SC414774
Project in Mathematics

ผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล
On the sum of reciprocal Jacobsthal numbers

จัดทำโดย

นายอภิรัฐ มูลมณี

รหัสประจำตัว 603020555-9

อาจารย์ที่ปรึกษา

รศ. ดร.นรากร คณาศรี

วันที่นำเสนอโครงงาน

24 ตุลาคม พ.ศ. 2566

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา

SC414774 โครงงานทางคณิตศาสตร์ (Project in Mathematics)

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ภาคการศึกษา 1 ปีการศึกษา 2566

ผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล
On the sum of reciprocal Jacobsthal numbers

อภิรัฐ มูลมณี และ นรากร คณาศรี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทคัดย่อ

ในโครงงานนี้ เราได้สร้างผลงานวิจัยใหม่เกี่ยวกับผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล โดยการประยุกต์ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด

คำสำคัญ: จำนวนจาคอปส์ทาล, ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด, ผลบวกของส่วนกลับ

สารบัญ

1 บทนำ

มีจำนวนที่มีชื่อเสียงในสาขาทฤษฎีจำนวนที่ได้รับความสนใจศึกษามาอย่างยาวนานและหลากหลายแง่มุม ได้แก่ จำนวนฟีโบนักชี (Fibonacci numbers) จำนวนลูคัส (Lucas numbers) จำนวนเพลล์ (Pell numbers) และจำนวนจาคอปส์ทาล (Jacobsthal numbers) ซึ่งนิยามในรูปของลำดับของจำนวนทั้ง 4 ดังนี้

ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequence) (F_n) นิยามโดย

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

ลำดับลูคัส (Lucas Sequence) (L_n) นิยามโดย

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$

ลำดับเพลล์ (Pell Sequence) (P_n) นิยามโดย

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $P_0 = 0$ และ $P_1 = 1$

ลำดับจาคอปส์ทาล (Jacobsthal Sequence) (J_n) นิยามโดย

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $J_0 = 0$ และ $J_1 = 1$

จำนวนจาคอปส์ทาลตั้งขึ้นตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันที่มีชื่อว่า *เอิร์นส์ จาคอปส์ทาล* (Ernst Erish Jacobsthal) ในเอกสารอ้างอิง [4] H. Ohtsuka และ S. Nakamura ได้ให้ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับผลบวกของส่วนกลับของจำนวนฟีโบนักชี ดังนี้

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_n} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ F_{n-2} - 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

และ

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_n^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}F_n - 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ F_{n-1}F_n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2011 S. H. Holliday และ T. Kamatsu [2] ได้วางนัยทั่วไปผลงานวิจัยดังกล่าว ยิ่งกว่านั้น ทำให้ได้สูตรผลบวกของส่วนกลับของจำนวนลูคัส และจำนวนเพลล์ ดังนี้

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{L_n} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} L_{n-2} - 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ L_{n-2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{L_n^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} L_{n-1}L_n + 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ L_{n-1}L_n - 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

และ

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{P_n} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} P_n - P_{n-1} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ P_n - P_{n-1} - 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{P_n^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 2P_{n-1}P_n - 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ 2P_{n-1}P_n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

ในโครงงานนี้เราจึงสนใจที่จะสร้างและพิสูจน์สูตรเกี่ยวกับผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล J_n เมื่อ $n \geq 0$

2 ความรู้พื้นฐาน

2.1 หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of mathematical induction)

ทฤษฎีบท 1. *[6] **หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (Principle of mathematical induction)*

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n ถ้า

1. *$P(1)$ เป็นจริง และ*
2. *สำหรับเต็มบวก k ใดๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง*

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 1. จงแสดงว่า $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

1. เนื่องจาก $2 = 1(1+1)$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง และ
2. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย
   เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $2+4+6+\ldots+2k = k(k+1)$
   นำ $2(k+1)$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2+4+6+\ldots+2k+2(k+1) &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n □

ทฤษฎีบท 2. *[6] **หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม** (Principal of strongly mathematical induction)*
ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n ถ้า

1. *$P(1)$ เป็นจริง และ*
2. *สำหรับเต็มบวก k ใด ๆ ถ้า $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง*

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่า $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ สำหรับทุก $n \geq 3$ เมื่อ (L_n) เป็นลำดับลูคัส

พิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

1. $n = 1$ จะได้ $L_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
   $n = 2$ จะได้ $L_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

2. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $k \geq 2$ สมมติว่า $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ เป็นจริง ดังนั้น

$$L_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \text{ และ } L_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{4}\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม สรุปได้ว่า $L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n □

2.2 ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด (Greatest Interger Function)

ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด (Greatest interger function) หรือ **ฟังก์ชันฟลอร์** (Floor function) เป็นฟังก์ชันที่ใช้กันมากในการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ในทางทฤษฎีจำนวน มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 1. [6] สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

$$\lfloor x \rfloor \text{ คือ จำนวนเต็มค่ามากสุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ } x$$

