

第9章

スペクトル分析

センサのデータには、トレンド以外に望ましくない信号（雑音や外乱）が混入していることがよくある。データ本来の信号成分と望ましくない信号成分を見極めるのにスペクトル分析が有効であり、現実には分析機として実用化されている。本章では、フーリエ変換、サンプリング定理、ランダム信号に対するパワースペクトルの求め方と注意事項について説明する。ツールとして SciPy を用いる。

9.1 基本事項

9.1.1 周波数とは、音を鳴らす

図 9.1 は周波数と周期を説明する。

- **周波数** (frequency) f : 1 秒ごとのサイクルの数（波の数）で、単位は [Hz]（ヘルツ）である。
- **周期** (period) T : 1 サイクルが要する時間で、 $T = 1/f$ の関係より単位は [s] である。

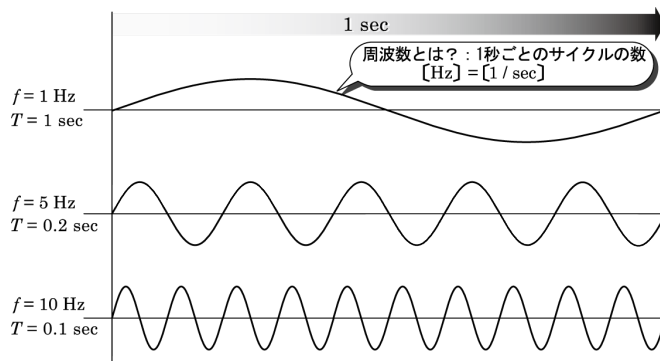


図 9.1: 周波数と周期

例えば、音についていえば、周波数が高いとは高音、低いとは低音を指す。よく知られている 7 音名とその周波数を表 9.1 を見て、高音、低音で周波数の大小となることがわ

かる。

表 9.1: 音名（イタリア語表記）と対応する周波数，ラ音は国際規格より 440 Hz，その他の音は十二平均律に基づく周波数，ただし小数点を丸めた。これが無ければ二つのドの周波数比は 2 倍となる

音名	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
周波数 [Hz]	262	294	330	349	392	440	494	523

このことを実感するためのスクリプトを次に示す。

Listing 9.1: PyAudio_DoReMi.ipynb

```
import wave
import struct
import numpy as np
import pyaudio

def play(data, fs, bit):
    p = pyaudio.PyAudio()
    stream = p.open(format=pyaudio.paInt16,
                    channels=1,
                    rate=int(fs),
                    output=True)
```

この説明は行わないが，ドレミの音をそれぞれ 1 秒程度聞くことができる。

角周波数（angular frequency） ω [rad/s] は次で表されるものである。

$$\omega = 2\pi f$$

$\sin(\omega t + \phi)$ などの三角関数表現で，カッコ内の引数の単位は [rad] である。すなわち， ωt ， ϕ 共に単位は [rad] である。また，数学では円を一周することを 2π [rad] と表現し，これを 1 秒間でどれだけ回るかを ω [rad/s] で表現している。

とはいえ，我々は周波数 f の方が馴染みやすいので，あまり厳密な話を必要としないときは， ω と f を同じと考えて読んでもらいたい。

9.1.2 スペクトルとは

スペクトルという単語からイメージされるのは，一般の人にとっては，太陽光線をプリズムに通すと 7 色の光^{*1}に分解される，であろう。

光は，電磁波の一種，すなわち，波のようなもので，周波数という量でその特徴が表わされる。太陽光は周波数の異なる波が複数混在したものであり，プリズムは，この混在する波をあたかも 1 本 1 本分離することができる。波の特徴は周波数と振幅により表現さ

^{*1} 7 色は（赤，橙，黄，緑，青，藍，紫）で，虹を半円で見るとき（飛行機から見下ろすとドーナッツ状に見える），外縁が赤で，内縁が紫である。この 7 という数字は，地域や時代により異なり，アメリカやフランスなどでは一般的には 6 色，日本でも古くは 5 色である。虹を 7 色としたのは，かの有名なニュートン（Sir Isaac Newton, 英, 1642～1727）が最初であると言われている。

れる。このとき、横軸に周波数、縦軸に振幅をとれば、周波数に関する分布が現れる。この分布のことをスペクトルという。

スペクトル分析とは、時系列データに潜む複数の波から、スペクトルを見出すことである。この用途として、構造物の解析、回路解析・診断、画像分析・認識、生体検査など幅広い分野で用いられている。

スペクトルという用語には、4つの意味がある。1番目は、上述したような波形や信号のエネルギー分布を示すもので、これをスペクトルと言うようになったのは、ウィーナーフィルタやサイバネティクスを提唱した N.Wiener（米、1894 – 1964、数学者）である。彼の著書“Fourier Integral”（1933）の中に次の記述がある。「物理的に、これはその部分の振動の全エネルギーである。これはエネルギー分布を決定するものであるから、これをスペクトルと呼ぶことにする」。これは、スペクトルという用語がすでに物理学の分野でよく知られていたものであり、この用語を数学分野に導入するための説明である。2番目の意味は Newton の分光分析における波長の違いによる分解、3番目は対象のいかんによらず複雑なものを単純に分解し大きさの順序に並べて表したものの総称、4番目は線形演算子の固有値の集まり、である。なお、政治学でも諸政治勢力の配置図を political spectrum という用語を使っている。

日本語のスペクトルの英語訳は、たまに混乱するので、現代の英語論文では次のように使っていることを見て参考にされたい。

- spectrum: (可算) 名詞, 単数形 （複数形 spectra）を使う用例
 - spectrum analysis, power spectrum, power spectrum estimation, spectrum analysis
- spectral: 形容詞を使う用例
 - spectral estimation, FFT spectral estimation, ESD(energy spectral density), PSD(power spectral density)

9.2 フーリエ変換

9.2.1 フーリエ変換とフーリエ逆変換

フーリエ変換とフーリエ逆変換の式を示す。

【フーリエ変換とフーリエ逆変換】

$x(t)$ の可積分の条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (9.1)$$

を満たせば、任意の ω に対して

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (9.2)$$

が存在し、この $X(\omega)$ を $x(t)$ の**フーリエ変換** (Fourier transform) という。このとき、 $\exp(-j\omega t)$ をフーリエ変換の**核** (kernel) という。さらに、次をフーリエ逆変換 (inverse Fourier transform) という。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (9.3)$$

j は虚数単位である。この導出は他書を参照されたい。また、可積分条件は (9.2) 式の積分が行えることを保証するもので、 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ のように書くこともできる。

なお、角周波数 ω の代わりに周波数 f を用いた表現では、 $\omega = 2\pi f$ の関係を考えて、(9.2),(9.3) 式は次となる。

【フーリエ変換とフーリエ逆変換 (周波数 f 表現)】

$x(t)$ が絶対可積分の条件の下、フーリエ変換とフーリエ逆変換はそれぞれ次式で与えられる。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (9.4)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (9.5)$$

ここに、(9.3) 式と比較して、(9.5) 式から係数 $1/2\pi$ が消えたのは、 $\omega = 2\pi f$ より、

$$d\omega = 2\pi df \quad (9.6)$$

の関係があるためである。数学上の取り扱いには ω のほうが便利であり、計測・データ処理・信号処理の現場では f のほうが便利なことがある。そのため、本書では、 ω と f の両方の表現をそのときどきで使い分けするものとする。

本書では、(9.2) と (9.3) 式 (または、(9.4) 式と (9.5) 式) を次のように演算子を用いて表現する場合がある。

【フーリエ変換とフーリエ逆変換の演算子】

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)], \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] \quad (9.7)$$

