PHYSIK

Wurfbewegungen
Teil 1

Senkrechter Wurf nach unten
Senkrechter Wurf nach oben

Datei Nr. 91121

Stand: 21. November 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND PHYSIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Bemerkung

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel (im Volksmund auch „Mitternachtsformel“ genannt) wird von mir ausschließlich verwendet. In nicht wenigen Aufgaben ist sie der leider zu oft eingesetzten p-q-Formel deutlich überlegen.

Grundlagen: Überlagerung von Bewegungen

WISSEN: Beschleunigt ein Körper zur Zeit t = 0, in der er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_o besitzt, dann führt er quasi eine überlagerte Bewegung durch, nämlich einerseits die aus seiner Anfangsgeschwindigkeit resultierende gleichförmige Bewegung und dazu die durch die Beschleunigung entstehende gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + a \cdot t$ (2)

1 Senkrechter Wurf nach unten

Der senkrechte Wurf nach unten ist ein Beispiel dafür. Der Körper erhält eine Startgeschwindigkeit nach unten und wird zusätzlich durch die Gravitationskraft beschleunigt mit $a = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, wofür man in der Regel g schreibt und diese Beschleunigung auf $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ aufrundet.

Es gelten diese Bewegungsgleichungen:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + g \cdot t$ (2)

Bei den folgenden Rechenbeispielen wird d*er Luftwiderstand vernachlässigt. Wir rechnen mit* $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Beispiel 1

Ein Stein wird von einem Hochhaus aus mit $v_0 = 2 \frac{m}{s}$ in die Tiefe geworfen.

a) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit trifft er in 88 m Tiefe auf?

b) Welche Wegstrecke durchfliegt dieser Körper in der 3. Sekunde und um welchen Betrag nimmt dabei seine Geschwindigkeit zu?

c) In welcher Höhe über dem Boden besitzt der Stein die halbe Auftreffgeschwindigkeit?

d) In welcher Höhe hätte man den Stein aus der Ruhe fallen lassen müssen, um mit derselben Geschwindigkeit unten aufzutreffen?

Beispiel 2

Ein Körper schlägt nach 5 s Flugdauer in 129 m Tiefe auf.
Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen?

Beispiel 3

Ein Körper schlägt in 48 m Tiefe mit der Geschwindigkeit $31 \frac{m}{s}$ auf.

Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen
und wie lange war der Körper unterwegs?

Jetzt folgen die Lösungen.

Lösung Beispiel 1

Für diesen Wurf nach unten gelten diese Bewegungsgleichungen:

$v(t) = v_0 + g \cdot t$ d.h. $v(t) = 2\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot t$ (1)

$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$ d.h. $s(t) = 2\frac{m}{s} \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ (2)

a) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit trifft er in 88 m Tiefe auf?

Die Aufschlagtiefe s(t) = 88 m gestattet die Berechnung der Fallzeit aus (2):

$$88\,m = 2\frac{m}{s} \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 2\frac{m}{s} \cdot t - 88\,m = 0 \quad \Big| : \frac{m}{s^2} \text{ d.h. } \cdot \frac{s^2}{m}$$

$$5t^2 + 2s \cdot t - 88s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-88s^2)}}{10} = \frac{-2s \pm \sqrt{1764s^2}}{10} t_{1,2} = \frac{-2s \pm 42s}{10} = \begin{cases} 4\text{ s} \\ (-4{,}4\text{ s}) \end{cases}$$

Wir ignorieren die nicht sinnvolle negative Flugdauer (die das mathematische Modell nun mal liefert) und erhalten das **Ergebnis**: Nach 4 s schlägt der Körper auf dem Boden auf.

Die Auftreffgeschwindigkeit folgt mit (1): $v(4s) = 2\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 4s = 42\frac{m}{s}$

b) Welche Wegstrecke durchfliegt dieser Körper in der 3. Sekunde und um welchen Betrag nimmt dabei seine Geschwindigkeit zu?

Die **Fallstrecke** in der 3. Sekunde erhält man als Differenz der Wegmarken nach $t = 3s$ und $t = 2s$:

$$\Delta s = s(3s) - s(2s) = \left(2\frac{m}{s} \cdot 3s + 5\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2\right) - \left(2\frac{m}{s} \cdot 2s + 5\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2\right)$$

$$\Delta s = 6\text{ m} + 45\text{m} - 4\text{m} - 20\text{m} = 27\text{m}$$

Geschwindigkeitszunahme in der 3. Sekunde:

$$\Delta v = v(3s) - v(2s) = \left(2\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 3s\right) - \left(2\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 2s\right)$$

$$\Delta v = 2\frac{m}{s} + 30\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

Oder kürzer: Es gilt die Formel $\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t = 10\frac{m}{s^2} \cdot 1s = 10\frac{m}{s}$

c) In welcher Höhe über dem Boden besitzt der Stein die halbe Auftreffgeschwindigkeit?

Die halbe Auftreffgeschwindigkeit beträgt $v(t) = 21\frac{m}{s}$. Diesen Wert setzt man in (1) ein:

$$21\frac{m}{s} = 2\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow 10\frac{m}{s^2} \cdot t = 19\frac{m}{s} \Rightarrow t = 1{,}9\text{ s}$$

Damit gehen wir in die Formel (2):

$$s(1{,}9\text{ s}) = 2\frac{m}{s} \cdot 1{,}9\text{ s} + 5\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}9\text{ s})^2 = 21{,}85\text{ m}$$

Ergebnis: Nach der Fallstrecke 21,85 m hat der Körper die halbe Auftreffgeschwindigkeit.

Dies entspricht der Höhe $h = 88\text{ m} - 21{,}85\text{ m} = 66{,}15\text{m}$.

d) In welcher Höhe hätte man den Stein aus der Ruhe fallen lassen müssen, um mit derselben Geschwindigkeit unten aufzutreffen?

