

## 第 10 章

# デジタルフィルタ

センサ出力から雑音や外乱を除去して欲しい信号成分だけを伝えるのがフィルタである。本章は、`scipy` を用いてデジタルフィルタの設計の仕方について説明する。フィルタの基本を知るため、初めにアナログフィルタを説明し、この後でデジタルフィルタの基本形（FIR, IIR）を説明する。これを基に、`scipy` を用いたデジタルフィルタの設計の仕方を説明する。

### 10.1 フィルタの概要

#### 10.1.1 フィルタとは

フィルタ（filter）とは、不要物を遮断したり、必要なものだけを通過させるものである。ここで説明するフィルタとは、指定した**周波数帯域**（frequency band）を通過（または阻止）するものをいう。

図 10.1 は、高い周波数成分と低い周波数成分を含んだ信号から、所望の周波数成分を通過（pass）させるフィルタ（filter）を図的に説明している。

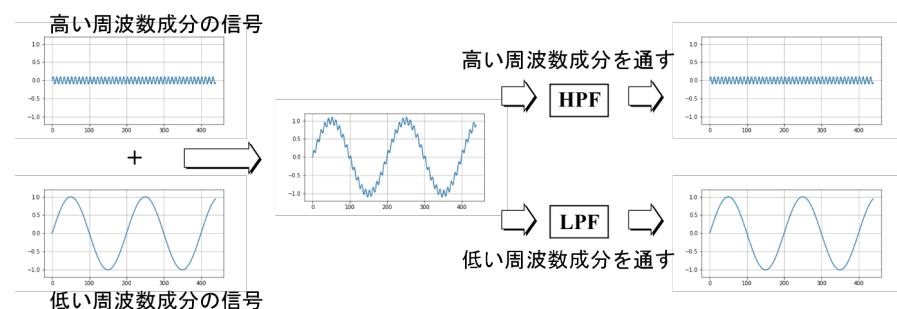


図 10.1: フィルタの役割

ここに、HPF(High Pass Filter, 高域フィルタ): 高い周波数成分を通過させる, LPF(Low Pass Filter, 低域フィルタ): 低い周波数成分を通過させる, である。

フィルタの伝達関数を  $H(j\omega)$ , この振幅特性を  $|H(j\omega)|$  としたとき、通過させる信号の周波数帯域を振幅特性で表し、この帯域に基づくフィルタの名称を図 10.2 に示す。ここに、

- (a) 低域フィルタ（低域通過フィルタ, low pass filter）
- (b) 帯域フィルタ（帯域通過フィルタ, band pass filter）
- (c) 高域フィルタ（高域通過フィルタ, high pass filter）
- (d) 帯域阻止フィルタ（band stop filter）

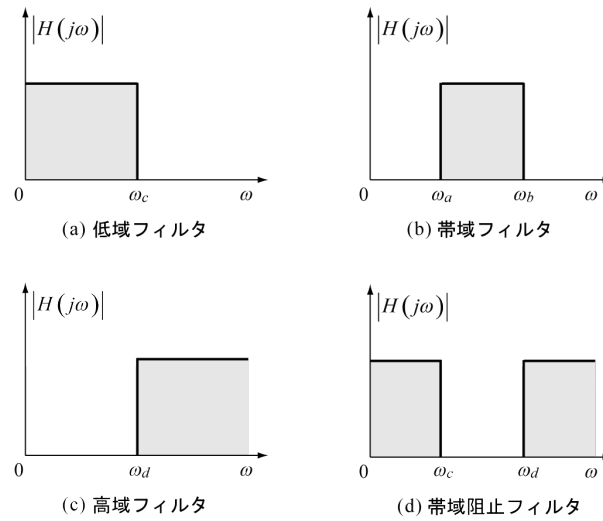


図 10.2: フィルタの役割

### 10.1.2 フィルタ特性

ローパスフィルタを例にとり（図 10.3），フィルタ特性の見方を説明する。

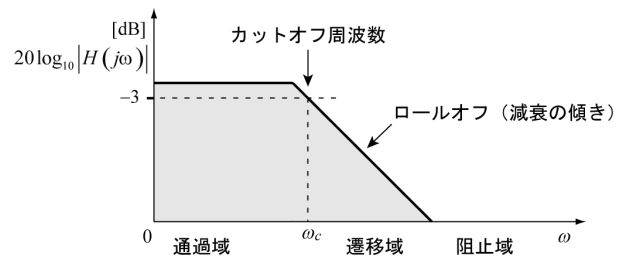


図 10.3: ローパスフィルタのフィルタ特性

### カットオフ周波数

通過域と阻止域の境目を**カットオフ周波数** (cutoff frequency)  $\omega_c$  で表す\*1。現実には通過域と阻止域の間は連続的に変化し、ここを遷移域 (transition band) という。この連続して減衰する帯域で、例えば、通過するエネルギーが  $1/2$  となるところを  $\omega_c$  とすることが多い。一方、電気工学や情報理論というゲイン (gain) は入力と出力の電力やエネルギー比を表すもので、この比のレンジが広いことから対数で表すようにしている。したがって、エネルギーが  $1/2$  になるとは次の表現となる。

$$10 \log_{10} \frac{1}{2} \simeq -3.01 \rightarrow -3 \text{ [dB]} \quad (10.1)$$

これより、 $-3\text{[dB]}$  (単位 [dB] の意味は後述) となる境目をカットオフ周波数  $\omega_c$  で表すことが多い。

エネルギーを伝達関数で表現すると、

$$\frac{\text{出力エネルギー}}{\text{入力エネルギー}} = (\text{伝達関数})^2$$

であるから、ゲイン線図の縦軸を [dB] 表示するときには

$$10 \log_{10} |H(j\omega)|^2 = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

この右辺で表すことが多い。ただし、対数をとることは、レンジを広く見たいためであるから、対数をとらずに単に振幅 (ここでは絶対値のこと)  $|H(j\omega)|$  をゲイン表示として用いることもある。この単位は無次元で扱うこととする。

エネルギー比  $1/2$  を伝達関数の入出力信号の振幅で考えると、エネルギーの平方根で考えるため、振幅比が  $1/\sqrt{2} = 0.707$  となる周波数が  $\omega_c$  となる。

図 10.3 に示す**ロールオフ** (roll-off) 特性は減衰の傾き度合いをいい、これが急である方が望ましいとされる。急峻にするほどリプルが大きくなるトレードオフがある ([https://en.wikipedia.org/wiki/Filter\\_\(signal\\_processing\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(signal_processing)))。

### リップル特性

図 10.3 は、まだ、理想的であり、現実のフィルタ特性はさらに図 10.4 に示すように、ゲインがさざなみ形状を示す**リップル特性** (ripple characteristics) がある。

この図において、次の帯域を考える。

**通過域** (通過帯域, passband) :  $0 \leq \omega \leq \omega_c$

**遷移域** (遷移帯域, transition band) :  $\omega_c \leq \omega \leq \omega_r$

**阻止域** (阻止帯域, stopband) :  $\omega_r \leq \omega$

ゲインが振動するの好ましくなく、仕様として通過域では 1、阻止域では 0 にしたいが、現実にはリップルを完全に抑え込むことは難しい。そのため、図 10.4 に示す  $1 - B$ 、および  $0 \sim A$  の範囲を狭くするようにフィルタ設計の仕様を与える。この範囲を狭くしよ

