

Rafael Alves de Lima Monteiro

**A Beleza da  
Geometria Fractal**

Brasil

2024

Rafael Alves de Lima Monteiro

## **A Beleza da Geometria Fractal**

Introdução à geometria fractal e exploração de figuras com natureza autossemelhante construídas com geometria simples.

Colégio Único Educacional

Orientador: João Pedro Papalardo Azevedo

Brasil

2024

---

Rafael Alves de Lima Monteiro

A Beleza da

Geometria Fractal/ Rafael Alves de Lima Monteiro. – Brasil, 2024-

31 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: João Pedro Papalardo Azevedo

Trabalho Curricular Científico – Colégio Único Educacional, 2024.

1. Geometria. 2. Fractais. I. João Papalardo. II. Colégio Único Educacional. III. A Beleza da Geometria Fractal.

CDU 02:141:005.7

---

*Este trabalho é dedicado aos inúmeros amantes da  
computação, que permitiram que a humanidade visse além de  
qualquer mísera folha de papel.*

# Agradecimentos

Aqui se agradece a todos os professores de todas as áreas, poetas capazes de imbuir com conhecimento suas palavras e transmitir com exatidão e simplicidade tudo aquilo que a humanidade levou dois milênios para descobrir. Em sua arte de transformar mentes, formaram pais que tanto contribuem para a criação de mais e mais pensadores, autores e divulgadores. Na beleza do ato de educar, o docente dota não só seu discípulo mas também sua comunidade. Presenteia todo o corpo social com a insaciável necessidade do saber.

Faz-se reverência também àqueles que tomam para si o trabalho do pesquisador, fonte de todo o ciclo do progresso científico. Na sua curiosidade se sintetiza um mundo novo de possibilidades. Renova-se um sentimento de esperança que traz de volta sentido frente a um universo tão peculiarmente desprovido de um.

A realidade, obra de difícil compreensão, é mais razoável e esbelta quando se investe no conhecer.

*“A beleza é insuportável, nos leva ao desespero, nos  
oferecendo por um minuto a visão de uma eternidade que  
gostaríamos de esticar até o fim do tempo.”  
(Albert Camus, Cadernos 1935-1942)*

# Resumo

Aqui se apresenta uma simples exposição ao campo da geometria fractal, introduzindo tópicos como autossimilaridade e recursão por meio da exploração do paradoxo do litoral, de três figuras fractais - o conjunto de Cantor, o floco de Koch e a curva Dragão - e da implementação de geradores de fractais, utilizando os algoritmos do Sistema Semi-Thue e Lindenmayer.

**Palavras-chaves:** geometria, paradoxo do litoral, fractais, geradores.

# Abstract

We present a simple exposition to the field of fractal geometry, introducing topics such as self-similarity and recursion through means of the exploration of the coastline paradox, three fractal figures - Cantor set, Koch snowflake and the Dragon curve - and the implementation of fractal generators, utilizing the algorithms of the Semi-Thue system and the Lindenmayer system.

**Key-words:** geometry, coastline paradox, fractals, generators.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Duas aproximações do comprimento da costa britânica. . . . .	11
Figura 2 – Sete primeiras iterações do conjunto de Cantor . . . . .	13
Figura 3 – Quatro primeiras iterações do Floco de Koch . . . . .	15
Figura 4 – Primeiras iterações da curva de Koch . . . . .	17
Figura 5 – Exemplo de tesselação com o floco de Koch . . . . .	18
Figura 6 – Algumas iterações da curva de Hilbert . . . . .	19
Figura 7 – A curva dragão, gerada a partir da dobra de um pedaço de papel . . . . .	20
Figura 8 – Primeiras iterações da curva Dragão . . . . .	20
Figura 9 – Quarta iteração da curva de Gopher . . . . .	21
Figura 10 – Iterações do Tapete por Sistema Semi-Thue . . . . .	24
Figura 11 – Fractal gerado a partir de um sistema semi-Thue . . . . .	25
Figura 12 – Fractal gerado utilizando o sistema Lindenmayer . . . . .	27



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	O PARADOXO DO LITORAL . . . . .	11
3	O CONJUNTO DE CANTOR . . . . .	13
4	O FLOCO DE KOCH . . . . .	15
4.1	Soma de Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica . . . . .	15
4.2	Discussão do Floco de Koch . . . . .	16
5	A CURVA DRAGÃO . . . . .	19
6	GERADORES DE FRACTAIS . . . . .	23
6.1	Sistema Semi-Thue . . . . .	23
6.2	Sistema Lindenmayer . . . . .	25
7	CONCLUSÃO . . . . .	29
	REFERÊNCIAS . . . . .	31

# 1 Introdução

O campo da geometria fractal, inaugurado na década de 1970 pelo matemático polonês Benoît B. Mandelbrot, é de grande interesse para os aficionados por matemática, devido a seus hipnotizantes gráficos e infindáveis perguntas. Esta área tão jovem propõe problemas de complexidade que variam das noções matemáticas mais básicas aos próprios limites do conhecimento humano.

Um dos principais conceitos relacionados à geometria fractal é o da autossimilaridade. Essa propriedade é definida, basicamente, como a característica dos objetos matemáticos que contêm cópias completas de si mesmos. Um exemplo de uma estrutura autossimilar foi dado, de forma irônica, pelo próprio Mandelbrot em uma convenção sobre geometria fractal: um jornalista pediu a Mandelbrot que escrevesse o seu nome por extenso, ao que o matemático respondeu escrevendo “Benoît B. Mandelbrot”. O jornalista, vendo que havia uma inicial abreviada, pergunta qual é o nome que o “B” abrevia, ao que Mandelbrot responde - “O ‘B’ abrevia Benoît B. Mandelbrot”. Com isso, ele insinuava que seu nome continha uma cópia exata de si mesmo, e indicava que seria impossível escrevê-lo por extenso visto que seria um nome infinito.

Podemos encontrar figuras com esse tipo de detalhamento infinito constantemente em nossas vidas, em estruturas como as espirais das suculentas, o contorno do litoral brasileiro e até mesmo na nuvem que se produz ao colocar leite no café. Essas imagens autossimilares circundam silenciosamente toda a vivência humana, fato pouquíssimo explorado para um evento tão comum.

