SHORTEST PATH

T. 강건

Graph

오늘도 역시나 그래프를 사용한다.

Graph

3주차 내용을 복습해주세요.

std::priority_queue

아직도 stl을 잘 모르시는 분들은 멘토를 통해 꼭 stl과 친해지길 바래요!

- 큐는 큐인데 front에 항상 가장 큰 값이 들어있다.
 - → 데이터를 push하면 알아서 정렬해주는 좋은친구!!!
- #include <queue> 필요
- 선언방법:

priority_queue<자료형> 이름;

priority_queue_추가적인 내용

https://www.google.com/search?ei=1nK2XrqDBIHU-QaFua6AAw&q=std%3A%3Apriority_queue&oq=std%3A%3Apriority_queue&gs_lcp=CgZwc3ktYWIQA1DWNFjWNGDhOGgAcAB4AIABb4gB1QGSAQMwLjKYAQCgAQGqAQdnd3Mtd2l6&sclient=psy-ab&ved=0ahUKEwi6xouOt6bpAhUBat4KHYWcCzAQ4dUDCAs&uact=5

더 알고싶은 학생들은 구글에 쳐보기만 자세히 나오니 참고해주세요!

2-1 자료구조 수업에서 배웁니다.(Heap)

ppt만으로 모든 것을 전달하기도 어렵고, 지금은 알고리즘 구현에서의 "활용"이 중요하기 때문에 강의자료에서는 자세히 다루지 않겠습니다. 예제

1927 - 최소 힙

1927_최소 힙

• 다음 슬라이드에 해답이 있습니다.

● 오늘 배우는 중요한 내용은 아니고 pq사용법을 위한 문제이니 베끼는 것에 죄책감을 느끼지 마시고 맘껏 베껴요 ㅎㅎㅎ

1927_최소 힙

기본적으로 priority_queue는 MaxHeap입니다.

pq안에 내림차순으로 정렬되지요.

우리는 가장 작은 값을 찾으려고 합니다.

입력이 자연수 뿐이므로

pq에 -1을 곱한 수를 넣어주고 뺄때 (-)부호를 없애주면

정렬방법 변경 없이 편하게 할 수 있겠죠???

```
#include <iostream>
#include <queue>
using namespace std;
priority_queue<int> pq;
int N, x;
int main(void)
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(NULL);
    cin >> N;
    for( int n = 1; n <= N; n++ )
        cin >> x;
        if(x == 0)
            if ( pq.empty() )
                cout << "0\n";
            else
                cout << -pq.top()<<'\n'
                pq.pop();
        else
            pq.push(-x);
    return 0;
```