\*1 正確にはカットオフ“角”周波数と言うところであるが、単にカットオフ周波数と述べるが、単位は [rad/s] である。カットオフ周波数  $f$  の場合は [Hz] となる。現場では  $f$  が使いやすいが、数学的に式を扱う場合には [rad/s] が都合が良いため、本書では [rad/s] を多用している。

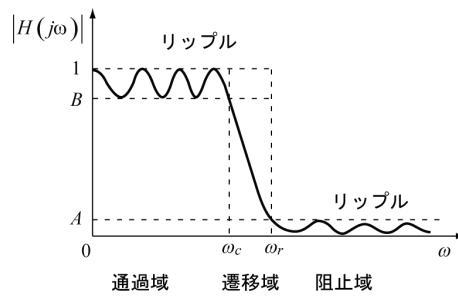


図 10.4: リップルのあるフィルタ特性

うとすると、低次のフィルタでの実現は難しく高次のフィルタにならざるを得ない。このリップルの幅も設計仕様として与えられことが後に説明される。

### 10.1.3 デシベル [dB]

フィルタ性能を見る単位のデシベル [dB] について説明する。d は数の接頭語 (1 章) のデシ (deci), 日常ではデシリットルが有名なように,  $1/10$  を表す。B (ベル) は Alexander Graham Bell (スコットランド, 科学者, 発明家, 工学者, 1847-1922) の名前が由来である。

信号のエネルギーの伝送比, すなわち, 入力と出力のエネルギー比を考えたとき, この比では大きすぎることがある。これを常用対数で見れば, わかりやすい値となる。例えば

$$\frac{\text{出力エネルギー}}{\text{入力エネルギー}} = 1\,000\,000$$

では数字が大きすぎる。そこで, 常用対数をとって

$$\log_{10} \left( \frac{\text{出力エネルギー}}{\text{入力エネルギー}} \right) = 6$$

これでは値が小さすぎるということで, 10 倍したものを考える。すなわち,

$$10 \log_{10} \left( \frac{\text{出力エネルギー}}{\text{入力エネルギー}} \right) = 60 \text{ [dB]}$$

この単位を [dB] とした。

◇ ◇ Tea Break ◇ ◇

ベル (A.G.Bell) は電話機の特許を世界で初めて取得したが, 別方式の電話機を発明したエジソンと特許権問題の争いに巻き込まれたりした。この後に, 1878 年ベル電話会社を設立, これは後に大企業 AT&T に発展する。ベルは, 祖父や父の影響を受けて, 晩年, ろうあ者の教育に尽くし, ヘレン・ケラー (Helen A. Keller) に家庭教師アン・サリヴァン (Anne Sullivan) の紹介もしている。サリヴァンは, ヘレン・ケラーの三重障害の克服に尽力したため, 後世に奇跡の人と称された。

## 10.2 アナログフィルタの設計

アナログフィルタのうち, 次の 2 つのフィルタの設計について説明する。

**バターワースフィルタ** 通過域をフラットにすることを重視。

**チェビシェフフィルタ** 通過域にリップルを持たせても、遮断周波数近辺での減衰傾度を重視し、次の2種がある。第1種：通過域にリップルがある。第2種：阻止域にリップルがある。

この設計と周波数応答には、`scipy` が提供する次を用いる。

`scipy.signal.iirfilter` アナログフィルタ全般の種類に対して共通的に用いられる  
`scipy.signal.freqs` アナログフィルタの周波数応答計算に用いられる

上記の2つの説明サイトともに、`frequency` は角周波数 [rad/s] を意味する。なお、`scipy` は他のフィルタ（ベッセル、エリプティック（楕円）など）も提供しており、興味ある読者は自身で上記サイトを調べられたい。

ローパスフィルタとバンドパスフィルタの設計例を以下に示す。ハイパスフィルタの設計は読者に委ねる。ローパスフィルタの設計仕様として、カットオフ周波数（設計では角周波数で表す）、また、グラフの周波数範囲は次とする。

```
wc = 100 #Cut off [rad/s]
W_range = np.logspace(0, 3, 100) # [10^0 ,10^3] [rad/s]
```

### 10.2.1 バターワースフィルタ

バターワースフィルタ（Butterworth filter, S.Butterworth, 工学者、英国）の特徴は次があげられる。

- 通過域、阻止域が平坦（リップルが無い）
- ロールオフがチェビシェフフィルタと比較してなだらか
- 実際の回路で実現しやすい

このゲインは次で与えられる。

$$|H(j\omega)| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (10.2)$$

ここに、 $n$  はフィルタ次数、 $\omega_c$  はカットオフ周波数、 $G_0$  は DC ゲイン（周波数 0 でのゲイン、これ以降  $G_0 = 1$  とする）である。

これを設計して、その周波数応答を求めるスクリプトを次に示す。

Listing 10.1: AFIL\_Design.ipynb

```
from scipy import signal
b, a = signal.iirfilter(N = order, Wn = wc, btype='lowpass',
                        analog=True, ftype='butter')
w, h = signal.freqs(b, a, W_range)
```

ここに、`signal.iirfilter` のパラメータは  $N$ : フィルタ次数,  $Wn$ : カットオフ周波数 [rad/s], `btype`: 'lowpass', 'highpass', 'bandpass', 'bandstop' から1つを指定, `analog`: True (アナログフィルタ設計), False (デジタルフィルタ設計), `ftype`: 'butter', 'cheby1',

‘cheby2’, ‘ellip’, ‘bessel’ から1つを指定。出力の b, a はそれぞれフィルタ伝達関数の分子, 分母の係数を表す。

signal.freqs のパラメータは, W\_range: この周波数範囲で計算を行う。出力は, w: 計算した角周波数 [rad/s] の範囲, h: 周波数応答  $H(j\omega)$  (複素数) である。

