Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.

Von

Rózsa Péter in Budapest.

Einleitung.

1. Unter *rekursiven Funktionen* werden diejenigen zahlentheoretischen Funktionen verstanden, die aus gewissen einfachen Ausgangsfunktionen durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen entstehen. Als Ausgangsfunktionen wählt man zweckmäßig die Funktionen 0 und $n+1$, die schon bei Peano als die Grundbegriffe der Arithmetik dienen (auf die alle übrigen Begriffe zurückgeführt werden); bei verschiedener Wahl des Rekursionsbegriffes kann die Klasse der rekursiven Funktionen verschieden ausfallen.

Hilbert[1]) verwendet zu seinen Untersuchungen über das Kontinuumproblem das folgende Rekursionsschema, das ich als *eingeschachtelte Rekursion* bezeichnen werde:

$$\begin{cases} \varphi(0, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ \varphi(n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(n, b_1, b_2, \ldots, b_r)); \end{cases}$$

wobei der „Term" $\mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}$ aus den Variablen $n, a_1, a_2, \ldots, a_r$, ferner gewissen schon eingeführten rekursiven Funktionen und der Funktion $\varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ — aufgefaßt nur als Funktion der Argumente $a_1, a_2, \ldots, a_r$, d. h. bei Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle — durch Substitutionen aufgebaut ist[2]).

[1]) D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1925), S. 161—190. Daselbst erscheint dieser Rekursionsbegriff als Spezialfall (Rekursion erster Stufe) des allgemeinen Rekursionsbegriffes, bei dem nicht nur zahlentheoretische Funktionen (d. h. solche, deren Argumente und Werte natürliche Zahlen sind), sondern auch beliebige höhere Funktionentypen (Funktionsfunktionen, Funktionsfunktionsfunktionen usw.) durch Rekursion nach einer *Zahlenvariablen* definiert werden können. Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf den einfachsten Funktionentyp, nämlich auf zahlentheoretische Funktionen.

[2]) Die Indizes $b_1, b_2, \ldots, b_r$ von $\mathfrak{f}$ weisen üblicherweise darauf hin, daß $\mathfrak{f}_{b_1 b_2 \ldots b_r}(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, g(n, b_1, b_2, \ldots, b_r))$ von der Funktion g, und nicht von den Argumenten $b_1, b_2, \ldots, b_r$ abhängt; diese dienen vielmehr nur zur Numerierung der „freien" Leerstellen von g, die in $\mathfrak{f}$ durch Einsetzungen „gebunden" werden sollen.

Eine solche Rekursion ist z. B.

$$\begin{cases} \psi(0, a) = a + 1, \\ \psi(n+1, a) = 1 + \psi(n, \psi(n, n+a)). \end{cases}$$

Legt man jenes Rekursionsschema zugrunde, so ist also unter einer rekursiven Funktion eine zahlentheoretische Funktion zu verstehen, die aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ durch eine endliche Kette von Substitutionen und eingeschachtelten Rekursionen aufgebaut werden kann. In diesem Sinne soll im folgenden der Ausdruck „rekursive Funktion" verstanden werden.

2. Es ist klar, daß es abzählbar viele rekursive Funktionen gibt, diese entstehen ja alle derart, daß man, ausgehend von einer endlichen Anzahl von Ausgangsfunktionen, eine endliche Anzahl von Substitutionen und Rekursionen durchführt. So kommt je eine endliche Anzahl solcher Funktionen zustande, bei denen die Gesamtzahl der zu ihnen führenden Substitutionen und Rekursionen 1, 2, 3, ... ist; und abzählbar mal endlich ist tatsächlich abzählbar. Demgegenüber bilden alle zahlentheoretischen Funktionen eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Es müssen also auch nichtrekursive zahlentheoretische Funktionen existieren.

Jedoch könnte man denken, daß man eine solche Funktion gar nicht effektiv angeben kann, oder, daß die Angabe solcher Funktionen Operationen ganz anderer Art erfordert, als die Rekursion.

3. Ackermann[3]) hat dagegen ein effektives Beispiel für eine nichtrekursive Funktion angegeben, die auf eine verhältnismäßig einfache Weise definiert wird: durch eine Rekursion, die gleichzeitig nach mehreren Variablen läuft. Eine solche Definition werde ich eine *mehrfache Rekursion* nennen.

Der Beweis von Ackermann kann wesentlich vereinfacht werden auf Grund der Tatsache, daß die eingeschachtelte Rekursion — wie ich in einer früheren Arbeit[4]) bewiesen habe — auf das speziellere Schema der „primitiven Rekursion" zurückführbar ist, so daß man sich, ohne die Klasse der rekursiven Funktionen einzuengen, darauf beschränken kann, statt der eingeschachtelten Rekursionen nur die viel einfacheren „primitiven Rekursionen" zu betrachten, sogar nur solche, bei denen die zu

---

[3]) W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), S. 118—133.

[4]) R. Péter (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Annalen 110 (1934), S. 612—632. Zitiert im folgenden als „I".

definierende Funktion *zweistellig* ist. Die allgemeine Form einer solchen *primitiven Rekursion* ist die folgende:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a), \\ \varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a)), \end{cases}$$

wobei α und β schon eingeführte rekursive Funktionen sind.

4. Das Beispiel von Ackermann ist zugleich ein Beweis dafür, daß die mehrfache Rekursion aus der Klasse der rekursiven Funktionen hinausführt.

Für diese Tatsache gebe ich in dieser Arbeit zwei weitere Beweise. Der erste beruht auf dem klassischen Diagonalverfahren, indem ich zeigen werde, daß dieses, bei geeigneter Wahl der Anordnung der rekursiven Funktionen, ebenfalls zu einer solchen Funktion führt, die sich durch eine mehrfache Rekursion definieren läßt[5]). Der zweite ist eine Modifikation des Ackermannschen Beispiels, wobei die schon genannten Vereinfachungen vollzogen, und außerdem gewisse Unebenheiten, die im Beweise Ackermanns Schwierigkeiten verursachen, abgeglättet werden.

Der erste Beweis hat den Vorteil, daß der nichtrekursive Charakter der definierten Funktion ohne weiteres klar ist, so daß die einzige Schwierigkeit in der formalen Aufstellung der Definition liegt. Dagegen ist beim zweiten Beweis eben die Definition der Funktion sehr einfach, nur der Beweis, daß sie nichtrekursiv ist, erfordert hier eine eingehende, auf den Gedanken von Ackermann beruhende Überlegung.