A banalidade da propriedade autossimilar, no entanto, não torna as figuras menos ricas em complexidade acadêmica. Utilizados amplamente na medicina oncológica e na computação gráfica, fractais têm o potencial de identificar tumores em pacientes e reduzir tamanhos de arquivos de imagens, diminuindo exponencialmente o consumo de lítio.

O objetivo deste texto, então, é tornar o leitor ciente das noções mais básicas sobre a geometria fractal, sua importância, bem como sobre a beleza e eventual simplicidade dessas figuras. Começaremos por discutir o paradoxo do litoral, problema que serve de perfeita introdução ao tópico. Logo após, iremos explorar três dos problemas apresentados nessa área da matemática na forma de três figuras que possuem propriedades fractais, sendo todas elas construídas a partir de geometria simples e de fácil acesso ao leigo - o conjunto de Cantor, o floco de Koch e a Curva Dragão. Por fim, produziremos juntos alguns algoritmos capazes de gerar fractais personalizados ao leitor.



## 2 O Paradoxo do Litoral

No ano de 1951, o matemático britânico Lewis Fry Richardson pesquisava se havia uma relação entre o tamanho das fronteiras entre os países e a probabilidade de haver conflitos entre eles. Durante a coleta de dados para seu estudo, no entanto, Richardson teve de parar sua pesquisa por encontrar um fato inesperado - enquanto Portugal divulgava que sua fronteira com a Espanha media 987 quilômetros, os espanhóis reportavam que essa fronteira media 1214 quilômetros.

Esta estranha confusão se deu devido ao método utilizado para realizar a medida da fronteira. Na época, se media o tamanho das fronteiras a partir de uma fotografia aérea do país, com várias réguas de tamanho fixo sobre essa fotografia e se contava quantas réguas eram necessárias para cobrir toda a fronteira. Para obter o valor final do comprimento dessa linha então, se multiplicava a quantidade de réguas usadas pelo comprimento da régua. O problema era que, por uma questão prática, as réguas eram grandes demais e ignoravam uma grande quantidade de detalhes da fronteira real. Dessa forma, o valor que cada país divulgava era uma estimativa, e não uma medida certa. Os portugueses usaram uma régua maior, e isso fez com que ignorassem mais detalhes da linha real, resultando em uma medida menor.

Impressionado com o fenômeno, Richardson decidiu realizar um outro grande experimento com a linha costeira britânica. Ele iria tirar uma fotografia aérea da Grã-Bretanha, e medir com palitinhos a costa. Esses palitinhos serviriam de réguas que estariam em uma escala com a costa real. Essas réguas teriam tamanhos diferentes: uma com 200, outra com 100 e outra com 50 quilômetros. Como esperava, todas suas medidas foram diferentes, e quanto menor a régua, maior a medida. Mais tarde, Mandelbrot encontraria a pesquisa de Richardson e provaria ainda que esse comportamento não iria convergir a um número finito - quanto mais o comprimento da régua se aproximasse de zero, mais o comprimento da costa se aproximaria do infinito. Na figura abaixo, por exemplo, a curva da esquerda é uma aproximação da costa da Grã-Bretanha com réguas de 50 quilômetros, que totaliza 3450 quilômetros de costa, enquanto na segunda, menos refinada, se usa réguas de 100 quilômetros, totalizando uma aproximação de 2800 quilômetros para a costa da mesma ilha. (MANDELBROT, 1989).



Figura 1 – Duas aproximações do comprimento da costa britânica.

Cada nível de detalhe, não importa quão pequeno, contribuiria para o comprimento da linha costeira,

desde um pequeno porto a um mísero grão de areia. Foi com esse pensamento que, em 1967, o matemático Benoît B. Mandelbrot deu início ao estudo da geometria fractal, observando a importância dos pequenos detalhes nas formas das figuras.

### 3 O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um conjunto formado por um processo recursivo sobre o intervalo inicial  $[0, 1]$ . Na primeira iteração desse processo, se divide o intervalo em três partes e se remove a do meio, resultando no conjunto  $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . A cada iteração conseguinte, se divide cada um dos intervalos restantes em três partes e se remove a do meio, e este processo segue infinitamente. O Conjunto de Cantor é um conjunto  $C$  cujos elementos nunca foram removidos do intervalo original.

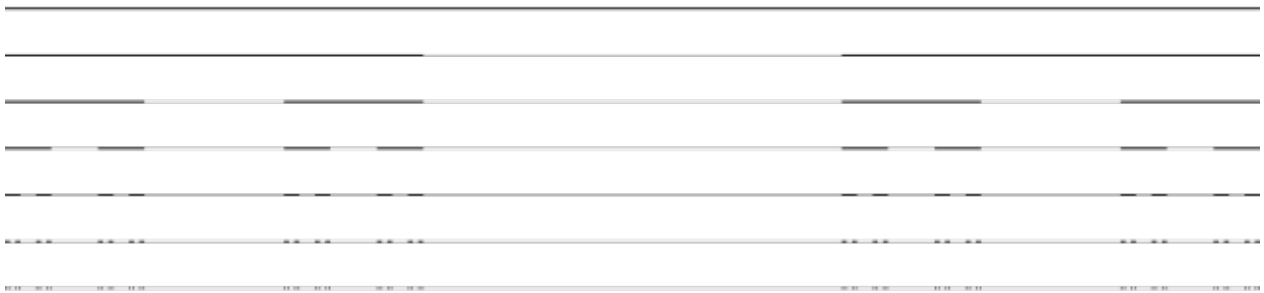


Figura 2 – Sete primeiras iterações do conjunto de Cantor

No que segue, vamos calcular qual é o comprimento total do conjunto de Cantor, isto é, o comprimento do conjunto que é o limite do processo de iterações descrito anteriormente. Aqui, o inteiro não-negativo  $n$  corresponde à etapa do processo em que estamos,  $c(X)$  representa o comprimento do conjunto  $X$ ,  $n(X)$  representa o número de elementos no conjunto  $X$  e  $C_n$  representa o conjunto restante da  $n$ -ésima iteração. Por exemplo, se  $n = 0$ , o conjunto dessa etapa é  $C_0 = [0, 1]$  e o comprimento é  $c(C_0) = 1$ . Se  $n = 1$ , então  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  e  $c(C_1) = \frac{2}{3}$ .