次数を 1 ~ 5 としたときのフィルタの振幅特性を図 10.5 に示す。なお, カットオフ周波数のゲイン  $-3[\text{dB}]$  で線を引いた。

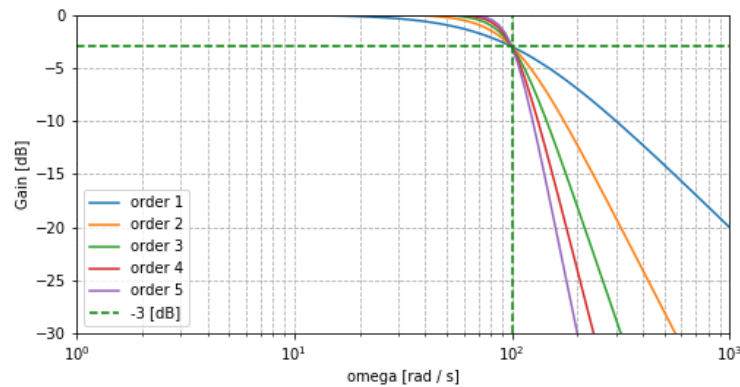


図 10.5: バタワースフィルタのゲイン特性

この結果を見て指摘できることは, 通過域が平坦 (リップルが無い), 次数が多いほどロールオフが大きく (急峻に) なる。さらに, 全ての次数の場合で, カットオフ周波数と  $-3[\text{dB}]$  ゲインとの交点をゲイン曲線が通過していることがわかる。なお, 横軸の単位 [rad/s] が見づらい場合には,  $2\pi f = \omega$ , ( $f[\text{Hz}], \omega[\text{rad/s}]$ ) の関係を用いて, スクリプト中で  $\text{freq} = \omega/(2*\text{np.pi})$  とおく。この単位は [Hz] であり,  $\text{plt.plot}(\text{freq}, \text{gain})$  とすれば, 配列の要素順は変わらないので, 横軸が [Hz] のグラフとなる。これを図 10.6 に示す。

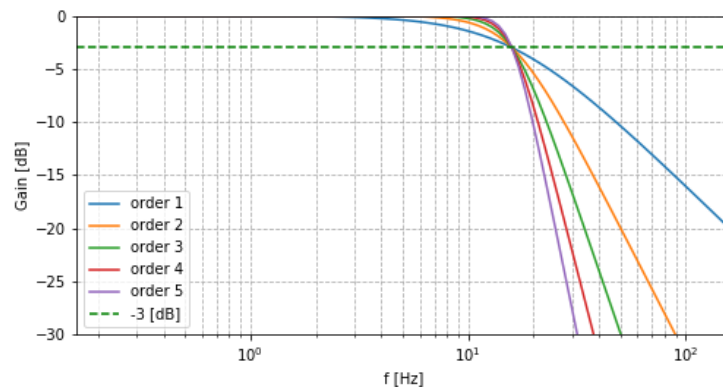


図 10.6: バタワースフィルタのゲイン特性, 横軸が [Hz]

バンドパスフィルタは、通過域の下限周波数 (wc.L) と上限周波数 (wc.H) を与え、次のようにスクリプト表現する。

```

wc.L = 500.0
wc.H = 1500.0
b, a = signal.iirfilter(N=order, Wn=[lowcut, highcut], btype='
    bandpass', analog=True, ftype='butter')

```

この結果を図 10.7 に示す。ただし、縦横ともリニアスケールで表現した。このため、カットオフ周波数のゲイン  $-3[\text{dB}]$  の代わりにゲインが  $1/\sqrt{2}$  となる箇所で線を引いた。次数に依らず、ゲイン曲線がカットオフ周波数でこの点を通ることが認められる。

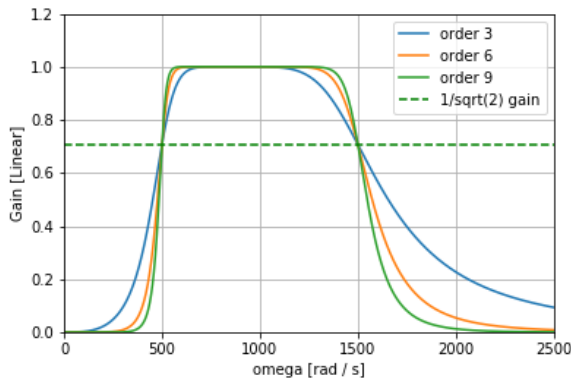


図 10.7: バンドパスフィルタ

この結果を見てわかることは、リップルが無い、次数が大きくなるほどロールオフが急峻となるなどがある。

### 10.2.2 チェビシェフフィルタ

チェビシェフフィルタ (Chebyshev filter) は、チェビシェフ多項式 (Chebyshev polynomials, P.Chebyshev, 数学者、露) を利用したものである。チェビシェフ多項式は、チェビシェフフィルタを示すスクリプトで簡単に説明しているので参照されたい。

フィルタには第 1 種 (Type I) と第 2 種 (Type II) があり、これらの特徴は既に述べた。初めに第 1 種の設計例を説明する。第 1 種のゲイン特性は次式で与えられる。

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} \quad (10.3)$$

ここに、 $T_n(x)$  はチェビシェフ多項式、 $\varepsilon$  はリップル係数、 $\omega_c$  はカットオフ周波数である。

第 1 種は、通過域にリップルがあり、この振幅の幅を設計仕様として定められる。ここで、通過域では、チェビシェフ多項式は  $-1 \sim 1$  の範囲にあるという性質がある。このため、その 2 乗を考えると  $0 \sim 1$  の範囲にあるため、ゲイン  $|H(j\omega)|$  の最大は 1、最小値は

次で与えられる。

$$\text{ripple[dB]} = 20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (10.4)$$

この左辺にある ripple を設計パラメータとして与えることになる。例えば、ripple = 3 [dB] を与えれば、リップルの範囲は 0 ~ 3[dB] の範囲で収まることを意味する。ちなみに、このとき  $\varepsilon = 1$  である。

チェビシェフフィルタ（第1種）の設計のためのスクリプトを次に示す。ここに、次数 4, ripple = 5[dB] とおいた。

```
ripple = 5 # [dB]
b, a = signal.iirfilter(N=4, Wn=wc, rp=ripple,
                        btype='low', analog=True, ftype='cheby1')
```

この結果を図 10.8 に示す。なお、カットオフ周波数のゲイン -3[dB] と指定したリップルの下限で線を引いた。

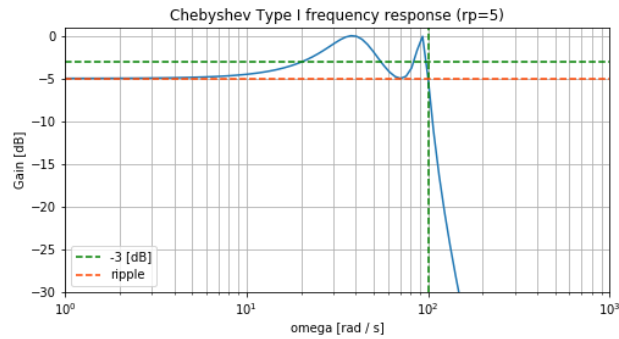


図 10.8: チェビシェフフィルタ（第1種）の振幅特性

この結果を見て、リップルがパラメータ ripple で与えた仕様を満たしていることがわかる。バターワースフィルタの結果と比較して、チェビシェフフィルタの方が次数が少なくてもロールオフを急峻にできる、しかし、通過域でリップルが生じる。

第2種は、阻止域にリップルがあり、この振幅の幅を設計仕様として与えられる。このゲイン特性は次式に示すように、チェビシェフ多項式の逆数を用いている。

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}} \quad (10.5)$$

また、リップル幅は次で与えられる。

$$\text{ripple[dB]} = 20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}} \quad (10.6)$$

フィルタ仕様は同じとし、次数は 4, リップル幅を次のようにとる。

```
ripple = 20 # [dB]
b, a = signal.iirfilter(N=4, Wn=wc, rs=ripple, btype='low', analog=True, ftype='cheby2')
```