5. Wie in meiner Arbeit „I", *setze ich* auch hier *keinerlei besondere Vorkenntnisse*, insbesondere nichts aus der mathematischen Logik, *voraus*. Auch die Kenntnis meiner Arbeit „I" wird im allgemeinen nicht vorausgesetzt. Ich werde außer der bereits erwähnten Zurückführbarkeit der eingeschachtelten Rekursionen auf primitive Rekursionen der Form (1),

---

[5]) Eine andere Abzählung der rekursiven Funktionen hat mir Herr Bernays freundlicherweise mitgeteilt. Bei dieser Abzählung läßt sich die abzählende Funktion (und damit auch die beim Diagonalverfahren entstehende Funktion) durch eine Rekursion zweiter Stufe im Sinne Hilberts definieren, nämlich durch eine Rekursion, bei der neben gewöhnlichen Zahlfunktionen auch die Funktionenfunktion $\varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n)$ auftritt, welche diejenige Funktion von m und n bezeichnet, die aus der Konstanten a und der Funktion $g(b,c,d)$ durch folgende primitive Rekursion entsteht:

$$\begin{cases} \varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, 0) = a, \\ \varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n+1) = g\big(\varrho_{b,c,d}(g(b,c,d), a, m, n), m, n\big). \end{cases}$$

Der Gedanke in dieser Abzählung ist, daß die Rekursion als eine Substitution in ϱ aufgefaßt werden kann.

nur noch die (z. B. in „I" bewiesene) Rekursivität der folgenden Funktionen benutzen:

$$n, \quad n+a, \quad n\cdot a, \quad a^n,$$

ferner

$$\operatorname{sg} n = \begin{cases} 0, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst } 1; \end{cases}$$

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} 0, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst die größte ganze Zahl, die } \leqq \frac{a}{n}; \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} 2, \text{ falls } n = 0, \\ \text{sonst die der Größe nach } n\text{-te ungerade Primzahl;} \end{cases}$$

$$\pi_n(a) = \begin{cases} 0, \text{ falls } a = 0, \\ \text{sonst der Exponent von } p_n \text{ in der Primfaktorenzerlegung von } a; \end{cases}$$

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, \text{ falls } a \leqq b, \\ \text{sonst die Differenz } a - b. \end{cases}$$

6. In § 1 beweise ich, daß man sich auf primitive Rekursionen ohne Parameter beschränken darf, wenn man zu den Ausgangsfunktionen noch gewisse zweistellige Funktionen hinzunimmt. Durch diesen Satz wird die Abzählung der rekursiven Funktionen erleichtert.

Diese Abzählung und das Diagonalverfahren führe ich in § 2 durch. In § 3 folgt endlich das modifizierte Ackermannsche Beispiel.

§ 1.

Zurückführung der Rekursion (1) auf Rekursionen ohne Parameter.

7. Ich beweise zunächst, daß man jede primitive Rekursion von der Form (1) durch Einsetzungen und durch eine Rekursion von der einfacheren Form

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \gamma(n, \varphi(n)) \end{cases} \tag{2}$$

ersetzen kann.

Es sei $\varphi(n, a)$ eine Funktion, die durch eine Rekursion

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a), \\ \varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a)) \end{cases}$$

von der Form (1) aus den Funktionen α und β definiert wird. Ich betrachte die Funktion

$$\psi(n) = \varphi(\pi_0(n), \pi_1(n)).$$

In der Definition von $\varphi(n, a)$ sind die Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ zu unterscheiden. Für $\psi(n)$ bedeutet das — da $\varphi(n, a)$ gleich dem Werte von $\psi(n)$ an der Stelle $2^n \cdot 3^a$ ist — die Unterscheidung der Fälle, wo n ungerade bzw. gerade ist.

Es ist

$$\pi_0(2n+1) = 0; \quad \pi_0(2n) = \pi_0(n) + 1 \quad \text{und} \quad \pi_1(2n) = \pi_1(n)$$

und daher

$$\begin{aligned}\psi(2n+1) &= \varphi(\pi_0(2n+1),\ \pi_1(2n+1)) \\ &= \varphi(0,\ \pi_1(2n+1)) = \alpha(\pi_1(2n+1))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\psi(2n) = \varphi(\pi_0(2n),\ \pi_1(2n)) &= \varphi(\pi_0(n)+1,\ \pi_1(n)) \\ &= \beta(\pi_0(n),\ \pi_1(n),\ \varphi(\pi_0(n),\ \pi_1(n))) \\ &= \beta(\pi_0(n),\ \pi_1(n),\ \psi(n)).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß man $\psi(2n)$ aus $\psi(n)$ gewinnen kann. Wir haben hier einen Spezialfall der Definitionsart, die ich in meiner Arbeit „I" Wertverlaufsrekursion genannt habe. Und ich wende hier auch ein analoges Verfahren an, wie es in „I" bei der Wertverlaufsrekursion angewandt wurde (ohne aber hier dieses Verfahren als bekannt vorauszusetzen). Da der Wert von $\psi(0)$ für unsere Zwecke belanglos ist, führe ich zur Charakterisierung des Wertverlaufs von ψ die folgende Funktion ein:

$$\xi(0) = 1, \quad \xi(n) = p_1^{\psi(1)}\, p_2^{\psi(2)} \ldots p_n^{\psi(n)} \qquad (\text{für } n \neq 0).$$

Dann ist

$$\xi(n+1) = \xi(n) \cdot p_{n+1}^{\psi(n+1)};$$

ist hier $n+1$ ungerade, so ist $\psi(n+1) = \alpha(\pi_1(n+1))$; ist aber $n+1$ gerade, so läßt sich $\psi(n+1)$ wegen $\frac{n+1}{2} \leqq n$ mit Hilfe von $\psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = \psi\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) = \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))$ ausdrücken, und zwar folgendermaßen:

$$\psi(n+1) = \beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))\right).$$