ただし、本書では、あまりフーリエ逆変換には触れないこととする。

9.2.2 振幅、エネルギー、パワースペクトル

スペクトルにも幾つかの種類がある。ここに、 $X(\omega)$ と $X(f)$ は同じとみなして話を進めるので、読者は都合の良い方を選択して読み進めてもらいたい。

スペクトル (spectrum) は、信号を周波数ごとの成分に分解し、周波数に対するその分布をいう。一般には、横軸を ω (または、 f) とおき、縦軸を $X(\omega)$ の何らかの強さとしたものをスペクトルという。

(9.1) 式の可積分条件を満足するときに、 $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ が存在し、これは、一般に複素関数であるから、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} X(f) &= \operatorname{Re}(X(f)) + j\operatorname{Im}(X(f)) \\ &= |X(f)| \angle X(f) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここに、 $|X(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}(X(f))^2 + \operatorname{Im}(X(f))^2}$ 、 \angle は偏角 (argument) を表し、次式で定義される。

$$\angle X(f) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(X(f))}{\operatorname{Re}(X(f))} \quad (9.9)$$

(9.8) 式において、 $|X(f)|$ は振幅を表すことから、 $|X(f)|$ の分布を**振幅スペクトル** (amplitude spectrum)、 $\angle X(f)$ の分布を**位相スペクトル** (phase spectrum) という。

次に、時間信号 $x(t)$ の絶対値の 2 乗 $|x(t)|^2$ を全時間区間 $(-\infty < t < \infty)$ に渡り積分したものは、その波形の**全エネルギー**を表すとされる。ただし、この可積分条件は満足するものとする。一方、 $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ について (この可積分条件も満足しているとする) を全周波数区間 $(-\infty < f < \infty)$ に渡り積分したものは、 $x(t)$ の全エネルギーに等しい。このことを述べたのが次の定理である。

【パーセバルの定理 (Parseval's theorem)】

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (9.10)$$

(9.10) 式の右辺の積分の意味を考えると、

被積分関数である $|X(f)|^2$ は単位周波数あたりのエネルギーを表す

これより、 $|X(f)|^2$ の f に対する分布を**エネルギースペクトル密度** (ESD; energy spectrum density) という。

ところで、実際の信号で持続する信号などは $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ を満たさないため、可積分条件を満足しないことが多い (ただし、周期信号はデルタ関数を導入してフーリエ変換できるので除く)。このような信号の全エネルギーは無限大であるから、上記のエネルギースペクトル密度は定義できない。そこで、エネルギースペクトル密度の単位時間あたりの平均値を考える。すなわち、

$$\operatorname{PSD}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X(f)|^2 \right] \quad (9.11)$$

が定義できたとしよう。ここで、物理の世界では単位時間あたりのエネルギーをパワーと定義していることから、 $\operatorname{PSD}_x(f)$ を $x(t)$ の**パワースペクトル密度** (PSD; power spectrum

density) という。なお, $x(t)$ がランダム信号の場合には, さらに, 期待値操作が導入された PSD が定義され, これは後に説明する。

なお, エネルギースペクトル密度, パワースペクトル密度を簡単に, エネルギースペクトル, パワースペクトルと称することもある。

例題 9.1 図 9.2 に示す孤立した矩形波のフーリエ変換 $X(\omega)$ とエネルギースペクトルを求めよう。

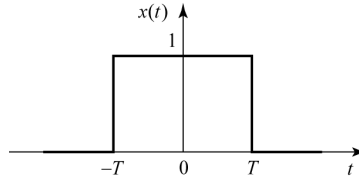


図 9.2: 孤立した矩形波

[解説] (9.2) 式より,

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-T}^T \exp(-j\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} \frac{1}{2j} (\exp(j\omega T) - \exp(-j\omega T)) = 2T \frac{2 \sin \omega T}{\omega T} \end{aligned}$$

これより,

$$|X(\omega)|^2 = \left| 2T \frac{2 \sin \omega T}{\omega T} \right|^2$$

$X(\omega)$ は, 係数 $2T$ を持つ sinc 関数である。 $T = \omega$ において, これらのグラフを図 9.3 に示す。

例題 9.2 $\sin \omega_0$ と $\cos \omega_0$ のフーリエ変換を求めよう。

[解説] 例題の三角関数は見慣れたものであるが, これをフーリエ変換するには, 少々やかいかであり, ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ を導入する必要がある。デルタ関数は, イメージとして, 非常に細い針線が 1 本立っていて, 面積は 1 であるという条件の下, 幅が無限小, 高さが無限大の関数である。この条件より, 次のことがいえる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-a) dt = x(a) \quad (9.12)$$

これを用いて, 周期信号のフーリエ変換の方法を説明する。

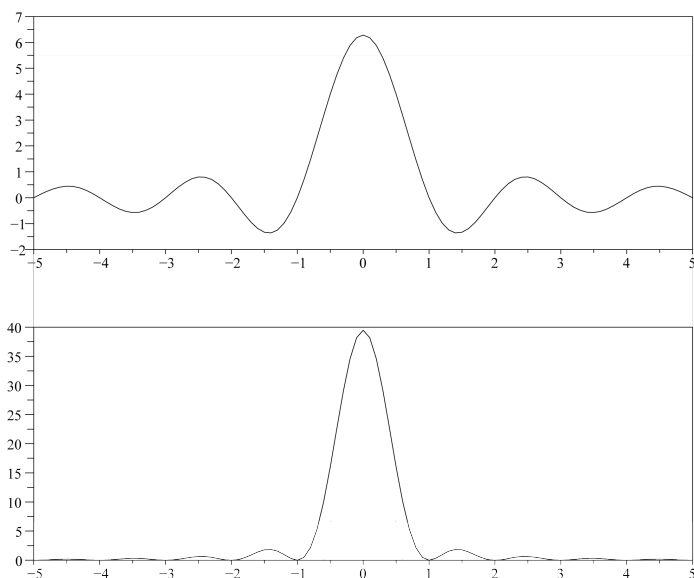
フーリエ変換ができるためには, 絶対可積分の条件が必要であった。一方, サイン波 $x(t) = \sin \omega t$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin \omega t| dt = \infty$$

となり, 絶対可積分の条件を満たさないで, フーリエ変換は存在しないことになる。

そこで, 少し作為的であるが, 信号 $x(t)$ のフーリエ変換が

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (9.13)$$

図 9.3: 矩形波の $X(\omega)$ と $|X(\omega)|^2$

で与えられるものとする。これをフーリエ逆変換すると、デルタ関数の性質より

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \exp(j\omega t) d\omega = \exp(j\omega_0 t) \quad (9.14)$$

となる。この関係を一般化すると

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (9.15)$$

のフーリエ逆変換は

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t) \quad (9.16)$$

となる。これは、フーリエ級数表現である（フーリエ級数は他書を参照されたい）。

このように、フーリエ係数 $\{c_n\}$ を持つ周期信号 (9.16) 式のフーリエ変換は、(9.15) 式を見てわかるように、 $\{2\pi c_n\}$ を係数とするインパルス列となり、この列は横軸を ω （または、 f ）にとったグラフを考えると、輝線状の縦棒が並ぶ分布、すなわちスペクトルを表していることになるので、フーリエ係数をスペクトルと呼ぶこともある。

(9.15),(9.16) 式の結果を踏まえて解を導く。初めに、 $x(t) = \sin \omega_0 t$ のとき、このフーリエ級数表現は

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} \exp(j\omega_0 t) - \frac{1}{2j} \exp(-j\omega_0 t)$$