Jetzt müssen wir die Bewegungsgleichungen ohne Anfangsgeschwindigkeit verwenden:

Wir wissen nur: $v_{unten} = 42\frac{m}{s}$ und verwenden

$$v = \sqrt{2gs} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2g} = \frac{42^2}{20}m = 88{,}2\ m. \qquad (*)$$

Wer nicht mit dieser Formel arbeiten will, muß zuerst die Fallzeit berechnen:

$$v = gt \Rightarrow t = \frac{v}{g} = \frac{42\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 4{,}2\,s$$

Damit folgt: $s = \frac{1}{2}gt^2 = 5\frac{m}{s^2}\cdot(4{,}2\,s)^2 = 88{,}2\,m.$

Hinweis: Auf diese Weise entsteht auch die Gleichung (*): Durch Einsetzen der Zeit.

Lösung Beispiel 2

Ein Körper schlägt nach 5 s Flugdauer in 129 m Tiefe auf.
Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen?

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left\{\begin{array}{l} v(t) = v_0 + g\cdot t \\ s(t) = v_0\cdot t + \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

Gegeben ist $s(5s) = 129\ m.$

In (2) eingesetzt ergibt dies:

$$129\ m = v_0\cdot 5s + 5\frac{m}{s^2}\cdot 25\ s^2 \Rightarrow v_0\cdot 5s = 129m - 125m = 4m$$

Ergebnis: $v_0 = \frac{4m}{5s} = 0{,}8\ \frac{m}{s}.$

Lösung Beispiel 3

> Ein Körper schlägt in 48 m Tiefe mit der Geschwindigkeit $31\frac{m}{s}$ auf.
>
> Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen
> und wie lange war der Körper unterwegs?

Gegeben sind $s(t_1) = 48\text{ m}$ und $v(t_1) = 31\frac{m}{s}$, wobei t_1 der Zeitpunkt des Auftreffens ist und auch die Flugdauer.

Die Bewegungsgleichungen lauten: $\left.\begin{cases} v(t) = v_0 + g \cdot t \\ s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Eingesetzt ergibt dies: $31\frac{m}{s} = v_0 + 10\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$

$$48\text{ m} = v_0 \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

Es liegen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor. Um v_0 zu eliminieren multipliziert man Gleichung (1) mit t $\to (1')$ und subtrahiert davon die zweite Gleichung:

$$31\frac{m}{s} \cdot t = v_0 \cdot t + 10\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1')$$

$$48\text{ m} = v_0 \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

$(1') - (2)$: $31\frac{m}{s} \cdot t - 48\text{ m} = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

Diese quadratische Gleichung wird nach Potenzen von t geordnet:

$$5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - 31\frac{m}{s} \cdot t + 48\text{ m} = 0$$

Ohne die Zeiteinheiten: $5t^2 - 31 \cdot t + 48 = 0$

Allgemeine Lösungsformel: $t_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 4 \cdot 5 \cdot 48}}{10} = \frac{31 \pm 1}{10} = \begin{cases} 3{,}2 \\ 3 \end{cases} \text{ (s)}$

Zu Zeiten berechnet man die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus (1):

$$31\frac{m}{s} = v_0 + 10\frac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow v_0 = 31\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot t = \begin{cases} -1\frac{m}{s} \\ 1\frac{m}{s} \end{cases}$$

Damit wird das doppelte Ergebnis klar:

Bei $v_0 = 1\frac{m}{s}$ fällt der Körper 3 s bis zum Aufprall.

Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -1\frac{m}{s}$ gehört zu einem Abwurf nach oben.

Es ist klar, dass der dann etwas länger dauert, bis er unten ankommt: 3,2 s.
Man erkennt, dass in so einem Fall <u>stets die kleinere Zeit der gesuchte Wert</u> ist.

2 Senkrechter Wurf nach oben

Gibt man dem Körper eine Anfangsgeschwindigkeit nach oben, dann wirkt die Gravitation bremsend und es liegt eine gleichmäßig gebremste Bewegung vor.
Nach dem Halten im obersten Punkt der Wurfbewegung folgt der freie Fall aus dieser Höhe.

Die Bewegungsgleichungen können so aussehen: $\left\{ \begin{array}{l} v(t) = v_0 - g \cdot t \\ s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array} \right\}$ Dann hat v_0 ein positives Vorzeichen, die Geschwindigkeitsachse und die Wegachse zeigen also nach oben.
Statt s(t) kann man auch h(t) verwenden.

Beispiel 1:

Der Körper wird mit $v_0 = 25 \frac{m}{s}$ nach oben abgeworfen.

Stelle für die v(t)- und für die s(t)-Funktion eine Wertetafel auf.

Zum Ausfüllen:

Zeit t	Geschwindigkeit v(t)	Wegfunktion (Steighöhe) s(t)
0 s		
0,5 s		
1 s		
1,5 s		
2 s		
2,5 s		
3 s		
3,5 s		
4 s		
5 s		
6 s		

Lösung:

Bewegungsgleichungen: $\left\{ \begin{array}{l} v(t) = 25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t \\ s(t) = 25\frac{m}{s} t - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{array} \right\}$

Zeit t	Geschwindigkeit v(t)	Wegfunktion (Steighöhe) s(t)
0 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 0\,s = 25\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 0s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 0s^2 = 0\,m$
0,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5\,s = 20\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 0{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}25s^2 = 11{,}25\,m$
1 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 1s = 15\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 1\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s^2 = 20\,m$
1,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}5\,s = 10\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 1{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}25s^2 = 26{,}25\,m$
2 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 5\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 2\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 30\,m$
2,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}5\,s = 0\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 2{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}25s^2 = \boxed{31{,}25\,m} = s_{max}$
3 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = -5\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 3\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 9\,s^2 = 30\,m$
3,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}5\,s = -10\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 3{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 12{,}25s^2 = 26{,}25\,m$
4 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = -15\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 4\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 = 20\,m$
5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 5\,s = -25\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 0\,m$
6 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 6\,s = -35\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 6s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 36\,s^2 = -30\,m$

Diese Tabelle enthält interessante Ergebnisse. Wir wollen sie deuten.

