Statistique et Informatique (3I005)

2018-2019

Nicolas Baskiotis

Sorbonnue Université
Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)
http://3i005.lip6.fr

Cours 2 :

Dénombrements, probabilités conditionnelles

Le cours 1 en un slide

Pour calculer des probabilités, il faut définir :

- une expérience :
- les *événements élémentaires* : les résultats de l'expérience aléatoire
- l'*univers* Ω : l'ensemble des événements élémentaires
- une probabilité pour chaque événement élémentaire : sa fréquence d'apparition.

Propriétés

- Un *événement* E est un sous-ensemble de Ω (un/plusieurs év. élémentaires) : $E \subset \Omega$
- Deux événements E_1 et E_2 sont *incompatibles* ssi aucun de leurs événements élémentaires n'est en commun : $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$
- Le complémentaire de E est l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas dans E : $\overline{E} = \Omega \setminus E$
- Une mesure de probabilité sur Ω est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tq :
  1. $P(\Omega) = 1$: lors de l'expérience, un résultat est forcément observé
  2. pour tout événement $E \subset \Omega$, $1 \geq P(E) \geq 0$ (pas de probabilité négative !)
  3. Pour toute suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements *incompatibles* : $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$.
- En particulier, P est entièrement définie par $P(\{\omega\}), \forall \omega \in \Omega$;
- Événements élémentaires équiprobables : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \forall \omega \in \Omega$,

Plan

1. Dénombrements
2. Indépendance
3. Probabilités conditionnelles

Principes élémentaires

Dénombrer les résultats de tuples d'expériences

- Soit 2 expériences telles que il y ait n_1 résultats possibles pour la première expérience et pour chacun de ces résultats n_2 résultats pour la deuxième. Alors il y a en tout $n_1 \times n_2$ résultats possibles.
- Généralisation : Soit r expériences et $(n_1, \ldots, n_r)$ le nombre de résultats possibles pour chacune de ces expériences indépendamment des autres. Alors le nombre de résultats possibles est $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$.

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, . . . 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut prendre que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, . . . $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow \frac{n!}{p!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow \frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?, pourquoi le même résultat ?)

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ... 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut prendre que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, ... $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow \frac{n!}{p!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow \frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?, pourquoi le même résultat ?)

Permutation

De combien de manières peut-on ordonner n objets distincts ?

- Pour 2 objets : 2
- Pour n objets : n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ... 1 choix pour le dernier.

$\Rightarrow$ $n!$ possibilités

Et si on ne veut prendre que p objets parmi n distincts ?

- Avec le même raisonnement, n choix pour le premier, ... $n-p+1$ choix pour le dernier objet sélectionné $\Rightarrow \frac{n!}{p!}$

Et si q objets sont similaires parmi les n ?

- Dans ce cas, ces objets sont tous interchangeables, il faut enlever les combinaisons identiques.
- $q!$ combinaisons sont identiques

$\Rightarrow \frac{n!}{q!}$ (pourquoi la division ?, pourquoi le même résultat ?)

Combinaison

Combien de manières de choisir p objets parmi n distincts ?

- l'ordre de sélection ne compte pas, uniquement le type d'objets choisi
- Selon le même principe : $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités ordonnées
- il y a p groupes, donc $p!$ configurations identiques

$\Rightarrow$ $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ possibilités.

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \quad C_n^p = C_n^{n-p}$
- Triangle de Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
- Formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \Rightarrow card\,(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$$

En résumé : comment compter

Soit un ensemble $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$, $card(\Omega) = |\Omega| = n$

Un tirage peut être

- ordonné : l'ordre des éléments compte (notation k-uplet (a, b, c, d))
- non ordonné : l'ordre ne compte pas (notation ensemble $\{a, b, c\}$)
- avec ou sans remise : un élément peut être tiré plusieurs fois ou non

Dénombrement de k-uplets

- nombre de k-uplets d'éléments de Ω : n^k (tirage avec remise, ordonné)
- nombre de k-uplets d'éléments distincts (tirage sans remise, ordonné, nombre d'arrangements de k parmi n) : $A_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$
- Nombre de permutations (cas $n = k$) : $n! = n \times (n-1) \times ... \times 1$
- Combinaison de k éléments (sous-ensembles distincts de k éléments) : $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (tirage sans remise non ordonné).

Dénombrements : exercices

Exemple du jeu de 52 cartes.