Dijkstra's Algorithm

가장 기본이 되는 알고리즘

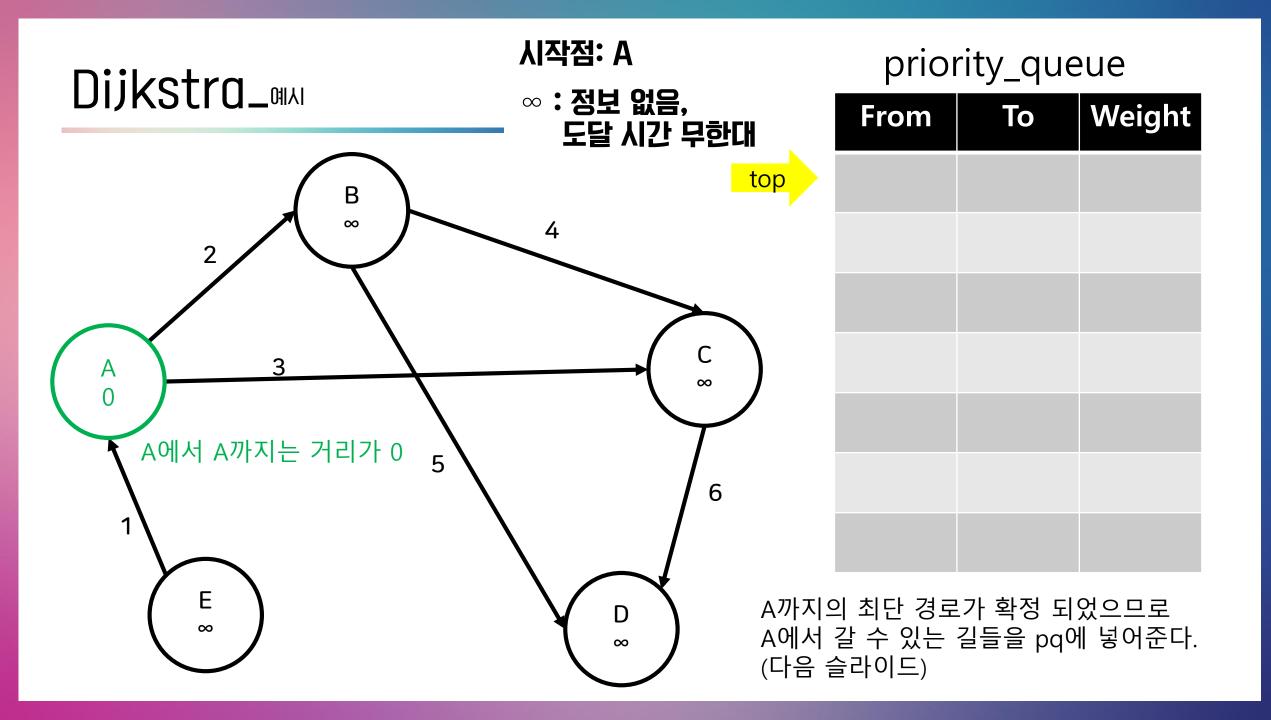
Dijkstra_715

- 하나의 시작점에서 모든 정점의 최단경로를 구할 수 있다!
- 음수 가중치가 존재할 경우 사용할 수 없다!

Dijkstra_ma

- 0. 출발점으로부터 가장 가까운 정점을 구한다.
- 1. 그 정점까지의 최단 거리를 확정한다.
- 2. 최단거리가 확정된 정점과 가장 가까운 정점을 찾아 그지점까지 최단거리를 확정한다.
- 3. 2를 끝날때까지 반복한다.

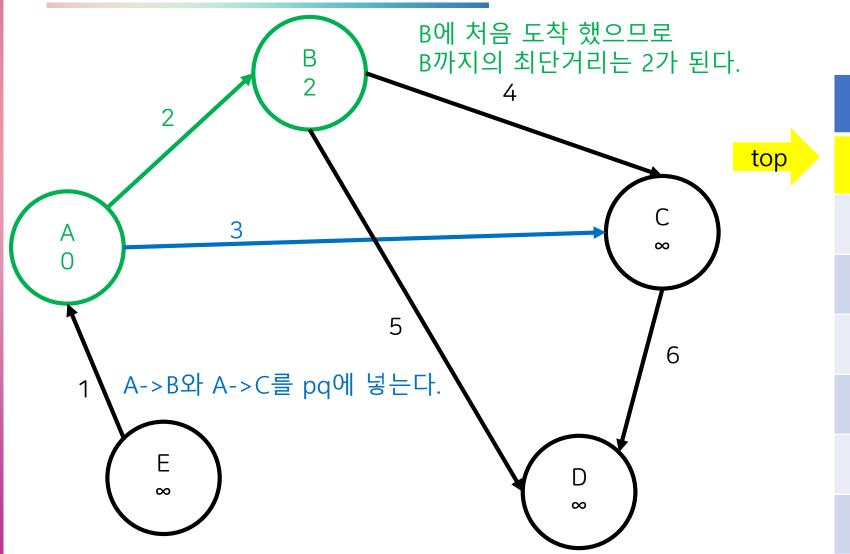
모르겠죠??



pq: priority_queue Dijkstra_@AI priority_queue pq에 들어간 간선 Weight From To В ∞ top Weight 기준으로 정렬되어 있다. 6 A->B와 A->C를 pq에 넣는다.