In der Spalte s(t) steht die Höhe, in der sich der Körper zur Zeit t befindet, gerechnet ab der Abwurfhöhe. Die größte Höhe ist 31,25 m. Sie wird nach t = 2,5 s erreicht. Dass dies tatsächlich der Gipfelpunkt der Wurfbewegung ist, erkennt man daran, dass die zugehörige Geschwindigkeit (linke Spalte) v(2,5s) = 0 ist. Dies ist nur im oberen Umkehrpunkt möglich.

Danach nehmen die Höhen wieder ab, und die Geschwindigkeitswerte werden negativ, was anzeigt, daß sich der Körper entgegen der Startrichtung bewegt. Er erreicht die Abwurfhöhe 0 wieder nach 5 s, und seine Geschwindigkeit ist dann wieder die Startgeschwindigkeit, allerdings negativ, weil sich der Körper nach unten bewegt. Und wir wollen bedenken, dass dies so nur möglich ist, wenn wir den Luftwiderstand wegschummeln!

Die Tabelle enthält noch einen Wert für t = 6 s. Dort ist dann sogar die Höhe negativ. Das geht natürlich nur, wenn von einem Turm aus nach oben abgeworfen wird und der Körper tatsächlich unter das Abwurfniveau fallen kann.

Man erkennt auch, wie man den Gipfelpunkt einer solchen Wurfbewegung ausrechnen kann. Man fragt einfach: Wo ist die Geschwindigkeit Null?

Gipfelbedingung: $v(t) = 0 \Leftrightarrow 25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t = 0$

Daraus folgt $10\frac{m}{s^2} \cdot t = 25\frac{m}{s} \Rightarrow t = \frac{25\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 2{,}5\,s$

Und damit erhält man die Steighöhe: $s(2{,}5s) = 25\frac{m}{s} \cdot 2{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}25s^2 = 31{,}25\,m$

Ganz WICHTIG:

Beim senkrechten Wurf nach oben muss man unterscheiden zwischen der erreichten Höhe und dem zurückgelegten Weg. Ich habe für die Wegfunktion die Bezeichnung s(t) verwendet. In der Form

$s(t) = v_o \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ gibt sie aber tatsächlich „nur" die Höhe des abgeworfenen Körpers an.

s(t) ist eine Funktion, mit der man die Lage des Flugobjektes berechnen kann.

Zum Zeitpunkt t = 1s erhält man: $s(1s) = 25\frac{m}{s} \cdot 1s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 1s^2 = 20m$

und für t = 4s erhält man: $s(4s) = 25\frac{m}{s} \cdot 4\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 16\,s^2 = 20\,m$

Die Höhe 20 m wird also zweimal durchflogen, nach 1 s aufwärts und nach 4 s abwärts.

Wie sieht es nun aus mit dem zurückgelegten Weg Δs ?

$$\Delta s(1s) = s(1s) = 20\,m$$

$$\Delta s = s_{max} + s(4s) = \underbrace{31{,}25\,m}_{\text{Steighöhe}} + \underbrace{(31{,}25\,m - 20\,m)}_{\text{von oben zurück}} = 42{,}5\,m$$

Man könnte also für die zurückgelegte Strecke für den Fall der Abwärtsbewegung diese Formel zusammenstellen: $\Delta s = s_{max} - (s_{max} - s(t))$ also $\Delta s = 2 \cdot s_{max} - s(t)$. Doch die merkt sich niemand. Viel wichtiger ist es, dass man das Geschehen versteht und so dann darauf kommt, wie man rechnen muss, nämlich „einmal ganz hinauf und dann noch eine Strecke nach unten" addieren.

Hinweis. Es gibt natürlich auch die Möglichkeit, beim Wurf nach oben die Weg- und die Zeitachse nach unten zu orientieren, dann wird die Anfangsgeschwindigkeit v_0 negativ, weil sie nach oben geht.

Die Bewegungsgleichungen sehen dann z. B. so aus: $\left\{\begin{array}{l} v(t) = -25\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot t \\ s(t) = -25\frac{m}{s}t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{array}\right\}$

Mir widerstrebt diese Möglichkeit. Aber es gibt sie eben ….

Musteraufgaben

Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\frac{m}{s}$ nach oben abgeschossen.

a) Berechne die Steighöhe.

b) Wann erreicht der Körper die halbe Höhe

c) In welcher Höhe hat er die halbe Anfangsgeschwindigkeit

d) Nach welcher Zeit schlägt er 1,5 m unterhalb der Abschusshöhe auf?

Musterlösung

Beginne stets mit den Bewegungsgleichungen:

$$\begin{Bmatrix} v(t) = v_0 - g\cdot t \\ h(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{Bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{Bmatrix} v(t) = 10\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t \\ h(t) = 10\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Im Hinblick auf die Unterscheidung von Höhe und Wegstrecke verwende ich für die Höhe h(t).

a) Berechne die **Steighöhe**.