Daß $n+1$ ungerade bzw. gerade ist, kann auch so ausgedrückt werden, daß $\pi_0(n) \neq 0$ bzw. $\pi_0(n+1) \neq 0$; also läßt sich $\xi(n)$ endlich wie folgt definieren:

$$\left\{\begin{aligned} &\xi(0) = 1, \\ &\xi(n+1) = \xi(n) \cdot \Big\{\operatorname{sg}\pi_0(n) \cdot p_{n+1}^{\alpha(\pi_1(n+1))} \\ &\qquad + \operatorname{sg}\pi_0(n+1) \cdot p_{n+1}^{\beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\ \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\xi(n))\right)}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Das ist aber eine Rekursion der Form (2) mit

$$\begin{aligned}\gamma(n, a) = a \cdot \Big\{ & \operatorname{sg} \pi_0(n) \cdot p_{n+1}^{\alpha(\pi_1(n+1))} \\ & + \operatorname{sg} \pi_0(n+1) \cdot p_{n+1}^{\beta\left(\pi_0\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\, \pi_1\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right),\, \pi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(a)\right)} \Big\}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktion $\xi(n)$ läßt sich nun $\psi(n)$ (für $n \neq 0$) folgendermaßen definieren:

$$\psi(n) = \pi_n(\xi(n));$$

endlich gewinnt man $\varphi(n, a)$ aus

$$\varphi(n, a) = \psi(2^n \cdot 3^a).$$

8. Zum Aufbau der Funktion $\gamma(n, a)$ aus $\alpha(a)$ und $\beta(n, a, b)$, ferner zum Übergang von $\xi(n)$ zu $\psi(n)$ und $\varphi(n, a)$ wurden die folgenden Hilfsfunktionen verwendet:

$$0, \quad n+1, \quad \operatorname{sg} n, \quad \left[\frac{n}{2}\right], \quad n+a, \quad n \cdot a, \quad p_n, \quad a^n, \quad \pi_n(a).$$

Dabei lassen sich die sechs ersten dieser Funktionen mit Hilfe der übrigen drei durch Substitutionen und Rekursionen der Form (2) darstellen. In der Tat gewinnt man sukzessive

$$0 = \pi_n(\pi_n(p_n))$$

(oder $0 = \pi_n(n)$);

$$n \cdot a = \pi_0((p_0^n)^a);$$

$$n + a = \pi_0(p_0^n \cdot p_0^a),$$

speziell

$$n + 1 = \pi_0(p_0^n \cdot p_0);$$

wird ferner die Funktion $\overline{\operatorname{sg}}\, n$ durch

$$\begin{cases} \overline{\operatorname{sg}}\, 0 = 1, \\ \overline{\operatorname{sg}}(n+1) = 0 \end{cases}$$

definiert, so ist

$$\operatorname{sg} n = \overline{\operatorname{sg}}(\overline{\operatorname{sg}}\, n);$$

endlich gewinnt man die Funktion $\left[\frac{n}{2}\right]$ wie folgt. Es ist

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für gerades } n \\ 1 & \text{für ungerades } n \end{Bmatrix} = \operatorname{sg} \pi_0(n+1),$$

also gilt für die durch die Rekursion

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \varphi(n) + \operatorname{sg} \pi_0(n+1) \end{cases}$$

definierte Funktion

$$\varphi(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1;$$

definiert man also $\delta(n)$ durch

$$\begin{cases} \delta(0) = 1, \\ \delta(n+1) = n \end{cases}$$

(wobei man n z. B. aus der Funktion $n + a$ durch die Substitution $a = 0$ gewinnt), so hat man

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \delta(\varphi(n)).$$

Werden also statt 0 *und* $n + 1$ *die Funktionen*

$$\text{(A)} \qquad p_n, \quad a^n \quad \textit{und} \quad \pi_n(a)$$

als Ausgangsfunktionen betrachtet[6]), *so läßt sich jede rekursive Funktion durch eine endliche Kette von Rekursionen der Form* (2), *Substitutionen und Umbenennungen der Argumente gewinnen.*

Die Umbenennung der Argumente (eine Operation, die ich im Vorangehenden stillschweigend oft verwendet habe) läßt sich natürlich als Spezialfall der Substitution auffassen, falls man alle nötigen Argumente zu den Ausgangsfunktionen (A) hinzunimmt.

Beschränkt man sich auf die ein- und zweistelligen rekursiven Funktionen, so genügt es, auch Substitutionen nur zur Bildung von höchstens zweistelligen Funktionen zu verwenden. In der Tat sind die Ausgangsfunktionen (A), die zu einer Rekursion der Form (2) benötigte Funktion $\gamma(n, a)$ und die durch diese Rekursion definierte Funktion $\varphi(n)$ sämtlich höchstens zweistellig; es genügt daher zu zeigen, daß eine Kette von Substitutionen, die aus lauter ein- und zweistelligen Funktionen eine ebensolche erzeugt, sich immer in solcher Reihenfolge ausführen läßt, daß alle Zwischenfunktionen ebenfalls höchstens zweistellig ausfallen. Dies folgt aber aus der einfachen Tatsache, daß, falls die Substitutionen von innen nach außen durchgeführt werden, die Zwischenfunktionen kein Argument enthalten können, das nicht auch im Endresultat der Substitutionen figuriert.

Also kann das Resultat für Funktionen der beiden Argumente n und a auch wie folgt ausgesprochen werden:

Jede rekursive Funktion der beiden Argumente n und a läßt sich aus den Ausgangsfunktionen

$$\text{(A')} \qquad n, \quad a, \quad p_n, \quad a^n, \quad \pi_n(a)$$

durch endlichmalige Anwendung der folgenden beiden Schemata gewinnen:

---

[6]) Damit ist freilich nicht gemeint, daß diese Funktionen beim axiomatischen Aufbau der Arithmetik das Ausgangselement 0 und die Funktion $n + 1$ vertreten könnten; diese beiden Grundelemente spielen ja auch auf den linken Seiten der Rekursionsgleichungen eine ausgezeichnete Rolle.

1. Rekursionsschema: *Aus einer Funktion $\gamma(n, a)$ gewinnt man die Funktion $\varphi(n)$, die durch*

$$\left\{\begin{array}{r} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(n+1) = \gamma(n, \varphi(n)) \end{array}\right. \tag{2}$$

definiert wird.

2. Substitutionsschema: *Aus drei Funktionen $\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$ und $\gamma(n, a)$ gewinnt man die Funktion*

$$\varphi(n, a) = \alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)). \tag{3}$$

Dabei sind auch die Funktionen n, a, p_n, ferner die aus dem Rekursionsschema (2) *gewonnenen Funktionen als zweistellig, nämlich als Funktionen von n und a zu betrachten.*

Das Substitutionsschema (3) enthält für $\beta(n, a) = n$ bzw. $\gamma(n, a) = a$ auch die Substitutionen als Spezialfälle, bei denen das eine oder andere Argument ungeändert bleibt.

§ 2.

Das Diagonalverfahren.

