パラメータを伴ったGröbner基底の構造的な検出について

— Comprehensive structural Gröbner basis detection —

所属専攻　人間環境学専攻
学籍番号　208D418D
学 生 氏 名　大島谷 遼
指導教員氏名　長坂 耕作 准教授

計算機代数の分野において重要な計算の 1 つに Gröbner 基底の計算がある．Gröbner 基底の計算は Buchberger アルゴリズム [Buc06] に代表されるように，イデアルと項順序を指定して，一定の条件を満たすようなイデアルの基底を求めるものである．F_4 アルゴリズム [Fau99] など他の多くのアルゴリズムでも，Buchberger アルゴリズムの系譜が受け継がれており，基本的なアルゴリズムの考え方は変わっていない．

一方で，以下の例のように，与えられた多項式集合 F がある項順序においてそのままイデアル $\langle F\rangle$ の Gröbner 基底となっているような場合が存在する．

例． 以下の多項式集合 F は，$z \succ y \succ x$ の全次数辞書式順序及び全次数逆辞書式順序においてイデアル $I = \langle F\rangle$ の Gröbner 基底となっている．

$$F = \left\{2xy + yz,\ x^2 + y + z\right\} \subset \mathbb{C}[x, y, z]$$

このように，直接 Gröbner 基底の計算をする前に，計算対象である F 自身がそのまま Gröbner 基底となっているような項順序を求めることができれば，項順序を指定しない Gröbner 基底が必要な場面では有効な計算方法であることが考えられる．また，仮に一定の項順序が必要な場面でも，FGLM アルゴリズム [FGLM93] や Gröbner walk[CKM93] などに代表される change of ordering のアルゴリズムを活用することによって，有用な計算手段となることが考えられる．

このように「そのまま Gröbner 基底である」ような項順序を検出する問題は，Sturmfels らによって解かれた既知の問題であり，*Gröbner basis detection*[GS93] や *Structural Gröbner basis detection*[SW97] という名前が付けられている．本論文では，これらの問題において，問題の設定をパラメータを伴った多項式環へと拡張し，それに付随して発見された定理についても取り上げる．まず第 1 章では，Sturmfels らとは違ったアプローチから，*Structural Gröbner basis detection* の問題を捉え，そこで新たに発見された定理を紹介する．次に，第 2 章では，*Gröbner basis detection* と *Structural Gröbner basis detection* について，既に知られている部分について述べる．第 3 章では，これらの問題をパラメータを伴った多項式環へと拡張するために，パラメータ空間を分割するためのアルゴリズムの直接的な方法を紹介する．最後に，第 4 章では，パラメータ空間の分割を効率化するための議論を行い，最終的なアルゴリズムを完成させる．

第 1 章

はじめに

1.1　背景

多項式集合 F が与えられ Gröbner 基底の計算を行う際，Buchberger アルゴリズムなどによりイデアルと項順序を固定し，Gröbner 基底を得るための計算を行うのが一般的である．しかし，計算を行う前に F がそのまま Gröbner 基底であるような項順序を得ることができれば，従来の計算を行わずに Gröbner 基底を得ることができる．また，ここで得た項順序を change of ordering のアルゴリズムによって変換することで，任意の項順序での Gröbner 基底を得ることも可能である．

第 2 章

第 3 章

第 4 章

参考文献

[Buc06] Bruno Buchberger. Bruno buchberger’s phd thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of symbolic computation*, 41(3-4):475–511, 2006.

[CKM93] Stephane Collart, Michael Kalkbrener, and Daniel Mall. The gröbner walk. *Dept. of Math., Swiss Federal Inst. of Tech*, 8092, 1993.

[Fau99] Jean-Charles Faugere. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f4). *Journal of pure and applied algebra*, 139(1-3):61–88, 1999.

[FGLM93] Jean-Charles Faugere, Patrizia Gianni, Daniel Lazard, and Teo Mora. Efficient computation of zero-dimensional gröbner bases by change of ordering. *Journal of Symbolic Computation*, 16(4):329–344, 1993.

[GS93] Peter Gritzmann and Bernd Sturmfels. Minkowski addition of polytopes: computational complexity and applications to gröbner bases. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2):246–269, 1993.

[SW97] Bernd Sturmfels and Markus Wiegelmann. Structural gröbner basis detection. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 8(4):257–263, 1997.