Bedingung: $v(t_S) = 0$ $\qquad 0 = v_0 - g\cdot t_S \;\Leftrightarrow\; g\cdot t_S = v_0 \;\Leftrightarrow\; t_S = \frac{v_0}{g}$

Zuerst die allgemeine Lösung: $\qquad h_{max} = h(t_S) = v_0\cdot\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0{}^2}{g} - \frac{v_0{}^2}{2g} = \frac{v_0{}^2}{2g}$

Oder gleich mit Zahlen: Steigzeit $\qquad t_S = \frac{v_0}{g} = \frac{10\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1s.$

Steighöhe: $\qquad h_{max} = h(t_S) = h(1s) = 10\frac{m}{s}\cdot 1s - 5\frac{m}{s^2}\cdot 1\,s^2 = 5m$

b) Wann erreicht der Körper die halbe Höhe

Die Bedingung dafür ist $\qquad h(t) = 2{,}5\text{ m}$

In (2): $\qquad 2{,}5m = 10\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

Diese quadratische Gleichung ordnet man nach t-Potenzen und multipliziert sie dann mit $\frac{s^2}{m}$

$$5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 10\frac{m}{s}\cdot t + 2{,}5m = 0$$

$$5t^2 - 10s\cdot t + 2{,}5s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10s \pm \sqrt{100s^2 - 4\cdot 5\cdot 2{,}5\,s^2}}{10} = \frac{10s \pm \sqrt{50\,s^2}}{10} = \frac{10 \pm 7{,}1}{10}s \approx \begin{cases} 1{,}71\,s \\ 0{,}29\,s \end{cases}.$$

Nun muß man verstehen, warum zwei Zeiten auftreten. Beide haben ihren Sinn:
Der Köper wird abgeschossen, erreicht nach 0,29 s die halbe Steighöhe, und nach 1 s den höchsten Punkt seiner Bahn. Dann kehrt er um und fällt zurück. Nach 1,71 s passiert er dann wieder die halbe Steighöhe und nach 2 s (die doppelte Steigzeit) ist er wieder auf Höhe der Abwurfstelle !

c) In welcher Höhe hat er die halbe Anfangsgeschwindigkeit ?

Die Vermutung, dass der Körper in der halben Höhe auch die halbe Geschwindigkeit hat, ist falsch!

Bedingung: $v(t) = \frac{1}{2}v_0 = 5\frac{m}{s}$

Eingesetzt in (1): $5\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t \;\Rightarrow\; 10\frac{m}{s^2}\cdot t = 5\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}s.$

Offenbar erreicht der Körper in der halben Steigzeit die halbe Startgeschwindigkeit.

Und dazu die Höhe: $h\left(\frac{1}{2}s\right) = 10\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{2}s - 5\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{4}s^2 = 3{,}75m.$

Dies ist mehr als die halbe Höhe. Wir kommen gleich noch einmal darauf zurück.

d) Nach welcher Zeit schlägt er 1,5 m unterhalb der Abschusshöhe auf?

Bedingung $h(t) = -1{,}5m$

(Achtung: Die Wegachse bzw. Höhenachse zeigt nach oben, daher bedeutet tiefer negativ.

Eingesetzt in (2): $-1{,}5m = 10\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

Daraus folgt wie oben: $5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 10\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5m = 0 \quad \Big| \cdot\frac{s^2}{m}$

$$5\cdot t^2 - 10s\cdot t - 1{,}5s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10s \pm \sqrt{100s^2 - 4\cdot 5\cdot\left(-1{,}5s^2\right)}}{10} = \frac{10s \pm \sqrt{130s^2}}{10} \approx \frac{10 \pm 11{,}4}{10}s = \begin{cases} 2{,}14s \\ -0{,}14s \end{cases}$$

(Jetzt fällt die negative Zeit weg. Wäre der Köper von da unten gestartet, dann hätte dies 0,14 s vor dem Abwurfstart erfolgen müssen!).

Ergebnis: Nach 2,14 s schlägt er auf dem Boden auf.

Und dies mit dieser Geschwindigkeit $v(2{,}14s) = 10\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}14s = -11{,}4\frac{m}{s}$

Der negative Wert zeigt die Abwärtsbewegung an.

Zusatz: Wie löst man solche Aufgaben allgemein?

Dies sind wichtige Übungen mit Formeln, die Schülern lange sehr schwer fallen.

a) Berechne die **Steighöhe**.

Bedingung: $v(t_S) = 0$ $\quad 0 = v_0 - g \cdot t_S \Leftrightarrow g \cdot t_S = v_0 \Leftrightarrow \boxed{t_S = \frac{v_0}{g}}$

Zuerst die allgemeine Lösung: $h_{max} = h(t_S) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{g} - \frac{{v_0}^2}{2g} = \boxed{\frac{{v_0}^2}{2g}}$

b) Wann erreicht der Körper die halbe Höhe

Bewegungsgleichungen $\left\{\begin{array}{l} v(t) = v_0 - g \cdot t \\ h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$

Bedingung: $h(t) = \frac{{v_0}^2}{4g}$

Eingesetzt in (2): $\frac{{v_0}^2}{4g} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad | \cdot 4g \quad$ (Brüche weg !)

$${v_0}^2 = 4g \cdot v_0 \cdot t - 2g^2 \cdot t^2$$

Ordnen: $2g^2 \cdot t^2 - 4gv_0 \cdot t + {v_0}^2 = 0$

Lösungsformel: $t_{1,2} = \frac{4gv_0 \pm \sqrt{16g^2v_0^2 - 4 \cdot 2g^2v_0^2}}{4g^2} = \frac{4gv_0 \pm \sqrt{8g^2v_0^2}}{4g^2} = \frac{4gv_0 \pm gv_0 2\sqrt{2}}{4g^2}$

Kürzen durch 2g : $t_{1,2} = \frac{2v_0 \pm v_0\sqrt{2}}{2g} = \frac{(2 \pm \sqrt{2})}{2g} \cdot v_0 \approx \left\{\begin{array}{l} 0{,}17 \cdot v_0 \\ 0{,}03 \cdot v_0 \end{array}\right.$

c) In welcher Höhe hat er die halbe Anfangsgeschwindigkeit?

