Statistique et Informatique (3I005)

2018-2019

Nicolas Baskiotis

Sorbonne Université
équipe MLIA, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)
http://3i005.lip6.fr

Cours 5 :

Variable aléatoire réelle continue
Théorème central limite
Applications

Plan

Mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$

Motivation

Modéliser des résultats d'expériences aléatoires pouvant être des réels quelconques.
Par exemple : mesures de temps, de distances, d'espaces.

Exemple : Probabilité continue uniforme sur $[0, 1]$

On souhaite créer une mesure telle que chaque valeur est équiprobable.
Plus exactement : si $0 \leq a < b \leq 1$, $P([a, b]) = b - a$.

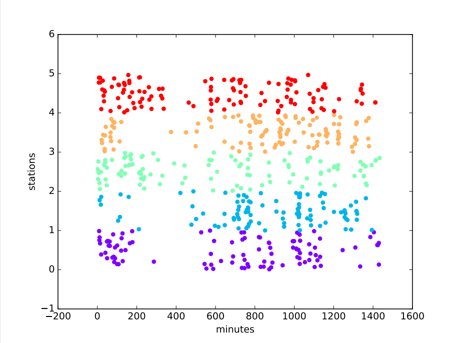
Plus généralement : on souhaite associer une mesure de probabilité aux *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$

Motivation

Modéliser des résultats d'expériences aléatoires pouvant être des réels quelconques.
Par exemple : mesures de temps, de distances, d'espaces.

Exemple : Emprunt de vélib



Quelques détails techniques...

Objectif

- Probabilité d'un point : en général, nulle (sinon, probabilité discrète)

$\Rightarrow$ définir la probabilité sur un ensemble de points (infini non dénombrable) et qui respecte les propriétés des probabilités discrètes.

Problème...

Selon la théorie usuelle (théorie des ensembles + axiome du choix) :
Il *n'existe pas* de fonction P telle que :

1. P est une mesure de probabilité,
2. P peut être calculée pour n'importe quel sous-ensemble de $[0, 1]$,
3. pour tout intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$: $P([a, b]) = b - a$.

Autrement dit :

Il existe des ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont *non mesurables* : ensembles de Vitali par exemple. (Non-mesurable $\sim$ contradiction s'ils l'étaient).

Mesures de probabilités : définition générale (1)

Tribu

Une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble Ω contient des sous-ensembles de Ω et vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$,
2. si $E \in \mathcal{T}$, alors $\Omega \backslash E \in \mathcal{T}$,
3. si $(E_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{T}$.

Note : l'ensemble des parties de Ω est une tribu.

Tribu de Borel

- La tribu de Borel sur $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}$, est la plus petite tribu contenant tous les intervalles de $\mathbb{R}$, par exemple tous les ensembles du type : $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i[$
- la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{B}_n$ est la plus petite tribu contenant les produits cartésiens de n ensembles de $\mathcal{B}$:
$\{I_1 \times I_2 \times ... \times I_n | \forall k, I_k \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{B}_n$.

Les tribus de Borel contiennent les ensembles intéressants du point de vue des probabilités.

Mesures de probabilités : définition générale (2)

Espace mesurable

Un espace mesurable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$, où Ω est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω. (Note : $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *est donc un espace mesurable.*)

Mesure de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable.
Une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une fonction $P : \mathcal{T} \to [0, +\infty[$ telle que :

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. $\forall E \in \mathcal{T}, P(E) \geq 0$,
3. si $(E_i)_{i \geq 1}$ sont deux à deux disjoints, et $\forall i, E_i \in \mathcal{T}$, alors

$$P\Big(\bigcup_{i \geq 1} E_i\Big) = \sum_{i \geq 1} P(E_i).$$

4. Si de plus $P(\Omega) = 1$, alors P est une *mesure de probabilité*.

Cette définition généralise la définition du cours 1 en prenant $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu sur Ω lorsque Ω est discret.

Mesure de Borel

Fait marquant 2

Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, appelée mesure de Borel, telle que :

pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ $(a \leq b)$, $\lambda([a, b]) = b - a$.