Sabendo disso, podemos agora começar a analisar o fractal proposto. A cada etapa, removemos o terço médio dos intervalos anteriores. Então, na segunda iteração, teremos de remover  $\frac{1}{3}$  de cada intervalo restante, cujos comprimentos são ambos de  $\frac{1}{3}$  e assim sendo, removeremos  $2(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ . O comprimento total removido na segunda iteração é de  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ . Na terceira iteração, removeremos mais  $\frac{4}{27}$ , totalizando  $\frac{19}{27}$  até agora. Percebemos que os comprimentos removidos a cada iteração formam uma progressão geométrica de razão  $\frac{2}{3}$  e termo inicial  $\frac{1}{3}$ . Assim sendo, podemos calcular o comprimento removido a cada iteração com a fórmula  $a_n = a_{n-1} + [\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}]$ , que provém da definição de uma progressão geométrica.

Para calcular o comprimento do conjunto restante a cada iteração, basta multiplicar por  $\frac{2}{3}$  o comprimento obtido na etapa anterior. Dessa forma,  $c(C_0) = 1 = (\frac{2}{3})^0$ ,  $c(C_1) = \frac{2}{3}$ ,  $c(C_2) = (\frac{2}{3})^2$  e assim por diante. Como o comprimento de  $C_n$  pode ser determinado a partir da fórmula  $(\frac{2}{3})^n$ , podemos ver que conforme  $n \rightarrow \infty$ , o denominador da fração cresce mais rápido que o numerador, fazendo com que a fração tenda a 0. Assim sendo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$  e, conseqüentemente, o comprimento do conjunto de Cantor é zero.

Diante desse contexto, podemos afirmar também que  $C$  tem infinitos elementos. Primeiramente, 0 e 1 nunca serão removidos do conjunto original, pois formam extremidades do intervalo que nunca estarão no

terço médio de qualquer intervalo possível entre as iterações do processo. A cada nova iteração se formam novas extremidades, números que nunca serão removidos por que nunca farão parte de um terço médio como o  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{7}{9}$ , etc. Já que a cada iteração, se aumenta o número de extremidades, com infinitas iterações teremos infinitas extremidades.

Conclui-se então que o conjunto de Cantor é constituído por infinitos números e possui comprimento total igual a zero.

## 4 O Floco de Koch

O Floco de Koch é uma forma geométrica auto-semelhante gerada a partir de um processo recursivo aplicado sobre um triângulo equilátero. Cada aresta da figura é dividida em três partes, removendo a do meio e conectando as partes restantes com mais duas linhas, que também medem, cada uma, um terço da aresta original. Estas fazem um ângulo de  $60^\circ$  com a aresta original, fazendo uma figura parecida com outro triângulo equilátero. Depois de aplicar este processo a cada aresta da figura, temos uma nova etapa do Floco de Koch. O Floco, representado na Fig. 3, é o resultado obtido ao repetir o processo infinitamente.

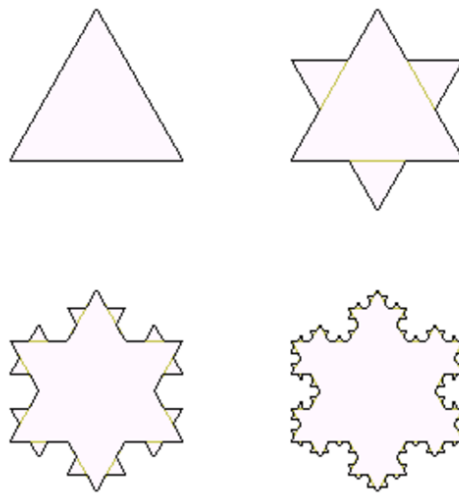


Figura 3 – Quatro primeiras iterações do Floco de Koch

No que segue, iremos calcular o perímetro da figura, sua área e vamos também explorar a propriedade de tesselação do Floco. Aqui, o número  $n \in \mathbb{N}$  corresponde à etapa do processo em que estamos e  $p_n$  corresponde ao perímetro da figura no  $n$ -ésimo passo. Para isso, no entanto, devemos antes desenvolver uma fórmula muito utilizada no estudo de progressões geométricas.

### 4.1 Soma de Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica

Progressão geométrica é o nome que se dá a um tipo particular de sequência, onde se obtém cada termo da progressão multiplicando o termo anterior por uma razão fixa. Um exemplo de progressão geométrica é a sequência  $3, 6, 12, 24, 48, 96 \dots$  que tem como termo inicial (que aqui será denotado como  $a_0$ ) o número 3 e razão (que simbolizaremos aqui como  $q$ ) o número 2.

Para entendermos como funcionará a soma dos infinitos termos, deduziremos antes a fórmula para a soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica finita. Podemos começar definindo o problema da



forma mais intuitiva possível, como a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão:

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Usando a definição de que  $a_n = a_{n-1} \cdot q$ , podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$S = a_0 \cdot q^0 + a_0 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1}.$$

A fim de simplificar a expressão, podemos manipulá-la e formar um sistema de equações entre nossa manipulação e a expressão que temos, e isso cancelará a maior parte das parcelas:

$$\begin{cases} q \cdot S = a_0 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \cdots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n \\ S = a_0 \cdot q^0 + a_0 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1} \end{cases}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$$\begin{aligned} qS - S &= a_0 \cdot q^n - a_0 \\ S(q - 1) &= a_0(q^n - 1) \\ S &= \frac{a_0(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

E com essa fórmula podemos somar os  $n$  primeiros termos de qualquer progressão geométrica. No entanto, como se pode deduzir pelo nome da seção, não estamos satisfeitos apenas com uma quantidade finita de termos.

Intuitivamente, isso pode parecer estranho: adicionar algo para sempre resultaria em um número infinitamente grande. Mas nas progressões geométricas, há um caso especial. Se a razão da nossa progressão tiver módulo menor que um, a soma dos termos dessa sequência tenderá a um número finito.