Bedingung: $v(t) = \frac{1}{2} v_0$

Eingesetzt in (1): $\frac{1}{2} v_0 = v_0 - g \cdot t \Rightarrow g \cdot t = \frac{1}{2} v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{2g}$

Gesuchte Höhe: $h\left(\frac{v_o}{2g}\right) = v_o \cdot \frac{v_o}{2g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_o}{2g}\right)^2 = \frac{{v_o}^2}{2g} - \frac{{v_o}^2}{8g} = \frac{3{v_o}^2}{8g}$

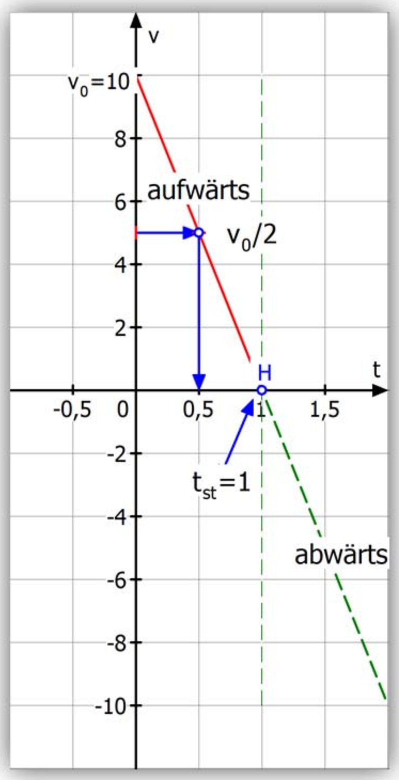
Eine interessante Denkaufgabe:

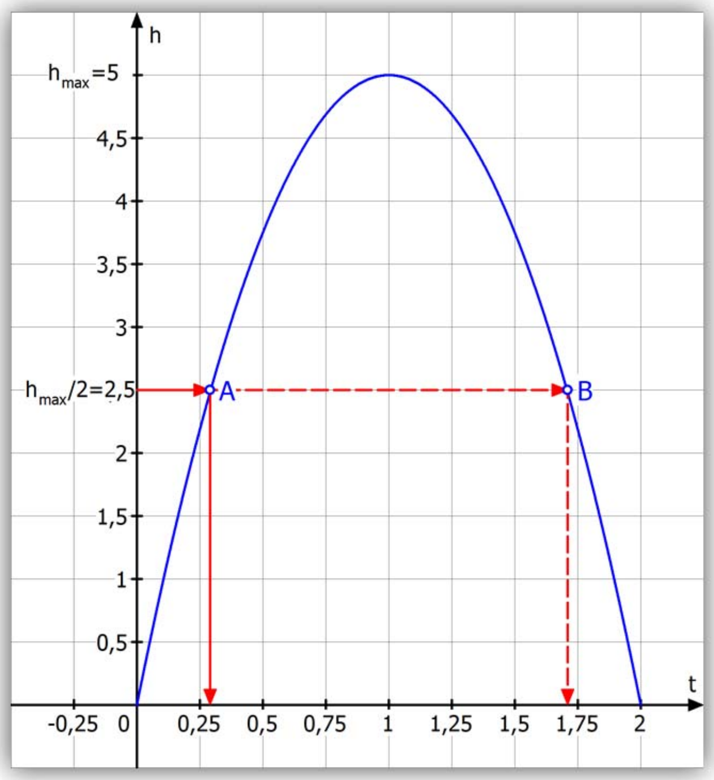
Warum erreicht man die halbe Steighöhe und die halbe Steigzeit nicht zum selben Zeitpunkt?

Dazu stelle ich die beiden Bewegungsgleichungen in Schaubildern dar:

$v(t) = 10\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t$

$h(t) = 10\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$





Weil das v-t-Gesetz linear ist (und daher eine Gerade zum Schaubild hat), gehört die halbe Geschwindigkeit auch zur halben Zeit.

Weil das h-t-Gesetz eine quadratische Funktion ist (eine Parabel ergibt) wird der halbe Maximalwert nicht bei der halben Steigzeit erreicht.

Der Trick mit der umgekehrten Bewegung !

Es geht jetzt gar nicht um einen Wurf sondern um eine Bewegung, die durch eine Bremsverzögerung z zum Halten gebracht wird. Diese filmen wir (im Geiste) und lassen ihn dann rückwärts laufen.
Wir sehen dann, wie der Körper aus der Ruhe heraus (rückwärts) beschleunigt wird.
Alle Daten dazu sind natürlich unverändert.

Das heißt, dass man die doch komplizierte Berechnung einer Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit auch durch eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus ersetzen kann:

Beispiel: Ein Körper wird mit $v_o = 15\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben abgeworfen.
Wie hoch steigt er?

Zuerst die Lösung mit den Bewegungsgleichungen: $\left\{\begin{array}{l} v(t) = 15\frac{m}{s} - g\cdot t \\ h(t) = 15\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$

Bedingung für den Haltepunkt: $v(t) = 0$

Das ergibt aus (1): $0 = 15\frac{m}{s} - g\cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t_{St} = \frac{15\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1{,}5\ s$

Einsetzen in (2): $h(1{,}5\ s) = 15\frac{m}{s}\cdot 1{,}5\ s - 5\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}5^2 s^2 = 11{,}25\ m$

Nun die Kurzlösung mit der umgekehrten Bewegung:

Der Körper startet aus der Ruhe heraus mit der Beschleunigung g.

Nach wieviel Metern erreicht er $v = 15\frac{m}{s}$?

Bewegungsgleichungen $\left\{\begin{array}{l} v(t) = g\cdot t \\ s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \\ v = \sqrt{2gs} \end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$

1. Möglichkeit: Aus (1): $t = \frac{v}{g} = \frac{15\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1{,}5\ s$

In (2): $s = 5\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}5^2 s^2 = 11{,}25\ m$

2. Möglichkeit (noch kürzer): Aus (3): $v^2 = 2gs \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2g} = \frac{225\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 11{,}25\ m$

Man sieht, dass dieser Trick die Rechnung deutlich verkürzt.

Achtung: Dieser Trick klappt nur, wenn die Bewegung zum Halten kommt. Und es MUSS als Begründung für diese Methode mindestens der Hinweis „Berechnung über die umgekehrte Bewegung“ dazu geschrieben werden.