La mesure de probabilité uniforme sur un intervalle $[A, B], A < B$ est alors :

$$\forall I \in \mathcal{B}, P(I) = \frac{\lambda(I \cap [A, B])}{B - A}$$

Mesure de Borel sur $\mathbb{R}^n$

La mesure de Borel sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, notée λ_n est définie par :

$$\forall I_1 \in \mathcal{B}, ..., I_n \in \mathcal{B}, \lambda_n\left(I_1 \times ... \times I_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \lambda(I_k)$$

Par exemple : $\lambda_2([0, 1/2] \times [0, 1/2]) = 1/4$.
λ_2 correspond à l'aire d'une figure dans le plan, λ_3 au volume d'un objet dans l'espace à 3 dimensions.

Plan

Densité de probabilité

Définition

Une mesure de probabilité P sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ admet une *fonction de densité* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si :
pour tout $I \subset \mathcal{B}_n, P(I) = \int_{x \in I} p(x) d\lambda_n(x)$

Exemples

- Si P est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ qui admet comme fonction de densité p, alors pour tout $a < b$, on a :

$$P(]a, b]) = \int_a^b p(x)dx \quad \text{(avec les notations usuelles de l'intégrale sur } \mathbb{R}\text{).}$$

- La loi uniforme sur $[a, b]$ admet comme fonction de densité :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

- une v.a. réelle à valeurs dans un ensemble discret *n'a pas* de fonction de

Variables aléatoires à valeurs réelles

Variable aléatoire réelle

Soit P est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Une variable aléatoire réelle est une fonction $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall I \in \mathcal{B}, X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$$

X induit une mesure de probabilité P_X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par :

$$P_X(I) = P(X \in I) = P\big(X^{-1}(I)\big).$$

Note : cette définition généralise notre définition de variable aléatoires à valeurs réelles sur des ensembles discrets.

Fonctions de répartition et de densité d'une v.a.r.

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [0,1] \\ t & \mapsto & P(X \leq t) \end{array} \right)$$

On a alors $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

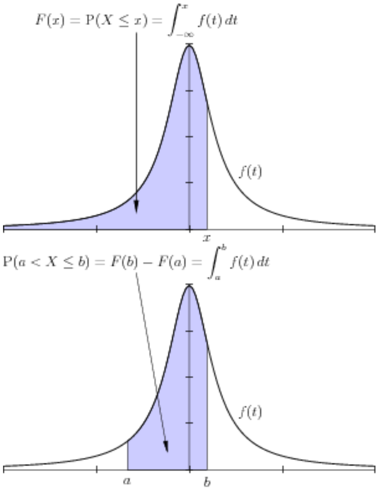
Fonction de densité

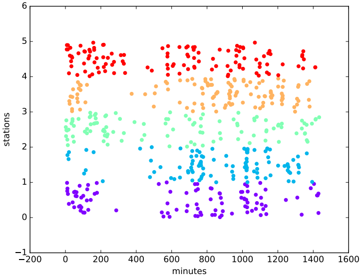
Une v.a. réelle X admet une *fonction de densité* p_X, si, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

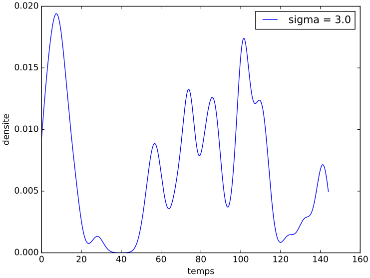
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u) du.$$

- On a alors, pour $a < b$, $P(a < X \leq b) = \int_a^b p_X(u) du$.
- Si X est une $v.a.r$. telle que sa fonction de répartition est dérivable, alors $p_X = F_X'$ est une densité de X.

Fonctions de répartition et de densité d'une v.a.r.