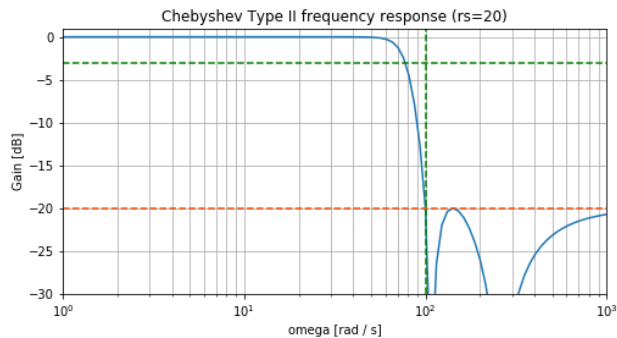


図 10.9: チェビシェフフィルタ（第 2 種）の振幅特性

この結果を図 10.9 に示す。

この結果を見て、通過域はフラット、阻止域のゲイン特性は大きく変動しているように見えるが、単位が [dB] であるから、リニアで見れば小さな変動である。

## 10.3 デジタルフィルタの設計

### 10.3.1 デジタルフィルタの導入

信号は、センサ出力、通信・伝送回路などで見られ、離散時間のデジタル信号として表現されることが多い。デジタル信号には、ノイズや不要な周波数成分の信号が重畳していることがあるため、デジタルフィルタ (digital filter) が導入される。

デジタルフィルタの特長として次が挙げられる。アナログフィルタと比べて、デジタルフィルタの性能は均質化を図りやすい。これは、アナログフィルタ回路のアナログ素子値の厳密な一定化が難しいためである。また、デジタルフィルタを線形構造とすれば、ハードウェア回路として実現しやすい。デジタルフィルタの使用例を図 10.10 に示す。

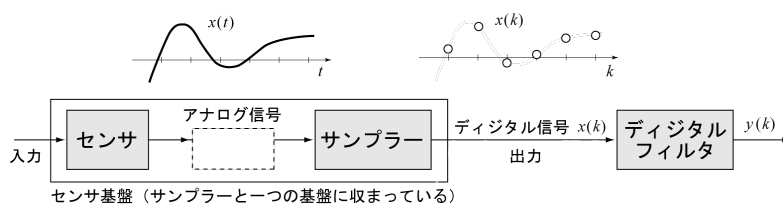


図 10.10: デジタルフィルタの使用例

この図において、次のようにした。

- 図中の破線枠（センサとサンプラーの間）にはアナログフィルタが入る場合があるが、ここでは考えないものとする。
- サンプラーは、実際には ZOH 回路 (Zero order hold) が担うが、ここではインパルスサンプリングとする。

サンプリング時間  $\Delta T[s]$  とサンプリングを行った時刻  $t[s]$  との関係は、順序数  $k$  ( $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) を導入して、 $t = k\Delta T$  となる。この表記を簡単にしたいため、しばしば  $\Delta T$  を無次元化したい。このため、単位時間 (unit time) という考え方をを用いる。これは、1 サンプル、2 サンプル、 $\dots$ 、と表現する。1 サンプル間の時間は実際には  $\Delta T$  であるが、これを明示しない。この考え方にに基づき、デジタル信号を次のように表記する。

$$\dots, x(k-2), x(k-1), x(k), x(k+1), x(k+2), \dots$$

本書では次のように約束する。

- かつこ内が  $k$  ならば  $x(k)$  はデジタル信号、 $t$  ならば連続時間信号

デジタルフィルタの設計仕様として、通過させたい周波数帯域があり、これはサンプリング時間にも依存する。これについては、後に説明する。

### 10.3.2 デジタルフィルタの構造

フィルタは線形構造として、この伝達関数を  $H(z^{-1})$  とする。このとき、フィルタの入出力関係とその構造は次で表されるとする。

$$y(k) = H(z^{-1})x(k) \quad (10.7)$$

ここに、

$$H(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (10.8)$$

フィルタの伝達関数は ARMA モデルと同じ構造であるが、動的システムのような次数  $p$  と  $q$  の大小に関する制約は無い。

フィルタ設計では周波数応答が用いられる。これは、 $z^{-1} = \exp(-j\omega\Delta T)$  とおいて、伝達関数を次のように表す。

$$H(e^{-j\omega\Delta T}) = |H(e^{-j\omega\Delta T})| \angle H(e^{-j\omega\Delta T}) \quad (10.9)$$

ここに、左辺は複素数であることに注意して、 $|H(e^{-j\omega\Delta T})|$  を振幅特性 (ゲイン特性と言うこともある)、 $\angle H(e^{-j\omega\Delta T})$  を位相特性という。この表現は、 $\omega$  をある値に固定したとき、複素数という極形式と考えれば、大きさ (振幅特性) と偏角 (位相特性) で表せることを利用したものである。これらの式において、後に述べる正規化角周波数を導入して、 $\Delta T = 1$  とおいた表現もある。

このフィルタの見方には幾つかあり、このうち FIR と IIR を説明する。

#### FIR (Finite Impulse Response) フィルタ

分母 = 1 の場合をいう。単位インパルス入力の際の出力波形は有限時間で 0 となることから FIR と名付けられた。

#### IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ

分母  $\neq 1$  の場合をいう。この場合、単位インパルス入力の際の出力波形は一般に無限に続くことから IIR と名付けられた。分母があると無限列を生むという理由では、例えば、 $3/7 = 0.428571\dots$  のように有理式は無限級数で表されることがあるためである。

これらの構造の違いに伴う理論的な説明は他書に委ねるとして、ここでは2つの特徴を示すことに留める。

FIR フィルタは、分母が1のため常にフィルタを安定に設計できる\*2。また、位相遅れは直線的である。しかし、急峻なフィルタ特性を得るにはタップ数を大きく増やさざるをえない。このことは、大きな時間遅れとコスト大につながる。ただし、時間遅れは周波数には依存しない。これらより、オフライン処理に向いているとも言われる。

IIR フィルタは、分母があるため安定設計に気を付けなければならない。また、位相遅れは直線的でない。この反面、同じフィルタ特性を得るのに FIR に比べてタップ数を少なくできる。このことはハードウェア回路の素子数を少なくできることにつながる。また、双一次変換を用いると、カットオフ周波数がサンプリング周波数の影響を受ける。

この違いを簡単にまとめたものを表 10.1 に示す。

表 10.1: FIR, IIR フィルタの比較

	FIR フィルタ	IIR フィルタ
安定性	常に安定	不安定になることがある
位相	直線性を実現可能	直線性の実現困難
次数（コスト）	大きい	小さい
遅延	大きい	小さい

