1　パラメータ空間の分割

変数全体の集合を $\bar{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$，パラメータ全体の集合を $\bar{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ とする．ただし，$\bar{X} \cap \bar{A} = \phi$．$K$ を任意の体とし，K の代数閉包を L とする．

以下の関数 ReducedGröbnerBasis によって多項式集合 F のイデアル $I = \langle F \rangle$ に関する項順序 $\prec_{\bar{X}}$ の簡約グレブナー基底を求めることができるものとする．

Algorithm 1 簡約グレブナー基底の導出

input: 集合 $F \subset K[\bar{X}]$，項順序 $\prec_{\bar{X}}$
output: 集合 $G \subset K[\bar{X}]$

```
function ReducedGröbnerBasis(F, ≺_X̄)
    return F のイデアル I = ⟨F⟩ と項順序 ≺_X̄ に関する簡約グレブナー基底
end function
```

パラメータ空間を係数のゼロ条件によって分割するために必要な操作や用語を定義する．

定義 1.1
$K[\bar{X}, \bar{A}]$ を $\bar{X}$ に関する多項式環 $K[\bar{A}][\bar{X}]$ とみなしたときの多項式 $f \in K[\bar{X}, \bar{A}]$ と項順序 $\prec_{\bar{X}}$ に対して，f の $\prec_{\bar{X}}$ における最も順序の高い項を $\mathrm{ht}_{\prec_{\bar{X}}}(f)$ と書き，f の $\prec_{\bar{X}}$ における頭項と呼ぶ．同様に $\mathrm{hm}_{\prec_{\bar{X}}}(f), \mathrm{hc}_{\prec_{\bar{X}}}(f)$ をそれぞれ f の $\prec_{\bar{X}}$ における頭単項式，頭係数と呼ぶ．

定義 1.2
$K[\bar{X}, \bar{A}]$ を $\bar{X}$ に関する多項式環 $K[\bar{A}][\bar{X}]$ とみなしたときの多項式 $f \in K[\bar{X}, \bar{A}]$ の 0 でない単項式全体の集合を $M_{\bar{X}}(f)$，係数全体の集合を $C_{\bar{X}}(f)$，項全体の集合を $T_{\bar{X}}(f)$ とする．多項式集合 $F \subset K[\bar{X}, \bar{A}]$ に対しても，$M_{\bar{X}}(F) = \{M : f \in F,\ M = M_{\bar{X}}(f)\}$，$T_{\bar{X}}(F) = \{T : f \in F,\ T = T_{\bar{X}}(f)\}$，$C_{\bar{X}}(F) = \{C : f \in F,\ C = C_{\bar{X}}(f)\}$ のように集合族を定義する．

定義 1.3
単項式集合族または項集合族である $\mathscr{T}$ に対し，$\mathrm{PolySet}(\mathscr{T}) = \left\{ \sum_{t \in T} t \ : \ T \in \mathscr{T} \right\}$ と定義する．

定義 1.4
$K[\bar{X}, \bar{A}]$ を $\bar{X}$ に関する多項式環 $K[\bar{A}][\bar{X}]$ とみなしたときの単項式 $m \in K[\bar{X}, \bar{A}]$ と $\bar{Y} \subset \bar{X} \cup \bar{A}$ に対し，m を $\bar{Y}$ の単項式とみたときの係数部分と項の部分をそれぞれ $\mathrm{coeff}_{\bar{Y}}(m)$，$\mathrm{term}_{\bar{Y}(m)}$ と定義する．

定義 1.5
集合 $E, N \subset K[\bar{A}]$ に対して，組 (E, N) を**パラメータ制約 (parametric constraint)** と呼ぶ．
$V(E) \setminus V(N) \neq \phi$ のとき，(E, N) は **consistent** であるといい，$V(E) \setminus V(N) = \phi$ のとき，(E, N) は **inconsistent** であるという．$S = V(E) \setminus V(N)$ を満たすとき，単に S をパラメータ制約と呼ぶ場合もある．

定義 1.6
$a \in L^m$ に対して，特価準同型 (specialization homomorphism) $\sigma_a : K[\bar{X}, \bar{A}] \to L[\bar{X}]$ を各 $a_i \in \bar{A}$ への a の自然な代入として定義する．