9. Das Ergebnis des vorangehenden Paragraphen ermöglicht eine sehr einfache Anordnung aller zweistelligen rekursiven Funktionen in eine abgezählte Reihe

$$\varphi_0(n, a),\ \varphi_1(n, a),\ \ldots,\ \varphi_m(n, a),\ \ldots, \tag{4}$$

wobei eine Funktion auch öfters vorkommen kann. Betrachtet man die m-te Funktion $\varphi_m(n, a) = \varphi(m, n, a)$ als eine Funktion der drei Argumente m, n und a, so gewinnt man eine Funktion, die nicht rekursiv sein kann. Sonst wäre nämlich auch $\varphi_n(n, a)$, also auch $\varphi_n(n, a) + 1$ eine rekursive Funktion, also gäbe es eine feste Zahl m, so daß $\varphi_n(n, a) + 1$ mit $\varphi_m(n, a)$ identisch ist. Das ist aber unmöglich, da die beiden Funktionen für $n = m$ verschiedene Werte besitzen. (Natürlich würde auch eine Abzählung

$$\varphi_0(n),\ \varphi_1(n),\ \ldots,\ \varphi_m(n),\ \ldots$$

der einstelligen rekursiven Funktionen zu einem Beispiel $\varphi_m(n)$ einer nichtrekursiven Funktion führen; es handelt sich aber hier um die effektive Angabe einer nichtrekursiven Funktion, dazu wird also die effektive Aufstellung der genannten Abzählung benötigt. Nun könnte man aber eine Abzählung der einstelligen rekursiven Funktionen, ohne den Umweg über eine Abzählung der zweistelligen rekursiven Funktionen, nur in ziemlich komplizierter Weise ausführen.)

10. Nun werde ich die Anordnung (4) wirklich angeben; es wird sich herausstellen, daß die Funktion $\varphi(m, n, a)$ sich doch auf eine Weise aus rekursiven Funktionen definieren läßt, die der eingeschachtelten Rekursion sehr ähnlich ist, nämlich durch eine zweifache Rekursion (nebst einer Substitution). Dabei wird unter einer *zweifachen Rekursion* eine Definition von der Form

$$(5)\begin{cases}\varphi(0, n, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \alpha(n, a_1, a_2, \ldots, a_r),\\ \varphi(m+1, 0, a_1, a_2, \ldots, a_r)\\ \quad = \mathfrak{f}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}(m, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(m, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r)),\\ \varphi(m+1, n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r)\\ \quad = \mathfrak{g}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}(m, n, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(m, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r), \varphi(m+1, n, b_1, b_2, \ldots, b_r))\end{cases}$$

verstanden, wobei die Schreibweise $\mathfrak{f}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}$, $\mathfrak{g}_{b_0 b_1 b_2 \ldots b_r}$ die entsprechende Bedeutung hat wie in der Einleitung. (Die Indizes zeigen auch hier diejenigen Leerstellen an, die durch Einsetzungen gebunden werden sollen; die übrigen Argumente von φ, nämlich m, $m+1$, n, sollen dabei festgehalten werden.) Ich sage auch, die Funktion $\varphi(m, n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ sei durch die zweifache Rekursion (5) aus der Funktion α und den in den Termen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ außer φ auftretenden Funktionen definiert.

Ich beginne die Abzählung (4) mit den Ausgangsfunktionen (A′), ich setze also

$$\varphi_0(n, a) = n,\quad \varphi_1(n, a) = a,\quad \varphi_2(n, a) = p_n,\quad \varphi_3(n, a) = a^n,\quad \varphi_4(n, a) = \pi_n(a).$$

Für $m > 4$ definiere ich durch „Rekursion“ (natürlich nicht im bisher gebrauchten Sinne dieses Wortes) in bezug auf m, welche Funktion als $\varphi_m(n, a)$ gelten soll. Es sei also $\varphi_k(n, a)$ für $k < m$ bereits bekannt; dann definiere ich $\varphi_m(n, a)$ als die aus der Funktion $\varphi_{\pi_0(m)}(n, a)$ durch das Rekursionsschema (2), oder die aus den Funktionen $\varphi_{\pi_1(m)}(n, a)$, $\varphi_{\pi_2(m)}(n, a)$, $\varphi_{\pi_3(m)}(n, a)$ durch das Substitutionsschema (3) entstandene Funktion, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Dann enthält die Folge (4) zufolge des zu Ende von Nr. 8 ausgesprochenen Satzes jede zweistellige rekursive Funktion mindestens einmal. Um diese Behauptung einfacher beweisen zu können, zeige ich etwas mehr, nämlich daß jede zweistellige rekursive Funktion in der Folge (4) mit einem Index > 4 auftritt (dies sagt nur für die Ausgangsfunktionen (A′) mehr aus, als die ursprüngliche Behauptung). In der Tat gilt das für die Ausgangsfunktionen (A′), da für $m = 0, 1, 2, 3$ und 4 $m' = 3^m \cdot 7$ gewiß größer als 4 ist, also $\varphi_{m'}(n, a)$ aus $\varphi_m(n, a)$ durch die „identische Substitution“ entsteht (nämlich durch Einsetzung von n für n und a für a), also mit diesem identisch ist. Ist ferner die Behauptung für die Funktion $\gamma(n, a)$ richtig, ist also für ein $k > 4$ $\gamma(n, a) = \varphi_k(n, a)$, so gilt für die aus $\gamma(n, a)$ mit Hilfe des Rekursionsschemas (2) entstandene Funktion: $\varphi(n) = \varphi_{2^k}(n, a)$. Enthält endlich die Folge (4) die Funktionen

$\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$ und $\gamma(n, a)$ mit einem Index > 4, ist also für gewisse $i, j, k > 4$

$$\alpha(n, a) = \varphi_i(n, a), \quad \beta(n, a) = \varphi_j(n, a), \quad \gamma(n, a) = \varphi_k(n, a),$$

so gilt

$$\alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)) = \varphi_{3^i \cdot 5^j \cdot 7^k}(n, a),$$

also ist auch die aus α, β, γ mit Hilfe des Substitutionsschemas (3) entstandene Funktion in der Folge (4) enthalten.

11. Die Definition der Funktion $\varphi_m(n, a) = \varphi(m, n, a)$ (ich verwende die letztere Schreibweise, um den wichtigen Umstand, daß auch m als Argument gilt, hervorzuheben) lautet explizit aufgeschrieben:

$$(6)\quad \varphi(m, n, a) = \begin{cases} n, \text{ falls } m = 0, \\ a, \quad ,, \quad m = 1, \\ p_n, \quad ,, \quad m = 2, \\ a^n, \quad ,, \quad m = 3, \\ \pi_n(a), \quad ,, \quad m = 4, \\ 1, \quad ,, \quad m > 4, \ m \text{ gerade}, \ n = 0, \\ \varphi(\pi_0(m), n-1, \varphi(m, n-1, a)), \text{ falls } m > 4, m \text{ gerade}, n > 0, \\ \varphi\big(\pi_1(m), \ \varphi(\pi_2(m), n, a), \ \varphi(\pi_3(m), n, a)\big), \\ \quad \text{falls } m > 4, \ m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Definition ist insofern einer zweifachen Rekursion ähnlich, als $\varphi(m, n, a)$ mittels gewisser Werte $\varphi(m', n', a')$ dieser Funktion ausgedrückt wird, wobei entweder $m' < m$, oder $m' = m$, $n' < n$ ist. In der Tat werde ich die Definition (6) auf eine zweifache Rekursion von der Form (5) nebst einer Substitution zurückführen. Dies wird dieselbe Methode erfordern, wie die Zurückführung einer Wertverlaufsrekursion auf eine primitive Rekursion in meiner Arbeit „I", da ja (6) sich als eine zweifache Wertverlaufsrekursion auffassen läßt.

