1　基本的な定義

定義 1.1 ([Fre09, p8,9, Definition3.1])**.** 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

- $\mathcal{U}$ が凸 *(convex)* であるとは，

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U},\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ \lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$$

  を満たすときをいう．
- **凸多面体** *(convex polyhedron)* とは，有限個の半空間の交点として得られる凸型の集合である．
- 集合 $\mathcal{V}$ の**凸包** *(convex hull)* とは，その集合を含む $\mathbb{R}^d$ のすべての凸部分集合の交点と定義される．
- $\mathcal{U}$ は有界な多面体である場合，**超多面体** *(polytope)* と呼ばれる．すべての polytope は，有限の点の集合の convex hull である．また，polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ の $\mathcal{V}$-presentation とは，d 個の点 $v_1, \dots, v_d$ によって $P = \mathrm{conv}\{v_1, \dots, v_d\}$ と表されるときをいう．ただし，$1 \leq n < d$.
- $\mathbb{R}^d$ の凸多面体 (convex polyhedron) の**円錐** *(cone)*C は，

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C,\ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{u} \in c$$

  のように定義される．

定義 1.2 (Minkowski 和, [GS93, p247])**.** 2 つの polytope $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して，*Minkowski* **和** $P_1 + P_2$ を

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \exists x_1 \in P_1, \exists x_2 \in P_2, x = x_1 + x_2\}$$

のように定義する．Minkowski 和は，可換であり結合法則が成り立つため，2 つ以上の polytope にも自然に一般化することができる．

以下，自然数全体の集合を $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$，$K$ を任意の体とし，変数の集合 $\bar{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする．多項式環 $K[\bar{X}]$ に含まれる項全体の集合を $\mathcal{T}_{\bar{X}}$ とする．$\bar{X}$ の任意の指数ベクトル $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し，$K[\bar{X}]$ の任意の単項式を X^α で表現する．また，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ で表す．

定義 1.3 (Newton polytope)**.** 多項式 $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} c_i X^{\alpha_i}$ の *Newton polytope* $\mathcal{N}(f)$ を，$\mathbb{R}^n$ における単項式の convex hull で定義する．つまり，

$$\mathcal{N}(f) = \mathrm{conv}\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$$

である．また，多項式集合 $F = \{f_1, \dots, f_k\} \subset K[\bar{X}]$ の Newton polytope を，それぞれの多項式の Newton polytope の Minkowski 和

$$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(f_1) + \cdots + \mathcal{N}(F)$$

で定義する．また，多項式 f の *affine Newton polyhedron* $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(f)$ を Minkowski 和

$$\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(f) = \mathcal{N}(f) + \mathbb{R}^n_-$$

で定義する．多項式集合 F についても同様に，

$$\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F) = \mathcal{N}(F) + \mathbb{R}^n_-$$

で定義する．

定義 1.4 (state polytope, see [BM88])**.** イデアル I と，I の任意の Gröbner 基底と一対一の関係にある polytope $\mathcal{P}_I$ を *state polytope* という．

注意 1.5 ([GS93, p260, Theorem3.1.1])**.** イデアル I に関する state polytope $\mathcal{P}_I$ は Newton polytope の一般化である．また，$I = \langle f \rangle$ を主イデアルとすると，その Gröbner fan $\mathcal{G}(I)$ は Newton polytope $\mathcal{N}(f)$ の normal fan に等しい．

2 Gröbner 基底と polytope の Minkowski 和

定理 2.1 ([GS93, p263, Proposition3.2.1])**.** 多項式集合 $F = \{f_1, \ldots, f_k\} \subset K[\bar{X}]$ に対して，affine Newton polyhedron $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)$ の各頂点は，F に関する項順序の同値類と一対一に対応している．

証明. 多項式 $f_i \in F$ は $f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{t_i} c_{ij} X^{\alpha_{ij}}$ で表されるとする．2 つの異なる項順序 $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ は多項式集合 F が任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して

$$\max\{\alpha_{ij} w_1 \ : \ 1 \leq j \leq t_i\} = \max\{(\alpha_{ij}, w_1) \ : \ 1 \leq j \leq t_i\}$$

を満たすときに限り等しくなる．以下のような項のインデックスに関する集合 $\mathcal{J}$ を考える．

$$\mathcal{J} = \{\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k \ : \ \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ 1 \leq j_i \leq t_i\}$$

$\mathcal{J}$ の各要素 $\boldsymbol{j}$ に（おそらく空である開集合の）polyhedral cone $C_{\boldsymbol{j}}$ を

$$C_{\boldsymbol{j}} = \{w \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ \forall j \in \{1, \ldots, t_i\} \setminus \{j_i\},\ (\alpha_{ij_i}, w) > (\alpha_{ij}, w)\}$$