定義 1.7
$S \subseteq L^m$ を代数構成的集合 (algebraically constructible subsets) とする．多項式集合 $F \subset K[\bar{X}, \bar{A}]$ が以下の条件を満たすとき，$\mathcal{P} = \{(S_1, \mathscr{T}_1), \ldots, (S_\ell, \mathscr{T}_\ell)\}$ を F に関する S 上の**包括的多項式項集合系（comprehensive polynomial support system; CPSS）**と呼ぶ．

- $S_1, \ldots, S_\ell$ は L^m の構成的部分集合
- $\bigcup_{i=1}^{\ell} S_i \supseteq S,\ S_i \cap S_j = \phi \quad (\forall i, j \in \{1, \ldots, \ell\},\ i \neq j)$
- $\forall i \in \{1, \ldots, \ell\},\ \forall a_i \in S_i \subset L^m,\ \mathscr{T}_i = T_{\bar{X}}(\sigma_{a_i}(F))$

特に，$S = L^m$ を満たす場合，上記 $\mathcal{P}$ を単に F の包括的多項式項集合系と呼ぶ．また，$S = \phi$ であるとき，任意の多項式集合 F の S 上の包括的多項式項集合系を ϕ とする．

以下に包括的多項式項集合系を構成するためのアルゴリズムを構成するための補題を記す．実際のアルゴリズムでは，L^m の構成的部分集合 S_i をパラメータ制約 (E_i, N_i) のそれぞれの Affine 多様体の差 $V(E_i) \setminus V(N_i)$ で表すこととする．

補題 1.8
パラメータ制約 (E, N) と多項式集合 $F \subset K[\bar{X}, \bar{A}]$ に対して，$\forall t \in M_{\bar{X}}(F), t \in K[\bar{X}]$ を満たすとき，F の $V(E) \setminus V(N)$ 上の包括的多項式項集合系は $\{(E, N, M_{\bar{X}}(F))\}$ となる．

証明．仮定より，$\forall a \in V(E) \setminus V(N), \sigma_a(F) = F$ が成立する．よって，$T_{\bar{X}}(\sigma_a(F)) = T_{\bar{X}}(F)$． □

補題 1.9
パラメータ制約 (E, N) に対し $S = V(E) \setminus V(N)$ とする．多項式集合 $F \subset K[\bar{X}, \bar{A}]$ に対し，F に含まれる多項式の中で $m \notin K[\bar{X}]$ を満たす単項式 m を含むものが存在すると仮定する．ただし，$c \in K,\ t \in T_n,\ m = c{\cdot}t$ とする．このとき，$S_E = V(E \cup \{c\}) \setminus V(N),\ S_N = V(E) \setminus V(N \wedge \{c\})$ は $S_E \cup S_N \supseteq S,\ S_E \cap S_N = \phi$ を満たす L^m の構成的部分集合である．

証明．まず

$$\begin{aligned} S_E &= V(E \cup \{c\}) \setminus V(N) \\ &= (V(E) \cap V(\{c\})) \setminus V(N) \\ &= (V(E) \setminus V(N)) \cap (V(\{c\}) \setminus V(N)) \\ &= S \cap \tilde{N} \end{aligned}$$

ただし，$\tilde{N} := V(\{c\}) \setminus V(N)$．次に，

$$\begin{aligned} S_N &= V(E) \setminus V(N \wedge \{c\}) \\ &= V(E) \setminus (V(N) \cup V(\{c\})) \\ &= (V(E) \setminus V(N)) \cap (V(E) \setminus V(\{c\})) \\ &= S \cap \tilde{E} \end{aligned}$$