であるから、フーリエ係数は次となる。

$$c_1 = \frac{1}{2j}, \quad c_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad c_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

これより、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}[x(t)] = \frac{2\pi}{2j} \{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\} \\ &= -j\pi \{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\} \end{aligned}$$

この $X(\omega)$ を図 9.4(a) に示す。ただし、縦軸は虚軸であることに注意されたい。

同様にして、

$$y(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2} \exp(-j\omega_0 t)$$

フーリエ係数は

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

これより、次の結果を得る。

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \pi \{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

この $Y(\omega)$ を図 9.4(b) に示す。この図の縦軸は実軸であることに注意されたい。

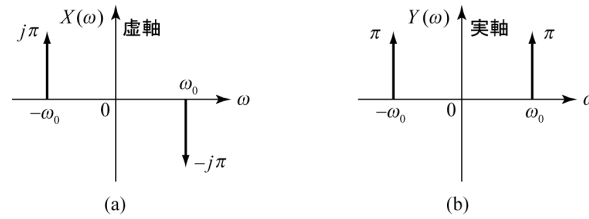


図 9.4: $\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t$ のフーリエ変換

図 9.4 のようなスペクトルは線として表わされることから、これを**線スペクトル** (line spectrum) といい、周期信号は線スペクトルを示す。これと対比するのが**連続スペクトル** (continuous spectrum) であり、先の矩形波がこれを示した。

次に、 $x(t) = \sin \omega_0 t$ は奇信号（原点に関して対称）であり、このスペクトルは純虚数となる。一方、 $y(t) = \cos \omega_0 t$ は偶信号（縦軸に関して対称）であり、このスペクトルは実数となる。

一方、それぞれの振幅スペクトル $|X(\omega)|, |Y(\omega)|$ は、

$$|X(\omega)| = |Y(\omega)| = \pi \{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\} \quad (9.17)$$

となり、 $\omega = 0$ の軸を中心に左右対称となる。この対称性は、エネルギースペクトル密度、パワースペクトル密度でも同様である。このため、データに基づく現場のスペクトル分析では右の片側だけを見ることが多い。

9.3 現実の問題点

連続時間信号 $x(t)$ に対してフーリエ変換を施す場合、測定機器などを用いた現実のことを考えると、次の二つの問題点がある。

1. サンプル周波数とエイリアシング

2. 有限長波形のための打ち切りと漏れ

1 番目は、デジタル計測におけるサンプリングに伴う問題である。2 番目は、デジタル、アナログに関わらず、実際の記録器が有限時間しか観測できないため、波形は有限長であることに起因する問題である。本節では、この二つの問題点について説明する。

9.3.1 サンプリング問題

連続時間信号をサンプリングして離散時間信号を得たとき、このサンプリングがフーリエ変換でどのような影響を生じるかを説明する。

いま、 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ は、周波数区間 $[-\omega_c, \omega_c]$ の範囲だけに存在すると仮定する。すなわち、

$$\begin{cases} X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] & |\omega| \leq \omega_c \\ X(\omega) = 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (9.18)$$

この $X(\omega)$ は、図 9.5 の実線で示すような関数としよう。

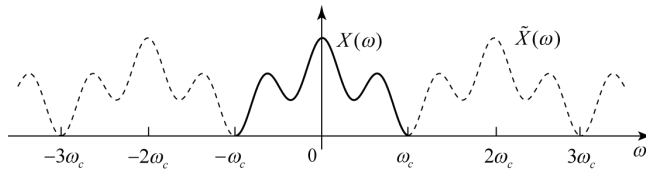


図 9.5: $X(\omega)$ とそれを周期的に拡張した $\tilde{X}(\omega)$

次に、図 9.5 において、実線に加えて破線も含めた波形 $\tilde{X}(\omega)$ を考える。これは、 $|\omega| > \omega_c$ へ周期的になるように拡張した関数である。このようにすると、 $\tilde{X}(\omega)$ は周期関数とみなされる。

このことから導かれる定理を次に示す。ただし、 ω から f の表記に変えていることに注意されたい。

【サンプリング定理 (sampling theorem)】

標本化定理ともいう。実関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ が存在し、 $|f| \leq f_c$ 以外の周波数成分を含まないとき、 $x(t)$ は $t = k/2f_c$ (k は整数) の離散的な時点における信号の標本値から再現できる。 $1/2f_c$ をナイキスト間隔 (Nyquist interval)、 $2f_c$ をナイキスト周波数 (Nyquist frequency) という。

別の言い方をすると、 $x(t)$ が含む成分の最高周波数 f_c の 2 倍の速さでサンプリングを行えば、もとの波形を完全復元できる。

それでは、サンプリング周波数が最高周波数の 2 倍未満のときどうなるかは、次のエイリアシングで説明する。

9.3.2 エイリアシング

エイリアシング (aliasing ^{*2}, 折り返し雑音 (folding noise) ともいう) とは, 連続信号がサンプリングされて復元されたとき, 歪みが生じて別の波形のように見えることである。例えば, 図 9.6 のように周波数 $f = 4 \text{ Hz}$ (周期 0.25 sec) の正弦波を $\Delta T = 0.2 \text{ sec}$ でサンプリングすると, 周期 1 sec の正弦波に見える。

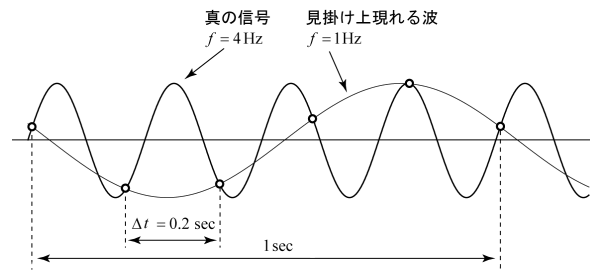


図 9.6: 正弦波のサンプリングによるエイリアシング

真の信号を復元しようとするならば, サンプリグ定理より, $2 \times 4 = 8 \text{ Hz}$ 以上の周波数でサンプリングを行わなければならない。サンプリング周波数がこれより遅いと, 偽の信号が見えることになる。このことをスペクトル分布で表現したのが, 図 9.7 である。

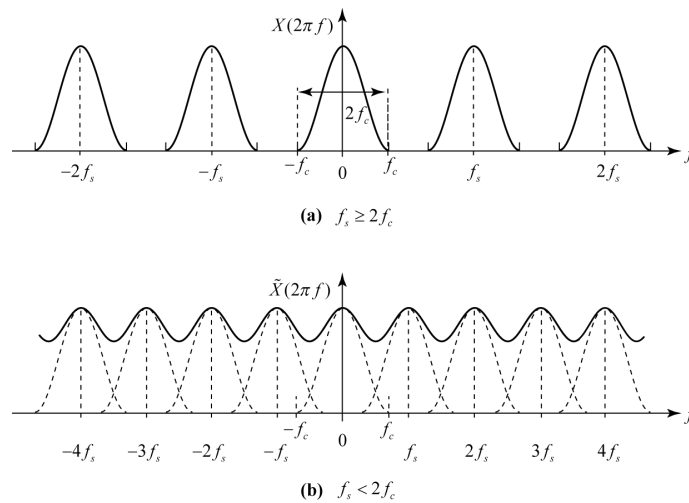


図 9.7: サンプリグ周波数 f_s とエイリアシングの関係

図 9.7(a) は, エイリアシングを起こしていないので元のスペクトル分布を見ることができる。一方, 図 9.7(b) は, 隣り合うスペクトルが重なり合って, もはや真の $X(2\pi f)$ を見出すことは不可能である。