ตัวอย่าง 3. ฟังก์ชันจำนวนเต็มค่ามากสุด

1. $\lfloor 1/4 \rfloor = 0$
2. $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$
3. $\lfloor \pi \rfloor = 3$
4. $\lfloor -\pi \rfloor = -4$
5. $\lfloor e \rfloor = 2$

หมายเหตุ 1. ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
2. $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงสมบัติเบื้องต้นของ $\lfloor x \rfloor$

ทฤษฎีบท 3. *[6] กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $n, k \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า*

1. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ *ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม*
   $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ *ถ้า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม*
2. $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
3. $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ *เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$*
4. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ *เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$*
5. $-\lfloor -x \rfloor =$ *จำนวนเต็มค่าน้อยสุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x*

2.3 อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับ จะเรียก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series) และเรียก a_n ว่า **พจน์ที่ n** ของอนุกรม (n^{th} term of the series)
สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ กำหนดให้

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

เรียก (S_n) ว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** (sequence of partial sums) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

บทนิยาม 2. กำหนดให้ (S_n) เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
ถ้า (S_n) ลู่เข้าสู่จำนวนจริง S แล้วจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** (covergent series) และเรียก S ว่าเป็น **ผลบวก** (sum) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$
ถ้า (S_n) เป็นลำดับลู่ออก จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่ออก** (divergent series)

ตัวอย่าง 4. จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
วิธีทำ พิจารณา

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \times 2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - 0 = 2$
ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 5. จงพิจารณาว่าอนุกรม $1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $S_n = 1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{2} = \infty$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

บทนิยาม 3. ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ จะเรียกว่า **ลำดับเรขาคณิต** ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าคงตัวสำหรับทุก $n \geq 1$ ค่าคงตัวนี้เรียกว่า **อัตราส่วนร่วม** (common ratio) อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r นั่นคือ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุก $n \geq 1$

ตัวอย่าง 6. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = -\dfrac{1}{2}$

บทนิยาม 4. **อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Series) คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

เมื่อ $a \neq 0$ เป็นค่าคงตัวและ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ทฤษฎีบท 4. *กำหนดให้อนุกรมเรขาคณิต* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$

1. *ถ้า* $|r| < 1$ *แล้ว* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ *เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ* $\dfrac{a}{1-r}$
2. *ถ้า* $|r| \geq 1$ *แล้ว* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ *เป็นอนุกรมลู่ออก*

ทฤษฎีบท 5. ***การทดสอบแบบเปรียบเทียบ*** *(comparison test)*

กำหนดให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *และ* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *เป็นอนุกรมอนันต์ ที่ซึ่ง* $a_n > 0$ *และ* $b_n > 0$ *สำหรับทุก* $n \geq 1$ *และ* $k \in \mathbb{N}$

1. *ถ้า* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *เป็นอนุกรมลู่เข้า และ* $a_n \leq b_n$ *สำหรับทุก* $n \geq k$ *แล้ว* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *เป็นอนุกรมลู่เข้า*
2. *ถ้า* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *เป็นอนุกรมลู่ออก และ* $a_n \geq b_n$ *สำหรับทุก* $n \geq k$ *แล้ว* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *เป็นอนุกรมลู่ออก*

ตัวอย่าง 7. จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{F_n}$ ลู่เข้า

วิธีทำ เรามีว่า $F_n > \alpha^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ เมื่อ $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$

ดังนั้น $\dfrac{1}{F_n} < \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$

จาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{n-2} = \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \ldots$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีค่า $r = \dfrac{1}{\alpha} < 1$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{n-2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า นั่นคือ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{F_n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

2.4 จำนวนจาคอปส์ทาล (Jacobsthal number)

บทนิยาม 5. [3] **จำนวนจาคอปส์ทาล** (Jacobsthal number) นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, $n \geq 2$ โดยที่ $J_0 = 0, J_1 = 1$

ตัวอย่าง 8. เราจะคำนวนสิบอันดับแรกของจำนวนจาคอปส์ทาลได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
J_0 &= 0 \\
J_1 &= 1 \\
J_2 &= J_1 + 2J_0 = 1 + 0 = 1 \\
J_3 &= J_2 + 2J_1 = 1 + 2 = 3 \\
J_4 &= J_3 + 2J_2 = 3 + 2 = 5 \\
J_5 &= J_4 + 2J_3 = 5 + 6 = 11 \\
J_6 &= J_5 + 2J_4 = 11 + 10 = 21 \\
J_7 &= J_6 + 2J_5 = 21 + 22 = 43 \\
J_8 &= J_7 + 2J_6 = 43 + 42 = 85 \\
J_9 &= J_8 + 2J_7 = 85 + 86 = 171
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6. *[5] Cassini - like formula สำหรับทุก $n \geq 1$ จะได้*