Isso se dá pelo fato de que, quando a nossa razão tem um módulo menor que um, quanto maior for o expoente dessa razão, menor será  $q^n$ . Eventualmente, esse valor será tão pequeno que será negligenciável. Considerando isso, podemos adaptar nossa fórmula para quando conseguirmos somar todos os termos de uma sequência infinita. Isto é, quando a razão  $q$  satisfizer  $|q| < 1$ :

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_0 \cdot (-1)}{q - 1} \\ S_\infty &= \frac{a_0}{1 - q}. \end{aligned}$$

## 4.2 Discussão do Floco de Koch

Agora, podemos começar a discutir o Floco. Começaremos pelo perímetro. Para entender o que acontece com ele ao longo do desenvolvimento, podemos analisar primeiro de forma isolada uma das arestas da figura inicial e sua evolução. Isto está representado na Figura 4. A cada ciclo, a aresta perderá  $\frac{1}{3}$  de seu comprimento original e ganhará mais  $\frac{2}{3}$ , nos deixando com um aumento relativo de  $\frac{4}{3}$  a cada estágio. Este processo irá se repetir em cada nova aresta formada, aumentando também em  $\frac{4}{3}$ . Como o perímetro da figura é multiplicado por  $\frac{4}{3}$  a cada etapa, podemos afirmar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ .

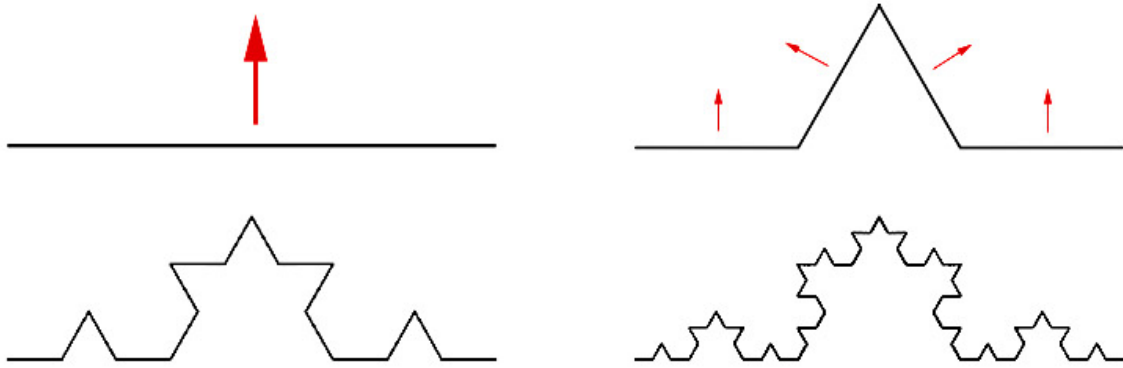


Figura 4 – Primeiras iterações da curva de Koch

Agora, vamos calcular a área do Floco. Para isso, vamos provar que:

- (1) O n° de triângulos adicionados a cada iteração segue uma progressão geométrica de razão 4 e termo inicial 3; e que
- (2) Os lados dos triângulos adicionados formam uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ .

Para provar (1); note que o número de triângulos adicionados a cada etapa é correspondente ao número de arestas da etapa anterior. Cada linha sempre dá lugar a quatro novas, visto que o terço médio de uma aresta é substituído por duas outras não-colineares. Assim sendo, como nossa figura começa com três arestas, temos uma progressão geométrica de razão 4 e termo inicial 3, como queríamos demonstrar.

Para provar (2); basta perceber que cada novo triângulo adicionado é formado com três segmentos de comprimento igual a  $\frac{1}{3}$  do segmento original. Dessa forma, os triângulos adicionados quando  $n = 1$  têm lado igual a  $\frac{1}{3}$  do lado original. Já quando  $n = 2$ , o lado passa a ser  $\frac{1}{9}$  do original. Quando  $n = 3$ , o lado é  $\frac{1}{27}$  do original, e assim por diante.

Finalmente, considerando que a área da figura pode ser representada por  $A$ , a área inicial da figura por  $A_0$  e que a fórmula da área do triângulo equilátero para um lado  $l$  é  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ , podemos afirmar que a área pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{(\frac{l}{3})^2\sqrt{3}}{4} + 12 \cdot \frac{(\frac{l}{9})^2\sqrt{3}}{4} + \dots \\
 &= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \left( 1 + 3 \left( \frac{1}{3} \right)^2 + 12 \left( \frac{1}{9} \right)^2 + 48 \left( \frac{1}{27} \right)^2 + \dots \right) \\
 &= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \left( 1 + 3 \cdot 4^0 \left( \frac{1}{3} \right)^2 + 3 \cdot 4 \left( \frac{1}{3^2} \right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left( \frac{1}{3^3} \right)^2 + \dots \right) \\
 &= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \frac{1}{4} \left( 4 + 3 \cdot 4 \left( \frac{1}{3} \right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left( \frac{1}{3^2} \right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left( \frac{1}{3^3} \right)^2 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \left( 4 + 3 \cdot 4 \left( \frac{1}{9} \right)^1 + 3 \cdot 4^2 \left( \frac{1}{9} \right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left( \frac{1}{9} \right)^3 + \dots \right) \\
&= \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \left( 4 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^n \left( \frac{1}{9} \right)^n \right) \\
&= \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \left( 4 + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^n \right) \\
&= \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \left( 4 + 3 \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} \right) \\
&= \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{32}{5} \\
&= \frac{2l^2\sqrt{3}}{5} \\
&= \frac{8}{5} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{8}{5} A_0.
\end{aligned}$$

Por fim, discutiremos a propriedade de tesselação do Floco de Koch. Quando se tem uma quantidade infinita de arestas nas figuras, e infinitas figuras que se encaixam em dois tamanhos de proporção 1 para  $\sqrt{3}$ , é possível encaixar essas figuras entre si de maneira que não há buracos entre elas, como podemos ver na Figura 5. Esse padrão pode se repetir infinitamente ao longo de um plano e ele nunca deixará buracos. Observe que essa propriedade só pode ser observada com um número infinito de iterações do processo recursivo. No entanto, se tomarmos o limite conforme o número de iterações tende a infinito, teremos figuras que se encaixarão impecavelmente.

