

Eigen Decomposition

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

① Find eigenvalues

$(A - \lambda I)$ is singular $\rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$$

② For each eigenvalue λ , find $x \in N(A - \lambda I)$

$$\underline{\lambda_1 = 2}$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \xrightarrow{R_2 = R_2 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pivot column free column

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 + 1 = 0 \\ x_1 = -1 \end{matrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 7$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 + R_1} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pivot column free column

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow -4x_1 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1/4 \rightarrow x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Eigenvectors}$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{7} \leftarrow \text{Eigenvalues}$$

Check

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow 7 \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 7 \end{bmatrix} \checkmark$$