この2つのフィルタの説明を次項に述べる。

### 10.3.3 FIR フィルタ

FIR フィルタは、(10.8) 式において分母が1であるから、次で表現される。

$$y(k) = b_0x(k) + b_1z^{-1}x(k) + \cdots + b_qz^{-q}x(k) \quad (10.10)$$

ここに、 $q$  をフィルタ次数、また、右辺の各項をタップ (tap) といい  $q+1$  のタップ数があるという。

この式より、実際に適当な数値を入れて考えれば、FIR フィルタの単位インパルス応答が有限であることがわかる。これを図示したのが図 10.11 である。



図 10.11: FIR フィルタのインパルス応答

FIR フィルタをデジタル回路で構成する例を図 10.12 に示す。これは、直線形構成といい、他に格子型 (Lattice) などの実現法がある。

\*2 ARMA モデルにおいて MA モデルだけと考えれば、この理由は明白であろう。

この図において、遅延演算子  $z^{-1}$  を回路で実現したものが遅延器である。先に述べたタップの意味を回路で考えると、入力信号に影響を与える部分をタップと考えても差し支えない。これより、図 10.12 で破線で囲んだ部分を回路全体に適用したときの  $q+1$  がタップ数となる。

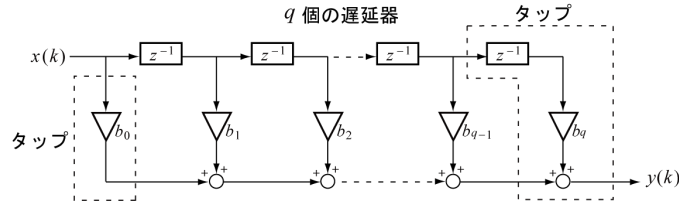


図 10.12: FIR フィルタのデジタル回路構成の一例

### 10.3.4 IIR フィルタ

IIR フィルタは次で表される。

$$y(k) + a_1 z^{-1} y(k) + \cdots + a_p z^{-p} y(k) = b_0 x(k) + b_1 z^{-1} x(k) + \cdots + b_q z^{-q} x(k) \quad (10.11)$$

この次数は  $(p, q)$  である。デジタル回路構成では  $p = q$  とすることが多い。IIR フィルタの単位インパルス応答は、図 10.13 に示すように、一般に無現に続く。



図 10.13: IIR フィルタのインパルス応答

IIR フィルタをデジタル回路で構成する例として、直接型を図 10.14 に示す。図の 2 つの構成は同じ伝達関数であり、タイプ II の方が素子数が少なくて済む。ただし、実際のデジタル回路で直接型を実現した場合、演算誤差や係数の量子化誤差の影響が比較的大きく、カスケード型などが良く用いられる。ここでは、ソフトウェアで IIR フィルタを考えるために、理解のしやすい直接型を示した。

### 10.3.5 正規化角周波数

連続時間系の場合と異なり、離散時間系の表現、特に角周波数の見方が分かりにくいので、このことを説明する。

まず、次のようにおく。

(通常の) 周波数	$f$ [Hz]	(1 秒あたりの周期数)
(通常の) 角周波数	$\omega$ [rad/s]	(1 秒あたりに進む位相 [rad])
サンプリング時間	$\Delta T$ [s]	
サンプリング周波数	$f_s = \frac{1}{\Delta T}$	(単位時間あたりのサンプル数)
ナイキスト周波数	$f_{Nyq} = \frac{f_s}{2}$	

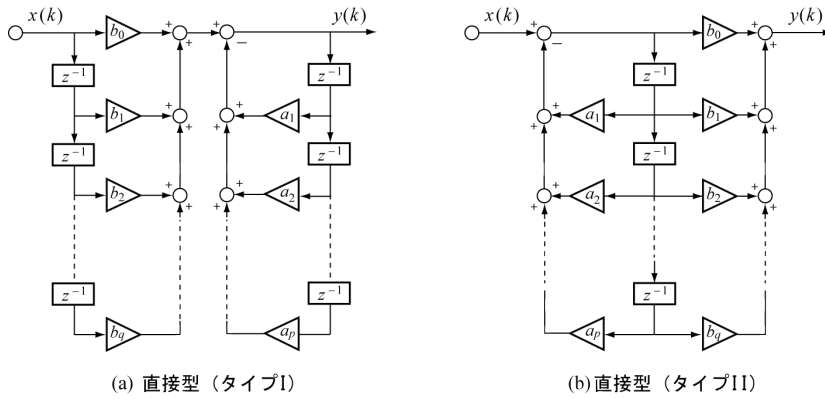


図 10.14: IIR フィルタのデジタル回路構成の一例

初めに,  $(\omega\Delta T)$  の単位は  $[\text{rad/s}][\text{s}] = [\text{rad}]$  であることに留意して, この増減により,

$$z^{-1} = \exp(-j\omega\Delta T) = \cos(\omega\Delta T) - j\sin(\omega\Delta T)$$

は\*3, 複素平面上の単位円周上をグルグル回るため,  $0 \sim 2\pi$  の周期性があることがわかる。このため,  $H(z^{-1})$  の振幅 (絶対値のこと)  $|H(z^{-1})|$  も  $0 \sim 2\pi$  の周期性がある。しかも,  $0 \sim \pi$  と  $\pi \sim 2\pi$  で振幅は対称性があるため, 見るのは  $0 \sim \pi$  の区間だけで十分である。

ここで問題は, この  $0 \sim \pi$  をどのように周波数  $f$  [Hz] と対応させればよいか, ということである。これに答えるため, 1 サンプルあたり何 rad 位相が進むかを表す量を定義したい。これを**正規化角周波数** (normalized angular frequency)  $\omega_{Nrm}$  [rad/sample] と名付けるものとする。

この定義から

$$\omega_{Nrm} = \omega\Delta T = 2\pi f\Delta T = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi f_{Nrm} \quad (10.12)$$

ここに,  $f_{Nrm} = f/f_s$  とおいた。  $f_{Nrm}$  は 1 サンプル当たりの周期数となり, 正規化周波数 (normalized frequency) といい, 周期は 1 である。これらをまとめたのが次の表である。

正規化周波数 $f_{Nrm}$	正規化角周波数 $\omega_{Nrm}$
1 サンプル当たりの周期数	1 サンプルあたりに進む位相 [rad]
1 周期は 1	1 周期は $2\pi$
単位は無次元	単位は [rad/sample]

ここまでの説明で,  $(\omega\Delta T)$  を考慮すれば,  $|H(z^{-1})|$  をグラフで表したとき, 横軸が正規化角周波数  $\omega_{Nrm}$  となることがわかるであろう。しかも, この見るべき範囲が  $\pi$  まで

\*3 上の式はオイラーの公式 (Euler's formula) である。

でよいことと、これはナイキスト周波数  $f_{Nyq}$  に相当するので、 $\omega_{Nrm}$  を周波数  $f[\text{Hz}]$  に対応させたときの関係は次のように表される。

$$\begin{aligned}\omega_{Nrm} &: 0 \sim \pi \quad [\text{rad/sample}] \\ f &: 0 \sim f_{Nyq} \quad [\text{Hz}]\end{aligned}$$