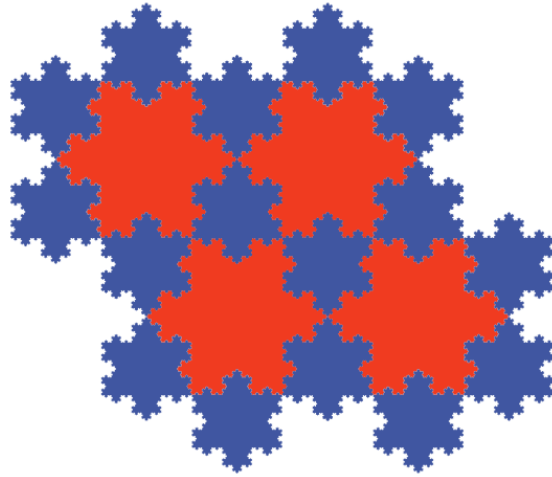


Figura 5 – Exemplo de tesselação com o floco de Koch

Conclui-se então, que o Floco de Koch possui: uma área finita, dada em função da área original do triângulo equilátero à base de qual foi formado, um perímetro infinito e pode recobrir o plano cartesiano, se repetindo infinitamente, sem deixar imperfeições.

## 5 A Curva Dragão

No texto que se segue, iremos explorar um novo tipo de fractal: fractais gerados a partir de curvas capazes de preencher o espaço. Queremos discutir um fractal em específico, chamado de curva Dragão, mas para isso, devemos antes passar por uma outra curva, chamada curva de Hilbert. Logo após, realizaremos um pequeno experimento e então poderemos voltar à discussão sobre curvas que preenchem o espaço.

Em 1891, David Hilbert encontrou um fractal gerado a partir de uma linha que era capaz de preencher um quadrado. O fractal seria o limite de um processo recursivo, onde a cada iteração se ocuparia um pouco mais de espaço do quadrado conforme a figura a seguir mostra, onde a linha vermelha representa a primeira iteração da curva, a linha azul representa a segunda iteração e a linha verde representa a terceira iteração. A outra iteração, em roxo é a sexta iteração da curva, que ilustra melhor como o plano seria coberto pela curva:

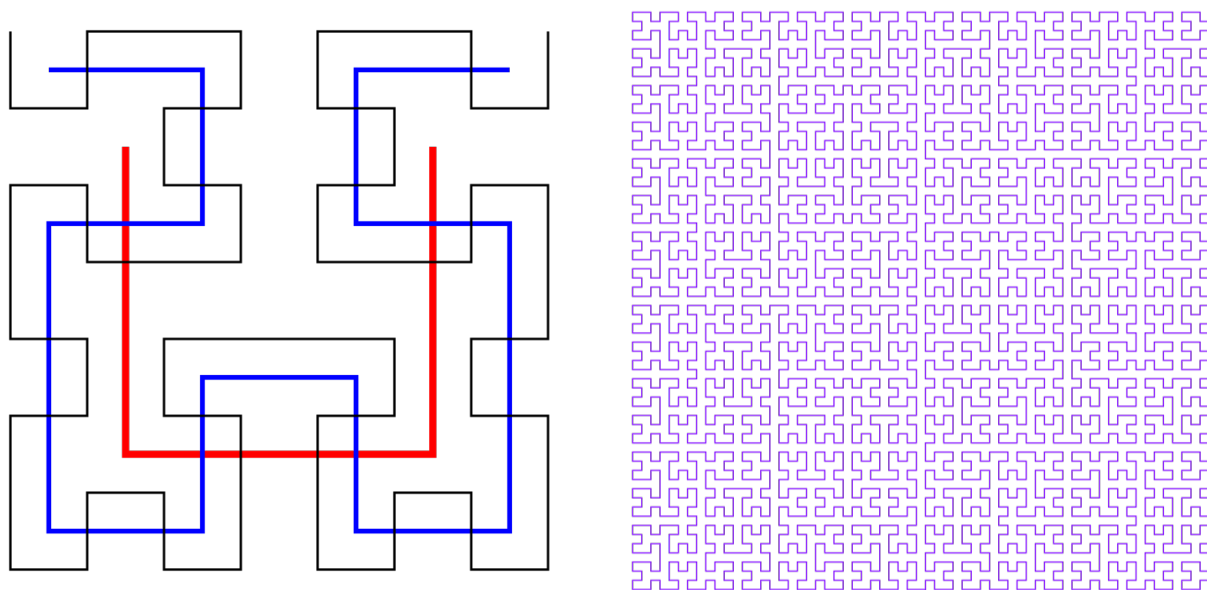


Figura 6 – Algumas iterações da curva de Hilbert

Ao repetir esse processo infinitas vezes, se obterá uma curva que passa por todos os pontos dentro de um quadrado, efetivamente o preenchendo. Seguindo essa mesma lógica, existem diversas outras curvas como essa, capazes de preencher o espaço. Iremos agora descobrir uma juntos, da mesma forma que ela foi inicialmente descoberta.

Em 1966, alguns físicos da NASA entraram em uma discussão sobre o seguinte experimento. Considere uma tira de papel, mais larga do que longa, posicionada na horizontal. O experimento consiste em dobrá-la repetidas vezes na metade, sempre no mesmo sentido horizontal. Em seguida, a tira será desdobrada e o padrão de dobras será observado pela lateral da folha. Abaixo temos uma figura que ilustra alguns passos do processo.

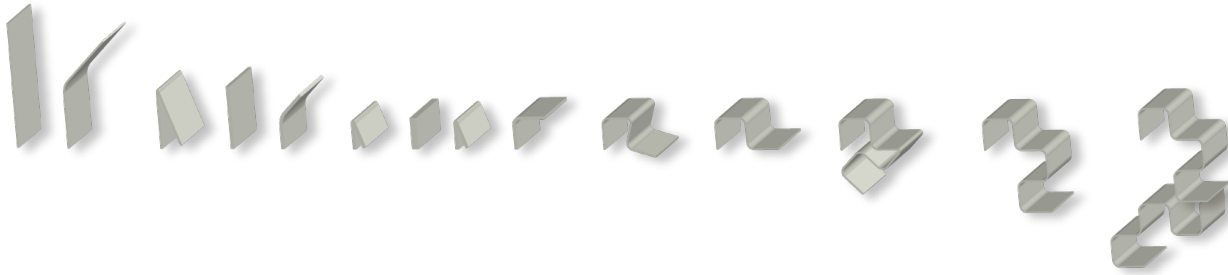


Figura 7 – A curva dragão, gerada a partir da dobra de um pedaço de papel

À época, os envolvidos na discussão defendiam duas ideias. Por um lado, havia os que argumentavam que a tira desdobrada apresentaria um padrão aleatório, e, por outro, alguns físicos sustentavam que deveria haver um padrão nas iterações do processo. Conforme a discussão evoluiu, um dos cientistas decidiu fazer uma prova matemática de que havia sim um padrão para essa sequência. (TABACHNIKOV, 2013) Para entender melhor os argumentos, vamos realizar esse experimento nós mesmos.

