A. Yu. Lemin, On the stability of the property of a space being isosceles, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1984, Volume 39, Issue 5(239), 249–250

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА БЫТЬ РАВНОБЕДРЕННЫМ

А. Ю. Лемин

Равнобедренные метрические пространства введены (под названием ультраметрических) в [1], как пространства, где выполнена усиленная аксиома треугольника: $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y))$. Их топология описана в [2]: пространство гомеоморфно равнобедренному тогда и только тогда, когда оно метризуемо и нульмерно. Более того, всякое нульмерное метрическое пространство можно непрерывно отобразить на равнобедренное так, что обратное отображение будет равномерно непрерывным (см. [3]). Равнобедренные пространства играют большую роль во многих разделах математики: в теории чисел, теории нормированных полей, ТФКП, p-адическом анализе,— и заслуживают особого изучения. Поэтому в [3] они описаны более детально — с точностью до эквиморфизмов, а в [4] — до изометрий. В настоящей работе мы показываем, что свойство пространства быть равнобедренным устойчиво по отношению почти ко всем стандартным операциям топологии; взятию суммы, произведения, переходу к подпространству, гиперпространству, предельному, функциональному. пространству и т. д.

1. *Если (X, d) равнобедренно и $Y \subset X$, то (Y, d) равнобедренно.*

2.0. *Пусть $d'(x, y) = \min(d(x, y); 1)$, тогда* $\operatorname{diam}(X, d') \leqslant 1$ *и (X, d') эквиморфно (X, d).*

2.1. *Если (X, d) равнобедренно, то (X, d')* (см. 2.0) *равнобедренно.*

3.0. *Если на (X, d) непрерывно действует компактная группа G, то существует эквивалентная d инвариантная метрика $\bar{d}$.* Ю. М. Смирнов сообщил нам, что *требование компактности G может быть ослаблено до условия совершенности отображения X на X/G.*

3.1. *Если (X, d) равнобедренно, то $(X, \bar{d})$ и $(X, \bar{d})/G$ тоже равнобедренны.*

4.0. Категория METR. Объекты METR — метрические пространства диаметра $\leqslant 1$, морфизмы — нерастягивающие отображения: $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$.

4.1. Пусть $(X_\alpha, d_\alpha) \in$ METR, $\alpha \in A$. Суммой ΣX_α называется $(\cup X_\alpha, d)$, где $d(x_\alpha, y_\beta) = d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ при $\alpha = \beta$, и $d(x_\alpha, y_\beta) = 1$ при $\alpha \neq \beta$ (см. [6]). Это определение есть определение суммы в смысле теории категорий (сумма в категории METR).

4.2. *Сумма равнобедренных пространств равнобедренна.*

5.0. Пусть $({}_kX, d_k) \in$ METR, $k = 1, 2$. На произведении X_1X_2 существует несколько метрик $d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$; $d'' = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$; $d = \max(d_1(x_1, y_1); d_2(x_2, y_2))$. При конечном числе сомножителей они эквивалентны. Произведением в METR будет произведение с метрикой $d = \sup\{d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

5.1. *Произведение равнобедренных пространств равнобедренно, полных — полно.*

6.0. Пусть $S = \{(X_\alpha, d_\alpha), p_\alpha^\beta\}$— обратный спектр метрических пространств диаметра $\leqslant 1$. Его метрическим пределом $m \lim S$ называется пространство «нитей» $\{\{x_\alpha\} \mid x_\alpha = p_\alpha^\beta x_\beta \forall\, \alpha < \beta\}$ с метрикой, индуцированной из $m \prod X_\alpha$ (см. 5.0).

6.1. *Если (X_α, d_α) равнобедренны, то $m \lim S$ равнобедрен* (см. 1, 5.1, 6.0).

6.2. *Если (X_α, d_α) полны, то $m \lim S$ полон.*

6.3. *Если (X_α, d_α) метрически дискретны* (т. е. $d_\alpha(x, y) = \mathrm{const} = c_\alpha\ \forall\, x, y \in X_\alpha$), *то $m \lim S$ равнобедрен; если еще проекции p_α^β нерастягивающие, то $m \lim S$ дискретен.*

6.4. *Всякое полное равнобедренное пространство $\in$ METR есть метрический предел счетного обратного спектра метрически дискретных пространств* (*и обратно*, см. 6.2, 6.3).

7.0. Хаусдорфовой экспонентой Hexp X (или e^X) пространства $(X, d) \in$ METR называется пространство замкнутых подмножеств X с хаусдорфовой метрикой $\hat{d}(F, \Phi) = \inf\{r \mid F \subset O(r, \Phi),\ \Phi \subset O(r, F)\}$, $d(F, \varnothing) = 1$ (см. [5], § 29). Определение дано Помпейю в 1906 г. и глубоко исследовано Хаусдорфом в 1914 г. [5]. В 1922 г. Вьеторис определил топологию, в 1937 г. А. Вейль — равномерность и в 1957 г. Ю. М. Смирнов — близость на пространстве замкнутых подмножеств произвольного топологического (соответственно, равномерного, близостного) пространства. В 1951 г. появилась большая работа Майкла [7], где подведен итог всему, что сделано до того, и получено много новых важных результатов о вьеторисовой и вейлевской экспонентах. После этого хаусдорфовой экспонентой почти перестали заниматься, во-первых, потому, что в том же году теорема Нагата — Смирнова решила проблему метризации, во-вторых, из-за двух недостатков самой хаусдорфовой экспоненты: 1) она не инвариантна при непрерывных переметризациях пространства, 2) она определена только для ограниченного X. Цель этого раздела — показать, что эти недостатки мнимые, и что хаусдорфова экспонента обладает рядом замечательных свойств.