^{*2} alias は, 別名, 偽名などの意味がある。

以上より、エイリアシングを起こさせないためには

- もとの波形が有する最高周波数 f_c の 2 倍以上の速さのサンプリング周波数 f_s を適用する。
- サンプリングした $x(k)$ に、適当な窓関数を乗じる。
- この f_s を達成できないならば、 $f_s/2$ を遮断域とするローパスフィルタを用いて、もとの波形をフィルタリングする。

などの処置が必要である。2 番目の窓関数と 3 番目のローパスフィルタの方法については、後に説明する。

9.3.3 有限長波形の問題点

実際の観測は有限時間である。したがって、観測する波形をどこかで打ち切りざるを得ないことになる。図 9.8 は、 $x(t)$ を時間間隔 $[t_1, t_2]$ で観測し、実際に取得するのは切り取られた $x_T(t)$ *3であることを示している。

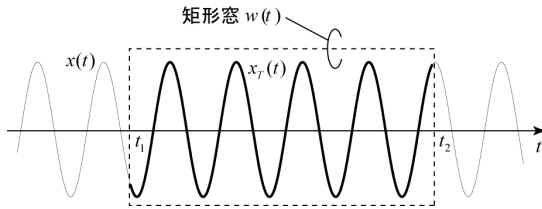


図 9.8: 有限長波形

この場合、仮想的に図に示す矩形窓 (rectangular window) $w(t)$ が $x(t)$ に作用して、すなわち、 $x(t)$ を切り出して $x_T(t)$ を生成しているとみなすことができる。9.2.2 節の例題で示したように、孤立した矩形波のフーリエ変換は、正負に振動する連続した波形であった。この波形が $X_T(f) = \mathcal{F}[x_T(t)]$ に影響を与える。この影響をイメージ図として表現したのが、図 9.9 である。

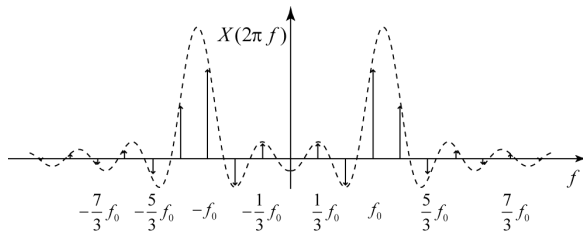


図 9.9: 漏れのイメージ図 (メインローブとサイドローブ)

影響を受けた $X_T(f) = \mathcal{F}[x_T(t)]$ を見ると、もとの基本周波数 f_0 の位置に極大値が現

*3 truncate は、切り取る、端を切る、などの意味があり、本文のように波形の切り出しも英語で truncate という。この頭文字を用いて、 $x_T(t)$ の添え字に T を用いている。

れ、その周りに**サイドローブ** (side-lobe)^{*4} と呼ばれる一連の峰が生じる。基本周波数成分は、各サイドローブの大きさに合わせて大きさを変えて、周期的に現れる。この様子は、あたかも、主たるスペクトルが漏れているように見えることから、スペクトルの**漏れ** (leakage) という。この漏れが生じるために、基本周波数以外に幾つもの周波数成分があるような偽 (alias) の周波数を認識することになる。この対処策として窓関数をかけることがあり、これは後に説明される。

9.4 離散フーリエ変換 (DFT)

9.4.1 DFT の表現

観測したデータは、離散時間信号かつ有限長データであることがほとんどである。このデータに対するフーリエ変換として、**離散フーリエ変換 (DFT : Discrete Fourier Transform)** がある。この導出は後回しにして、この表現を次に示す。

【離散フーリエ変換 (DFT) と逆離散フーリエ変換 (IDFT)】

サンプリング時間を ΔT とし、観測データ数を N とし、観測データは $\{x(k)\}, (k = 0, \dots, N-1)$ である。このとき、記録長 T と、周波数間隔 (周波数分解能ともいう) Δf は次となる。

$$T = N\Delta T, \quad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta T} \quad (9.19)$$

この条件の下、DFT は次式で定義される。

$$X(n) = \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (9.20)$$

ここに、 $n = 0, 1, \dots, N-1$ の各点は $n\Delta f$ を表す。 $X(n)$ は一般に複素数であることに留意されたい。

もしも、初めから離散データ系列を与えられる場合には、 $\Delta T = 1$ とおいて計算すればよい。このとき、次の表記を用いる。これは、(9.20) 式と同じである。

$$X(n) = \text{DFT}_{k=0}^{N-1} (x(k)) \quad (9.21)$$

また、IDFT は次式で定義される。

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(j2\pi kn/N) \quad (9.22)$$

フーリエ変換の場合と同様に、 $|X(n)|$ を振幅スペクトル、 $|X(n)|^2$ をエネルギースペクトル密度とし、エネルギースペクトル密度を

$$\text{PSD}_x(n) = \frac{|X(n)|^2}{T} \quad (9.23)$$

^{*4} side-robe (長くてひだのある外衣) と間違えないように。lobe の意味は、原義であるギリシャ語の lobos (耳たぶ) から派生して、丸い突出したものを言うようになり、本項のサイドローブの形状はまさしく lobe である。

とする。

注意：離散フーリエ変換 (DFT) の計算の工夫を施すことで、この計算を高速に行えるものを高速フーリエ変換 (FFT: Fast Fourier Transform) という。そのためか、SciPy は `fft` という名称を用いて DFT の計算を行っている。しかし、FFT の本質は DFT であるから、本文中では用語 DFT を用いている。DFT と FFT は同じものと見なして読み進めてもらいたい。

9.4.2 サイン波の DFT 例

サイン波の周期に対して、整数倍観測と非整数倍を観測した場合の DFT の計算を考える。

例題 9.3 $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ の周期の整数倍を観測して、その DFT と PSD を求める。

【解説】 周波数、観測条件などは次のスクリプトのとおりとして、周期の整数倍を観測するようにした。

Listing 9.2: DFT_Sine.ipynb

```
f0 = 1.5 # fundamental frequency [Hz]
T = 2/f0 # observation time[s], two means period.
N = 16 # the number of observation
dt = T/N # sampling time
df = 1/T # frequency resolution
A = 2.0
t = np.linspace(0, N-1, N)*dt # time line
x = A*np.sin(2*np.pi*f0*t) # observed signal
```

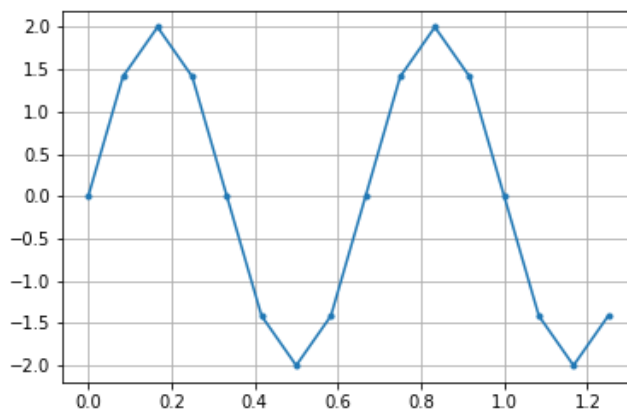


図 9.10: 観測したサイン波

この観測波形に対する計算が次である。

```
dft = scipy.fftpack.fft(x) # DFT
```

```
esd = (np.abs(dft)**2) # energy spectrum
psd = esd/T           # power spectrum
```