Pegue uma tira de papel (preferencialmente mais longa que larga), posicione-a na horizontal e dobre-a ao meio, com o lado esquerdo por cima do direito; isso será a primeira iteração. Desdobre e olhe o papel de lado, de forma que a dobra aponte para baixo. Legendaremos dobras nesse sentido com  $B$  e dobras no sentido oposto com  $C$ . Para a segunda iteração, repita a primeira e em seguida, faça mais uma dobra ao meio, com o lado esquerdo por cima do direito. Nesse momento, abra a tira e note a sequência de dobras: é  $BBC$ . Para a terceira iteração, repita as duas primeiras e novamente, dobre a tira ao meio, com o lado esquerdo por cima do direito. A sequência será  $BBCBBCC$ . O padrão dessa sequência tem a ver com uma simetria nela mesma. O número de dobras é sempre ímpar e a dobra central, em qualquer iteração, é sempre um  $B$ . A partir do  $B$  central, do meio para fora da sequência, teremos duas subsequências, uma à esquerda e outra à direita. Uma delas é resultado da outra ao permutar  $B$  e  $C$  na escrita dos símbolos e elas devem ser lidas do meio para fora.

A partir dessa observação, os cientistas também fizeram outra descoberta: se fizéssemos com que cada dobra tivesse um ângulo de  $90^\circ$ , obteríamos uma curva que nunca cruzaria a si mesma, apesar de ter alguns pontos de tangência entre algumas de suas partes. A esta curva chamaram de Curva Dragão, devido à sua semelhança com a criatura mitológica.

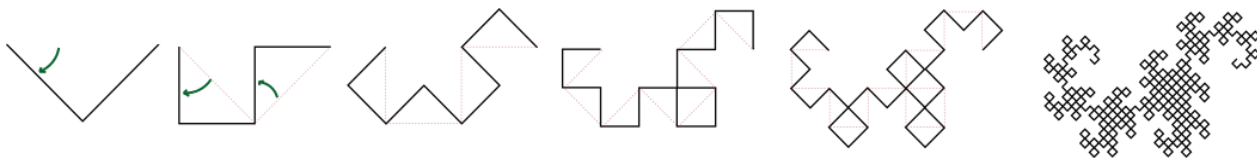


Figura 8 – Primeiras iterações da curva Dragão

A sua autossemelhança pode ser difícil de perceber à primeira vista, mas veja que na sequência de dobras, a primeira parte antes do termo central sempre é exatamente igual à iteração anterior. Assim, para passar de uma sequência de  $B$  e  $C$  para a próxima, basta adicionar um  $B$  ao final e, revertendo a ordem dos termos, substituir  $B$  por  $C$  e vice-versa. Isso faz com que cada parte da curva contenha a sequência exata que gerará a si na próxima iteração.

Para considerar a curva Dragão uma curva capaz de preencher o espaço, precisamos perceber a forma com a qual nem todas as curvas que preenchem o espaço precisam preencher um quadrado. Um exemplo famoso de curva que preenche o espaço e que não preenche o espaço de um quadrado é a curva de Gopher.

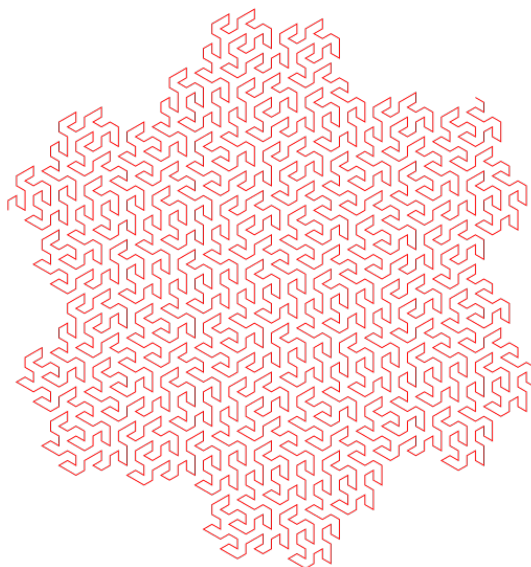


Figura 9 – Quarta iteração da curva de Gopher

A curva Dragão, então, é considerada uma curva que preenche um espaço, cuja figura ocupada é, por si só, outro fractal!



## 6 Geradores de Fractais

Ao longo deste artigo, vimos as mais diversas formas fractais com os mais diferentes métodos de construção e histórias. Neste capítulo, deixaremos de focar na construção de fractais pré-existent e veremos como podemos criar os nossos próprios fractais, com base no nome do leitor. Aqui, exploraremos dois métodos de geração de figuras fractais: o método do sistema semi-Thue e o método do sistema Lindenmayer.

Ambos os exemplos foram implementados em JavaScript pelo autor com o auxílio da biblioteca [p5.js](#). Os códigos podem ser acessados [pelo GitHub](#).

### 6.1 Sistema Semi-Thue

Originalmente utilizado no campo da linguagem formal e da computação teórica, o sistema semi-Thue é uma espécie de algoritmo que expande uma sequência de símbolos a partir de um conjunto de regras.

Chamamos o conjunto que contém todos os possíveis símbolos nesse algoritmo de alfabeto, e denotamos ele com a letra grega  $\Sigma$ . O conjunto de regras, muitas vezes chamadas de regras de reescrita, denotamos com a letra maiúscula  $R$ , onde os elementos de  $R$  são pares ordenados onde todos os símbolos usados em sua construção estão presentes no alfabeto.