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

ทฤษฎีบท 7. *[5]*

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

สำหรับทุก $n \geq 0$

ตัวอย่าง 9. โดยทฤษฎีบท 7. เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{2^2 - (-1)^2}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 \\
J_5 &= \frac{2^5 - (-1)^5}{3} = \frac{32+1}{3} = 11 \\
J_9 &= \frac{2^9 - (-1)^9}{3} = \frac{512+1}{3} = 171
\end{aligned}$$

3 ผลการศึกษา

ในโครงงานนี้เราจะได้ทฤษฎีบทของผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ J_{n-1} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

และทฤษฎีบทของผลบวกของส่วนกลับยกกำลังสองของจำนวนจาคอปส์ทาล

$$J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง } n \neq 2$$

3.1 ทฤษฎีบทหลัก

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล เราจะต้องใช้สองบทตั้ง ต่อไปนี้

บทตั้ง 1.

I. $J_{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} > 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง $n \geq 2$

II. $J_{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} < 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง $n \geq 1$

พิสูจน์. ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า

$$J_{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} = J_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_k} = 0 < 1$$

สมมติว่า $n > 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_n} - \frac{1}{J_{n+1}} - \frac{2}{J_{n+2}} &= \frac{J_{n+2} - 2J_n}{J_nJ_{n+2}} - \frac{1}{J_{n+1}} \\
&= \frac{(J_{n+1} + 2J_n) - 2J_n}{J_nJ_{n+2}} - \frac{1}{J_{n+1}} && \text{(โดยบทนิยาม 5.)} \\
&= \frac{J_{n+1}}{J_nJ_{n+2}} - \frac{1}{J_{n+1}} \\
&= \frac{J_{n+1}^2 - J_nJ_{n+2}}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}} \\
&= -\frac{J_nJ_{n+2} - J_{n+1}^2}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}} \\
&= -\frac{(-1)^{n+1}2^n}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}} && \text{(โดยทฤษฎีบท 6.)} \\
&= -\frac{(-1)(-1)^n2^n}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n2^n}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{J_n}-\frac{1}{J_{n+1}}-\frac{2}{J_{n+2}}=\frac{(-1)^n 2^n}{J_nJ_{n+1}J_{n+2}} \qquad (n\geq 2)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $n\geq 3$ และ

$$\frac{1}{J_{n-1}}-\frac{1}{J_n}-\frac{2}{J_{n+1}}>0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{J_{n-1}}>\frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+1}} \tag{ก}$$

โดยการใช้สมการ (ก) ซ้ำไปเรื่อย ๆ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_{n-1}} &> \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+1}}\\
&> \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\left[\frac{1}{J_{n+2}}+\frac{1}{J_{n+3}}+\frac{1}{J_{n+3}}\right]\\
&> \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+2}}+\frac{1}{J_{n+3}}+\left[\frac{1}{J_{n+4}}+\frac{1}{J_{n+5}}+\frac{1}{J_{n+5}}\right]\\
&> \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+2}}+\dots\\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$J_{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}<1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n\geq 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $n\geq 2$ และ

$$\frac{1}{J_{n-1}}-\frac{1}{J_n}-\frac{2}{J_{n+1}}<0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{J_{n-1}}<\frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+1}} \tag{ข}$$

โดยการใช้สมการ (ข) ซ้ำไปเรื่อย ๆ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_{n-1}} &< \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+1}}\\
&< \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\left[\frac{1}{J_{n+2}}+\frac{1}{J_{n+3}}+\frac{1}{J_{n+3}}\right]\\
&< \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+2}}+\frac{1}{J_{n+3}}+\left[\frac{1}{J_{n+4}}+\frac{1}{J_{n+5}}+\frac{1}{J_{n+5}}\right]\\
&< \frac{1}{J_n}+\frac{1}{J_{n+1}}+\frac{1}{J_{n+2}}+\dots\\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$J_{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}>1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n\geq 2$$

$\square$

บทตั้ง 2. *สำหรับทุก* $n\geq 1$ *จะได้ว่า*

I. $(J_{n-1}-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}<1$

II. $(J_{n-1}+1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}>1$

พิสูจน์. ให้ $k\geq m\geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}3(J_{k-m}-2^{-m}J_k)&=3\left[\left(\frac{2^{k-m}-(-1)^{k-m}}{3}\right)-2^{-m}\left(\frac{2^k-(-1)^k}{3}\right)\right]\\&=2^{k-m}-(-1)^{k-m}-2^{-m}(2^k-(-1)^k)\\&=2^{k-m}-(-1)^{k-m}-2^{k-m}+2^{-m}(-1)^k\\&=-(-1)^{k-m}+2^{-m}(-1)^k\\&=(-1)^k(2^{-m}-(-1)^{-m})\end{aligned}$$