この関係を知っておけば、以降に示すデジタルフィルタの周波数特性のグラフを理解できるであろう。

## 10.4 FIR フィルタの設計

### 10.4.1 窓関数を用いた設計法

FIR フィルタの設計方法のうち、窓関数を用いた方法を図 10.15 を用いて説明する。この説明ではローパスフィルタの場合を考えている。

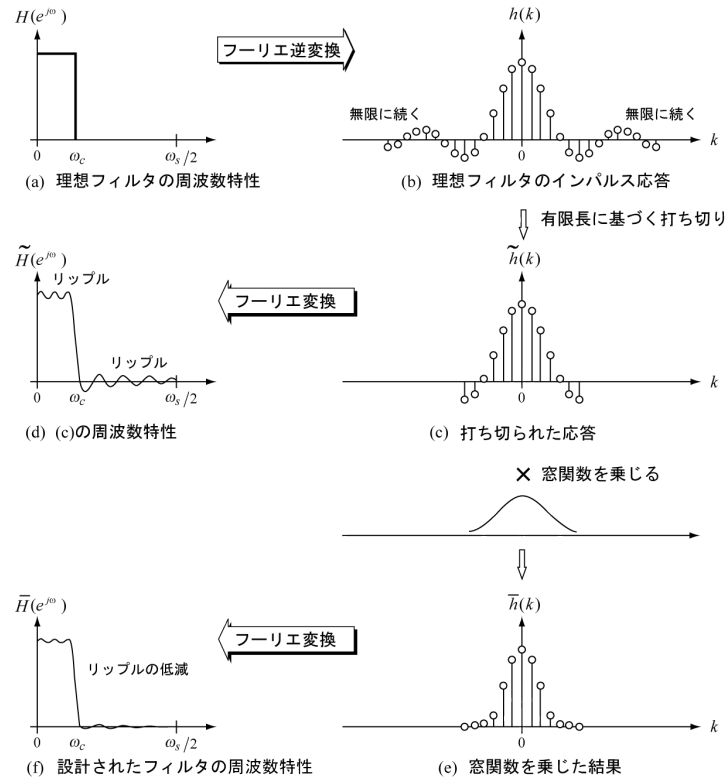


図 10.15: 窓関数方法の概要

理想的なローパスフィルタの周波数特性を図 (a) としたとき、そのフーリエ逆変換を行って得られるインパルス応答は無限に続く (図 (b))。コンピュータ処理ではこれを有限長で打ち切るため、矩形窓を乗じることと同じである (図 (c))。そのフーリエ変換にはリップルが生じることが知られている (図 (d))。また、この有限長を伸ばすためにフィル

タ次数を大きく取りすぎるとギブス現象が生じたり、コストが大きくなるなどの悪影響が生じる。

上記の問題の解決案として窓関数を導入する。これは、図 (c) に対して、両端を滑らかに打ち切る窓関数を乗じる、という考え方である。これにより、遮断特性は犠牲になるもののリップルを抑えることができる。窓関数の種類は、スペクトル分析で述べたものと同じものが用いられる。ある窓関数を乗じた様子を図 (e) に示す。このフィルタの周波数特性は図 (f) に示すようにリップルを低減されている。

Scipy が提供する窓関数には、ハミング、blackman、kaiser などがある（参照：scipy.signal.get\_window）。

### 10.4.2 設計例

FIR フィルタ設計に、scipy.signal.firwin の Type I を用いる。Type I のタップ数は、フィルタ構造の都合上、奇数となる。更なる説明は scipy のドキュメントを参照されたい。この設計は、窓関数を用いたものであり、次のように各種フィルタを設計できる。左辺の b には、FIR フィルタの係数が与えられる。

```
b = scipy.signal.firwin(numtaps, fc_L) # Low-pass
b = scipy.signal.firwin(numtaps, fc_H, pass_zero=False) # High-pass
b = scipy.signal.firwin(numtaps, [fc_L, fc_H], pass_zero=False) # Band-pass
b = scipy.signal.firwin(numtaps, [fc_L, fc_H]) # Band-stop
```

得られたフィルタの周波数応答を見るために次を用いる。

```
w, h = scipy.signal.freqz(b)
```

離散時間系ゆえ、 $w = [0, \pi]$  [rad/sample] が返される。また、h には複素数での周波数応答が返される。

設計例として、フィルタの設計条件を次のとおりとする。信号の周波数成分は次の 2 つがあるとすると（このように述べたとき 2 つのサイン波が重なっており、位相のずれがあったとしても考慮しなくてよい）。

$$f_1, f_2 = 1.0, 5.0 \text{ [Hz]}$$

この信号に観測雑音が重畳している。すなわち、低域に  $f_1$  の信号、中域に  $f_2$  の信号、高域には雑音の周波数成分があると考ええるものとする<sup>\*4</sup>。ここで、次のようなフィルタを設計したいとする。

- $f_1$  の信号だけを抽出したい → ローパスフィルタを設計、カットオフ周波数 (fc\_L) を 2[Hz] とする。
- $f_2$  の信号だけを抽出したい → バンドパスフィルタを設計、3 [Hz] ~ 7 [Hz] ([fc\_L, fc\_H]) の通過域とする。

FIR フィルタ用の窓関数としてハミング窓を用いる。これに加えて、周波数等に関する

<sup>\*4</sup> 雑音に正規乱数を用いると全ての周波数帯域に雑音が存在するが、これは、雑音のパワーが信号のそれに比べて十分小さい場合には、話を簡単にするために、よくこのような仮定をおく。

フィルタ仕様を次のスクリプトのように定めた。注意として、アナログフィルタの場合と異なり、周波数の要件は [Hz] で与えている。

Listing 10.2: DFIL\_FIR\_Design.ipynb

```
fc_L = 2. # cut off frequency [Hz]
fc_H = 6. # upper cut off frequency [Hz]
fsmp = 50. # sampling frequency [Hz]
fnyq = fsmp/2.0 # Nyquist frequency [Hz]

Ntaps = 127 # the number of tap, odd is required
```

ローパスフィルタとバンドパスフィルタの設計をスクリプトで表現したものが次である。

```
from scipy import signal

#Low pass filter
b1 = signal.firwin(numtaps=Ntaps, cutoff=fc_L,
window='hamming', pass_zero=True, fs = fsmp)
w, h = signal.freqz(b1)
gain = 20*np.log10(abs(h))
#Band pass filter
b2 = signal.firwin(numtaps=Ntaps, cutoff=[fc_L, fc_H],
window='hamming', pass_zero=False, fs = fsmp)
w, h = signal.freqz(b2)
gain = 20*np.log10(abs(h))
```

これと異なるパラメータの与え方に次がある。

```
b1 = signal.firwin(numtaps=Ntaps, cutoff=fc_L/fnyq, window='
hamming', pass_zero=True)
```

上記との違いは、パラメータ cutoff に、ナイキスト周波数で規格化した  $fc_L/fnyq$  を与え、パラメータ fs (サンプリング周波数) を無くしたことにある。fs はデフォルトで 2 が与えられるので、ナイキスト周波数は 1 となる。これを基準としたカットオフ周波数が  $fc_L/fnyq$  であり、初めに示した方法と同じ結果を得る。