Dijkstra_@A

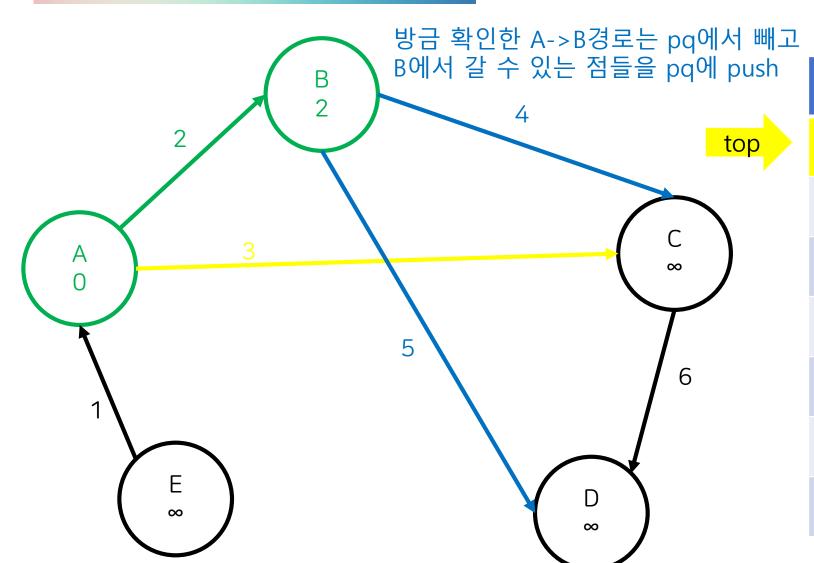
top에 있는 경로를 이용해 최단경로를 갱신한다.



From	То	Weight
Α	В	2
Α	С	3

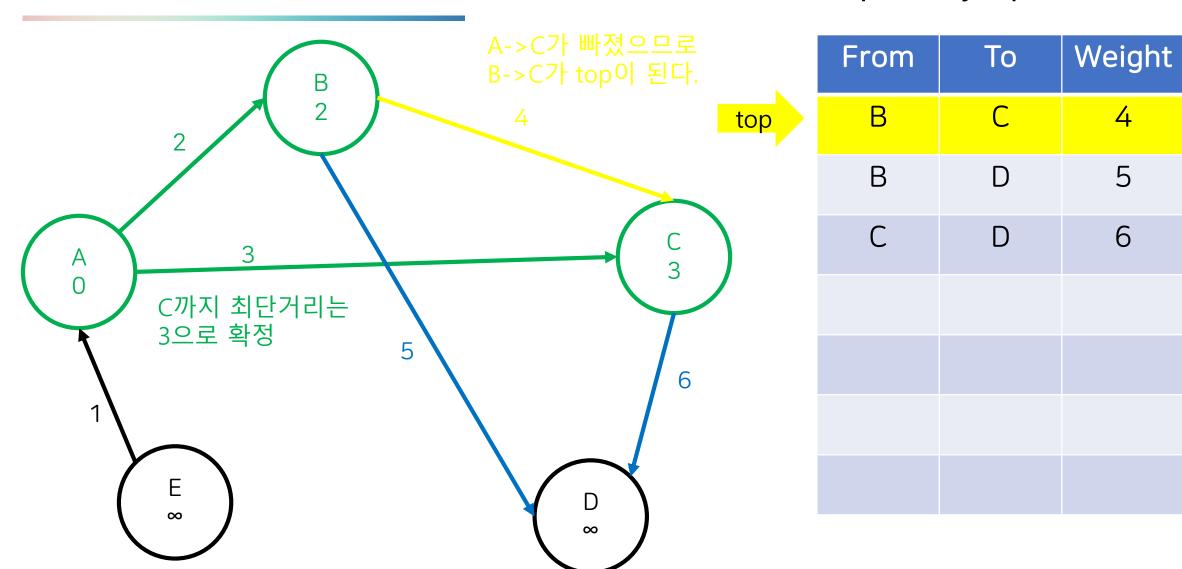
Dijkstra_@AI

top에 있는 친구들을 하나씩 빼면서 최단경로를 확정한다.