Tomemos por exemplo o sistema onde  $\Sigma = \{a, b, c\}$  e  $R = \{(a, ba); (b, b); (c, ac)\}$ . Considerando a sequência inicial  $abc$ , devemos transformar cada símbolo em seu correspondente segundo  $R$ :  $a$  vira  $ba$ ,  $b$  vira  $b$  e  $c$  vira  $ac$ , ou seja,  $abc$  se torna  $babac$ . Podemos aplicar o mesmo processo de novo, obtendo  $babbabac$ , e assim por diante.

Com esse algoritmo, podemos gerar diversas figuras fractais, como o próprio conjunto de Cantor que exploramos anteriormente: considerando  $\Sigma = \{a, b\}$  sendo  $a$  um segmento de reta e  $b$  um espaço vazio, com o conjunto de regras  $R = \{(a, aba); (b, bbb)\}$  podemos obter um análogo ao conjunto de Cantor. Note que a sequência  $aba$  consiste de dois segmentos de reta separados por um espaço vazio de mesmo comprimento, construção análoga à remoção do terço médio na construção do conjunto de Cantor. Utilizando a sequência inicial  $a$ , alguns exemplos de iterações são  $a \rightarrow aba \rightarrow ababbbaba \rightarrow ababbbababbbbbbababbbaba$ .

Podemos também expandir esse mesmo raciocínio para duas dimensões com o auxílio de matrizes. Ao utilizar o alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$ , com 0 representando um pixel preto e 1 representando um pixel branco, em conjunto com as duas regras a seguir, por exemplo, podemos obter o Tapete de Sierpinski, um análogo bidimensional do conjunto de Cantor.

$$0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Ao substituir os símbolos pelos pixels relacionados, obtemos a imagem do Tapete de Siérpinski.

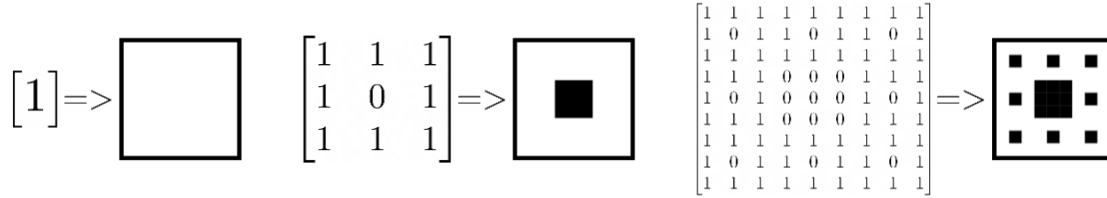


Figura 10 – Iterações do Tapete por Sistema Semi-Thue

A fim de criar um algoritmo capaz de gerar uma imagem como essa que seja exclusiva a cada leitor, vamos inventar um procedimento que transforme um nome em um desses sistemas. O primeiro passo é gerar um alfabeto. Para isso, podemos simplesmente tomar cada letra no nome do leitor como um símbolo.

Para o conjunto de regras, podemos pegar uma sequência de nove letras do nome e começar a ler esse nome pulando uma letra para cada letra antes da que estamos analisando no momento. Por exemplo, se o nome do leitor for "Spike": Nosso alfabeto será  $\Sigma = \{S, p, i, k, e\}$  e nossas três primeiras regras serão:

$$S \rightarrow \begin{bmatrix} S & p & i \\ k & e & S \\ p & i & k \end{bmatrix}$$

$$p \rightarrow \begin{bmatrix} p & i & k \\ e & S & p \\ i & k & e \end{bmatrix}$$

$$i \rightarrow \begin{bmatrix} i & k & e \\ S & p & i \\ k & e & S \end{bmatrix}.$$

Assim, começando com a sequência inicial  $S$ , as iterações serão:

$$S \rightarrow \begin{bmatrix} S & p & i \\ k & e & S \\ p & i & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} S & p & i & p & i & k & i & k & e \\ k & e & S & e & S & p & S & p & i \\ p & i & k & i & k & e & k & e & S \\ k & e & S & e & S & p & S & p & i \\ p & i & k & i & k & e & k & e & S \\ e & S & p & S & p & i & p & i & k \\ p & i & k & i & k & e & k & e & S \\ e & S & p & S & p & i & p & i & k \\ i & k & e & k & e & S & e & S & p \end{bmatrix} \rightarrow \dots$$

Associando então uma cor a cada símbolo, podemos produzir uma imagem como a seguinte (que demonstra um fractal gerado pelo nosso algoritmo até a iteração 4)

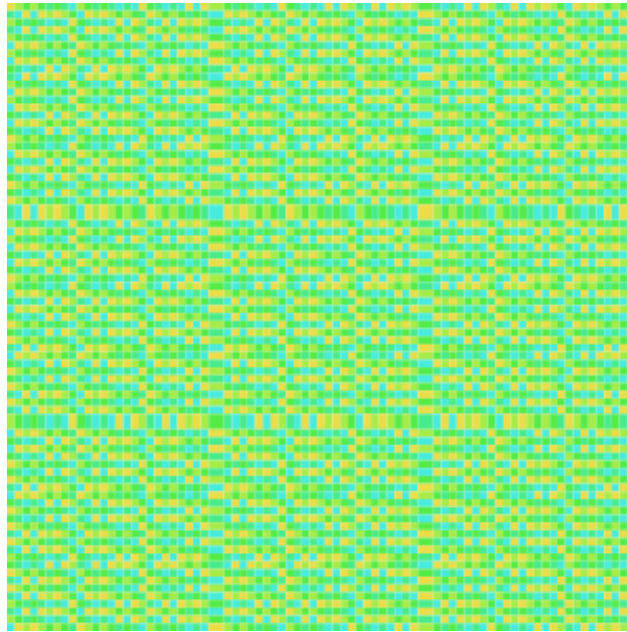


Figura 11 – Fractal gerado a partir de um sistema semi-Thue

Uma implementação desse algoritmo está disponível na [web](#), junto de visualizações do tapete de Siérpinski e da curva Dragão.

Um problema com esse método é que as imagens geradas não demonstram uma “fractalidade” aparente apesar de seu processo ser capaz de gerar figuras fractais. A fim de gerarmos imagens com detalhamento mais aparente, vamos explorar outro sistema.