得られたローパスフィルタとバンドパスフィルタの周波数応答を図 10.16 に示す。図 (a),(b) 共に、上図は縦軸はゲイン [dB]、横軸が [rad/samples] である。下図は縦軸がリニアに表現したゲイン、横軸が [Hz] である。リニアのゲインを見て、カットオフ周波数でゲインは  $1/\sqrt{2}$  を下回っており、フィルタ仕様を満足していることがわかる。また、位相特性は通過域で直線性を示していることがわかる。

設計したフィルタの性能を確かめるため、2つの周波数成分を持つ信号に観測雑音が重畳している観測信号を作成する。

```
frq1, frq2 = 1.0, 5.0
Num = 256 # the number of data
dt = 1/fsmp # sampling time
t = np.linspace(0, (Num-1)*dt, Num)
y1 = np.sin(2*np.pi*frq1*t)
y2 = np.sin(2*np.pi*frq2*t)
y = y1 + y2 + 0.2*np.random.randn(t.size)
```

この観測信号に対して、フィルタリングを次のように行う。



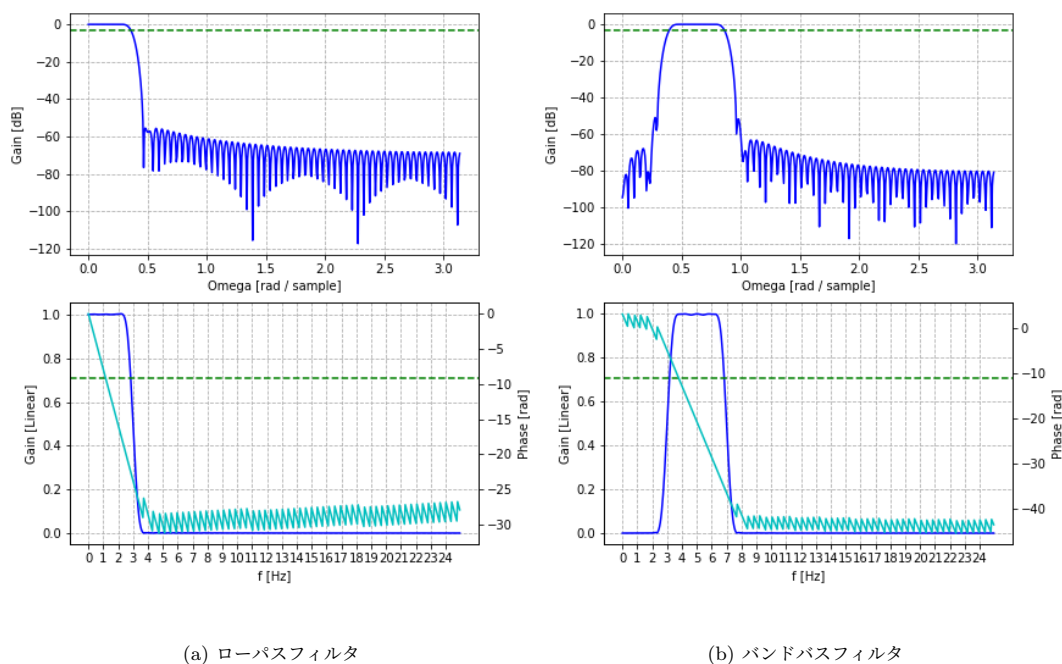


図 10.16: 窓関数を用いた FIR フィルタの周波数特性

```
y_filt1 = signal.lfilter(b1,1,y) # low pass filter
y_filt2 = signal.lfilter(b2,1,y) # band pass filter
```

ローパスフィルタの結果を図 10.17, バンドパスフィルタの結果を図 10.18 に示す。ここに, 図 10.17 の実線 (黒) が観測信号である。線色の確認は Notebook で行ってほしい。

両方の結果とも, フィルタの出力信号 (緑) と通過させたい信号成分のサイン波を破線 (赤) で描いた。ただし, FIR フィルタのタップ数に伴う遅れが出力信号にあるので, サイン波をこれに合わせるように位相をずらして描画している。出力信号は厳密には 1 つの周波数成分から成るサイン波ではなく, もちろん, 振幅も僅かならぐの変動がある。このためフィルタリング結果が良いか否かの評価は, このフィルタの用途や要件を考慮して行われるものである。

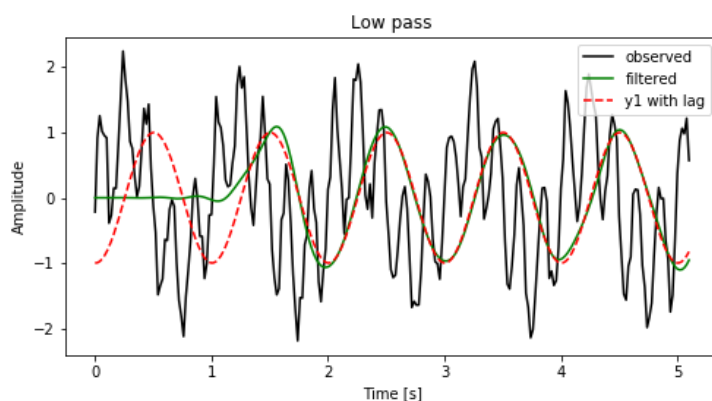


図 10.17: ローパスフィルタのフィルタリング

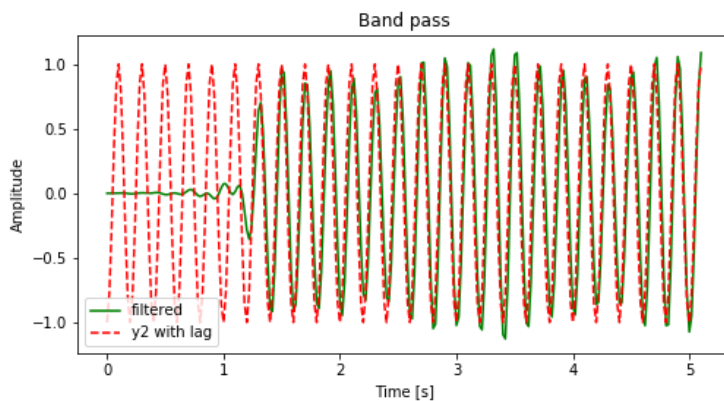


図 10.18: バンドパスフィルタのフィルタリング

## 10.5 IIR フィルタの設計

### 10.5.1 アナログフィルタに基づく方法

IIR フィルタの設計方法のうち、アナログフィルタをプロトタイプとする方法を説明する。これを何らかの離散化を行うことでデジタルフィルタを得る。ここで、離散化は分母分子のある有理多項式を産み出す。すなわち、IIR フィルタが得られることになる。

#### 離散化方法

離散化方法として、インパルス不変変換と双一次変換について触れる。

インパルス不変 (impulse invariance) は、アナログフィルタの伝達関数のインパルス応答（無限に続く）の離散化式を  $z$  変換して求めるという方法である。アナログフィルタ