จะแสดงว่า $|(-1)^k(2^{-m}-(-1)^{-m})|<3$
พิจารณา

$$|(-1)^k(2^{-m}-(-1)^{-m})|=|2^{-m}-(-1)^{-m}|$$

กรณี m เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง $m\geq 2$

$$|2^{-m}-(-1)^{-m}|=|2^{-m}-1|=1-2^{-m}<3$$

กรณี m เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง $m\geq 1$

$$|2^{-m}-(-1)^{-m}|=|2^{-m}+1|=2^{-m}+1<3$$

ดังนั้น

$$|(-1)^k(2^{-m}-(-1)^{-m})|<3$$

จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}-3<(-1)^k(2^{-m}-(-1)^{-m})&<3\\-3<3(J_{k-m}-2^{-m}J_k)&<3\\-1<J_{k-m}-2^{-m}J_k&<1\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} J_{k-m}-2^{-m}J_k &< 1 \\ J_{k-m}-1 &< 2^{-m}J_k \\ \frac{J_{k-m}-1}{J_k} &< 2^{-m} \end{aligned}$$

เมื่อให้ $m=k-n+1$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{J_{k-(k-n+1)}-1}{J_k} &< 2^{-(k-n+1)} \\ \frac{J_{n-1}-1}{J_k} &< 2^{n-k-1} \end{aligned}$$

เราจะได้

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{J_{n-1}-1}{J_k} < \sum_{k=n}^{\infty}2^{n-k-1} = \sum_{j=1}^{\infty}2^{-j} = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots = 1$$

ดังนั้น

$$(J_{n-1}-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k} < 1$$

สำหรับทุก $n \geq 1$
พิจารณา

$$\begin{aligned} J_{k-m}-2^{-m}J_k &> -1 \\ J_{k-m}+1 &> 2^{-m}J_k \\ \frac{J_{k-m}+1}{J_k} &> 2^{-m} \end{aligned}$$

เมื่อให้ $m=k-n+1$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{J_{k-(k-n+1)}+1}{J_k} &> 2^{-(k-n+1)} \\ \frac{J_{n-1}+1}{J_k} &> 2^{n-k-1} \end{aligned}$$

เราจะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty}\frac{J_{n-1}+1}{J_k} &> \sum_{k=n}^{\infty}2^{n-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}2^{-j} = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(J_{n-1}+1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k} > 1$$

สำหรับทุก $n \geq 1$ $\square$

ทฤษฎีบท 8.

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ J_{n-1} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$$

พิสูจน์. กรณี n เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง $n \geq 1$

พิจารณาที่ $n = 1$ เราได้ว่า

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} > \frac{1}{J_1} = 1$$

ดังนั้น

$$0 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} < 1$$

โดยการใช้บทนิยาม 1. จะได้ว่า

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = 0 = J_{1-1}$$

จากบทตั้ง 1. (II.) และบทตั้ง 2. (II.) พิจารณาที่ $n \geq 3$ เราได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}+1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} < \frac{1}{J_{n-1}}$$

ดังนั้น

$$J_{n-1} < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} < J_{n-1} + 1$$

โดยการใช้บทนิยาม 1. จะได้ว่า

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = J_{n-1} \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1$$

กรณี n เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง $n \geq 2$

จากบทตั้ง 1. (I.) และบทตั้ง 2. (I.) พิจารณาที่ $n \geq 2$ เราได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} < \frac{1}{J_{n-1}-1}$$

ดังนั้น

$$J_{n-1} - 1 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} < J_{n-1}$$

โดยการใช้บทนิยาม 1. จะได้ว่า

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = J_{n-1} - 1 \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2$$

□

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทผลบวกของส่วนกลับยกกำลังสองของจำนวนจาคอปส์ทาล เราจะต้องใช้สองบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3. *สำหรับทุก $n \geq 3$ จะได้ว่า $J_n > 2^{n-2}$*

พิสูจน์. จะแสดงว่า $J_n > 2^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $J_n > 2^{n-2}$

1. $n = 3$ จะได้ $J_3 = 3 > 2^{3-2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

   $n = 4$ จะได้ $J_4 = 5 > 2^{4-2}$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

2. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $k \geq 3$ สมมติว่า $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ เป็นจริง ดังนั้น

$$J_{k-1} > 2^{k-3} \text{ และ } J_k > 2^{k-2}$$

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= J_k + 2J_{k-1} \\ &> 2^{k-2} + 2(2^{k-3}) \\ &= 2^{k-2} + 2^{k-2} \\ &= 2(2^{k-2}) \\ &= 2^{k-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม สรุปได้ว่า $J_n > 2^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ □

บทตั้ง 4.

$$(J_{n-1}J_n)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} < 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$