- On peut :
  - tirer avec ou sans remise
  - considérer la séquence des cartes (tirage ordonné) ou l'ensemble obtenu (non ordonné).
- Quelle est la probabilité d'obtenir :
  - d'obtenir une configuration donnée après un mélange aléatoire ?
  - 1,2,3,4 de la même couleur et dans l'ordre ?
  - que des dames sur 4 tirages ?
  - aucune dames sur 2 tirages ?

Exemple du jeu de 52 cartes.

- Quelle est la probabilité d'obtenir :
  - d'obtenir une configuration donnée après un mélange aléatoire ?
    Univers Ω ensemble des suites de 52 cartes : 52! possibilités, donc $\Rightarrow \frac{1}{52!}$
  - 1,2,3,4 de la même couleur et dans l'ordre ?
    Univers Ω ensemble de quadruplets de cartes, 4 couleurs et 1 configuration soit : $\Rightarrow \frac{4}{52*51*50*49}$
  - que des dames sur 4 tirages ?
    Univers Ω ensemble de 4 cartes (sans ordre) $\Rightarrow \frac{1}{C_{52}^4}$
  - aucune dames sur 2 tirages ?
    Univers Ω ensemble de 2 cartes $\Rightarrow \frac{C_{48}^2}{C_{52}^2}$

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probabilité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probabilité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

- Le mot `SINGE` apparaît dans A_{26}^{21} configurations, il y a $26!$ configurations possibles équi-probables, donc la probabilité est de $\frac{1}{21!}$.
- Cette fois, une configuration pour $5!$ possibles, donc $\frac{1}{5!}$.
- On peut numéroter les I : I_1, I_2, I_3, et les T : T_1, T_2. Il y a $3! * 2! * 1$ configurations possibles en échangeant les I et les T, donc la probabilité est $\frac{12}{8!}$.

Dénombrements : exercices

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires ;
- d'obtenir au moins 1 paire.

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires ;
- d'obtenir au moins 1 paire.

$\Rightarrow$ On numérote les chaussettes de 1 à 20, tirage sans remise non ordonné,

- $\Omega = \{\{i, j, k, l\}, i \neq j \neq k \neq l\}$, $card(\Omega) = C_{20}^4$;
- il y a C_{10}^2 manières de faire 2 paires
- on calcul l'événement complémentaire, $\frac{20*18*16*14}{4!}$

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

9 pts	10 pts
$6+2+1$	$6+3+1$
$5+2+2$	$6+2+2$
$5+3+1$	$5+4+1$
$4+3+2$	$5+3+2$
$4+4+1$	$4+4+2$
$3+3+3$	$4+3+3$

Premier réflexe : bien définir les événements et l'univers !

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

Premier réflexe : bien définir les événements et l'univers !

Soit $E_{i,j,k}$ l'évènement : $\{i, j, k\}$ sont obtenus sur les dés, sans tenir compte de l'ordre :
pour $i \leq j \leq k$, $E_{i,j,k} = \{(i, j, k), (j, i, k), (j, k, i), (k, j, i), (k, i, j), (i, k, j)\}$
Il y a 6 événements $E_{i,j,k}$ avec $i + j + k = 10$, et 6 qui donnent une somme à 9.

Bien définir un problème

Problème du prince de Toscanne

Pourquoi en lançant trois dés, obtient-on plus souvent un total de 10 points qu'un total de 9 points, alors qu'il y a 6 façons d'obtenir ces deux totaux ?

Premier réflexe : bien définir les événements et l'univers !

Les événements $\Omega_{i,j,k}$ ne sont pas "équiprobables" :

- si $i \neq j \neq k \neq i$, alors 6 manières d'obtenir le résultat, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{6}{216}$,
- si $i = j \neq k$, alors 3 manières, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{3}{216}$
- si $i = j = k$, alors une seule possibilité, $P(\Omega_{i,j,k}) = \frac{1}{216}$

$P(\{i + j + k = 9\}) = \frac{6+3+6+6+3+1=25}{216}$ et $P(\{i + j + k = 10\}) = \frac{6+3+6+6+3+3=27}{216}$

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun ;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second ;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement ;
- comment répartir équitablement l'argent ?

En particulier :

- si le score est de $(6, 6)$?
- si le score est de $(6, 5)$?
- si le score est $(1, 0)$?
- si le score est $(6, 0)$?

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun ;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second ;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement ;
- comment répartir équitablement l'argent ?