となる．ただし，$\tilde{E} := V(E) \setminus V(\{c\})$．よって，

$$
\begin{aligned}
S_E \cup S_N &= (S \cap \tilde{N}) \cup (S \cap \tilde{E}) \\
&= ((S \cap \tilde{N}) \cup S) \cap ((S \cap \tilde{N}) \cup \tilde{E}) \\
&= S \cap ((S \cap \tilde{N}) \cup \tilde{E}) \\
&= S \cap ((S \cup \tilde{E}) \cap (\tilde{N} \cup \tilde{E})) \\
&= S \cap (S \cup \tilde{E}) \cap (\tilde{N} \cup \tilde{E}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで，この式 (1) に出てきた $\tilde{N} \cup \tilde{E}$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{N} \cup \tilde{E} &= (V(\{c\}) \setminus V(N)) \cup (V(E) \setminus V(\{c\})) \\
&= (V(N)^c \cap V(\{c\})) \cup (V(\{c\})^c \cap V(E)) \\
&= \{(V(N)^c \cap V(\{c\}) \cup V(\{c\})^c)\} \cap \{(V(N)^c \cap V(\{c\}) \cup V(E))\} \\
&= \{(V(N)^c \cup V(\{c\})^c) \cap L^m\} \cap \{(V(N)^c \cup V(E)) \cap (V(\{c\}) \cup V(E))\} \\
&= (V(N)^c \cup V(\{c\})^c) \cap (V(N)^c \cup V(E)) \cap (V(\{c\}) \cup V(E)) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と式変形できる．今，

$$
S = V(E) \setminus V(N) = V(N)^c \cap V(E)
$$

より，

$$
V(N)^c \supseteq S, \quad V(E) \supseteq S
$$

が成り立つ．よって，

$$
V(N)^c \cup V(\{c\})^c \supseteq S, \quad V(N)^c \cup V(E) \supseteq S, \quad V(\{c\}) \cup V(E) \supseteq S
$$

が成立し，これと (2) の結果より，

$$
\begin{aligned}
\tilde{N} \cup \tilde{E} &\supseteq S \cap S \cap S \\
&\supseteq S \qquad (3)
\end{aligned}
$$

が成立する．よって，$S \cup \tilde{E} \supseteq S$ であることと，(1), (3) より，

$$
\begin{aligned}
S_E \cup S_N &\supseteq S \cap S \cap S \\
&\supseteq S \qquad (4)
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
S_E \cap S_N &= (S \cap \tilde{E}) \cap (S \cap \tilde{N}) \\
&= S \cap (\tilde{E} \cap \tilde{N}) \\
&= \phi \qquad (5)
\end{aligned}
$$

以上 (4), (5) より，S_E, S_N は $S_E \cup S_N \supseteq S$, $S_E \cap S_N = \phi$ を満たす L^m の構成的部分集合である． □

これらの補題を基に，多項式集合 F から，その包括的多項式集合系 $\mathcal{P}$ を求めるアルゴリズムを記す．ただし，集合 A, B に対して，$A \wedge B := \{ab \,:\, a \in A,\ b \in B\}$ と定義する．

Algorithm 2 パラメータ空間の分割（呼び出し）

input: 多項式集合 $F = \{f_1, \dots, f_k\} \subset K[\bar{X}, \bar{A}]$

output: F の包括的多項式項集合系 $\mathcal{P} = \{(E_1, N_1, \mathscr{T}_1), \dots, (E_\ell, N_\ell, \mathscr{T}_\ell)\}$

1: **function** ParameterDivision(F)
2: **return** ParameterDivisionMain($\{(\phi, \{1\}, M_{\bar{X}}(F))\}$)
3: **end function**

Algorithm 3 パラメータ空間の分割（本体）

input: $\{(E, N, \mathscr{T})\}$（ただし $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_k\},\ N = \{a_N\},\ a_N \in K[\bar{A}]$ とする．）

output: PolySet($\mathscr{T}$) の $V(E) \setminus V(N)$ 上の包括的多項式項集合系 $\{(E_1, N_1, \mathscr{T}_1), \dots, (E_{\ell'}, N_{\ell'}, \mathscr{T}_{\ell'})\}$