Vor allem drücke ich die Fallunterscheidungen in (6) in einer Formel aus. Zu diesem Zweck benötigt man außer den bisher gebrauchten Funktionen die Hilfsfunktion

$$\iota(m, n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } m = n, \\ 0, \quad ,, \quad m \neq n; \end{cases}$$

der rekursive Charakter derselben läßt sich z. B. aus der Darstellung

$$\iota(m, n) = \overline{\mathrm{sg}}((m \dot{-} n) + (n \dot{-} m))$$

erkennen. Setzt man

$$\alpha(m, n, a, b, c) = a \cdot \iota(m, 1) + p_n \cdot \iota(m, 2) + a^n \cdot \iota(m, 3) + \pi_n(a) \cdot \iota(m, 4)$$
$$+ \mathrm{sg}(m \dot{-} 4)(b \cdot \mathrm{sg}\, \pi_0(m) + c \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, \pi_0(m)),$$

dann gilt für die rekursive Funktion $\alpha(m, n, a, b, c)$

$$\alpha(m, n, a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{falls } m = 1, \\ p_n, & \quad,, \quad m = 2, \\ a^n, & \quad,, \quad m = 3, \\ \pi_n(a), & \quad,, \quad m = 4, \\ b, & \quad,, \quad m > 4, \ m \text{ gerade}, \\ c, & \quad,, \quad m > 4, \ m \text{ ungerade}, \end{cases}$$

so daß (6) sich einfacher durch

$$\varphi(m,n,a) = \begin{cases} n, \text{ falls } m = 0, \\ \alpha\Big(m, n, a, 1, \varphi\big(\pi_1(m), \varphi(\pi_2(m), n, a), \varphi(\pi_3(m), n, a)\big)\Big), \\ \qquad\qquad \text{falls } m > 0, \ n = 0, \\ \alpha\Big(m, n, a, \varphi\big(\pi_0(m), \ n-1, \varphi(m, n-1, a)\big), \\ \qquad \varphi\big(\pi_1(m), \varphi(\pi_2(m), n, a), \varphi(\pi_3(m), n, a)\big)\Big), \\ \qquad\qquad \text{falls } m > 0, \ n > 0 \end{cases}$$

ausdrücken läßt. Setzt man also weiter

$$\alpha(m+1, 0, a, 1, c) = \beta(m, a, c),$$
$$\alpha(m+1, n+1, a, b, c) = \gamma(m, n, a, b, c),$$

dann sind β und γ ebenfalls rekursive Funktionen und man gewinnt:

$$(7)\begin{cases} \varphi(0, n, a) = n, \\ \varphi(m+1, 0, a) = \beta\Big(m, a, \varphi\big(\pi_1(m+1), \varphi(\pi_2(m+1), 0, a), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(\pi_3(m+1), 0, a)\big)\Big), \\ \varphi(m+1, n+1, a) = \gamma\Big(m, n, a, \varphi\big(\pi_0(m+1), n, \varphi(m+1, n, a)\big), \\ \qquad \varphi\big(\pi_1(m+1), \varphi(\pi_2(m+1), n+1, a), \varphi(\pi_3(m+1), n+1, a)\big)\Big). \end{cases}$$

12. Der Wertverlauf von φ läßt sich durch die Funktion

$$\psi(m, n, a) = \prod_{i=0}^{m} p_i^{\varphi(i, n, a)}$$

charakterisieren; in der Tat ist für $i = 0, 1, 2, \ldots, m$

$$(8) \qquad \varphi(i, n, a) = \pi_i(\psi(m, n, a)).$$

Nun ist

$$\psi(0, n, a) = 2^n,$$
$$\psi(m+1, 0, a) = \psi(m, 0, a) \cdot p_{m+1}^{\varphi(m+1, 0, a)},$$
$$\psi(m+1, n+1, a) = \psi(m, n+1, a) \cdot p_{m+1}^{\varphi(m+1, n+1, a)}.$$

Ich setze hier statt $\varphi(m+1, 0, a)$ bzw. $\varphi(m+1, n+1, a)$ ihre Werte aus (7) ein; dabei drücke ich aber die rechts auftretenden Werte von φ mit Hilfe von (8) durch $\psi(m, n, a)$ aus. Wegen $\pi_k(m+1) \leqq m$ ist

$$\begin{aligned}
&\varphi\big(\pi_1(m+1),\ \varphi(\pi_2(m+1), n, a),\ \varphi(\pi_3(m+1), n, a)\big)\\
&= \pi_{\pi_1(m+1)}\Big(\psi\big(m, \pi_{\pi_2(m+1)}(\psi(m, n, a)),\ \pi_{\pi_3(m+1)}(\psi(m, n, a))\big)\Big)\\
&= \mu_1\Big(m, \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, n, a)),\ \mu_3(m, \psi(m, n, a))\big)\Big),
\end{aligned}$$

falls man

$$\mu_k(m, b) = \pi_{\pi_k(m+1)}(b)$$

setzt; ferner ist

$$\begin{aligned}
\varphi(\pi_0(m+1), n, \varphi(m+1, n, a)) &= \pi_{\pi_0(m+1)}\Big(\psi\big(m, n, \pi_{m+1}(\psi(m+1, n, a))\big)\Big)\\
&= \mu_0\Big(m, \psi\big(m, n, \nu(m, \psi(m+1, n, a))\big)\Big)
\end{aligned}$$

mit

$$\nu(m, b) = \pi_{m+1}(b).$$

Setzt man also

$$\begin{aligned}
\varkappa(m, a, b, c) &= b \cdot p_{m+1}^{\beta(m, a, \mu_1(m, c))},\\
\lambda(m, n, a, b, c, d) &= b \cdot p_{m+1}^{\gamma(m, n, a, \mu_0(m, c), \mu_1(m, d))},
\end{aligned}$$

so gewinnt man für ψ die zweifache Rekursion

$$(9)\begin{cases}
\psi(0, n, a) = 2^n,\\
\psi(m+1, 0, a) = \varkappa\Big(m, a, \psi(m, 0, a), \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, 0, a)), \mu_3(m, \psi(m, 0, a))\big)\Big),\\
\psi(m+1, n+1, a) = \lambda\Big(m, n, a, \psi(m, n+1, a), \psi\big(m, n, \nu(m, \psi(m+1, n, a))\big),\\
\qquad\qquad \psi\big(m, \mu_2(m, \psi(m, n+1, a)), \mu_3(m, \psi(m, n+1, a))\big)\Big),
\end{cases}$$

ersichtlich von der Form (5); die dabei auftretenden Funktionen 2^n, $\varkappa$, λ, μ_2, μ_3, ν sind sämtlich rekursiv.