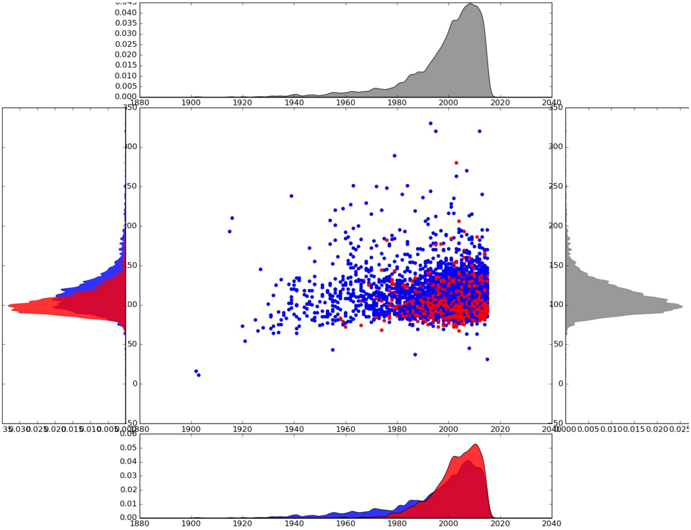






Densité de la probabilité d’emprunt d’un vélib à une borne donnée durant une journée.

Exemples : densité jointe



Densité jointe durée d'un film et année de production.

Espérance et variance d'une v.a.r. continue

Définition et propriétés

- Soit X une v.a.r. sur espace probabilisé $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P)$ où P a une fonction de densité p. L'espérance de X est alors définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega)d\lambda_n(\omega)\,.$$

- Soit X, une v.a.r. de densité p_X. L'espérance de X est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} up_X(u)du.$$

- La variance de X est définie par : $V(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$.
- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Alors : $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p_X(u)du$

Les résultats montrés pour les v.a.r. à valeurs discrètes restent vraies :

- Les propriétés de l'espérance et de la variance,
- les inégalités de Markov et Tchebychev, et la loi des grands nombres.

Application : Méthodes de Monte-Carlo

Types d'algorithmes probabilistes

- Algorithmes Las Vegas : renvoient toujours la réponse correcte, mais dans un temps variable,
- algorithmes de Monte-Carlo : les ressources sont limitées a priori, mais le résultat peut ne pas être exact.

Exemple : approximation de nombres réels

Principe de la méthode (exemples : approximation de $\ln 2$ et de π) :

1. écrire le nombre comme l'espérance d'une fonction d'une v.a.r. à densité,

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du, \frac{\pi}{4} = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 I_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} dudv$$

2. générer n valeurs selon la densité, calculer la fonction pour chaque valeur échantillonnée,
3. loi des grands nombres : la moyenne des n valeurs calculées tend vers le nombre qu'on souhaite calculer.

Plan

Loi exponentielle

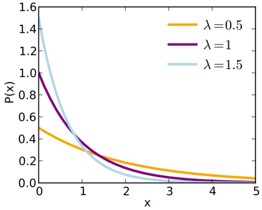
Définition et propriétés

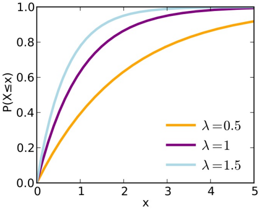
Une v.a.r. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet comme densité de probabilité :

$$p_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors :

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- La loi exponentielle est l'analogue continu de la loi géométrique,
- elle représente le temps d'attente avant la réalisation d'un événement.



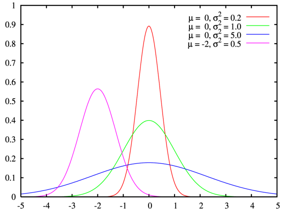


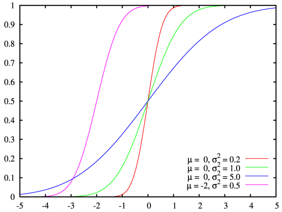
Définition et propriétés

Une v.a.r. X suit une loi normale (ou gaussienne) de paramètres μ et σ^2 si elle admet comme densité de probabilité :

$$p_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- $\mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ (σ est donc *l'écart-type* de X).
- Si $\mu = 0$, on parle de loi *centrée*.
- Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ alors X suit une loi normale *centrée réduite*.