พิสูจน์. ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า

$$(J_{n-1}J_n)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} = (0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} = 0 < 1$$

ถ้า $n = 2$ จะได้ว่า

$$(J_{n-1}J_n)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} = (1 \cdot 1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots > 1$$

สมมติว่า $n \geq 3$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{J_{n-1}J_n} - \frac{1}{J_n^2} - \frac{1}{J_nJ_{n+1}} &= \frac{[J_nJ_{n+1} - J_{n-1}J_n]}{J_{n-1}J_n^2J_{n+1}} - \frac{1}{J_n^2} \\
&= \frac{J_{n+1} - J_{n-1}}{J_{n-1}J_nJ_{n+1}} - \frac{1}{J_n^2} \\
&= \frac{J_n + 2J_{n-1} - J_{n-1}}{J_{n-1}J_nJ_{n+1}} - \frac{1}{J_n^2} && \text{(โดยบทนิยาม 5.)} \\
&= \frac{(J_n + J_{n-1})J_n^2 - J_{n-1}J_nJ_{n+1}}{J_{n-1}J_n^3J_{n+1}} \\
&= \frac{J_n^3 + J_{n-1}J_n^2 - J_{n-1}J_nJ_{n+1}}{J_{n-1}J_n^3J_{n+1}} \\
&= \frac{J_n^3 + J_{n-1}J_n^2 - J_n[(-1)^n2^{n-1} + J_n^2]}{J_{n-1}J_n^3J_{n+1}} && \text{(ทฤษฎีบท 6.)} \\
&= \frac{J_n^3 + J_{n-1}J_n^2 - (-1)^n2^{n-1}J_n - J_n^3}{J_{n-1}J_n^3J_{n+1}} \\
&= \frac{J_{n-1}J_n^2 - (-1)^n2^{n-1}J_n}{J_{n-1}J_n^3J_{n+1}} \\
&= \frac{J_{n-1}J_n - (-1)^n2^{n-1}}{J_{n-1}J_n^2J_{n+1}}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n} - \frac{1}{J_n^2} - \frac{1}{J_nJ_{n+1}} = \frac{J_{n-1}J_n - (-1)^n2^{n-1}}{J_{n-1}J_n^2J_{n+1}} \qquad (n \geq 3)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n} - \frac{1}{J_n^2} - \frac{1}{J_nJ_{n+1}} > 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $n \geq 4$ และ

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n} - \frac{1}{J_n^2} - \frac{1}{J_nJ_{n+1}} = \frac{J_{n-1}J_n - 2^{n-1}}{J_{n-1}J_n^2J_{n+1}}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $J_{n-1}J_n - 2^{n-1} > 0$ สำหรับทุก $n \geq 4$
ถ้า $n = 4$ แล้ว
$J_{n-1}J_n - 2^{n-1}$
$= J_{4-1}J_4 - 2^{4-1}$
$= J_3J_4 - 2^3$
$= 3 \cdot 5 - 8$
$= 7 > 0$
ถ้า $n \geq 6$ โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า
$J_{n-1}J_n - 2^{n-1}$
$> 2^{n-3} \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1}$
$= 2^{2n-5} - 2^{n-1}$
$= 2^{n-1}(2^{n-4} - 1) > 0$
จากทั้ง 2 กรณี ทำให้เราสรุปได้ว่า $J_{n-1}J_n - (-1)^n2^{n-1} > 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$

ดังนั้น

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n} > \frac{1}{J_n^2} + \frac{1}{J_nJ_{n+1}} \qquad (n \geq 3) \qquad (A)$$

โดยการใช้อสมการ (A) ซ้ำไปเรื่อย ๆ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_{n-1}J_n} &> \frac{1}{J_n^2} + \frac{1}{J_nJ_{n+1}} \\
&> \frac{1}{J_n^2} + \frac{1}{J_{n+1}^2} + \frac{1}{J_{n+1}J_{n+2}} \\
&> \frac{1}{J_n^2} + \frac{1}{J_{n+1}^2} + \frac{1}{J_{n+2}^2} + \frac{1}{J_{n+2}J_{n+3}} \\
&> \frac{1}{J_n^2} + \frac{1}{J_{n+1}^2} + \frac{1}{J_{n+2}^2} + \dots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(J_{n-1}J_n)\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} < 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$ □

ทฤษฎีบท 9.

$$J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$

พิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$
จากบทตั้ง 4. เราได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2}$$

ดังนั้น

$$J_{n-1}J_n \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1}$$

โดยการใช้บทนิยาม 1. จะได้ว่า

$$J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor$$

□

4 สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษาเกี่ยวกับผลบวกของส่วนกลับของจำนวนจาคอปส์ทาล เราได้ผลงานวิจัยดังนี้

1) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ซึ่ง } n \geq 2; \\ J_{n-1} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ซึ่ง } n \geq 1 \end{cases}$

2) $J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ซึ่ง $n \neq 2$

จาก 2) จะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถแสดงได้ว่า $J_{n-1}J_n = \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor$ ดังนั้น แนวทางในการพัฒนา ผู้ที่สนใจอาจนำโครงงานนี้ไปต่อยอด เพื่อให้ได้สูตรสำหรับผลบวกของส่วนกลับยกกำลังสองของจำนวนจาคอปส์ทาลต่อไป

หนังสืออ้างอิง

[1] F. T. Aydın. On generalizations of the Jacobsthal sequence, Yildiz Technical University, 24(1):120-135, 2018.