Solution de Fermat

- On note *p* pour pile, *f* pour face ;
- soit *p* le nombre de points manquant au premier joueur, *q* au second pour gagner ;
- une succession de partie : une séquence *pffppf*..
- dénombrer les parties favorables à chaque joueur.

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.
- Et si $n = 5$?

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

$\Rightarrow$ Soit i et j les positions des deux personnes, $\Omega = \{\{i, j\}, i < j \in \{1, \cdots n\}\}$, $card(\Omega) = C_n^2$, équi-probables,

- il n'y a qu'une configuration
- il y a $n - r$ configurations

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.

Plan

1. Dénombrements
2. Indépendance
3. Probabilités conditionnelles

Indépendance

Définition

Deux événements E et F sont **indépendants** si :

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

Autrement dit, si connaître le résultat de l'un n'a aucune influence sur la probabilité du deuxième.

Exemples : lancer de deux dés

- les deux chiffres obtenus après un lancer sont indépendants l'un de l'autre,
- les événements “le premier dé affiche 6” et “la somme des deux dés vaut 4” ne sont pas indépendants.

Indépendance mutuelle

Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

Événements non mutuellement indépendants : lancer d'un dé

- $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $P(E_1) = \frac{1}{2}$,
- $E_2 = \{3, 4, 5\}$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$,
- $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(E_3) = \frac{4}{6}$,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{3\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{6},$$

mais $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \neq P(E_1) \times P(E_3)$.

Indépendance mutuelle

Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

Attention ! La propriété doit être vérifiée pour **tous** les sous-ensembles d'événements !

Événements non mutuellement indépendants : lancer de deux pièces

On note :

- A l'évènement “la première pièce donne pile”
- B l'évènement “la deuxième pièce donne face”
- C l'évènement “les deux pièces donnent le même résultat”

Indépendance mutuelle ou non ?

Indépendance mutuelle (2)

Un exemple important : le produit d'espaces probabilisés

Soient $\Omega_1, ..., \Omega_n$, n ensembles discrets, et soit P_i une mesure de probabilité sur Ω_i. Alors, la mesure de probabilité Q définie sur $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ par :

$$Q\left(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right).$$

Q est appelée le produit des mesures $P_1, ..., P_n$.
Alors, soient $A_1 \subset \Omega_1$, ..., $A_n \subset \Omega_n$, qui définissent les événements suivants :

$$E_i = \left(\prod_{j<i} \Omega_j\right) \times A_i \times \left(\prod_{j>i} \Omega_j\right).$$

Les événements E_i sont mutuellement indépendants.

Exemple : lancer de n dés

On lance n fois le même dé ($\Omega_i = \{1, ..., 6\}$). Alors, les événements E_i définis par "le résultat du i-ème lancer est 1" sont mutuellement indépendants.

Plan

1. Dénombrements

2. Indépendance

3. Probabilités conditionnelles

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Roulette russe

Deux balles sont insérées côte à côte dans un pistolet dont le barillet peut contenir 6 balles. Le barillet est positionné ensuite au hasard.

- Quel est le risque que le premier coup soit fatal ?
- Le premier coup n'était pas fatal. Est-il plus risqué de tirer directement ou de positionner le barillet au hasard puis de tirer ?

Probabilités Conditionnelles

Considérons deux événements E et F, Supposons qu'on ne s'intéresse à la réalisation de E, étant donnée la réalisation de F. Cela revient à estimer la réalisation de $E \cap F$ par rapport à F

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable et P une mesure de probabilisé sur Ω. Soit F un événement *de probabilité non nulle*. On appelle probabilité conditionnelle sachant F l'application :

$$P(. \mid F) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

définie par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cette application est une mesure de probabilité sur Ω.
Note : $P(E \mid F)$ se lit “probabilité de E sachant F”.

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants (M. Gardner, 1959)

1. *M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?*
2. *M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?*

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \frac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon") :
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F, G), (G, F), (G, G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P\big(A_2 \cap A_1\big)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G, G)\}$, $B = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités Conditionnelles (2)

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n événements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise ?

Probabilités Conditionnelles (2)

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n événements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise ?
Posons

- R_i=`La` i^{eme} `boule tirée est rouge`, $i \in \{1, 2, 3\}$
- B_i=`La` i^{eme} `boule tirée est bleue`, $i \in \{1, 2, 3\}$

On a alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_2 \cap R_1) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$.

De même, $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$

Probabilités conditionnelles (3)

Exemple

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot “ATTACHANT” Quelle est la probabilité d’obtenir “CHAT” ?