この結果を次のグラフに示す。ただし、 $X(\omega)$ は複素数であり、今回の結果では実部はほぼ 0 であったので、虚部のみをプロットした。

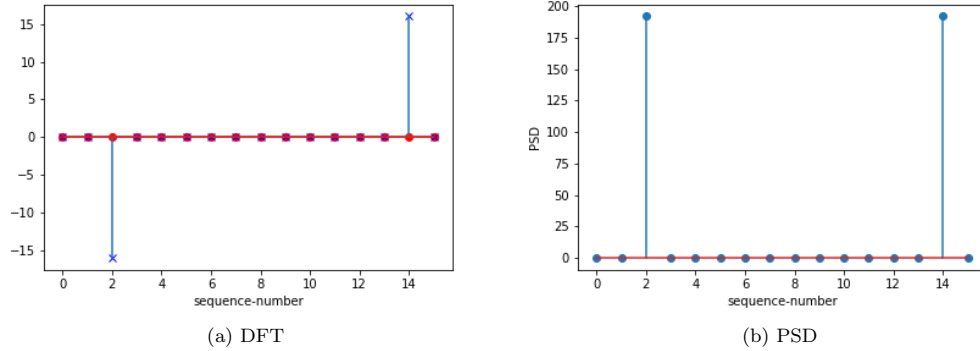


図 9.11: 1 周期のサイン波に対する結果

この結果が示すように、

- サイン波は奇関数であるため、 $X(n\Delta f)$ は理論的には虚部のみに値が生じ、原点（中心）対称となる。
- PSD は、 $N/2$ を中心にして左右対称である。

なお、整数周期分に対する DFT は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 X(n\Delta f) &= \text{DFT}_{k=0}^{N-1} (A \sin(2\pi f_0 \Delta T k)) \\
 &= \frac{NA}{2} \{-j\delta(n\Delta f - f_0) + j\delta((n-N)\Delta f + f_0)\} \quad (9.24)
 \end{aligned}$$

この式と結果を比べて、DFT が正しく計算されていることがわかる。

例題 9.4 サイン波の周期の非整数倍を観測し、その DFT と PSD を求める。

【解説】 周波数、観測条件などは次のスクリプトのとおりとして、周期の非整数倍を得る。

Listing 9.3: DFT_Sine.ipynb

```
f0 = 1.25 # 基本周波数 [Hz]
T = 1     # 観測時間[s]
N = 20    # サンプル数
dt = T/N  # サンプリング時間
df = 1/T  # 周波数分解能
t = np.linspace(0, N-1, N)*dt # 時間軸
x = np.sin(2*np.pi*f0*t)      # 観測信号
```

先の計算と同様にして、PSD を求めた結果を図 9.12 に示す。この横軸には負の周波数が表示されているが、この表示を両側スペクトルといい計算の都合で現れる。周波数 0 を中心に左右対称に必ずなるので、周波数が 0 以上の片側だけを見れば十分である。

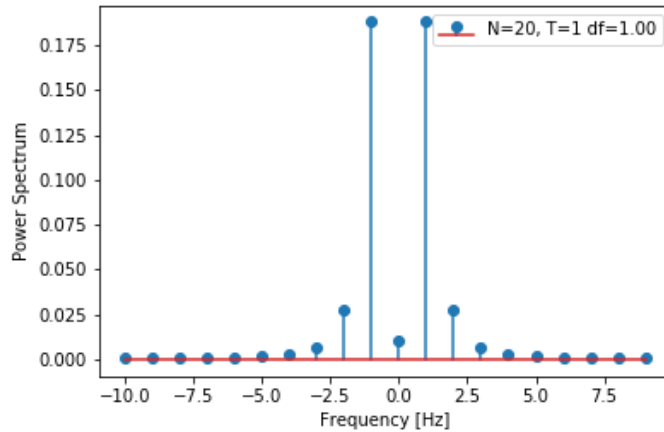


図 9.12: 打ち切り影響を伴う PDF

この結果が示すように、幾つものスペクトルの漏れが認められる。この原因は、9.3.3 節で述べたように、有限長観測で仮想的にかけられる矩形窓のサイドローブの影響が表れているためである。

次に、データ数 N と周波数分解能 Δf が PDF に及ぼす影響を見るため、同じ例題に対して N と T を変えた結果を次に示す。ここに、

$$T = N\Delta T, \quad \Delta f = \frac{1}{T}$$

であることに留意すると、次のことが言える。

- T を長くすると、周波数分解能 Δf が細かくなる。また、 ΔT が大きくなる。
- N を増やすと、周波数区間 ($= N\Delta f$) が広がる。

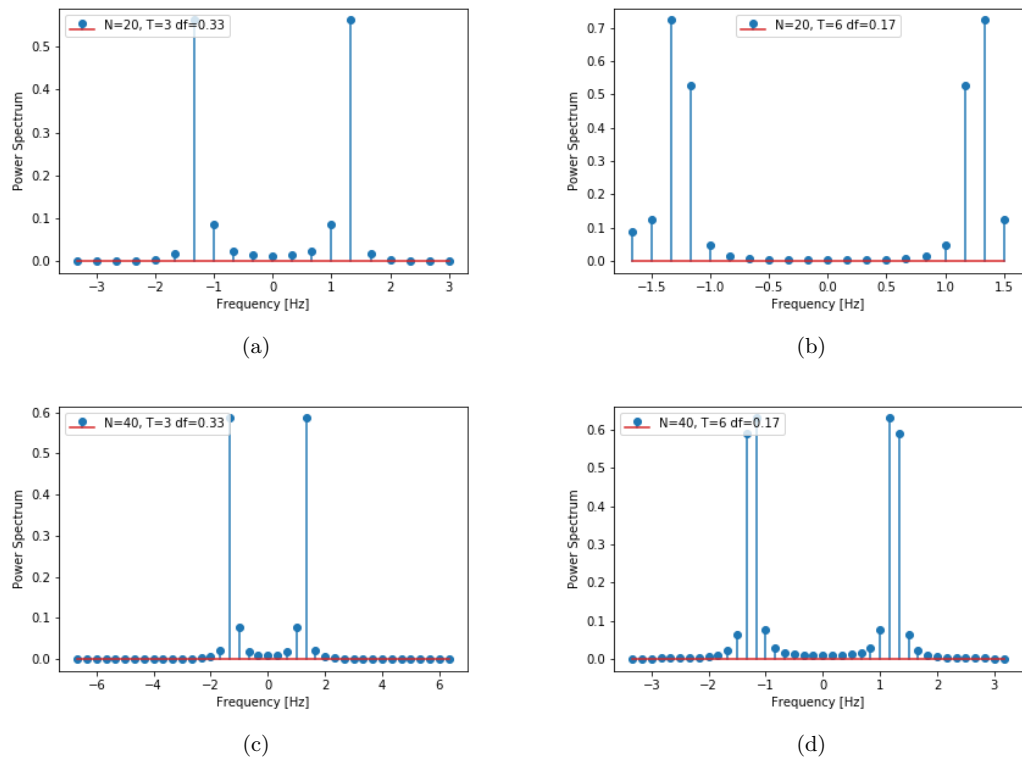
この T と N の影響の様子を図 9.13 に示す。

9.4.3 ゼロ埋込み

ゼロ埋め込み (zero padding) とは、データ数が例えば 100 個であるとき、これに 28 個のゼロを後ろに付加することをいう (これを埋め込みと称している)。