[2] H. Holliday and Komatsu. On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers. Proceedings of Integer Conference, 2011.

[3] T. Koshy. Fibonacci and Lucas numbers with Applications. New York, 2001.

[4] H. Ohtsuka and S. Nakamura. On the sum of reciprocal Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly. 153-159, 2008/2009.

[5] A. Rasdemir. On the Jacobsthal number By Matrix Method. SUD Journal of science , 7(1): 69-76, 2012.

[6] นรากร คณาศรี. ทฤษฎีจำนวน 1. โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2555.

5 ภาคผนวก

ก. การพิสูจน์ที่เกี่ยวข้อง

(I) อนุกรม $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}$ ลู่เข้า สำหรับทุก $n \geq 1$

พิสูจน์. จาก $J_n > 2^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$
ดังนั้น $\dfrac{1}{J_n} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$
จาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$
ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีค่า $r = \dfrac{1}{2} < 1$
ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 6. จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}$ ลู่เข้า สำหรับทุก $n \geq 1$ $\square$

(II) อนุกรม $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}$ ลู่เข้า สำหรับทุก $n \geq 1$

พิสูจน์. ให้ $n \geq 1$ ใด ๆ
จาก $J_k^2 \geq J_k$ สำหรับทุก $k \geq n$
จะได้ว่า $\dfrac{1}{J_k^2} \leq \dfrac{1}{J_k}$ สำหรับทุก $k \geq n$
เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k}$ ลู่เข้า ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}$ ลู่เข้าด้วย โดยทฤษฎีบท 6.

$\square$

ข. Python Code

(I) จากบทตั้ง 4 เราจะแสดงผลการคำนวณของสมการ $\frac{1}{J_{n-1}J_n} - \frac{1}{J_n^2} - \frac{1}{J_nJ_{n+1}}$ จากการใช้โปรแกรม Python เนื่องจาก โปรแกรมไม่สามารถคำนวณทุก ๆ n ถึง ∞ ได้ เพราะโปรแกรมจะทำการคำนวณไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด เราจึงให้ $n = 2, 3, 4, \ldots, 499$ เพื่อไม่ให้โปรแกรมทำงานช้าเกินไป จะได้

```python
J = [0,1,1]
k = 500
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
print("\n lemma3 ")
for n in range(2,k):
    print("n = ",n,":",1/(J[n-1]*J[n])-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1]))
```

การแสดงผลของโปรแกรมการคำนวณ จะได้

```
 lemma3
n =  2 : -0.3333333333333333
n =  3 : 0.15555555555555556
n =  4 : 0.008484848484848484
n =  5 : 0.005588351042896496
n =  6 : 0.0009540109207883294
n =  7 : 0.00029298901821410005
n =  8 : 6.639005711483719e-05
n =  9 : 1.7451469861582326e-05
n =  10 : 4.255932707882586e-06
n =  11 : 1.0773378385199818e-06
n =  12 : 2.6766437455293817e-07
n =  13 : 6.71248069662958e-08
n =  14 : 1.675510962774655e-08
n =  15 : 4.192038736650197e-09
n =  16 : 1.0476020064248065e-09
n =  17 : 2.6195146060292797e-10
n =  18 : 6.548149523111895e-11
n =  19 : 1.6371170044917207e-11
n =  20 : 4.092692981411241e-12
n =  21 : 1.0231856865690754e-12
n =  22 : 2.557948664895487e-13
n =  23 : 6.394891101643425e-14
n =  24 : 1.5987203454849993e-14
n =  25 : 3.996803901119655e-15
n =  26 : 9.992005956040082e-16
n =  27 : 2.4980019636048954e-16
n =  28 : 6.24500431576864e-17
n =  29 : 1.5612511530976095e-17
n =  30 : 3.903127790049712e-18
```

```
n =  472 : 3.026192892861267e-284
n =  473 : 7.565482232153167e-285
n =  474 : 1.8913705580382918e-285
n =  475 : 4.728426395095729e-286
n =  476 : 1.1821065987739324e-286
n =  477 : 2.955266496934831e-287
n =  478 : 7.388166242337077e-288
n =  479 : 1.8470415605842693e-288
n =  480 : 4.617603901460673e-289
n =  481 : 1.1544009753651683e-289
n =  482 : 2.886002438412921e-290
n =  483 : 7.215006096032302e-291
n =  484 : 1.8037515240080755e-291
n =  485 : 4.509378810020189e-292
n =  486 : 1.1273447025050472e-292
n =  487 : 2.818361756262618e-293
n =  488 : 7.045904390656545e-294
n =  489 : 1.7614760976641362e-294
n =  490 : 4.403690244160341e-295
n =  491 : 1.1009225610400851e-295
n =  492 : 2.752306402600213e-296
n =  493 : 6.880766006500532e-297
n =  494 : 1.720191501625133e-297
n =  495 : 4.300478754062833e-298
n =  496 : 1.0751196885157081e-298
n =  497 : 2.6877992212892704e-299
n =  498 : 6.719498053223176e-300
n =  499 : 1.679874513305794e-300
PS C:\Users\ohm>
```