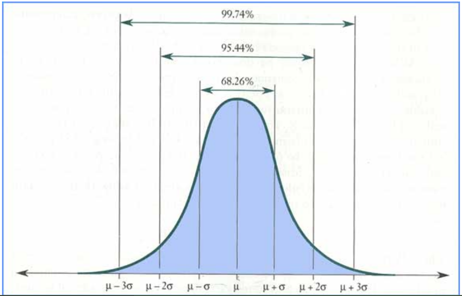




Loi normale (2)

Propriétés additionelles

- Symétrie : $F_X(\mu+t) = 1 - F_X(\mu-t)$ ($\Leftrightarrow P(X \leq \mu - t) = P(X \geq \mu + t)$),
- Si X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2), alors $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi normale de paramètres $\alpha\mu + \beta$ et $\alpha^2\sigma^2$.
  En particulier, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ *suit une loi normale centrée réduite.*
- Si X et X' sont indépendantes et suivent respectivement une loi normale de paramètres (μ, σ^2) et (μ', σ'^2),
  alors $X + X'$ suit une loi normale de paramètres $\mu + \mu'$ et $\sigma^2 + \sigma'^2$.



Plan

Théorème central limite

Énoncé du théorème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérances et de variances finies.

Les X_n peuvent suivre n'importe quelle loi dès que ces deux conditions sont respectées.

On note $\mu = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sigma = \sqrt{V(X_n)}$ l'espérance et l'écart-type de X_n.

- En notant $S_n = \sum_{k\leq n} X_k$, on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ a une espérance de } O \text{ et un écart-type de } 1$$

- De plus, pour tout t :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

où $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Théorème central limite

Énoncé du théorème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérances et de variances finies.

Les X_n peuvent suivre n'importe quelle loi dès que ces deux conditions sont respectées.

On note $\mu = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sigma = \sqrt{V(X_n)}$ l'espérance et l'écart-type de X_n.

- En notant $S_n = \sum_{k\leq n} X_k$, on a :

  $$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ a une espérance de } O \text{ et un écart-type de } 1$$

- De plus, pour tout t :

  $$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\Big) = \Phi(t)$$

  où $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

  Φ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

Théorème central limite

interprétation

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\big) = P(Y \leq t)$$ où Y suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

lorsque n est grand : $P\big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\big) \approx P(Y \leq t)$

ou encore (toujours lorsque n est grand) :

$$P(S_n \leq z) \approx P\big(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\big)$$

Exemple : X_n sont des v.a. de Bernoulli de paramètre p

lorsque n est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Théorème central limite

interprétation

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = P(Y \leq t)$ où Y suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

$$\text{lorsque } n \text{ est grand : } P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \approx P(Y \leq t)$$

ou encore (toujours lorsque n est grand) :

$$P\left(S_n \leq z\right) \approx P\left(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Exemple : X_n sont des v.a. de Bernoulli de paramètre p

lorsque n est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Théorème central limite

interprétation

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = P(Y \leq t)$$ où Y suit une loi normale centrée réduite.

Formulation alternative informelle :

lorsque n est grand : $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \approx P(Y \leq t)$

ou encore (toujours lorsque n est grand) :

$$P\left(S_n \leq z\right) \approx P\left(Y \leq \frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Exemple : X_n sont des v.a. de Bernoulli de paramètre p

lorsque n est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

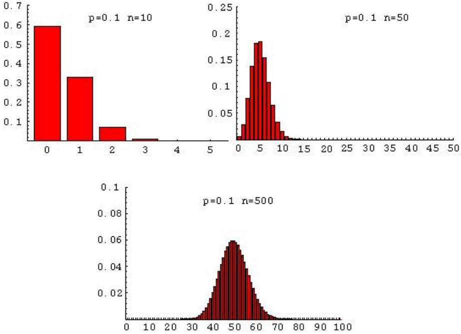
Théorème central limite

Exemple : les X_n sont des v.a. de Bernoulli de paramètre p

lorsque n est grand :

$$P(S_n \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \approx P\left(Y \leq \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

En pratique : une loi binomiale peut être approximée par une loi normale si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$



TCL et loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées.
On note μ leur espérance et σ leur écart-type.
On note $S_n = \sum_{k\leq n} X_k$.