この効用は次にある。

- もとの周波数成分に影響を与えない。
- 見掛け上、スペクトル分布が滑らかになる。
- PDF 分布が滑らかになるため、周波数成分の在りかがわかりやすくなる。

図 9.13: N と T の影響

- データ数を2のべき乗にできるので、FFTを用いた高速演算を図るのに利用できる。

注意として、もともとの周波数分解能が向上したのではなく、周波数点間を内挿 (interpolation) しているだけである。

シミュレーションを通して、ゼロ埋込みの効用を見ることとする。

例題 9.5 三つの周波数成分を有する信号を観測し、この周波数成分を推定する。ここに、周期を非整数倍の観測とする。

[解説]

観測データ数が $N = 16$ 、信号の3つの周波数成分は $f = 1.1, 1.7, 3.1$ であり、このうちの2つは近接している。このことを次のスクリプトに示す。

Listing 9.4: DFT_ZeroPadding.ipynb

```
N = 16
T = 1
dt = T/N # サンプリング時間
t = np.linspace(0, N-1, N)*dt # 時間軸
```



```
x = 0.5*np.sin(2*np.pi*1.1*t) \
    + 1.0*np.sin(2*np.pi*1.7*t + np.pi/2) \
    + 0.5*np.sin(2*np.pi*3.1*t)
```

ゼロ埋込みは次で指定できる。すなわち、関数 `fft(x, n=Num)` は、`x.size` (1次元配列 `x` の大きさ) よりも `n` の方が大きければ、大きい分だけゼロを埋込んで DFT の計算を行う。いま、`x` の配列の大きさ (データ数と同じ) は 16 であり、`Num` に、16, 32, 64, 512 を指定したときの PSD を図 9.14 に示す。

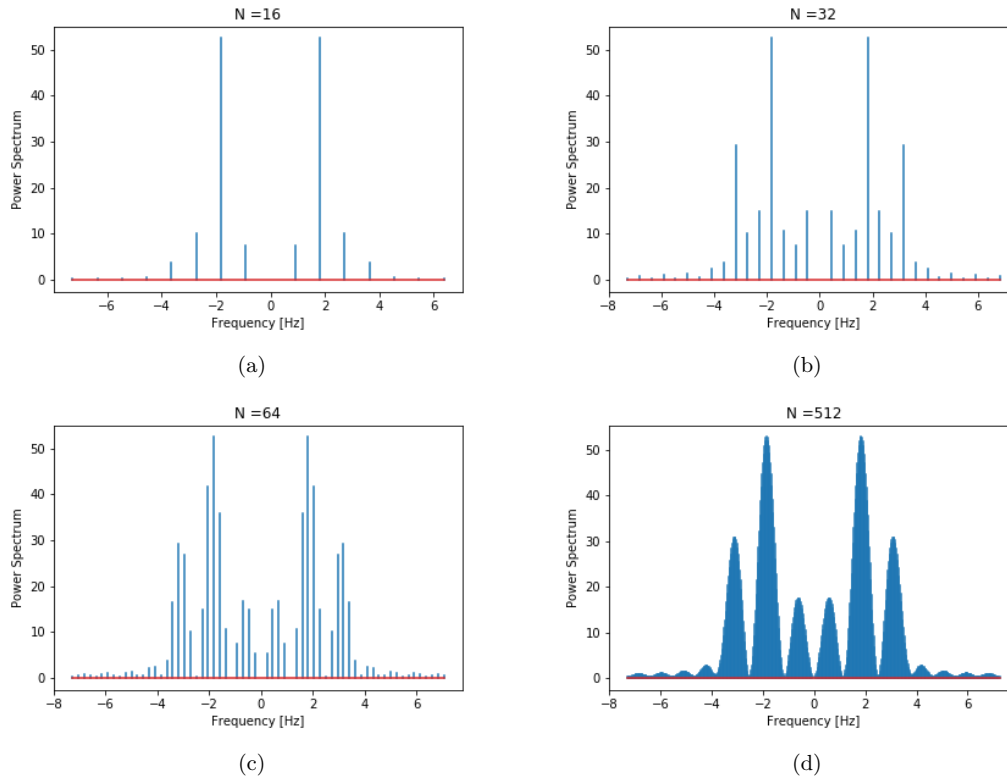


図 9.14: ゼロ埋込み

この結果を見て、データ数 $N = 16, 32, 64$ のときは、どこに真の周波数成分があるかわからない。 $N = 512$ のときに、ようやく、3つの周波数成分がわかるようになる。

ゼロ埋込みは、見掛け上のデータ数が多くなるから、見掛け上の観測時間が長くなる。このため、見掛け上の周波数分解能は上がることになる。しかし、実際の周波数分解能が上がるわけではなく、あくまでも、もとの周波数間隔の間を補間しているにすぎないということに注意されたい。

9.5 窓関数

9.5.1 窓関数の種類

周期信号を非周期に有限時間で観測する場合に、スペクトルの漏れ (leakage) が生じる。スペクトルの漏れは、もともと非周期の信号を観測する場合にも生じるもので、後述するランダム信号の信号処理においても問題となる。この漏れを抑圧する方法の一つとして、**窓関数** (window function) がある。

Scipy が提供する窓関数は <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html> に多数掲載されている。

ここでは、そのうちの一部を紹介する。下記に示す窓関数の表現において、窓関数の幅を $n = 0 \sim N - 1$ とし、この区間外では $w(t) = 0$ とする。

矩形窓 (rectangular window) 方形窓ともいう。入力信号を単純に切り出してそのまま使用する。周波数分解能は優れているが、サイドローブは大きい。

$$w(n) = 1$$

ハミング窓 (hamming window) Richard Wesley Hamming (米, 1915~1998) が、ハン窓の改良版として考案した。ハン窓より周波数分解能が少し良く、よく使われる窓関数の一つである。区間の両端で 0 とならず、不連続になるのが特徴である。

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$$

ハン窓 (hann window) Julius von Hann (オーストリア, 1839~1921) が考案した。ハミング窓との連想からハニング窓とも呼ばれる。よく使われる窓関数の一つである。

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$$

ブラックマン窓 (blackman window) Ralph Beebe Blackman が考案した。ハン/ハミング窓より周波数分解能が悪いが、ダイナミックレンジが広い。

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right)$$

カイザー窓 (Kaiser window)

$$w(n) = \frac{I_0 \left(\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right)}{I_0(\pi \alpha)}$$

ここに、 I_0 は、第 1 種の 0 次の変形ベッセル関数であり、パラメータ α を調整することにより窓の形状を変えられる。 $\alpha = 0$ で矩形窓、 $\alpha = 1.5$ でハミング窓、 $\alpha = 2.0$ でハン窓、 $\alpha = 3$ でブラックマン窓に近似する。

各窓の波形を図 9.15 に示す。いずれも両側の端を抑え込むようにすることでスペクトルの漏れの低減を図っている。

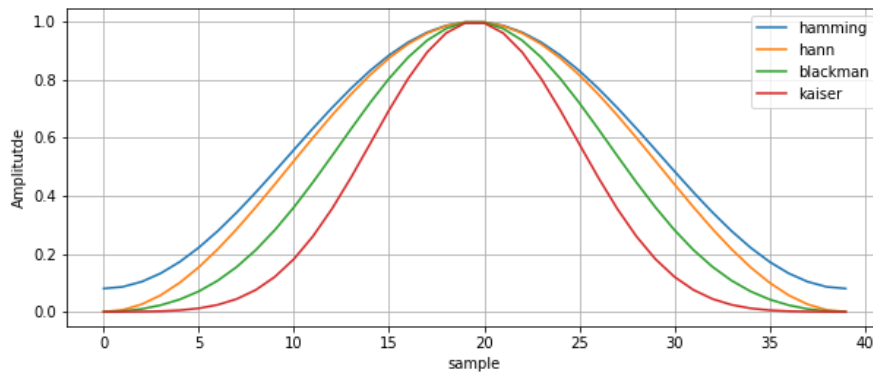


図 9.15: 窓関数の形状

9.5.2 窓関数の使用例

ハン窓を用いた例を次に示す。

Listing 9.5: DFT_WindowFunction.ipynb

```
from scipy import signal

N = 40
w_hann = signal.hann(N)
f0 = 1.25 # 基本周波数 [Hz]
T = 6     # 観測時間 [s]
dt = T/N  # サンプリング時間
df = 1/T  # 周波数分解能
t = np.linspace(0, T-dt, N)
x = np.sin(2*np.pi*f0*t)

xw = w_hann*x # ハン窓
```