Aus ψ gewinnt man φ durch

$$\varphi(m, n, a) = \pi_m(\psi(m, n, a)).$$

Dies zeigt, daß auch ψ nicht mehr rekursiv sein kann; wir sind auf diese Weise zu dem zuerst von Ackermann bewiesenen Satz gelangt, daß *die zweifache Rekursion aus der Klasse der rekursiven Funktionen hinausführt.*

Ich erwähne noch, daß man die Methode des § 1 auf die Definition (9) anwenden kann und so die Funktion φ auch durch eine zweifache Rekursion *ohne Parameter*, also von der Form

$$\begin{cases}
\xi(0, n) = \alpha(n),\\
\xi(m+1, 0) = \mathfrak{f}_a(m, \xi(m, a)),\\
\xi(m+1, n+1) = \mathfrak{g}_a(m, \xi(m, a), \xi(m+1, n)),
\end{cases}$$

nebst einigen Substitutionen definieren kann.

§ 3.

Das Ackermannsche Beispiel.

13. Das von Ackermann zur Aufstellung einer nichtrekursiven Funktion angewandte Verfahren kann als ein modifiziertes Diagonalverfahren aufgefaßt werden. Statt — wie ich es im vorigen Paragraphen getan habe — alle zweistelligen rekursiven Funktionen in einer Reihe

$$\varphi_0(n, a),\ \varphi_1(n, a), \ldots, \varphi_m(n, a), \ldots \tag{4}$$

derart anzuordnen, daß jede Funktion aus gewissen vorangehenden Funktionen entweder durch Rekursion, oder durch Substitution entsteht, definiert Ackermann eine Reihe

$$\psi_0(n, a),\ \psi_1(n, a), \ldots, \psi_m(n, a), \ldots \tag{10}$$

von Funktionen durch sukzessive Iterationen in bezug auf n. Da eine Iteration das Wachstum einer Funktion stärker beeinflußt, als eine Rekursion oder eine Substitution, so majorisieren die Funktionen (10) — bei geeigneter Wahl der Anfangsfunktion $\psi_0(n, a)$ und der Anfangswerte $\psi_m(0, a)$ der Iteration — der Reihe nach die Funktionen (4). Jedenfalls gibt es zu jeder zweistelligen rekursiven Funktion $\varphi(n, a)$ ein m derart, daß für alle n und a

$$\varphi(n, a) < \psi_m(n, a) \tag{11}$$

besteht. Daher kann $\psi_m(n, a)$ als Funktion von m, n, a nicht rekursiv sein; sonst wäre die zur Folge (10) (als Folge von Funktionen des Argumentes n betrachtet) gehörige „Diagonalfunktion" $\psi_n(n, a)$ ebenfalls rekursiv; es müßte also durchwegs für ein gewisses m

$$\psi_n(n, a) < \psi_m(n, a)$$

bestehen, was für $n = m$ nicht zutrifft.

14. Das von Ackermann durch dieses Verfahren konstruierte Beispiel lautet im einzelnen, bis auf Abänderungen in der Bezeichnung, wie folgt: zum Ausgang wählt er die Funktionen

$$\psi_0(n, a) = n + a, \quad \psi_1(n, a) = n \cdot a, \quad \psi_2(n, a) = a^n;$$

für $m \geqq 2$ definiert er $\psi_{m+1}(n, a)$ durch die Rekursion

$$\begin{cases} \psi_{m+1}(0, a) = a, \\ \psi_{m+1}(n+1, a) = \psi_m(\psi_{m+1}(n, a), a); \end{cases}$$

d. h. $\psi_{m+1}(n, a)$ ist die n-te Iterierte der Funktion $\psi_m(n, a)$ in bezug auf n. Statt diese Funktionen mit den zweistelligen rekursiven Funktionen zu vergleichen, setzt er $a = n$ und verwendet die so entstehenden Funktionen $\psi_m(n, n)$ zur Majorisierung aller einstelligen rekursiven Funktionen.

So gelangt er zur Funktion $\psi_n(n, n)$, welche also den Wert darstellt, den für die Argumente n, n die n-te der Operationen ergibt, die man ausgehend von der Addition durch Iterationen gewinnt, als ziemlich frappantem Beispiel einer nichtrekursiven einstelligen Funktion.

Beim Beweis von Ackermann machen zwei Umstände gewisse technische Schwierigkeiten. Erstens legt er das allgemeine eingeschachtelte Rekursionsschema zugrunde, so daß er auch einen — nicht leicht zu erbringenden — Beweis der Tatsache benötigt, daß auch diese allgemeinere Art der Rekursion sich durch (eventuell mehrere nacheinander auszuführende) Iterationen majorisieren läßt. Diese Schwierigkeit kann man an Hand des Hauptergebnisses meiner Arbeit „I" überwinden, indem man sich auf primitive Rekursionen (nach Nr. 8 sogar auf solche ohne Parameter) beschränken kann. Dies würde schon eine wesentliche Vereinfachung bedeuten. Zweitens verursachen bei Ackermann gewisse Unebenheiten, die in den zum Beweis nötigen Monotonitätseigenschaften der Funktionen (10) auftreten, Schwierigkeiten. Demzufolge kann man die der Ungleichung (11) entsprechende Majoranteneigenschaft der Ackermannschen Funktionen nur für hinreichend große Werte der Argumente beweisen. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen und damit zu einem weiter vereinfachten Beweis zu gelangen, glätte ich jene Unebenheiten durch eine vorteilhaftere Wahl der Anfangswerte der Iterationen ab. Das so konstruierte Beispiel ist mit dem Ackermannschen zwar nicht identisch, stimmt aber mit diesem in allen wesentlichen Eigenschaften überein.

Endlich wird das Verfahren einfacher, wenn statt zweistelliger Funktionen $\psi_m(n, a)$ einstellige Funktionen $\varphi_m(n)$ iteriert werden; das kann man z. B. so erreichen, daß man anstatt von $\psi_0(n, a) = n + a$ von $\varphi_0(n) = 2n$ ausgeht.

