2

- 정답: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$
 - $h(n) = n^{\log_8 4} = n^{2/3}$
 - $f(n) = Cn$
 - Case 2
 - 1) $\lim f(n)/h(n) = Cn/n^{2/3} = \text{infinity}$
 - 2) $4f(n/8) = Cn/2 < f(n) = Cn$

Question 5.3

- 정답: $T(n) = 8T(n/16) + Cn^{1/2}$

Question 5.4

- 정답: $T(n) = \Theta(h(n)) = \Theta(n^{3/4})$
 - $h(n) = n^{\log_{16} 8} = n^{3/4}$
 - $f(n) = Cn^{1/2}$
 - Case 1
 - $\lim f(n)/h(n) = Cn^{1/2}/n^{3/4} = 0$