原信号にハン窓を適用した信号波形を図 9.16 に示す。また、矩形窓とハン窓を適用したときの PSD を図 9.17 に示す。

ハン窓を用いると、サイドロープの影響は低減しており、窓関数の効用が認められる。しかし、周波数成分が 2 つあるように見える。これは、周波数分解能が荒いためである。これを細かくするには、観測時間 T を伸ばせばよい。周波数が $f = 1.25$ [Hz] であるから、周波数分解能は最低でも 0.125Hz が望ましい。したがって、観測時間は少なくとも、 $T = 1/\Delta f = 1/0.125 = 8$ 以上であるとよい。先と同じ条件で、 $T = 8$ としたときの PSD を図 9.18 に示す。

この結果を見て、基本周波数が 1 つであることが示された。ただし、観測時間 T を伸ばすと周波数分解能が細かくなり、その分だけ周波数区間 ($= N\Delta f$) が狭まる。これを避けたいならば、 N を増やせばよい。

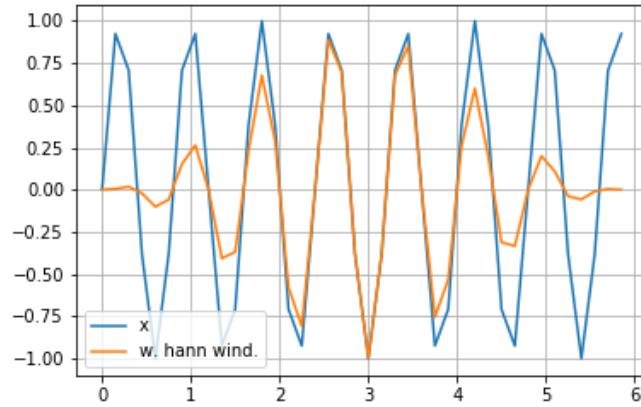


図 9.16: 原信号とハン窓適用した信号

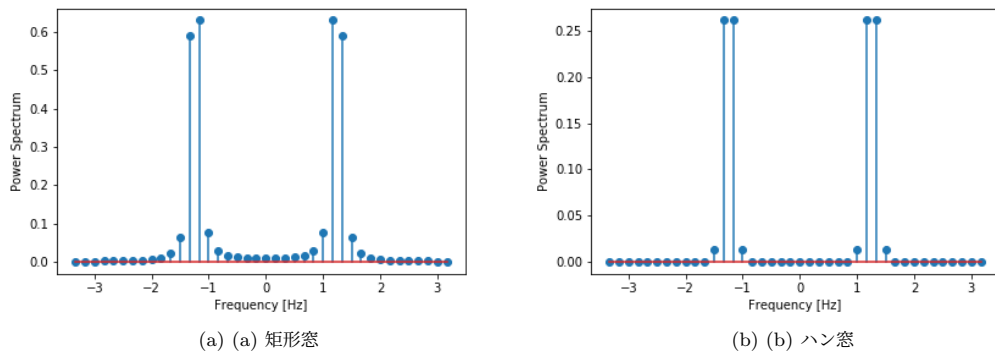


図 9.17: PSD

9.5.3 数学的表現

ここでは、離散フーリエ変換の導出を簡単に説明する。連続時間のフーリエ変換は次式で定義された。ただし、都合上、周波数 f の表現を用いるものとする。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (9.25)$$

まず、連続時間信号 $x(t)$ をサンプリング時間 ΔT でサンプリングする。ただし、無限長の離散時間系列

$$x(k) = x(k\Delta T), \quad -\infty < k < \infty \quad (9.26)$$

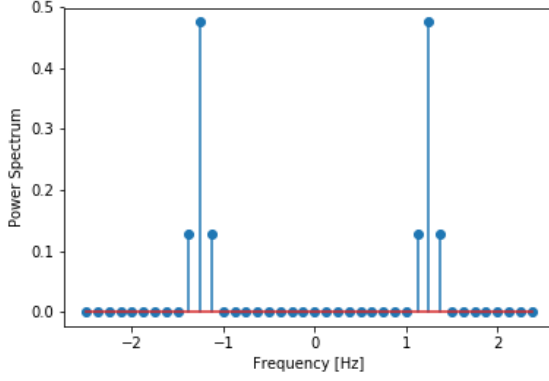


図 9.18: 観測時間を伸ばしたときの PSD

を対象としていることに注意されたい。この条件の下、(9.25) 式の積分は矩形近似により次式で表現される。

$$\begin{aligned} X'(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k\Delta T) \Delta T \right] \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \Delta T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \exp(-j2\pi f k \Delta T) \end{aligned} \quad (9.27)$$

もちろん、(9.27) 式において、 $\Delta T \rightarrow 0$ ならば、(9.25) 式になる。また、 $\Delta T \rightarrow 0$ としなくても、 $X(f)$ が $-1/(2\Delta T) \leq f \leq 1/(2\Delta T)$ で帯域制限されているならば、この区間内で (9.27) 式の値は (9.25) 式の値と一致する。そして、 $X'(f)$ は連続関数であることに注意されたい。

次に、データ系列が $k = 0, \dots, N-1$ に限定されているものとする。すなわち、データ数は N 個とする。このとき、記録長 T と、周波数間隔 Δf は次の関係がある。

$$T = N\Delta T, \quad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta T} \quad (9.28)$$

これより、(9.27) 式は次となる。

$$\begin{aligned} X(n) &= \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi(n\Delta f)k\Delta T) \\ &= \Delta T \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi nk/N) \end{aligned} \quad (9.29)$$

この結果がよく知られた DFT である。また、逆離散フーリエ変換 (IDFT; Inverse DFT) は逆フーリエ変換と同様にして、次で与えられる。

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(j2\pi kn/N) \quad (9.30)$$

9.6 ランダム信号のパワースペクトル密度

9.6.1 パワースペクトル密度の表現

連続時間の信号 $x(t)$ が次を満たすとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (9.31)$$

$x(t)$ は有限のパワーを持つという。しかし、ランダム信号のパワーは一般に有限でない。したがって、そのフーリエ変換は存在しないことに注意されたい。そこで、図 9.19 に示すように、区間 $[-T/2, T/2]$ に渡って、

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , |t| \leq T/2 \\ 0 & , |t| > T/2 \end{cases} \quad (9.32)$$