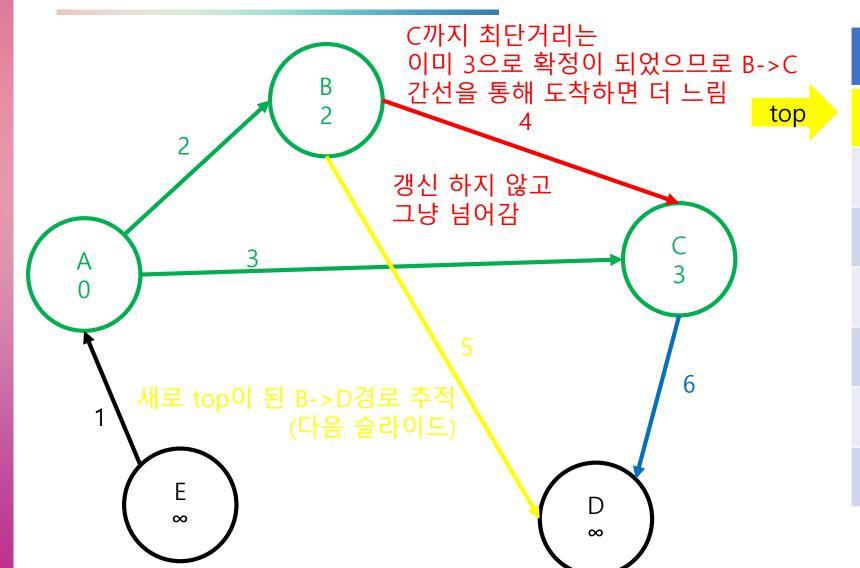


From	То	Weight
А	С	3
В	С	4
В	D	5

Dijkstra_

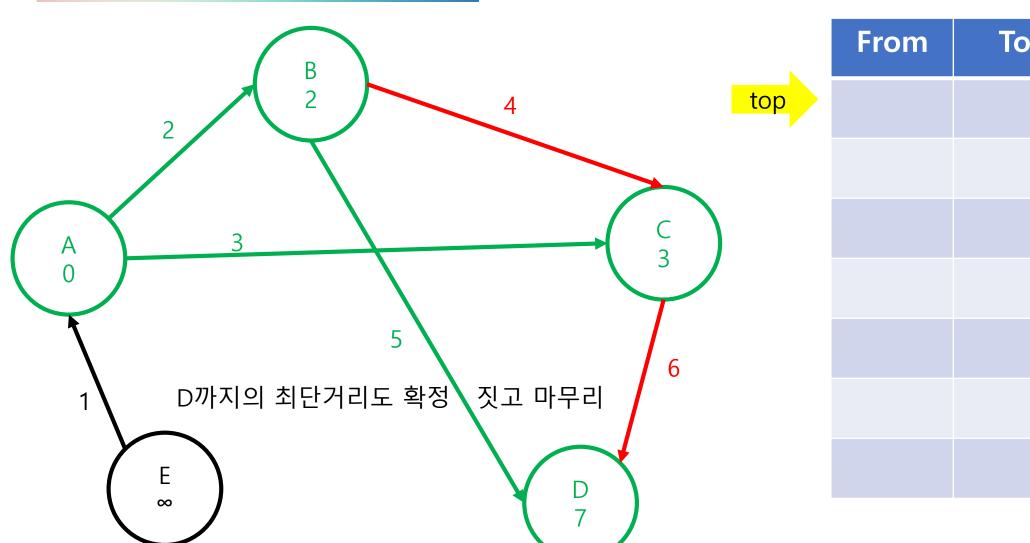


Dijkstra_@AI



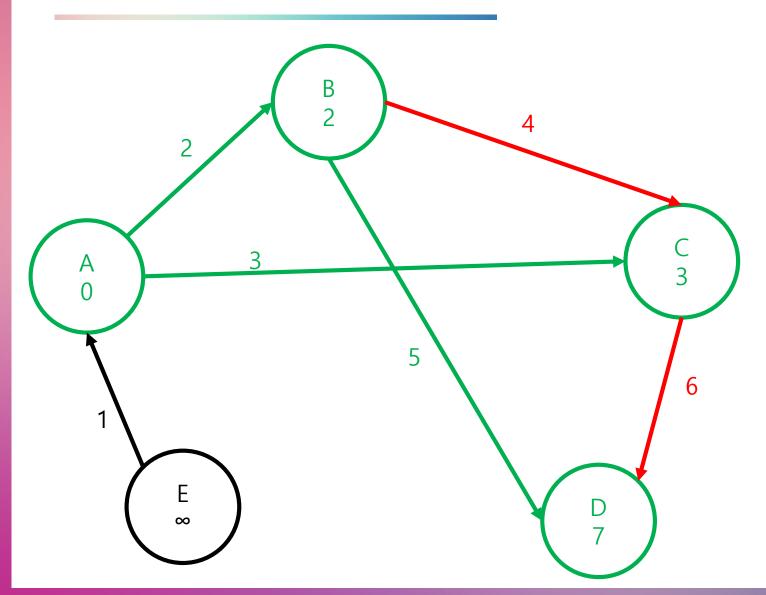
From	То	Weight
В	D	5
С	D	6

Dijkstra_@AI



From	То	Weight

Dijkstra_@A



정점	최단거 리
Α	0
В	2
С	3
D	7
E	∞

E는 A에서 도달할 수 없다. 고로 최단거리는 **∞로 표현할 수 있다.**

아직도... 모르겠나요...

Dijkstra_³□

```
void Dijkstra(int start)
   dist[start] = 0;
   for ( auto e : Edges[start] )
       if ( dist[e.first] == INF )
           pq.push({ -e.second, e.first });
   while ( !pq.empty() )
       int now, nowdist;
       nowdist = -pq.top().first;
       now = pq.top().second;
       pq.pop();
        if ( dist[now] != INF )
            continue;
       dist[now] = nowdist;
        for ( auto e : Edges[now] )
            if ( dist[e.first] == INF )
                pq.push({ -(nowdist + e.second), e.first });
```

- dist: 최단거리를 저장하는 배열
 - → dist[1]: 시작지점부터 1번 정점까지의 최단거리