7.1. Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует отображение экспонент $\widetilde{f}\colon \operatorname{Hexp} X \to \operatorname{Hexp} Y$, $\widetilde{f}(F) = [f(F)]\ \forall F \in \operatorname{Hexp} X$. Известно, что из непрерывности f не следует непрерывность $\widetilde{f}$ (см. [6], с. 201), а только его сюръективность, если f сюръективно.

7.2. *Если f равномерно непрерывно (нерастягивающе), то таково и $\widetilde{f}$.* Поэтому (см. 2.0) $\operatorname{Hexp} X$ корректно определена для любого метрического пространства X.

7.3. MUN — категория всех метрических пространств и равномерных отображений.

7.4. Теорема. $\operatorname{Hexp} X$ *является функтором в категориях* MUN и METR. Опишем его свойства.

7.5. *Функторы хаусдорфовой экспоненты и пополнения пространства коммутируют.*

7.6. *Если X вполне ограничено или полно, то таково и* $\operatorname{Hexp} X$ (см. [6], задача 4.H).

7.7. Следствие (Хаусдорф [5]). *Если X — компакт, то* $\operatorname{Hexp} X$ — *компакт.*

7.8. *Если X канторово связно и вполне ограничено, то таково и* $\operatorname{Hexp} X$.

7.9. *Вложение $i\colon X \to \operatorname{Hexp} X$, определенное как $i(x) = \{x\}$, замкнуто и изометрично, таким образом, верны утверждения, обратные к 7.6, 7.7, 7.16.*

7.10. Пусть $F, \Phi \in \operatorname{Hexp} Y$; $f, g \in Y^X$ (см. 8.0). Тогда $\operatorname{Hexp} F$, $\operatorname{Hexp} \Phi$ замкнуты в $(\operatorname{Hexp} Y, \hat{d})$, так что между ними определено хаусдорфово расстояние $\hat{\hat{d}}(\operatorname{Hexp} F, \operatorname{Hexp} \Phi)$.

7.11. $\hat{\hat{d}}(\operatorname{Hexp} F, \operatorname{Hexp} \Phi) = \hat{d}(F, \Phi)$; $d^X_Y(f, g) = d^{\operatorname{Hexp} X}_{\operatorname{Hexp} Y}(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ (см. 7.1, 8.0). *Функтор* Hexp *изометричен.*

7.12. $\forall F \in \operatorname{Hexp} X$ *множество* $\mathcal{F} = \{\Phi \in \operatorname{Hexp} X \mid \Phi \supset F\}$ *замкнуто в* $\operatorname{Hexp} X$. *Отображение $r\colon \Phi \to F \cup \Phi$ есть замкнутая нерастягивающая ретракция* $\operatorname{Hexp} X$ *на* $\mathcal{F}$.

7.13. Основное свойство экспоненты: $e^{X+Y} = e^X e^Y$. Здесь $X, Y \in \mathrm{METR}$, $X + Y$ и XY определены по 4.1 и 5.0, а «$=$» означает изометрию (в MUN — эквиморфизм).

7.14. *Хаусдорфова экспонента равнобедренного пространства равнобедренна.*

7.15. *X эквиморфно равнобедренному тогда и только тогда, когда* $\delta \dim X = 0$ (см. [3]), $\delta \dim X$ означает размерность Ю. М. Смирнова (см. [8]). Отсюда и из 7.2 следует

7.16. *Если* $\delta \dim X = 0$, *то* $\delta \dim \operatorname{Hexp} X = 0$ (обратное очевидно, см. 7.9).

7.17. *Если $\operatorname{in}\delta X = 0$ (см. [3]), то* $\operatorname{Hexp} X$ *вполне несцепленно.*

7.18. *Если X полно и равнобедренно (близостно нульмерно, малоблизостно нульмерно), то существует нерастягивающая (равномерная, непрерывная) селекция* $\operatorname{Hexp} X$ *на* X.

8.0. Из глубоких и интересных связей пространства (Y, d) с пространством функций Y^X приведем, за неимением места, только определение и первый результат. Пусть $Y \in \mathrm{METR}$, на Y^X существует метрика равномерной сходимости $d^X(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$.

8.1. *Если (Y, d) равнобедренно, то (Y^X, d^X) тоже равнобедренно.*

Автору приятно поблагодарить профессора Ю. М. Смирнова, беседами с которым стимулирован категорный аспект работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Krasner. Nombres semi-réels et espaces ultramétriques.— Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 1944, **219**, p. 433—435.
[2] J. de Groot. Non-archimedean metrics in topology.— Proc. AMS, 1956, **7**.
[3] А. Ю. Лемин. Близость на равнобедренных пространствах.— УМН, 1984, **39**:1.
[4] А. Ю. Лемин. О равнобедренных метрических пространствах.— Вестн. МГУ, 1984.
[5] Ф. Хаусдорф. Теория множеств.— М; Л.: ОНТИ, 1937.
[6] R. Engelking. Outline of general topology.— Amsterdam, 1968.
[7] E. Michael. Topologies on spaces of subsets.— Trans. AMS, 1951, **71**, p. 152—182.
[8] Ю. М. Смирнов. О размерности пространств близости.— Матем. сб., 1956, **38**.

Московский инженерно-строительный институт им. Куйбышева

Поступило в Правление общества 6 октября 1983 г.