จะเห็นได้ว่า จำนวนเต็ม $n = 2$ ทำให้สมการเป็นลบเพียงตัวเดียวเท่านั้น จากการแทนค่าจำนวน $n = 2$ ถึง $n = 499$ เพื่อความแม่นยำเราจึงให้ $n = 2, 3, 4, \ldots, 100000$ จะได้

```python
J = [0,1,1]
k = 100000
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
import time
start = time.time()
print("\nสมการ lemma3 ")
for n in range(2,k):
    answer = 1/(J[n-1]*J[n])-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1])
    if answer < 0 :
        print("n = ",n,":",answer)
end = time.time()
print("Total time taken:",end - start)
```

การแสดงผลของโปรแกรมจะเลือกเฉพาะ n ที่ให้ค่าลบ จะได้

```
สมการ lemma3
n =  2 : -0.3333333333333333
Total time taken: 51.57322549819946
PS C:\Users\ohm>
```

ดังนั้น จากการแทนค่าจำนวน $n=2$ ถึง $n=100000$ ที่จำนวนเต็ม $n=2$ จะให้ค่าเป็นลบเพียงตัวเดียวเท่านั้น จึงเป็นแรงจูงใจให้เราพิสูจน์ว่า $\frac{1}{J_{n-1}J_n}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}}>0$ สำหรับทุก $n\geq 3$ ในบทตั้ง 4

(II) จากทฤษฎีบท 9. เราได้ว่า

$$J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1}\right\rfloor \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ซึ่ง } n\neq 2$$

ดังนั้น $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1}\right\rfloor = J_{n-1}J_n$ ก็ต่อเมื่อ $J_{n-1}J_n \leq \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1}\right\rfloor < J_{n-1}J_n+1$ นั่นคือ

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1}\right\rfloor < J_{n-1}J_n+1$$

ก็ต่อเมื่อ
$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1} < J_{n-1}J_n+1$$

ก็ต่อเมื่อ
$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2} > \frac{1}{J_{n-1}J_n+1}$$

ถ้า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+1}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+1}<0 \tag{B}$$

โดยการใช้อสมการ (B) ซ้ำไปเรื่อย ๆ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J_{n-1}J_n+1} &< \frac{1}{J_n^2}+\frac{1}{J_nJ_{n+1}+1}\\
&< \frac{1}{J_n^2}+\left[\frac{1}{J_{n+1}^2}+\frac{1}{J_{n+1}J_{n+2}+1}\right]\\
&< \frac{1}{J_n^2}+\frac{1}{J_{n+1}^2}+\left[\frac{1}{J_{n+2}^2}+\frac{1}{J_{n+2}J_{n+3}+1}\right]\\
&< \frac{1}{J_n^2}+\frac{1}{J_{n+1}^2}+\frac{1}{J_{n+2}^2}+\dots\\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{J_k^2}\right)^{-1}\right\rfloor < J_{n-1}J_n+1$$

พิจารณาอสมการ

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+1}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+1}<0$$

จากการใช้โปรแกรม Python
เนื่องจาก โปรแกรมไม่สามารถคำนวณทุก ๆ n ถึง ∞ ได้ เพราะโปรแกรมจะทำการคำนวณไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด เราจึงให้ $n=2,3,4,\dots,100000$ จะได้

```
J = [0,1,1]
k = 100000
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
import time
start = time.time()
print("\nสมการ +1 ")
for n in range(2,k):
    answer = 1/(J[n-1]*J[n]+1)-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1]+1)
    if answer < 0 :
        print("n = ",n,":",answer)
end = time.time()
print("Total time taken:",end - start)
```

การแสดงผลของโปรแกรมจะเลือกเฉพาะ n ที่ให้ค่าลบ จะได้

```
สมการ +1
n =  2 : -0.75
Total time taken: 453.35910177230835
PS C:\Users\ohm> & C:/Users/ohm/AppData/Local/Programs/Python/Python311/python.exe c:/Users/ohm/Desktop/2-3.py
```