3 Trainingsaufgaben

(1) Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\frac{m}{s}$ nach oben abgeschossen.

a) Berechne seine Höhe und Geschwindigkeit nach 2,5 s.

b) Wie groß ist seine maximale Steighöhe und die Steigzeit?

c) Wann erreicht der Körper die Höhe 40 m und welche Geschwindigkeit hat er dort?

d) Wann erreicht er wieder seine Abschusshöhe?

e) Wenn der Ort des Abwurfs ein Fenster ist, das 40 m über dem Erdboden liegt, wann erreicht der Körper dann den Erdboden und mit welcher Geschwindigkeit?

(2) Ein Körper wird vom Erdboden aus senkrecht nach oben abgeschossen.

Er erreicht in 75 m Höhe die Geschwindigkeit $v_1 = 10\frac{m}{s}$.

Wie groß war seine Abschussgeschwindigkeit? Wie lange hat der Körper für diese 75 m benötigt?

(3) Ein Körper wird mit $5\frac{m}{s}$ nach unten in einen 60 m tiefen Schacht geworfen.

a) Wie lange fällt er und mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf?

b) Wie viele Meter legt er in der letzten Sekunde zurück?

c) Wieviel Prozent seiner Endgeschwindigkeit hat er in der halben Tiefe erreicht?

(4) Vom Erdboden aus werden zur Zeit $t = 0$ gleichzeitig zwei Körper A und B nach oben geschossen.

a) Welche Höhe erreicht A, wenn er mit $v_A = 12\frac{m}{s}$ abgeschossen wird? Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_B muss B abgeschossen werden, um viermal so hoch wie A zu steigen?

b) Berechne die Steigzeiten für beide Körper. Wo befindet sich B, wenn A seinen Kulminationspunkt erreicht hat, und wo ist A, wenn B ganz oben ist ?

c) Berechne die Abstände beider Körper nach 1 s, 2 s und 3 s.
Stelle eine Formel für den Abstand der Körper A und B in Abhängigkeit von der Zeit auf.
Welchen Definitionsbereich (für t)hat diese Formel? Was gilt danach?

(5) Körper B wird 0,5 s nach Körper A mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen.

In welcher Höhe begegnen sie sich? Rechne zuerst mit $v_0 = c\frac{m}{s}$ und dann mit $c = 10$.

(6) Ein Körper soll auf die Höhe $h = 80$ m gebracht werden und zwar auf folgende Arten:

a) Er wird senkrecht nach oben geworfen.
Wie groß muss seine Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden?

b) Er wird aus der Ruhe heraus längs der Teilstrecke $h_1 = 30$ m gleichmäßig so beschleunigt, dass er über die Teilstrecke hinaus noch die Höhe h erreichen kann.
Wie groß ist die notwendige Beschleunigung a?
Wie lange braucht der Körper, bis er ganz oben ist?

4. Lösungen

(1) Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\frac{m}{s}$ nach oben abgeschossen.

a) Berechne seine Höhe und Geschwindigkeit nach 2,5 s.

Bewegungsgleichungen: $\left\{\begin{array}{l} v(t) = v_0 - g\cdot t \\ h(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{array}\right\}$ bzw. $\left\{\begin{array}{l} v(t) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t \\ h(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \end{array}\right\}$

Es folgt: $v(2{,}5\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}5\,s = 5\frac{m}{s}$

$$h(2{,}5\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 2{,}5\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot(2{,}5\,s)^2 = 75\,m - 31{,}25\,m = 43{,}75\,m$$

b) Wie groß ist seine maximale Steighöhe und die Steigzeit?

Bedingung für den höchsten Punkt: $v(t_S) = 0 \;\Leftrightarrow\; 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 3\,s$

Steighöhe: $h(3\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 3\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot 9\,s^2 = 45\,m$

c) Wann erreicht der Körper die Höhe 40 m und welche Geschwindigkeit hat er dort?

Bedingung: h = 40 m d. h. $40\,m = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 30\frac{m}{s}\cdot t + 40\,m = 0 \quad \Big| : 5\frac{m}{s^2}$$

$$t^2 - 6s\cdot t + 8\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{6s \pm \sqrt{36s^2 - 32s^2}}{2} = \frac{6s \pm 2s}{2} = \begin{cases} 4s \\ 2s \end{cases}$$

Zugehörige Geschwindigkeiten:

$$v(4\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 4\,s = -10\frac{m}{s} \quad \text{und} \quad v(2\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 2\,s = 10\frac{m}{s}$$

Der Körper befindet nach 2 s in 40 m Höhe und bewegt sich mit $10\frac{m}{s}$ aufwärts.

Nach 4 s ist er wieder dort, jedoch in Abwärtsbewegung (negative Geschwindigkeit).

d) Wann erreicht er wieder seine Abschusshöhe?

Bedingung: h = 0 d. h. $0 = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

t ausklammern : $0 = \left(30\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s^2}\cdot t\right)\cdot t$

Der Faktor t liefert t = 0, das war der Start. Die Klammer liefert t = 6 s . Dies kann man sich alles sparen, denn die Zeit bis zur Abschusshöhe zurück ist wegen ignoriertem Luftwiderstand die doppelte Steigzeit. Und die Geschwindigkeit ist dann genau so groß wie beim Abschuss.

e) Wenn der Ort des Abwurfs ein Fenster ist, das 40 m über dem Erdboden liegt, wann erreicht der Körper dann den Erdboden und mit welcher Geschwindigkeit?

Bedingung: h = - 40 m: $-40\,m = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \;\Leftrightarrow\; 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 30\frac{m}{s}\cdot t - 40\,m = 0 \;\Big| : 5\frac{m}{s^2}$

$$t_{1,2} = \frac{6s \pm \sqrt{36s^2 + 32s^2}}{2} = \frac{6s \pm 8{,}25\,s}{2} = \begin{cases} 7{,}1s \\ (-1{,}1s) \end{cases} \quad \text{mit} \quad v(7{,}1\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 7{,}1\,s = -41\frac{m}{s}$$

(2) Ein Körper wird vom Erdboden aus senkrecht nach oben abgeschossen.