- Edges: 인접리스트(3주차 참조, 똑같음)
- priorty_queue
 pair
 priorty_queue
 pair
 <
 - → pq에 pair가 들어갔을 때 기본 정렬이 어떻게 되냐면 1. first값으로 정렬 2. first가 같으면 second값으로 정렬 (정렬기준은 내림차순)
- INF: 무한대(엄청 큰 수)
 - \rightarrow const int INF = 987654321;

Dijkstra_==

```
void Dijkstra(int start)
   dist[start] = 0;
   for ( auto e : Edges[start] )
       if ( dist[e.first] == INF )
           pq.push({ -e.second, e.first });
   while ( !pq.empty() )
       int now, nowdist;
       nowdist = -pq.top().first;
       now = pq.top().second;
       pq.pop();
       if ( dist[now] != INF )
            continue;
       dist[now] = nowdist;
        for ( auto e : Edges[now] )
            if ( dist[e.first] == INF )
               pq.push({ -(nowdist + e.second), e.first });
```

- pq에 〈시작지점부터 정점번호까지의 거리, 정점 번호〉 이렇게 넣었을 경우 ->top에 가장 큰 수가 온다.
- 우리가 원하는 정보는 가장 가까운 노드 (시작지점부터 정점번호까지의 거리가 가장 작은 수)
- pq에 넣을 때 거리에 -1을 곱해서 넣으면 -> 작은것부터 나오겠지??

이까 했지?