15. Zur Herstellung des Beispiels sind Funktionen $\varphi_m(n)$ mit folgenden Monotonitätseigenschaften notwendig:

a) $\varphi_m(n) > n$ (und folglich $\varphi_m(n) \geqq 1$),

b) für $n < n'$ ist $\varphi_m(n) < \varphi_m(n')$,

c) $\varphi_m(n)$ wächst auch in bezug auf m monoton, sogar ist $\varphi_m(n)$ gegenüber dem Wachsen von m mindestens so „empfindlich", wie gegenüber dem Wachsen von n, d. h.

$$\varphi_{m+1}(n) \geqq \varphi_m(n+1).$$

(Aus dieser Ungleichung samt b) folgt, daß $\varphi_{m+1}(n) > \varphi_m(n)$).

Die Eigenschaft c) besteht für $n = 0$ nicht, wenn man von der Definition $\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(0)$ — welche der Ackermannschen Definition $\psi_{m+1}(0, a)$

$= a = \psi_m(0, a)$ entspricht — ausgeht. Statt dessen wähle ich die Definition $\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1)$ zum Ausgang.

Die Funktion $\varphi_0(n) = 2n$, welche der Ackermannschen Ausgangsfunktion $\psi_0(n, a) = n + a$ entspricht, genügt für $n = 0$ der Bedingung a) nicht. Statt ihrer nehme ich die ebenfalls lineare und den Bedingungen a), b) genügende Funktion $2n + 1$ als Ausgangsfunktion.

Also definiere ich die Funktionen $\varphi_m(n)$ wie folgt:

$$\varphi_0(n) = 2n + 1$$

und für alle m

$$\begin{cases} \varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1) \\ \varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)). \end{cases}$$

Ich beweise, daß $\varphi_m(n)$ für alle m den Bedingungen a), b) und c) genügt.

a) $$\varphi_m(n) > n, \text{ d. h. } \varphi_m(n) \geqq n + 1.$$

Dies besteht für $\varphi_0(n)$; angenommen, daß es schon für m besteht, kann man auf $m + 1$ so schließen:

$$\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1) \geqq 2 \geqq 0 + 1$$

und falls a) für $\varphi_{m+1}(n)$ schon besteht, so besteht es auch für $\varphi_{m+1}(n + 1)$, da

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) \geqq \varphi_{m+1}(n) + 1 \geqq (n + 1) + 1.$$

b) Die Monotonität in bezug auf n ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaft a), da sie für $\varphi_0(n)$ besteht und für alle m

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) > \varphi_{m+1}(n).$$

c) $\varphi_{m+1}(n) \geqq \varphi_m(n + 1)$; denn

$$\varphi_{m+1}(0) = \varphi_m(1),$$

und wenn c) für n schon erfüllt ist, so kann man auf $n + 1$ folgendermaßen schließen:

$$\varphi_{m+1}(n+1) = \varphi_m(\varphi_{m+1}(n)) \geqq \varphi_m(\varphi_m(n+1)),$$

und hier ist nach a) $\varphi_m(n + 1) \geqq n + 2$, also nach b)

$$\varphi_{m+1}(n+1) \geqq \varphi_m(n + 2).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ich werde im folgenden die Eigenschaften a), b) und c) der Funktionen $\varphi_m(n)$ anwenden, ohne diese jedesmal anzuführen.

16. Nun behaupte ich, daß es zu einer jeden einstelligen rekursiven Funktion $\alpha(n)$ ein solches m gibt, daß $\varphi_m(n) > \alpha(n)$ für alle n.

Zu diesem Zwecke beweise ich die folgenden Hilfssätze:

1. Ist $\alpha(n, a)$ eine der Funktionen (A′), (diese betrachte ich auch hier alle als zweistellig), so gibt es ein solches m, daß für alle n, a

$$\alpha(n, a) < \varphi_m(\max(n, a)).$$

2. Gibt es zu den Funktionen $\alpha(n, a)$, $\beta(n, a)$, $\gamma(n, a)$ solche i, j, k, daß für alle n, a

$$\alpha(n, a) < \varphi_i(\max(n, a)),$$
$$\beta(n, a) < \varphi_j(\max(n, a))$$

und

$$\gamma(n, a) < \varphi_k(\max(n, a)),$$

so gibt es auch ein solches m, daß für alle n, a

$$\alpha\big(\beta(n, a), \gamma(n, a)\big) < \varphi_m(\max(n, a)).$$

3. Gibt es endlich zur Funktion $\gamma(n, a)$ ein solches i, daß für alle n, a

$$\gamma(n, a) < \varphi_i(\max(n, a)),$$

so gibt es auch zur Funktion $\psi(n)$, die durch die Rekursion

$$\begin{cases} \psi(0) = 1, \\ \psi(n+1) = \gamma(n, \psi(n)) \end{cases}$$

definiert wird, ein solches m, daß für alle n

$$\psi(n) < \varphi_m(n).$$

Beweis von 1.: Wegen $n \leqq \max(n, a)$, $\pi_n(a) \leqq a \leqq \max(n, a)$ und $\varphi_0(\max(n, a)) = 2\max(n, a) + 1 > \max(n, a)$ gilt die Behauptung mit $m = 0$ für die beiden ersten und die letzte der Funktionen (A′).

Ferner verifiziert man durch Induktion nach n, daß

$$\varphi_1(n) = 2^{n+2} - 1.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$p_n < \varphi_2(\max(n, a)).$$

Da nämlich p_n von a nicht abhängt und [7] $p_n \leqq 2^{2^n}$, ist nur zu beweisen, daß

$$2^{2^n} < \varphi_2(n).$$

Dies besteht für $n = 0$, da

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(1) = 2^{1+2} - 1 = 7 > 2^{2^0}.$$

[7] Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (1925), Abschnitt VIII, Kap. 2, Aufg. 94, S. 133, ferner Lösung auf S. 342. Dort bedeutet zwar p_n die der Größe nach n-te Primzahl (also $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$); der Beweis läßt sich aber ohne weiteres auf die hier verwendete Definition von p_n übertragen.

Angenommen, daß schon

$$\varphi_2(n) > 2^{2^n},$$

so ist

$$\varphi_2(n+1) = \varphi_1(\varphi_2(n)) > \varphi_1(2^{2^n}) = 2^{2^{2^n}+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2^{2^n}} - 1 > 2^{2^{2^n}},$$

und da $2^a > a$, also $2^n \geqq n+1$, so ist

$$\varphi_2(n+1) > 2^{2^{n+1}}.$$

Folglich ist für alle n

$$\varphi_2(n) > 2^{2^n},$$

q. e. d.