のように定義する．重みベクトル w が $C_{\boldsymbol{j}}$ に含まれるのは，$\boldsymbol{j}$ でインデックス付けされた単項式が w に関する F の先頭項である場合に限られる．したがって，F に関する項順序の同値類は、空ではない $C_{\boldsymbol{j}}$ と一対一に対応している．

Newton polytope $\mathcal{N}(F)$ は、点 $\alpha_{\boldsymbol{j}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i}$ の convex hull である (ただし $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}$)．また，affine Newton polyhedron $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)$ の頂点の集合は，$\mathcal{N}(F)$ の頂点の部分集合である．点 $\alpha_{\boldsymbol{j}}$ は $\mathbb{R}^n$ への線型汎関数 ($\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}_+$) が最大値である場合に先頭項となるため，その場合に限って $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)(= \mathcal{N}(F) + \mathbb{R}^n_-)$ の頂点となる．これは、$(\alpha_{\boldsymbol{j}}, w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_{j_i} w$ が他のすべての $\boldsymbol{j}' \in \mathcal{J}$ に対して $(\alpha_{\boldsymbol{j}'}, w)$ より大きいような重みベクトル w が存在することを意味している．しかし，このとき $w \in C_{\boldsymbol{j}}$ となる．よって，空でない $C_{\boldsymbol{j}}$ は polyhedron $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)$ の頂点への法線円錐 (the normal cones to the vertices) であることを示した。 □

系 2.2 ([GS93, p264, Corollary3.2.2])**.** 斉次な多項式集合 $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ に対して，Newton polytope $\mathcal{N}(F)$ の各頂点は，F に対する項順序の同値類と一対一対応している．

証明. f_i が R_i-斉次であるとし，$R = R_1 + \cdots + R_k$ とする．このとき，Newton polytope $\mathcal{N}(F)$ は affine 超平面 (affine hyperplane)

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} y_j = R \right\}$$

に含まれる．$\mathcal{N}(F)$ のある頂点 $\alpha_{\boldsymbol{j}}$ があるベクトル w に対して極大 (extremal) であるならば，それは任意の $c \in \mathbb{R}_+$ に対して $w + (c, c, \ldots, c)$ の方向でも極大 (extremal) である．

$$(\because \forall \alpha \in \mathcal{N}(F),\ (\alpha, \boldsymbol{c}) = cR = (const)\ )$$

c を適切にとったときに，$\alpha_{\boldsymbol{j}}$ は $\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)$ の頂点でもあることを示す．

$$\beta \in \mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F),\ \gamma \in \mathbb{R}^n_-,\ \beta = \alpha + \gamma$$

とする．$\mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F) \subseteq \mathcal{N}(F)$ より，$\beta \in \mathcal{N}(F)$．故に，$(\alpha_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{c}) = (\beta, \boldsymbol{c}) = cR$．よって，

$$(w + \boldsymbol{c}, \beta) = (w, \beta) + cR \tag{2.1}$$

$$(w + \boldsymbol{c}, \alpha_{\boldsymbol{j}} + \gamma) = (w, \alpha_{\boldsymbol{j}}) + cR + (w, \gamma) + (\boldsymbol{c}, \gamma) \tag{2.2}$$

式 (2.1) と式 (2.2) は等しくなるため，

$$(w, \gamma) + (\boldsymbol{c}, \gamma) = \boldsymbol{0}$$

よって，

$$\begin{aligned} &\gamma = \boldsymbol{0} \\ \Longleftrightarrow\ &\alpha_{\boldsymbol{j}} = \beta \in \mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F) \end{aligned}$$

$\alpha_{\boldsymbol{j}} \in \mathcal{N}_{\mathrm{aff}}(F)$ がわかったため，定理 2.1 と同様に導ける． □

定理 2.1 と系 2.2 では，多変数多項式集合において定義可能な全ての項順序を列挙することは，$\mathcal{V}$-presented な convex polytope の Minkowski 和を構成する問題に帰着できることを示している．Newton polytope $\mathcal{N}(F)$ の各頂点の開である normal cone の中の 1 つのベクトルを選択することにより，斉次多項式の集合 F の項順序に関して，先頭項に関するシステム (条件の系？) を得ることができる．

系 2.3 ([GS93, p264, Corollary3.2.3])**.** 斉次イデアル I の任意の universal Gröbner basis を $\mathcal{U} \subset I$ とし，I の state polytope を $\mathcal{P}_I$ とする．このとき，$\lambda\mathcal{P}_I$ が $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ の Minkowski 和で表現できるような $\lambda \in \mathbb{R}_+$ が存在する．

証明．By remark1.5 and corollary2.2, the maximum cells of the normal fan $N_{\mathrm{fan}}(\mathcal{P}_I)$ are unions of closures of maximum cells of the normal fan $N_{\mathrm{fan}}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$. This implies that $N_{\mathrm{fan}}(\mathcal{N}(\mathcal{U})) \preceq N_{\mathrm{fan}}(\mathcal{P}_I)$. The assertion follows from [GS93, p253, Lemma2.1.6]. □