## 6.2 Sistema Lindenmayer

Uma outra forma de gerarmos figuras fractais com sistemas de reescrita é pelo sistema Lindemayner, também conhecido como sistema L. Inicialmente desenvolvido no estudo do crescimento de plantas pelo biólogo Aristid Lindenmayer em 1968, esse tipo de algoritmo nos permite produzir imagens fractais a partir de um sistema muito similar ao Semi-Thue que estudamos na última seção. Aqui, teremos um mesmo modelo,

composto por um alfabeto de símbolos que podemos usar, uma sentença inicial e um conjunto de regras que transformarão uma sequência de objetos em outra. Teremos aqui também a adição de um parâmetro angular, que será explicado posteriormente.

O alfabeto do sistema  $L$  é fixo, sendo sempre da forma  $\Sigma = \{F, +, -, [, ]\}$ . Aqui, para entendermos o significado de cada símbolo, devemos considerar que estamos desenhando pelo nosso método com uma caneta, mesmo que virtual. Neste sentido,  $F$  significa que devemos continuar desenhando na direção em que começamos. Quando encontrarmos um  $+$  na sequência, devemos virar a direção do nosso desenho pelo parâmetro angular para a direita, quando um  $-$ , devemos virar o mesmo tanto para a esquerda. Quando encontrarmos  $[$  devemos salvar a nossa posição atual e voltar a ela quando em  $]$ , sendo a primeira posição salva a origem.

Por meio de um sistema como esse, podemos renderizar um fractal que já exploramos anteriormente: a Curva Dragão. Iniciando com a sentença  $F$ , adicionando um novo símbolo  $G$ , que é equivalente a  $F$  e considerando que o nosso parâmetro angular será de  $90^\circ$ , podemos criar o sistema onde  $F$  se transformará em  $F + G$  e  $G$  se tornará  $F - G$ . Ao iterar este processo, vamos desenhar várias etapas da curva dragão.

Em primeiro lugar, vamos considerar algumas iterações da sequência que origina a curva dragão, segundo o processo descrito anteriormente. Começando com  $F$ , a próxima iteração é  $F + G$ . Iterando novamente, teremos  $F + G + F - G$  e, uma última vez, teremos  $F + G + F - G + F + G - F - G$ . As imagens abaixo ilustram o processo de desenhar, com uma caneta, as poligonais referentes a essa sequências.

Podemos montar agora, com essa ferramenta, um novo algoritmo capaz de gerar fractais personalizados para cada leitor. Como sempre, partiremos do nome do leitor. Aqui, consideramos cada letra do nome do leitor um equivalente a  $F$ . Podemos gerar as regras do nosso sistema com os seguintes passos para cada nome:

- (1) Começaremos pela primeira letra do nome, e a regra dela será igual ao nome com sinais de  $+$  entre cada letra;
- (2) Para cada símbolo seguinte, faremos uma nova regra que seja igual à primeira, partindo do símbolo atual e quando terminarmos, adicionaremos um  $[$  ou um  $]$  alternadamente entre regras, seguido pelas letras que pulamos, sendo separadas dessa vez por um  $-$  ao invés de um  $+$ ;
- (3) Caso haja letras repetidas, a única regra gerada por aquele símbolo terá por base sua primeira aparição.

Por exemplo, se começarmos com o nome *Spike*: Devemos determinar que nossa primeira regra será  $S \Rightarrow S + p + i + k + e$ , a segunda será  $p \Rightarrow p + i + k + e[S]$ , a terceira será  $i \Rightarrow i + k + e[S - p]$ , a quarta  $k \Rightarrow k + e[S - p - i]$  e a quinta  $e \Rightarrow e[S - p - i - k]$ . Começando da sentença inicial  $S$ , na segunda iteração teremos  $S + p + i + k + e$ , na terceira  $S + p + i + k + e[S + i + k + e]S - p + k + e[S - p - i + e]S - p - i - k$  e assim por diante.



Figura 12 – Fractal gerado utilizando o sistema Lindenmayer

Uma implementação desse algoritmo também está disponível na [web](#), junto de visualizações do tapete de Siérpinski e da curva Dragão.



## 7 Conclusão

Com o avanço do estudo da geometria fractal, vemos cada vez mais aplicações dessa ciência nos mais diversos campos, desde a compressão fractal de imagens no âmbito computacional, quanto no estudo biológico do crescimento de plantas ao estudo médico do crescimento de tumores. Sabendo dessa normalização e ampliação do uso dessa disciplina na vida humana, é importante tornar acessível o conhecimento sobre a geometria fractal ao público geral.

Deste trabalho então, parte uma boa base para a compreensão de fractais simples, úteis no desenvolvimento de contextos mais complexos, assim como se torna mais próximo do público geral o conceito de um fractal por meio da personalização de fractais ao leitor. Adaptamos aqui a linguagem de uma disciplina complexa e excessivamente acadêmica a um nível onde estudantes com bagagem de um nível fundamental seriam capazes de absorver.

É necessário expor, no entanto, que este trabalho não serve como grande orientador para a exploração de toda a geometria fractal. Aqui, não foram explicados fractais de base na disciplina de números complexos, fractais que não são autossimilares ou gerados a partir de atratores. Sugerimos que o leitor continue a explorar as maravilhas desse setor da geometria, a fim de conhecer e possivelmente expandir o conhecimento humano sobre a área. No caso de leitores que tenham um interesse básico em computação, é recomendado como próxima etapa o capítulo dedicado à geometria fractal (capítulo 8) do livro *Natureza do Código*, de Daniel Shiffman. ([SHIFFMAN, 2024](#))

Concluimos, portanto, incentivando que este texto sirva não como um fim mas como o começo de um estudo prazeroso de uma matemática de forma informal e agradável. A exploração da geometria fractal pode se dar fora do âmbito acadêmico, de forma descontraída e, por vezes, menos burocrática. Apesar da excessividade de jargões acadêmicos e dos empecilhos de acesso, o conhecimento adquirido recompensa com seus belos visuais e noções impressionantes.



## Referências

MANDELBROT, B. *The fractal geometry of nature*. [S.l.]: San Francisco : W.H. Freeman, 1989. ISBN 0716711869. Citado na página [11](#).

SHIFFMAN, D. *The Nature of Code*. [S.l.]: No Starch Press, 2024. ISBN 9781718503700. Citado na página [29](#).

TABACHNIKOV, S. Dragon curves revisited. *Mathematical Gems and Curiosities*, 2013. Citado na página [20](#).