1: **function** ParameterDivisionMain($\{(E, N, \mathscr{T})\}$)
2: **if** $E \neq \phi \wedge$ ReducedGröbnerBasis($E, \prec_{\bar{A}}$) $= \{1\}$ **then**
3: **return** ϕ
4: **end if**
5: **if** $a_N \neq 1 \wedge E \neq \phi \wedge$ ReducedGröbnerBasis($E \cup \{1 - y \cdot a_N\}, \prec_{\bar{A}, y}$) $= \{1\}$ **then**
6: **return** ϕ
7: **end if**
8: **if** $\forall i \in \{1, \dots, k\},\ \forall t_i \in T_i,\ t_i \in K[\bar{X}]$ **then**
9: **return** $\{(E, N, \mathscr{T})\}$
10: **end if**
11: **if** $\forall j \in \{1, \dots, \ell\},\ \exists t_j \in T_j,\ t_j \notin K[\bar{X}]$ **then**
12: $m \leftarrow t_j$
13: $c,\ t \leftarrow \mathrm{coeff}_{\bar{X}}(m),\ \mathrm{term}_{\bar{X}}(m)$
14: **end if**
15: $\mathscr{T}_E \leftarrow \{T_1, \dots, T_{j-1}, T_j \setminus \{m\}, T_{j+1}, \dots, T_k\})$
16: $\mathscr{T}_N \leftarrow \{T_1, \dots, T_{j-1}, (T_j \cup \{t\}) \setminus \{m\}, T_{j+1}, \dots, T_k\})$
17: **return** ParameterDivisionMain($E \cup \{c\}, N, \mathscr{T}_E$) $\cup$ ParameterDivisionMain($E, N \wedge \{c\}, \mathscr{T}_N$)
18: **end function**

補題 1.10

アルゴリズム 3 において，パラメータ制約 (E, N) が inconsistent であるとき，必ず 2，5 行目の if 文の条件のうちのどちらかを満たす．

証明. パラメータ制約 (E, N) が inconsistent であるとき，$V(E) \setminus V(N) = \phi$ が成り立つ．

$$\begin{aligned} & V(E) \setminus V(N) = \phi \\ \Leftrightarrow & V(E) \subseteq V(N) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{E} \subseteq \sqrt{N} \end{aligned} \tag{6}$$

以下，式 (6) が成り立つと仮定する．

$V(E) = \phi$ のとき， □

定理 1.11
アルゴリズム 3 は正当性と有限停止性を有する．

証明．まず，正当性を示す．

2，5 行目の if 文では，パラメータ制約が inconsistent な場合を検出している．逆にこのとき，補題 1.10 より，パラメータ制約が inconsistent な場合を全て検出することができている．

補題 1.8 より，8 行目の if 文の条件を満たす場合の包括的多項式項集合系は $\{(E, N, \mathscr{T})\}$ である．

11 行目の if 文では，8 行目の if 文の条件を満たしていないため，$T \in \mathscr{T}$ においてパラメータを含む項 t が必ず存在する．ここで，$S = V(E) \setminus V(N)$, $S_E = V(E \cup \{c\}) \setminus V(N)$, $S_N = V(E) \setminus V(N \wedge \{c\})$ とする．補題 1.9 より，S_E, S_N は $S_E \cup S_N \supseteq S$, $S_E \cap S_N = \phi$ を満たす L^m の構成的部分集合である．これに加え，これまでの証明の中で，それぞれの if 文での出力の正当性が示されているため，最終的に関数を再帰的に呼び出す 11 行目の if 文の出力も正しいことが導かれ，アルゴリズム 3 の正当性が示された．

次に，アルゴリズム 3 の有限停止性を示す．4 つに分岐する if 文の中で，2, 5, 8 行目の if 文に入った場合は明らかに有限停止性を有する．11 行目の if 文に入った場合，$m \notin K[\bar{X}]$ を満たす単項式 m が存在するが，15, 16 行目にて，もともと m が属していた単項式集合 T_j から m が取り除かれるため，集合族 $\mathscr{T}_E$ 及び $\mathscr{T}_N$ 全体では，$\bar{m} \notin K[\bar{X}]$ を満たす単項式は必ず 1 つ減っている．そのため，再帰呼び出しの中で必ず 8 行目の if 文の条件を満たすときが訪れるため，アルゴリズム 3 は有限停止性を有する． □

系 1.12
アルゴリズム 2 は正当性と有限停止性を有する．