Er erreicht in 75 m Höhe die Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\frac{m}{s}$.

Wie groß war seine Abschussgeschwindigkeit? Wie lange hat der Körper für diese 75 m benötigt?

Bewegungsgleichungen:
$$\left\{\begin{array}{l} v(t) = v_0 - g\cdot t \\ h(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{array}\right\}$$

$h(t_1) = 75$ m und $v(t_1) = v_1 = 10\,\frac{m}{s}$:
$$\left\{\begin{array}{l} 10\,\frac{m}{s} = v_0 - g\cdot t_1 \\ 75\text{ m} = v_0\cdot t_1 - \frac{1}{2}g\cdot t_1^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

$t\cdot(1)$: $\quad 10\,\frac{m}{s}\cdot t = v_0\cdot t - g\cdot t^2 \qquad (3)$

(2) – (3): $\quad 75\text{m} - 10\,\frac{m}{s}\cdot t = \frac{1}{2}gt^2$

Ordnen (alles nach rechts) und vereinfachen:

$$5\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 + 10\,\frac{m}{s}\cdot t - 75\text{m} = 0 \quad \Big|\, : 5\,\frac{m}{s^2}$$

$$t^2 + 2s\cdot t - 15\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 + 60s^2}}{2} = \frac{-2s \pm 8s}{2} = \begin{cases} 3s \\ (-5s) \end{cases}$$

Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit aus (1):

$$10\,\frac{m}{s} = v_0 - 10\,\frac{m}{s^2}\cdot 3s$$

$$v_0 = 10\,\frac{m}{s} + 30\,\frac{m}{s} = 40\,\frac{m}{s}$$

(3) Ein Körper wird mit $5\frac{m}{s}$ nach unten in einen 60 m tiefen Schacht geworfen.

a) Wie lange fällt er und mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf?

Bewegungsgleichungen: $\left\{\begin{matrix} v(t) = v_0 + g \cdot t \\ s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{matrix}\right\}$ d. h. $\left\{\begin{matrix} v(t) = 5\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot t \\ s(t) = 5\frac{m}{s} \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

(s und v werden nach unten positiv gerechnet.)

Bedingung für den Aufschlag: h(t) = 60 m d.h. $60\,m = 5\frac{m}{s} \cdot t + 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

Ordnen und vereinfachen: $5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 5\frac{m}{s} \cdot t - 60\,m = 0 \quad \Big| : 5\frac{m}{s^2}$

$$t^2 + 1s \cdot t - 12s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1s \pm \sqrt{1s^2 + 48s^2}}{2} = \frac{-1s \pm 7s}{2} = \begin{cases} 3s \\ (-4s) \end{cases}$$

Auftreffgeschwindigkeit: $v(3s) = 5\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 3s = 35\frac{m}{s}$

b) Wie viele Meter legt er in der letzten Sekunde zurück?

$$\Delta s = s(3s) - s(2s) = 60\,m - \underbrace{\left(5\frac{m}{s} \cdot 2s + 5\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2\right)}_{s(2s)=30\,m} = 30\,m$$

c) Wieviel Prozent seiner Endgeschwindigkeit hat er in der halben Tiefe erreicht?

Wie man aus (b) erkennt, ist er nach 2 s in der halben Tiefe. Dort hat er die Geschwindigkeit

$$v(2s) = 5\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 25\frac{m}{s}$$

Die Auftreffgeschwindigkeit betrug $v(3s) = 35\frac{m}{s}$.

Also sind $25\frac{m}{s}$ $\quad p = \frac{25\frac{m}{s}}{35\frac{m}{s}} \cdot 100\% = 71{,}4\%$

der Endgeschwindigkeit.

(4) Vom Erdboden aus werden zur Zeit $t = 0$ gleichzeitig zwei Körper A und B nach oben geschossen.

a) Welche Höhe erreicht A, wenn er mit $v_A = 12\frac{m}{s}$ abgeschossen wird?

Die Steighöhe kann man aus der umgekehrten Bewegung, also dem freien Fall berechnen:

$$v_A = \sqrt{2gh_A} \Rightarrow h_A = \frac{{v_A}^2}{2g} = \frac{144\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 7{,}2\,m$$

Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_B muss B abgeschossen werden, um viermal so hoch wie A zu steigen?

$$v_B = \sqrt{2g\cdot 4h_A} = 2\sqrt{2gh_A} = 2\cdot v_A = 24\frac{m}{s}$$

b) Berechne die Steigzeiten für beide Körper. Wo befindet sich B, wenn A seinen Kulminationspunkt erreicht hat, und wo ist A, wenn B ganz oben ist?

Aus der umgekehrten Bewegung folgen die Steigzeiten:

$$v = g\cdot t_S \Rightarrow t_{S,A} = \frac{v_A}{g} = \frac{12}{10}s = 1{,}2s$$

$$t_{S,B} = \frac{v_B}{g} = \frac{24}{10}s = 2{,}4s$$

Position von B nach $t_{S,A} = 1{,}2\,s$: $h_B(1{,}2s) = 24\frac{m}{s}\cdot 1{,}2s - 5\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}44\,s^2 = 21{,}6m$

(Zum Vergleich: Die Steighöhe von B ist $4\cdot 7{,}2m = 28{,}8m$)

Position von A: $h_A(2{,}4s) = 12\frac{m}{s}\cdot 2{,}4\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot (2{,}4\,s)^2 = 0\,m$

Das hätte man eigentlich nicht berechnen müssen, denn B steigt doppelt so lang wie A, also ist A wieder unten angekommen.