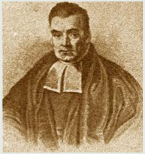
Rat de laboratoire

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l’un d’eux se trouve de la nourriture qu’il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu’à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes, avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la k-ème ?

- le rat n’a aucun souvenir des expériences précédentes,
- le rat se souvient uniquement de l’expérience précédente,
- le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Formule de Bayes, théorème des probabilités totales

Formule de Bayes



Soient E et F deux événements de probabilité non nulle. Alors :

$$P(E \cap F) = P(F \mid E) \times P(E) = P(E \mid F) \times P(F), \text{ soit}$$

$$P(E \mid F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

Théorème des probabilités totales

Soit $(F_i)_i$ une partition de Ω (aussi appelé ensemble complet d'événements) :

- si $i \neq j$ alors $F_i \cap F_j = \emptyset$ (F_i et F_j sont incompatibles),
- $\bigcup_i F_i = \Omega$.

Alors $\forall E \subset \Omega, P(E) = \sum_i P(E \cap F_i) = \sum_i P(E|F_i)P(F_i)$.

De plus, pour tout i, $P(F_i|E) = \dfrac{P(E \mid F_i) \times P(F_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(E \mid F_j) \times P(F_j)}$.

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un cœur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un cœur ?

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un cœur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un cœur ?
On considère les événements suivants :

- CP : La carte perdue est un cœur
- TC : Tirer un cœur du jeu incomplet

Nous avons alors $P(CP) = \frac{1}{4}$ et $P(TC \mid CP) = \frac{12}{51}$
TC peut s'écrire comme : $TC = (TC \cap CP) \cup (TC \cap \bar{CP})$ et

$$P(CP \mid TC) = \frac{P(TC \mid CP) \times P(CP)}{P(TC \mid CP) \times P(CP) + P(TC \mid \bar{CP}) \times P(\bar{CP})} = \frac{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4}}{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{51}$$

Exemple de Monty Hall - paradoxe des années 70

Let's make a deal

Supposons que vous êtes dans un jeu télévisé ; vous avez le choix entre 3 portes. Derrière une des portes il y a une voiture, derrière les deux autres portes une chèvre. Vous choisissez une des portes, et l'animateur - qui connaît la répartition des lots - ouvre une des deux portes restantes où il sait qu'il y a une chèvre. Il vous demande si vous voulez conserver votre choix. Quelle stratégie est à votre avantage ? Changez ou garder la même porte ?

Calcul des probabilités

B_i : la voiture est derrière la porte i, E : l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3

- $\forall i \in \{1,2,3\}, P(B_i) = \frac{1}{3}$
- $P(E|B_1) = 1, P(E \mid B_2) = \frac{1}{2}, P(E \mid B_3) = 0$
- $P(E) = P(E|B_1) \times P(B_1) + P(E|B_2) \times P(B_2) + P(E|B_3) \times P(B_3)$
  $= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $P(B_1 \mid E) = \frac{P(E|B_1) \times P(B_1)}{P(E)} = \frac{2}{3}, \qquad P(B_2 \mid E) = \frac{P(E|B_2) \times P(B_2)}{P(E)} = \frac{1}{3}$

Exemple de Monty Hall - paradoxe des années 70

Let's make a deal

Supposons que vous êtes dans un jeu télévisé ; vous avez le choix entre 3 portes. Derrière une des portes il y a une voiture, derrière les deux autres portes une chèvre. Vous choisissez une des portes, et l'animateur - qui connaît la répartition des lots - ouvre une des deux portes restantes où il sait qu'il y a une chèvre. Il vous demande si vous voulez conserver votre choix. Quelle stratégie est à votre avantage ? Changez ou garder la même porte ?

Calcul des probabilités

B_i : la voiture est derrière la porte i, E : l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(B_i) = \frac{1}{3}$
- $P(E|B_1) = 1, P(E \mid B_2) = \frac{1}{2}, P(E \mid B_3) = 0$
- $P(E) = P(E|B_1) \times P(B_1) + P(E|B_2) \times P(B_2) + P(E|B_3) \times P(B_3)$
  $= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $P(B_1 \mid E) = \frac{P(E|B_1) \times P(B_1)}{P(E)} = \frac{2}{3}$, $\quad P(B_2 \mid E) = \frac{P(E|B_2) \times P(B_2)}{P(E)} = \frac{1}{3}$