จากการแสดงผล ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 453 วินาที จะเห็นได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+1}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+1}<0 \text{ ที่ } n=2 \text{ เท่านั้น}$$

(III) ในทำนองเดียวกันกับ **(II)**

พิจารณาอสมการ

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+2}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+2}<0$$

จากการใช้โปรแกรม Python
เนื่องจาก โปรแกรมไม่สามารถคำนวณทุก ๆ n ถึง ∞ ได้ เพราะโปรแกรมจะทำการคำนวณไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด เราจึงให้ $n=2,3,4,\dots,100000$ จะได้

```
J = [0,1,1]
k = 100000
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
import time
start = time.time()
print("\nสมการ +2 ")
for n in range(2,k):
    answer = 1/(J[n-1]*J[n]+2)-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1]+2)
    if answer < 0 :
        print("n = ",n,":",answer)
end = time.time()
print("Total time taken:",end - start)
```

การแสดงผลของโปรแกรมจะเลือกเฉพาะ n ที่ให้ค่าลบ จะได้

```
สมการ +2
n =  2 : -0.8666666666666667
Total time taken: 48.22172260284424
PS C:\Users\ohm> 
```

จากการแสดงผล ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 48 วินาที จะเห็นได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+2}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+2}<0 \text{ ที่ } n=2 \text{ เท่านั้น}$$

(IV) ในทำนองเดียวกันกับ (II)

พิจารณาอสมการ

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+3}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+3}<0$$

จากการใช้โปรแกรม Python
เนื่องจาก โปรแกรมไม่สามารถคำนวณทุก ๆ n ถึง ∞ ได้ เพราะโปรแกรมจะทำการคำนวณไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด เราจึงให้ $n=2,3,4,\ldots,100000$ จะได้

```python
J = [0,1,1]
k = 100000
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
import time
start = time.time()
print("\nสมการ +3 ")
for n in range(2,k):
    answer = 1/(J[n-1]*J[n]+3)-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1]+3)
    if answer < 0 :
        print("n = ",n,":",answer)
end = time.time()
print("Total time taken:",end - start)
```

การแสดงผลของโปรแกรมจะเลือกเฉพาะ n ที่ให้ค่าลบ จะได้

```
สมการ +3
n =  2 : -0.9166666666666666
n =  4 : -0.0016858237547892757
Total time taken: 124.79541993141174
PS C:\Users\ohm> & C:/Users/ohm/AppData/Local/Programs/
```

จากการแสดงผล ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 124 วินาที จะเห็นได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+3}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+3}<0 \text{ ที่ } n=2,4 \text{ เท่านั้น}$$

(V) ในทำนองเดียวกันกับ (II)

พิจารณาอสมการ

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+100}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+100}<0$$

จากการใช้โปรแกรม Python
เนื่องจาก โปรแกรมไม่สามารถคำนวณทุก ๆ n ถึง ∞ ได้ เพราะโปรแกรมจะทำการคำนวณไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด เราจึงให้ $n=2,3,4,\ldots,100000$ จะได้

```python
J = [0,1,1]
k = 100000
for i in range(k):
    sz = len(J)
    J.append(J[sz-1]+2*J[sz-2])
import time
start = time.time()
print("\nสมการ +100 ")
for n in range(2,k):
    answer = 1/(J[n-1]*J[n]+100)-1/(J[n]*J[n])-1/(J[n]*J[n+1]+100)
    if answer < 0 :
        print("n = ",n,":",answer)
end = time.time()
print("Total time taken:",end - start)
```

การแสดงผลของโปรแกรมจะเลือกเฉพาะ n ที่ให้ค่าลบ จะได้

```
สมการ +100
n =  2 : -0.9998077477650678
n =  3 : -0.11009802542094649
n =  4 : -0.03775596072931277
n =  5 : -0.004833997942945326
n =  6 : -0.000243434632972106
Total time taken: 83.38403487205505
PS C:\Users\ohm> 
```

จากการแสดงผล ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 83 วินาที จะเห็นได้ว่า

$$\frac{1}{J_{n-1}J_n+100}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+100}<0 \text{ ที่ } n\in\{2,3,4,5,6\} \text{ เท่านั้น}$$

จาก (II) ,(III) ,(IV) ,(V) เราจะเห็นได้ว่า แนวโน้มที่มี n ที่ทำให้ผลลัพธ์ของอสมการเป็นลบ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเราบวกจำนวนเต็มบวก k เข้าไปในสูตร $\frac{1}{J_{n-1}J_n+k}-\frac{1}{J_n^2}-\frac{1}{J_nJ_{n+1}+k}$ จึงคาดว่าผลลัพธ์ทางขวาของฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุดของผลบวกของส่วนกลับยกกำลังสองของจำนวนจาคอปส์ทาล อาจจะไม่อยู่ในรูปของ $J_{n-1}J_n+k$ ที่ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