の特性がナイキスト周波数以下に帯域制限されていないと、アナログフィルタの周波数特性とは異なる特性のフィルタが得られることに注意を要する。

**双一次変換** (bilinear transform) は、次の双一次変換を用いる。

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (10.13)$$

この変換式をアナログフィルタの伝達関数に代入することで、デジタルフィルタの伝達関数を求めることができるため、インパルス応答を経由しなくてもよいという利点がある。

ここで、 $s$  領域の角周波数を  $\Omega$ ,  $z$  領域の角周波数を  $\omega$  とおいたとき、(10.13) 式より次の関係が成り立つ。

$$\Omega = \frac{2}{j\Delta t} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{j\Delta t} \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}} = \frac{2}{j\Delta t} \frac{2j \sin \frac{\omega}{2}}{2 \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2}{\Delta t} \tan \frac{\omega}{2} \quad (10.14)$$

この変換は図 10.19 に示すように、無限の範囲を有限の範囲に対応付けようとしたため、 $\Omega$  が大きい領域での歪が大きい。

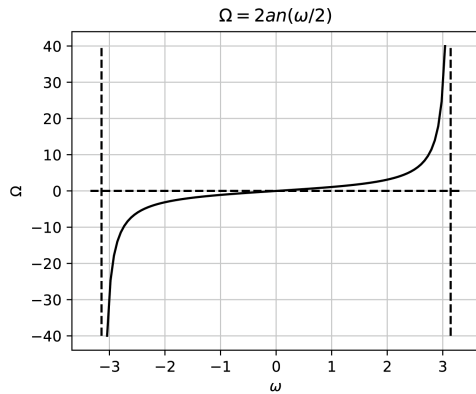


図 10.19: 双一次変換の図 ( $\Delta t = 1$  とおいた)

この歪はカットオフ周波数のズレを導くので、この補正を行う必要がある。

(10.14) 式で、等号が成り立つとき、アナログフィルタとデジタルフィルタの周波数特性は同じとなるので、カットオフ周波数等を予め補正することができる。これを**プリワーピング** (prewarping) という。

ここでは、双一次変換を用いた離散化を用いて IIR フィルタの設計を次に述べる。

### 10.5.2 設計例

IIR の設計例と同じフィルタ仕様の FIR フィルタ設計を行う。ここに、バターワースフィルタを用い、この離散化は双一次変換を用いることとする。設計に用いるパッケージはアナログフィルタのときと同じ `scipy.signal.iirfilter` を用いる。

Listing 10.3: DFIL\_IIR\_Design.ipynb

```

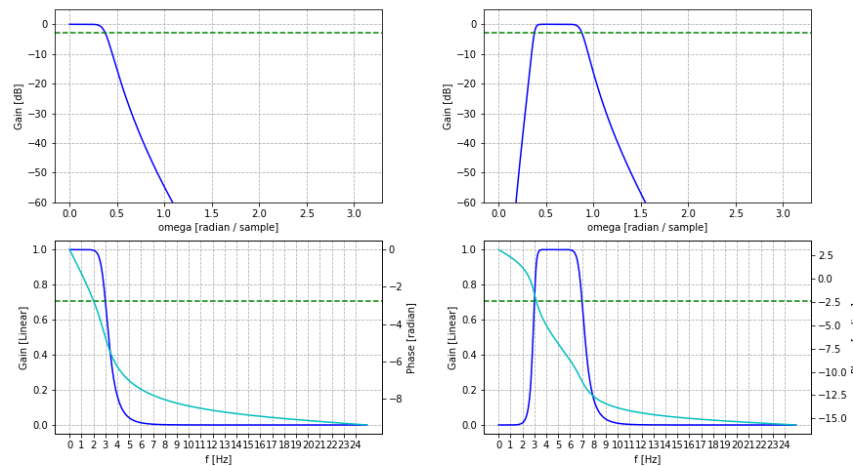
Ndeg = 6 # filter order
b1, a1 = signal.iirfilter(N=Ndeg, Wn=fc.L/fnyq,
                          btype='lowpass', analog=False, ftype='butter')
w, h = signal.freqz(b1, a1)
gain = 20*np.log10(abs(h))

```

#### 【スクリプトの説明】

- 1 行目：フィルタ次数，IIR フィルタより小さいことに注目されたい。
- 2～3 行目： $W_n$  は，デジタルフィルタの場合，0～1 の範囲をとり，1 はナイキスト周波数  $f_{nyq}$  に相当する。このため，カットオフ周波数  $fc.L$  を  $f_{nyq}$  で正規化した値を渡す。 $\text{analog}=\text{False}$  はデジタルフィルタ設計を意味する。左辺の  $b1$ ， $a1$  はそれぞれフィルタ伝達関数の分子，分母の係数が与えられる。

設計した IIR フィルタの周波数特性を図 10.20 に示す。



(a) ローパスフィルタ

(b) バンドパスフィルタ

図 10.20: バタワースフィルタを用いた IIR フィルタの周波数特性

図 (a),(b) 共に，上図と下図はスケールが異なるだけでゲインは同じものをプロットしている。この結果を見ると，カットオフ周波数におけるゲインの条件 ( $-3[\text{dB}]$ ) を満足していることと，位相特性が直線状でないことがわかる。

IIR と同じ雑音が重畳した観測信号のフィルタリングを図 10.21，図 10.22 に示す。IIR と同じように，基準とするサイン波は位相をずらしてフィルタの出力信号の位相に合わせるようにしている。

両方の結果とも，周波成分はよくフィルタリングされているが，若干の変動の混入や振幅の変動が認められ，この評価は使用条件などに依存することとなる。また，タップ数が FIR フィルタよりも比べて少ないので，過渡現象期間が短いことがわかる。

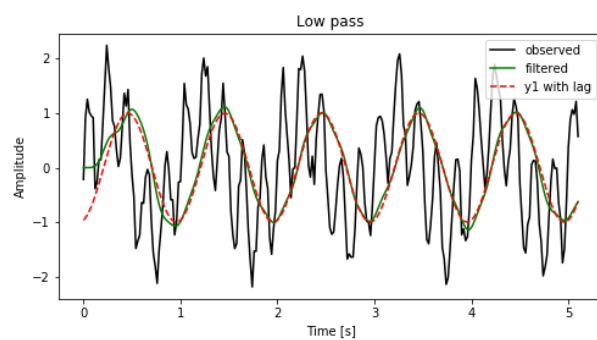


図 10.21: ローパスフィルタのフィルタリング

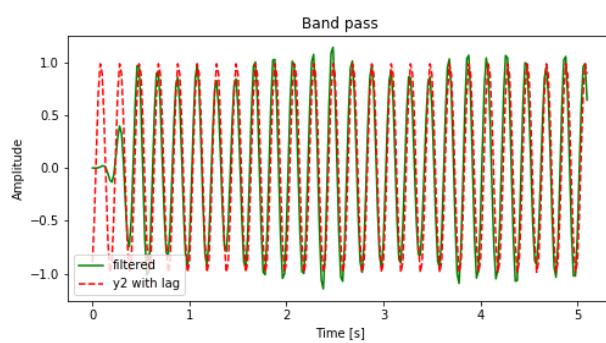


図 10.22: バンドパスフィルタのフィルタリング