Find the root of $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$.

1. Bisection method:

   Step1.找出(x_l, x_r)使得$f(x_l)f(x_r) < 0$, 根據勘根定理我們能確保(x_l, x_r)之間有根. 最簡單的方式是窮舉法很多函數值或是直接畫圖.

   Step2.令$x_m = \frac{x_l + x_r}{2}$

   Step3.若$f(x_m)f(x_r) < 0$, 則設$x_l = x_m$,

   若$f(x_m)f(x_l) < 0$, 則設$x_r = x_m$. 重複 Step2~3 直到 $|x_l - x_r| < 10^{-9}$.

(x_l, x_r)	Iteration time	The root of f
$(-1,99)$	36	1.887208
$(-3,47)$	35	1.887208
$(-100,0)$	36	-1.887208
$(-1,51)$	35	-1.887208

   我們可以發現 f 有兩個根,大約在: 1.887208 , -1.887208. 而 bisection method 基本上每次朝根的步伐會縮減一半.

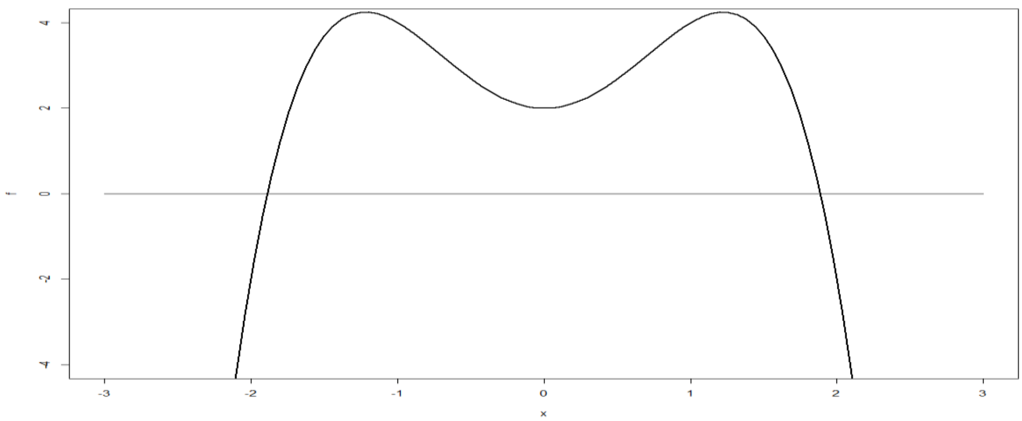
2. Newton method:

   Step1. 選定初始值x_0.

   Step2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. 重複 Step2 直到 $|f(x_{n+1})| < 10^{-9}$.

   由牛頓法收斂的定理告訴我們，對於起始點必須要落在根的附近，如此我們的牛頓法才能夠找到根。

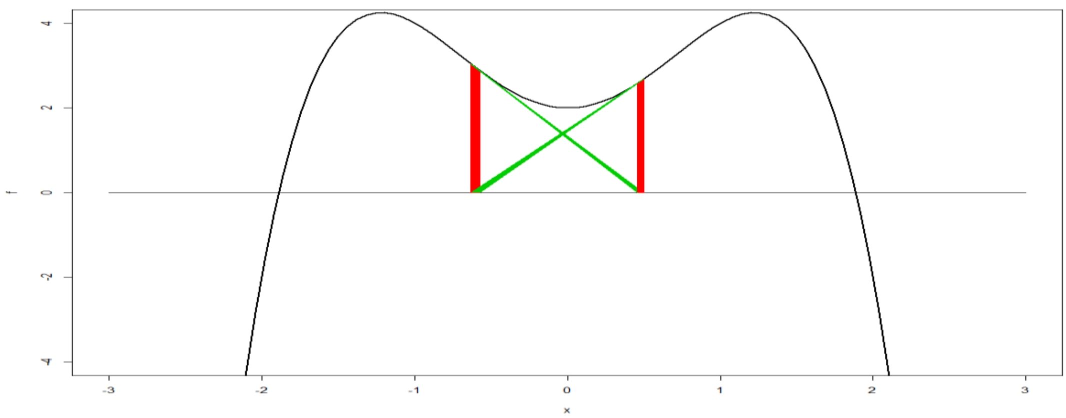
   首先，畫初函數圖:



   由於不確定能否收斂，設定最大疊代次數為 500，我取$x_0 = 0.5$,

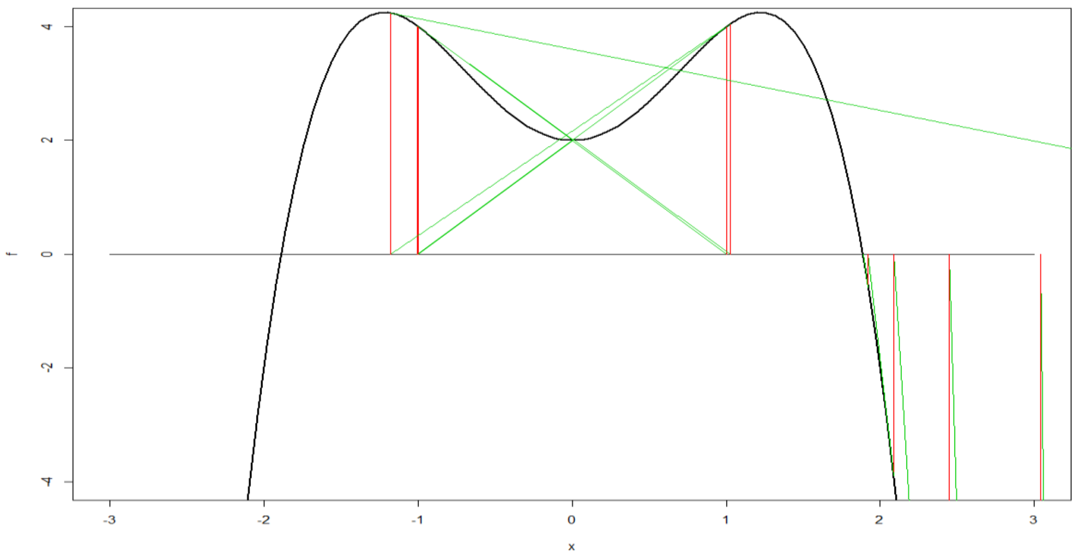
   發現達到最大疊代次數仍無法收斂.