のように定義される $x_T(t)$ を導入する。 $x_T(t)$ のフーリエ変換は存在するから、これを $X_T(f)$ で表す。

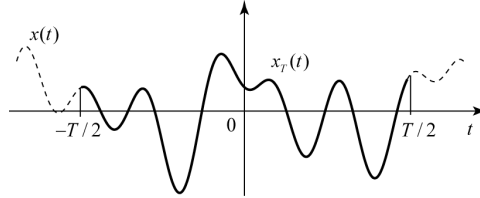


図 9.19: 有限区間で定義される $x_T(t)$

Parseval の定理より、次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

上式で、 $|X_T(f)|^2$ は $x_T(t)$ のエネルギースペクトル密度である。ところで、 $x_T(t)$ の定義から $T \rightarrow \infty$ で、 $x_T(t) \rightarrow x(t)$ であるから、 $x(t)$ のエネルギースペクトル密度は、次で定義すればよいように思われる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |X_T(f)|^2$$

しかし、この極限值は存在しない。この極限值が存在するくらいならば最初から $x_T(t)$ を導入する必要はない。

そこで、全エネルギーの代わりに単位時間当たりのエネルギー、すなわち、パワーを考えるために、次式を考える。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df$$

これは、全ての f について極限值は存在するから

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

これをパワースペクトル密度と定義したいところである。しかしながら、上式はランダム信号の見本過程に対して導かれたものであるから、この値は見本過程ごとに異なる確率変数であり不都合である。そのため、ランダム信号（確率過程ともみなせる）のパワースペクトル密度は、その期待値をとり、次と定義する。

$$\text{PSD}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{T} \right] \quad (9.33)$$

この極限が存在するとき、 $\text{PSD}_x(f)$ を定常確率過程 $\{x(t)\}$ のパワースペクトル密度という。

【備考】 確定信号とランダム信号の場合のパワースペクトル密度を両方とも同じ記号 PSD で表しているが、どちらの信号に対するものであるかは、文脈より容易に判断がつくと考え、同じ記号を用いた。

9.6.2 PSD は確率変数

Scipy はランダム信号の PSD を求める方法は、`scipy.signal` の “Spectral Analysis” を見るとペリオドグラム法 (periodogram), Welch 法, Lomb-Scargle 法を用意している^{*5}。この中で、スペクトル分析器にも利用されていて実用性の高いペリオドグラム法を紹介する。

分析対象とするデータは 2 つの周波数が隣接し、信号に雑音が重畳しているものとする。この信号の詳細は次のスクリプトに記述している。

Listing 9.6: PSD_Periodogram.ipynb

```
f1, a1 = 1.2, 1.0 # freq1 [Hz], amp1
f2, a2 = 1.3, 1.0 # freq2 [Hz], amp2
sd = 5.0 # std for noise

dt = 0.2 # sampling time [s]
T = 100 # observatin time [s]
Num = 1024 # for zero-padding
df = 1/(dt*Num) #
t = np.linspace(0, Num-1, Num)*dt # time line
freq = np.fft.fftfreq(Num, d=dt) # freq. line

w_hamming = signal.hamming(Num) # hamming window

x = a1*np.sin(2*np.pi*f1*t) + a2*np.sin(2*np.pi*f2*t) + \
    np.random.normal(loc=0.0, scale=sd, size=Num) # observation
```

観測波形 (図 9.20) を眼で見ただけでは、どのような周波成分が含まれているかはわからない。

先のスクリプトの続きで、パワースペクトル密度 (PSD) を求めている。ここで、PSD は確率変数であるから、1 回 PSD を求めただけではよくわかららない。そこで、PSD を 10 回求めた。そのうちの幾つかを図 9.21 に示す。これを見て、1 回だけではどこに周波

^{*5} 古典的な PSD を求める方法に、BT 法 (Blackman-Tukey, 自己相関関数を用いる), MEM (Maximum Entropy Method, AR モデルを用いた Burg のアルゴリズムに基づく) もある。

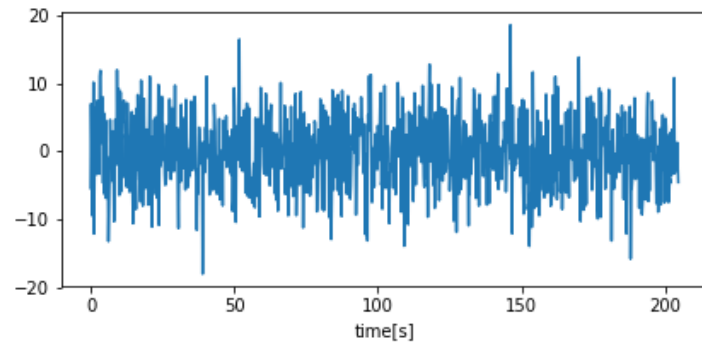


図 9.20: 観測波形

数成分があるかはわからず、また、毎回、分布が変化しているので、1 回だけの PSD 計算は有効ではないことがわかる。

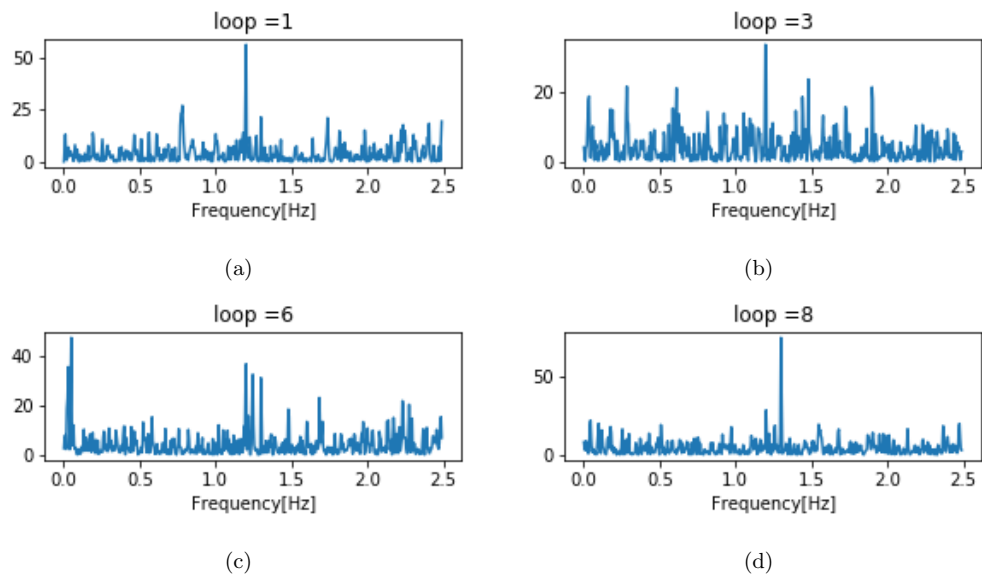


図 9.21: ランダム信号の PSD, loop は試行回数

この 10 回の PSD を周波数点毎に算術平均をとった結果を図 9.22 に示す。この平均操作により、雑音にまぎれた 2 つの周波数成分を良く抽出できていることが認められる。このシミュレーションより、標本に対する PSD は確率変数であることがよくわかる。

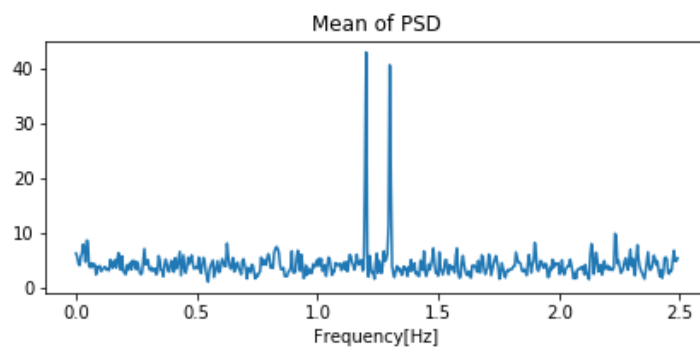


図 9.22: PSD の平均