Solucions 2n Concurs d'Entrenament OICat 2021

Olimpíada Informàtica Catalana

Aquí expliquem molt esquemàticament les solucions dels problemes. Al Github hi trobareu els codis. Recordeu que a la web de l'OICat hi trobareu links a diferents recursos que us poden ser útils, incloent una introducció a Python i a C++, i un tutorial per resoldre problemes gràfics amb Python.

Problema G1: Enfosquit

Per a cadascun dels sis rectangles que heu de dibuixar, passeu com a arguments els límits del rectangle (anant amb compte de no posar cap píxel de més) i el color, tal i com indica l'enunciat. Es pot resoldre dibuxant cada rectangle en una línia de codi diferent, o preferiblement, amb un sol `for`.

Problema C1: Àngels i dimonis

L'enunciat implica que els àngels i els dimonis estan col·locats alternadament a la fila. Per tant, escollint de quin tipus és el primer personatge de la fila, la resta queden determinats. Com a conseqüència, la solució és $\boxed{2}$ independentment de l'entrada.

Problema C2: Països i províncies (2)

És un problema d'implementació, tot i que amb un format una mica diferent dels problemes més habituals. Algú que no hagi usat mai un `struct` pot mirar la solució oficial per entendre com funcionen. Per a cada país, en comptem els habitants, i el nombre de "províncies pobres" (amb PIB $\leq x$)

amb un bucle sobre el vector de províncies del país, i actualitzem la solució si n'hi ha almenys dues de pobres.

Problema G2: Problema de mostra

Aquest és un dels problemes d'exemple que podeu trobar a la pàgina de lliçons del Jutge. Allà hi trobareu una possible implementació per resoldre'l, tot i que nosaltres us en donem una altra lleugerament diferent.

Problema C3: Pila de totxos (2)

En primer lloc, l'organització es vol disculpar per les molèsties que aquest problema ha ocasionat. Resulta que portava vuit anys al jutge amb una solució oficial "quasi no incorrecta". L'error estava causat per un petit problema de precisió en calcular una arrel quadrada d'un nombre molt gros, cosa que podia fer que la solució oficial donés un valor una unitat per sobre del correcte.

Com a curiositat, aquest problema de precisió es podia evitar usant la funció `sqrtl` en comptes de `sqrt`, que calcula l'arrel quadrada d'un nombre retornant un `long double` en lloc d'un `double`, però com que no s'espera que això sigui conegut, vam decidir baixar el valor màxim de n.

Per resoldre aquest problema, cal tenir en compte dues coses. La primera, que per a qualsevol natural m, $1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$. La segona, que la solució del problema consisteix a trobar el màxim m tal que $1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2} \leq n$. Seguint aquestes dues idees, donem tres solucions.

Solució 1: Resolem l'equació de segon grau $\frac{m(m+1)}{2} = n$, que ens donarà una única solució no negativa, i ens quedem amb la part entera.

Solució 2: Fem una cerca binària. Sabem que m està a l'interval $[0, 1414214)$. A cada pas, si sabem que m es troba a l'interval $[l, r)$, prenem el "punt mig" $h = \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$. Si h compleix que $\frac{h(h+1)}{2} \leq n$, m estarà a l'interval $[h, r)$; altrament, estarà a l'interval $[l, h)$. Per tant, anem "tallant en dos" l'interval fins que contingui un sol enter, que serà la nostra solució.

Solució 3: Podem veure que m ha de ser molt propera a $\sqrt{2n}$, i aproximar-la des d'aquest valor. Per exemple, si prenem $x = \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor$, m serà o bé x, o bé $x-1$.

Repte 1: Si teniu poca pràctica amb els problemes de cerca binària, intenteu resoldre el problema de nou amb la idea de la segona solució.

Repte 2: Podríeu demostrar el que diem sobre la tercera solució, és a dir, que si $x = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$, la solució serà o bé x, o bé $x - 1$?

Problema Q2: Ordenant problemes

Autor: Xavier Povill

La solució esperada és un backtracking (tot i que es pot resoldre d'altres formes). A cada iteració del backtracking, afegiu una de les tres possibles lletres. Algunes condicions, per exemple, com que no volem tres problemes clàssics seguits, o més d'una certa quantitat de problemes d'un cert tipus, les podem anar comprovant a mesura que anem avançant en el backtracking. Altres condicions difícilment les podreu comprovar abans d'arribar al final.

Problema C4: Col·lecció de números

És un problema fàcil si i només si coneixeu les priority queues. Són una estructura de dades molt eficient, amb aquestes operacions fonamentals: inserir un element, esborrar l'element més gran (ambdues en temps logarítmic), consultar l'element més gran, i consultar el nombre d'elements guardats actualment (ambdues en temps constant). Per canviar el valor de l'element més gran, com demanava el problema, n'hi ha prou amb treure el màxim de la priority queue i afegir-hi el nou valor.

Com a nota extra, aquesta estructura és clau per poder implementar eficientment l'algoritme de Dijkstra. Podeu trobar més informació sobre priority queues en aquest link. La solució que trobareu al Github també us ajudarà a entendre com funcionen.

Problema C5: Pascal al Louvre

És un problema molt maco. Us animem a pensar-lo una mica més. Aquí van algunes pistes: Podem veure que si k és parell, la resposta és 0, perquè tots els nombres seran parells. Si k és senar, la paritat o no de cada nombre no dependrà del valor concret de k. Per tant, el problema es redueix a trobar el nombre d'elements senars a les primeres n files del Triangle de Pascal (que es corresponen al cas $k = 1$). Si analitzeu on es troben aquests nombres senars en el Triangle, veureu que formen un patró molt particular. D'aquí podreu trobar una recurrència per resoldre el problema. Com a pista extra, a les 2^n primeres files hi tenim 3^n nombres senars...

Problema G3: Conjunt de Mandelbrot

És un problema més senzill del que pot semblar a primera vista. Per a cada píxel de la imatge, iterem k cops comprovant si es compleix $|z|^2 = q(z) \leq 4$ a cada iteració, i dibuixem el punt amb el color corresponent. Les operacions de suma i multiplicació amb complexos venen donades a l'enunciat, però podeu fer servir el problema com a excusa per aprendre sobre el tema :)

Si teniu curiositat sobre el conjunt de Mandelbrot, us recomanem els següents videos: `https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk` i `https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk`.