Daraus ergibt sich auch, daß

$$a^n < \varphi_2(\max(a, n)).$$

Es ist nämlich für alle $a \geqq 4$, wie man durch vollständige Induktion nachweist,

$$a^2 \leqq 2^a;$$

hieraus, und aus $a < 2^a$ folgt für $a \geqq 4$

$$a^a \leqq 2^{a^2} \leqq 2^{2^a},$$

und dieses gilt (falls $0^0 = 1$ definiert wird) auch für $a < 4$. Also ist

$$a^n \leqq \max(a, n)^{\max(a, n)} \leqq 2^{2^{\max(a, n)}} < \varphi_2(\max(a, n)).$$

B e w e i s v o n 2.: Bestehen die Annahmen und ist noch

$$m = 2 + \max(i, j, k),$$

so ist wegen $i \leqq m-2$, $\max(j, k) \leqq m - 2 < m - 1$,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(n, a), \gamma(n, a)) &< \varphi_i(\max(\beta(n, a), \gamma(n, a))) \\ &< \varphi_i\Big(\max\big(\varphi_j(\max(n, a)), \ \varphi_k(\max(n, a))\big)\Big) \\ &= \varphi_i(\varphi_{\max(j, k)}(\max(n, a))) \\ &< \varphi_{m-2}(\varphi_{m-1}(\max(n, a))) = \varphi_{m-1}(\max(n, a) + 1) \\ &\leqq \varphi_m(\max(n, a)).\end{aligned}$$

B e w e i s v o n 3.: Bestehen die Annahmen und ist noch

$$m = i + 1,$$

so ist erstens

$$\psi(0) = 1 = \varphi_0(0) < \varphi_m(0).$$

Angenommen, daß schon

$$\psi(n) < \varphi_m(n),$$

so ist wegen $\varphi_m(n) > n$

$$\begin{aligned}\psi(n+1) = \gamma(n, \psi(n)) &< \varphi_i(\max(n, \psi(n))) \leqq \varphi_i(\max(n, \varphi_m(n))) \\ &= \varphi_i(\varphi_m(n)) = \varphi_{m-1}(\varphi_m(n)) = \varphi_m(n+1).\end{aligned}$$

Folglich ist für alle n

$$\psi(n) < \varphi_m(n),$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Gemäß dem Satze, welcher am Ende von Nr. 8 ausgesprochen wurde, folgt aus 1., 2. und 3., daß es zu jeder zweistelligen rekursiven Funktion $\alpha(n, a)$, (die nicht notwendig von a wirklich abzuhängen braucht), eine Zahl m gibt[8]), derart, daß für alle n und a

$$\alpha(n, a) < \varphi_m(\max(n, a))$$

besteht. Handelt es sich um eine einstellige rekursive Funktion $\alpha(n)$, so kann hierbei a beliebig, z. B. $a = 0$ gewählt werden, und man gewinnt, wie behauptet, ein m derart, daß für alle n

$$\alpha(n) < \varphi_m(n).$$

Andererseits[9]) ist bei beliebigem m für $n > m$

$$\varphi_n(n) > \varphi_m(n),$$

also kann $\varphi_n(n)$ nicht zu den rekursiven Funktionen gehören.

17. Somit kann auch $\varphi_m(n)$ als Funktion von m und n nicht rekursiv sein. Sei $\varphi_m(n) = \varphi(m, n)$, so lautet die Definition von $\varphi(m, n)$:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(0, n) &= 2n + 1, \\ \varphi(m+1, 0) &= \varphi(m, 1), \\ \varphi(m+1, n+1) &= \varphi(m, \varphi(m+1, n)), \end{aligned}\right.$$

und das ist eine zweifache Rekursion.

Es wäre die nähere Untersuchung von solchen mehrfachen Rekursionen interessant, z. B. vom Gesichtspunkte des Zusammenhanges mit den Hilbertschen höheren Funktionentypen (Ackermann[3]) hat nämlich gezeigt, daß

[8]) Der obige Beweis zeigt, wie man ein solches m zu einer gegebenen rekursiven Funktion $\alpha(n, a)$ wirklich angeben kann. Entsteht die Funktion $\alpha(n, a)$ im Sinne des zu Ende von Nr. 8 ausgesprochenen Satzes durch r Rekursionen (2) und s Substitutionen (3) aus den Ausgangsfunktionen (A′), gelangen dabei p_n und a'' insgesamt t-mal zur Anwendung, so sieht man leicht ein, daß $m = r + 2s + 2t$ gesetzt werden kann. Daraus folgt durch eine grobe Abschätzung, daß man für m auch den Index von $\alpha(n, a)$ in der Abzählung (4) nehmen kann.

[9]) Daraus folgt auch, daß schon $\varphi_m(0)$ nichtrekursiv ist. Sonst wäre nämlich auch $\varphi_{2m}(0)$ rekursiv, also gäbe es ein k derart, daß für jedes m $\varphi_{2m}(0) < \varphi_k(m)$ wäre. Das kann aber für $m = k$ nicht zutreffen, da infolge der Eigenschaft c) die Ungleichung $\varphi_{2k}(0) \geqq \varphi_k(k)$ besteht. In entsprechender Weise beweist man, daß $\varphi_m(n)$ für kein festes n eine rekursive Funktion von m darstellt. Andererseits ist $\varphi_m(n)$ offenbar für jedes feste m eine rekursive Funktion von n. Also rührt die Nichtrekursivität der zweistelligen Funktion $\varphi_m(n)$ sozusagen von ihrer Abhängigkeit von m her.

sein Beispiel auf der „zweiten Stufe" durch regelmäßige, d. h. nur nach einer Variablen fortschreitende Rekursionen definierbar ist); ferner auch von dem Gesichtspunkte, daß das Diagonalverfahren auch auf die so definierten Funktionen anwendbar ist; es fragt sich, welche weiteren Modifikationen des Rekursionsbegriffes geeignet erscheinen, um über die durch mehrfache Rekursionen definierten Funktionen hinauszukommen, und wie sich dieses Verfahren ins Transfinite fortsetzen läßt. Auch wäre noch zu untersuchen, welche Spezialfälle der mehrfachen Rekursion sich noch immer auf primitive Rekursionen zurückführen lassen. Auf diese Fragen will ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Zum Schluß möchte ich den Herren P. Bernays (Zürich) und L. Kalmár (Szeged) auch hier für ihre wertvollen Ratschläge meinen Dank aussprechen.

(Eingegangen am 15. 7. 1934.)