$\mathcal{N}(F)$ が zonotope である特殊なケースは，理論計算機科学にとって非常に興味深いものである．すべての入力多項式 f が単項式の差であると仮定する．この場合，イデアルメンバーシップ問題は，可換半群のワード問題 (the word problem for commutative semigroups) となる．この問題の実用的な重要性に加えて，Mayr and Meyer の doubly-exponential lower-bound construction がこのような特殊な形をしていることは注目に値します．ここで，Newton polytope $\mathcal{N}(F)$ は，k 個の線分 $\mathrm{conv}(\alpha_i, \beta_i)$ の Minkowski 和に等しく，[GS93] の §2.2 の議論により，この zonotope の頂点は、超平面配置 (hyperplane arrangement)

$$\{\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ (\alpha_i - \beta_i, x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}\}$$

の最大セルと一対一対応している．

一般的なケースに戻って，GROBNER BASIS DETECTION の複雑性について示す．そのために，2 つの補題が必要である．1 つ目の命題は、与えられた多項式集合に関する項順序に対応する重みベクトルのサイズを扱うものである．これは，格子ポリトープ (lattice polytope) を用いることで定式化される．

補題 2.4 ([GS93, p264, Lemma3.2.4])**.** $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ に対して $P = \mathrm{conv}\{v_1, \ldots, v_k\}$ を irredundant な $\mathcal{V}$-presented polytope とし，定数 R を座標の絶対値の上界とする．任意の $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して，絶対値の上界が $(2dR)^{2d}$ である整数ベクトル $w_i \in N_{\mathrm{fan}}(\{v_i\}, P)$ が存在する．

証明. 一旦略 □

次の補題は，与えられた重みベクトルに対して先頭単項式よりも小さい，異なる単項式の数に関するものである．この場合は diophantine 不等式の解で定式化される．

補題 2.5 ([GS93, p265, Lemma3.2.5])**.** 2 つの正の整数ベクトル $v, w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ とおく．r を u の上界，s を w の下界とする．このとき，

$$\begin{aligned}(w, x) - (w, v) &\leq 0,\\ x &\geq 0\end{aligned}$$

の整数解 x の上界は $(nrs + 1)^n$ で定められる．

証明. 一旦略 □

定理 2.6. 多項式集合 $F = \{f_1, \ldots, f_k\} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ において，変数の個数 n を固定する．また，それぞれの多項式 f_i において，項の数の最大値を t とし，項の全次数の最大値は R であるとする．このとき，Gröbner basis detection を解くアルゴリズムの最悪計算量は $\mathcal{O}\left(k^{n+2}t^{2n-1}R^{(2n+1)n}\right)$ となる．

証明. Newton polytope $\mathcal{N}(f_1), \ldots, \mathcal{N}(f_k)$ は，L_1 ノルムの上界が R であり，要素が整数である頂点を最大 t 個持つ．affine Newton polytope を扱うために，unit cube $C^n = \mathrm{conv}\left\{\{-1, 1\}^n\right\}$ を定義する．C^n のサイズは（検討中のどのモデルにおいても）一定である．そして、補題 2.4 により，F に関する項順序の同値類は，以下の頂点に対応する．

$$P = \mathcal{N}(F) + C^n = \mathcal{N}(f_1) + \cdots + \mathcal{N}(f_k) + C^n$$

の頂点に対応し，その法線円錐 (normal cone) は $\mathbb{R}^n_+$ に含まれる．[GS93, Theorem2.3.7] より，P を求めるための計算量は $\mathcal{O}(k^n t^{2d-1})$ となる．さらに，P の各頂点について，外法線円錐 (the cone of outer normals) の内側にある参照点を計算する．補題 2.4 により，これらのベクトルは積分 (??, integral) であり，その絶対値が上から $(2nR)^{2n}$ で囲まれた座標を持つと仮定できることがわかる．以下では，この事実は，削減ステップ数を推定するためにのみ使用される．縮小アルゴリズムは，等価な重みベクトルの変更に対して不変であるため，[GS93, Theorem2.3.7] に由来する重みベクトルは，縮小のための定義となる．(ここらへん？？？)

まだ途中... □

参考文献

[BM88] David Bayer and Ian Morrison. Standard bases and geometric invariant theory i. initial ideals and state polytopes. *J. Symb. Comput.*, 6(2/3):209–217, 1988.

[Fre09] Jacqueline Freeke. Linking groebner bases and toric varieties, 2009.

[GS93] Peter Gritzmann and Bernd Sturmfels. Minkowski addition of polytopes: computational complexity and applications to gröbner bases. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2):246–269, 1993.