   下圖紅色線為每一疊代點所對應的函數值; 綠色線為該點的切線

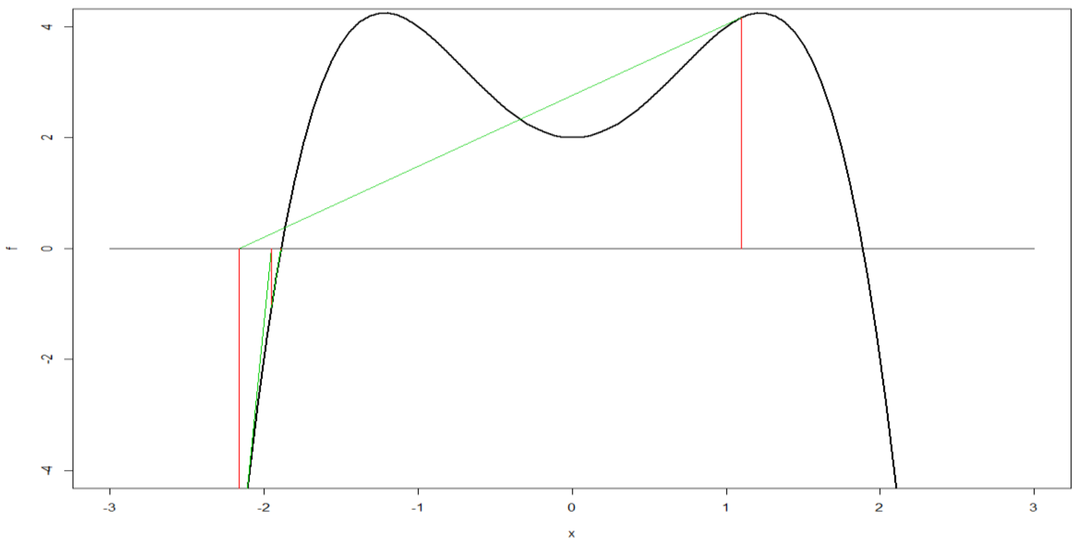


接著，我取$x_0 = 0.6 , 0.7 , 0.8 , 0.9$,都和上面結果一樣無法收斂.

當$x_0 = 1$ 時，經過 18 次疊代，找到根為 1.887208



當$x_0 = 1.1$ 時，經過 5 次疊代，找到根為 -1.887208



經過測試後，我們發現當選擇 $x > 2$ and $x < -2$作為起始點，牛頓法會收斂到根:1.887208 或-1.887208.
而當選擇$0.5 \leq x < 1$ and $-1 < x \leq -0.5$ 作為起始點，牛頓法無法收斂.

附上程式碼:

```
#newton method
f<-function(x){    -x^4+3*x^2+2 }
plot(f ,xlim = c(-3,3) ,ylim = c(-4,4) ,lwd= 2) ;lines(c(-3,3),c(0,0))
epslon<-10^-9 ;h<-10^-8 ;loop<-0
seed<--0.5 ;x2<-seed
while(abs(f(x2))>=epslon && loop<500 ){
   cat("the ",loop,"-th step, f(x) is ",abs(f(x2)),"\n")
   loop<-loop+1
   x1<-x2
   dif<-(f(x1+h)-f(x1)) /h
   x2<-x1 - f(x1)/dif
   lines(c(x1,x1),c(0,f(x1)),col=2) ;lines(c(x1,x2),c(f(x1),0) ,col=3)
};cat("the root of f(x) is",x2)

g<-function(x){ x-(-x^4+3*x^2+2)/(-4*x^3+6*x)}
windows();plot(g,xlim = c(-3,3), ylim=c(-4,4),lwd=2,type="p") ;lines(c(-
3,3),c(1,1)) ;lines(c(-3,3),c(-1,-1)) ;lines(c(-3,3),c(-3,3),lwd=2)
x<-seq(0,2,0.001)
plot(x,abs((g(x+h)-g(x))/h), ylim = c(0,2))
x[abs((g(x+h)-g(x))/h) < 1]

#bisection
f<-function(x){ -x^4+3*x^2+2 }
plot(f ,xlim = c(-3,3) ,ylim = c(-4,4) ,lwd= 2) ;lines(c(-3,3),c(0,0))
epslon<-10^-9 ;loop<-0
xl<--51 ;xr<--1 ;xm<-(xl+xr)/2
while(abs(xl-xr)>=epslon){
   cat("the ",loop,"-th step, f(x) is ",abs(f(xm)),"\n")
   loop<-loop+1
   xm<-(xl+xr)/2
   if(f(xl)*f(xr)>0){
      break
      }else if(f(xl)*f(xm)<0){
```

```
            xr<-xm
            }else if(f(xr)*f(xm)<0){
              xl<-xm }
};cat("the root of f(x) is",xm)
```