- Loi des grands nombres :

$$\forall t > 0, P\big(-t \leq \frac{S_n}{n} - \mu \leq t\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

- Théorème central limite :

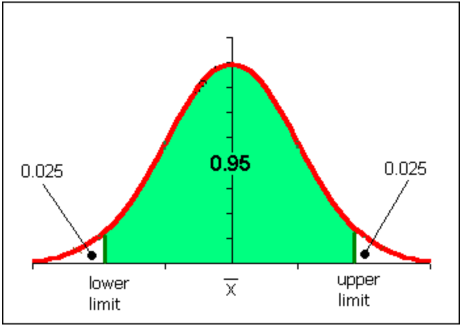
$$\forall t > 0, P\big(-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} - \mu \leq \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\Phi(t) - 1$$

Plan

Définition

Soit X, une variable aléatoire réelle.
Un intervalle de confiance à $c\%$ pour un paramètre p est défini par deux fonctions u et v telles que :

$$P\big(u(X) < p < v(X)\big) \geq c/100$$



Exemple : I.C. pour l'espérance d'une loi normale

Soient $X_1, ..., X_n$, n v.a.r. indépendantes et suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
L'espérance μ est inconnue. On souhaite déterminer un intervalle de valeurs possibles pour μ, en supposant que σ est connue.

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_n$. $\dfrac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ suit une loi normale centrée réduite.

donc $\forall t, P\left(-t < \dfrac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = 2\Phi(t) - 1$. Donc, en fixant :

- t tel que $2\Phi(t) - 1 = c/100$ (par exemple : $t = 2$ pour 95%),
- $u(x) = \dfrac{x}{n} - \dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$,
- $v(x) = \dfrac{x}{n} + \dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$,

on a $P\big(u(X) < \mu < v(X)\big) \geq c/100$.
c'est un intervalle de confiance à $c\%$ pour le paramètre μ.

En théorie de l'information

Entropie : quantité d'information

- Je cherche à deviner un nombre entre 0 et 100 en posant des questions.
- quelle question m'apporte le plus d'information ?
  - le nombre est-il pair ?
  - le nombre finit-il par 12 ?
  - le nombre est-il supérieur à 50 ?
- Notion d'entropie : nombre minimum de question à poser pour trouver le nombre.

Définition

- Soit p une v.a. X à n valeurs distinctes i, chacune de probabilité p_i,
- la probabilité de $(x_1, \cdots, x_t)$ tend vers $\prod_{k=1}^{n} p_k^{tp_k} = (\prod_{k=1}^{n} p_k^{p_k})^t$,
- l'entropie de p est $H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log(p_i)$

Utilisations (entre autre)

- Codage de Huffman
- Arbres de décision

Classification et maximum de vraissemblance

Maximum de vraissemblance

Soit

- une famille de modèle $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\theta\}$, paramètrée par un vecteur réel θ
- Vraissemblance d'un modèle pour des données X :
  $L(X; M_\theta) = p(X|M_\theta) = \prod_{x \in X} p(x|M_\theta)$
- Maximum de vraissemblance : choix du modèle qui maximise la vraissemblance

Applications :

- classification d'images par histogramme
- classification de séquences : reconnaissance de la parole
- infection et diffusion dans les graphes
- ...

Applications : dilemne de l’exploration/exploitation

Question : problème du bandit-manchot

- soit K machines à sous disponible, toutes différentes,
- connaissant le résultat de mes n dernières tentatives,
- quelle machine jouée pour maximiser mes gains ?

Modélisation :

- chaque machine suit une loi inconnue ν_k d’espérance μ_k,
- soit μ^* la machine i^* d’espérance maximale,
- soit I_t la machine jouée au coup t, x_{I_t} la v.a. du gain associé,
- regret après n coups : $R_n = n * \nu_{i^*} - \sum_{t=1}^{n} x_{I_t}$
- minimiser : $\mathbb{E}(R_n) = n\mu^* - \mathbb{E} \sum_{i=1}^{K} T_i(n)\mu_i$
  avec $T_i(n)$ le nombre de fois ou la machine i a été joué durant n coups.

Applications : dilemne de l'exploration/exploitation

Politique de sélection

- ϵ-greedy : jouer avec une certaine probabilité la meilleure machine, au hasard sinon.
- Upper-Confidence Bound : politique optimiste.
  - Inégalité d'Hoeffding : avec une probabilité au moins $1 - \epsilon$,

$$\mathbb{E}X \leq \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} X_s + \sqrt{\frac{log(\epsilon^{-1})}{2m}}$$

  - UCB :

$$argmax\ \mu_i + \sqrt{\frac{2log(t+1)}{T_i(t)}}$$

Utilisations :

- marketing ciblé/google ads
- approximation de monte-carlo : I.A pour go