c) Berechne die Abstände beider Körper nach 1 s, 2 s und 3 s.
Stelle eine Formel für den Abstand der Körper A und B in Abhängigkeit von der Zeit auf.
Welchen Definitionsbereich (für t)hat diese Formel? Was gilt danach?

$$\Delta h(t) = h_B(t) - h_A(t) = \left(24\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2\right) - \left(12\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2\right) = 12\frac{m}{s}\cdot t$$

Also: $\Delta h(1s) = 12m$, $\Delta h(2s) = 24m$ und $\Delta h(3s) = 36m$

Aber der letzte Wert ist falsch, denn die Formel gilt ja nur, so lange A noch nicht unten aufgeschlagen ist, also lautet der Definitionsbereich für die Zeit in dieser Formel:

$$\mathbb{D}_t = [0\,s\,;2{,}4\,s].$$

Für $t = 3\,s$ muß man daher anders rechnen: h_A ist dann immer 0.

$$\Delta h(3s) = h_B(3s) - h_A(3s) = \left(24\frac{m}{s}\cdot 3s - 5\frac{m}{s^2}9s^2\right) - 0m = 27m.$$

(5) Körper B wird 0,5 s nach Körper A mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen.
In welcher Höhe begegnen sie sich? Rechne zuerst mit $v_0 = c\frac{m}{s}$ und dann mit $c = 10$.

Bewegungsgleichungen für A: $\left\{\begin{matrix} v_A(t) = v_0 - g\cdot t \\ h_A(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{matrix}\right\}$

und für B: $\left\{\begin{matrix} v_B(t) = v_0 - g\cdot(t-0{,}5\text{ s}) \\ h_B(t) = v_0\cdot(t-0{,}5\text{ s}) - \frac{1}{2}g\cdot(t-0{,}5\text{ s})^2 \end{matrix}\right\}$

Bedingung für die Begegnung in gleicher Höhe: $s_A(t) = s_B(t)$

$$v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_0\cdot(t-0{,}5s) - \tfrac{1}{2}g(t-0{,}5s)^2$$

$$\cancel{v_0\cdot t} - \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2} = \cancel{v_0\cdot t} - v_0\cdot 0{,}5s - \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2} + \tfrac{1}{2}g\cdot 1s\cdot t - \tfrac{1}{2}g\cdot\tfrac{1}{4}s^2$$

$$0 = -v_0\cdot 0{,}5s + g\cdot\tfrac{1}{2}s\cdot t - g\cdot\tfrac{1}{8}s^2$$

Für $v_0 = c\frac{m}{s}$: $\quad 0 = -c\frac{m}{s}\cdot 0{,}5s + 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{2}s\cdot t - 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{8}s^2$

$$0 = -c\cdot 0{,}5\text{ m} + 5\tfrac{m}{s}\cdot t - 1{,}25\text{ m}$$

Ohne Einheiten: $\quad 5t = c\cdot 0{,}5 + 1{,}25$

$$t = \frac{(c\cdot 0{,}5 + 1{,}25)}{5} = c\cdot 0{,}1 + 0{,}25$$

Für c = 10, also $v_0 = 10\frac{m}{s}$ folgt $t = 1{,}25s$

Und nun die Höhen:

A: $\quad h_A(1{,}25s) = 10\frac{m}{s}\cdot 1{,}25\text{ s} - 5\frac{m}{s^2}\cdot(1{,}25\text{ s})^2 = 4{,}6875m$

B: $\quad h_B(1{,}25s) = 10\frac{m}{s}\cdot(1{,}25s - 0{,}5s) - 5\frac{m}{s^2}(1{,}25s - 0{,}5s)^2$

$$h_B(1{,}25s) = 10\tfrac{m}{s}\cdot 0{,}75\text{ s} - 5\tfrac{m}{s^2}(0{,}75\text{ s})^2 = 4{,}6875m$$

Die Berechnung der Höhe h_B hätten wir uns sparen können, denn sie sollen sich ja in der gleichen Höhe begegnen. Dennoch: Diese Rechnung kann als Kontrolle dienen.

(6) Ein Körper soll auf die Höhe $h = 80$ m gebracht werden und zwar auf folgende Arten:

a) Er wird senkrecht nach oben geworfen.
Wie groß muss seine Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden?

Da der Köper in 80 m Höhe halten soll, kann man einfacher mit der umgekehrten Bewegung rechnen: Start oben aus der Ruhe. Geschwindigkeit nach 80 m:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{20\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 80\text{ m}} = \sqrt{1600}\,\tfrac{m}{s} = 40\,\tfrac{m}{s}$$

b) Er wird aus der Ruhe heraus längs der Teilstrecke $h_1 = 30$ m gleichmäßig so beschleunigt, dass er über die Teilstrecke hinaus noch die Höhe h erreichen kann.
Wie groß ist die notwendige Beschleunigung a?

Wenn der Körper entlang h_1 beschleunigt wird, muß er noch die Höhe $h - h_1$ im Wurf überwinden. Dazu benötigt er die Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)} = \sqrt{20\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 50\text{ m}} = \sqrt{1000}\,\tfrac{m}{s} = 31{,}6\,\tfrac{m}{s}.$$

Und genau diese Geschwindigkeit steht am Ende der Beschleunigungsstrecke.
Also gilt für diese gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$v_1 = \sqrt{2ah_1}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{2ah_1} = \sqrt{2g(h-h_1)}$$

d. h. $\qquad 2ah_1 = 2g(h-h_1)$

ergibt $\qquad a = \frac{h-h_1}{h_1} \cdot g = \frac{50}{30} \cdot g = \frac{5}{3} g \approx 16{,}7\,\tfrac{m}{s^2}$

Wie lange braucht der Körper, bis er ganz oben ist?

Beschleunigungszeit: $\quad h_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} \approx 1{,}9$ s

Steigzeit: $\quad h - h_1 = \frac{1}{2} g t_2^2 \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} \approx 3{,}2$ s

Gesamtzeit: $\quad t \approx 5{,}1$ s.