1753번 - 최단경로

내가 진짜 1도 모르겠다. 그래도 저를 믿고 이 문제를 읽어주세요. 지금 읽어주세요. 제바ㅏㅏㅏㄹ~

1753_최단경로

- 문제 이해가 안되는 사람은 없겠죠?(제발)
- 그냥 문제 그대로 최단경로를 구해주면 됩니다.
- 다음 슬라이드에 해답이 있습니다.
- 혼자서 풀기 힘들거나 잘 안될 때는 강사의 코드를 베껴 보아요.

1753_최단경로

```
#include <iostream>
#include <queue>
#include <climits>
using namespace std;
int V, E;
int K;
int u, v, w;
const int INF = INT MAX;
const int MAX V = 20'005;
vector<pair<int, int>> Edges[MAX_V];
vector<int> dist(MAX_V, INF);
priority_queue<pair<int, int>> pq;
void Dijkstra(int start);
```

Dijkstra함수만 작성하면 정답입니다.

```
int main(void)
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(NULL);
    cin >> V >> E;
    cin >> K;
    for ( int e = 1; e <= E; e++ )
        cin >> u >> v >> w;
        Edges[u].push_back({ v, w });
    Dijkstra(K);
    for ( int v = 1; v \le V; v++ )
        if ( dist[v] == INF )
            cout << "INF\n";</pre>
        else
            cout << dist[v] << '\n';</pre>
    return 0;
```

1753번 - 최단경로

이번엔 자신의 스타일로 코드를 바꿔서 다시 제출해보아요.

연습문제

1238 - 파티

1238_파티

● Dijkstra's Algorithm을 N번 돌려볼까?

연습문제

17396 - 백도어

17396_백도어

● 0번부터 시작하네요. 유의해주세요.

연습문제



5719_거의 최단 경로

- 최단경로를 구한다.
- 최단경로에 포함되는 모든 간선들을 지운다.
- 다시 최단 경로를 구한다.
- 최단경로가 1개가 아닐수도

연습문제



1854 - K번째 최단경로 찾기

1854_K번째 최단경로 찾기

- 알고리즘 자체를 변형해야 하는 문제
- pq에 더 많은 정보를 저장해야 할 것 같은데?

Floyd-Warshall Algorithm

이게 어쩌면 제일 쉬울 수도

Floyd-Warshall_"

● 모든 정점에 대한 최단경로를 알 수 있다.

● 모든 경우의 수를 체크

Floyd-Warshall_ma

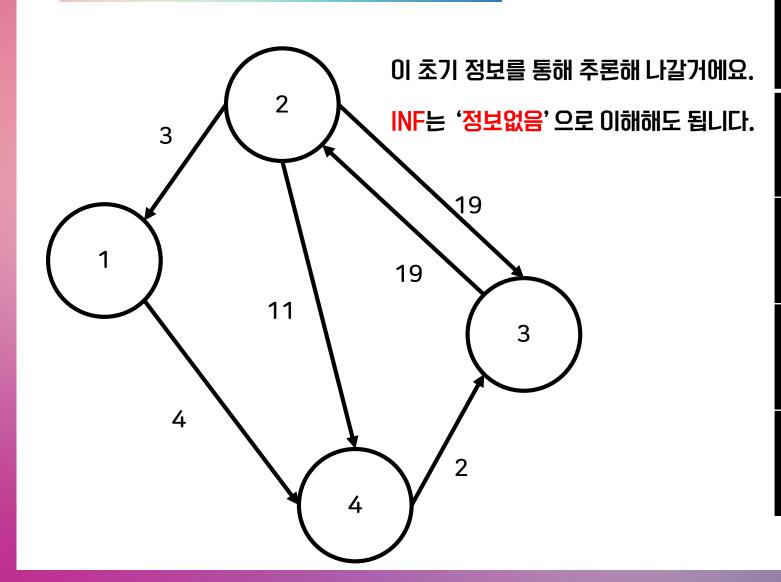
임의의 점을 경유해서 가는 경로가 더 빠르다면 갱신

현재 알고 있는 i->j 의 거리보다 빠른 i->k->j가 존재한다면?

모든 i j k 에 대해 동작하면?

계산이 끝나면 모든 점에 대한 최단거리를 알 수 있다.

모르겠죠??



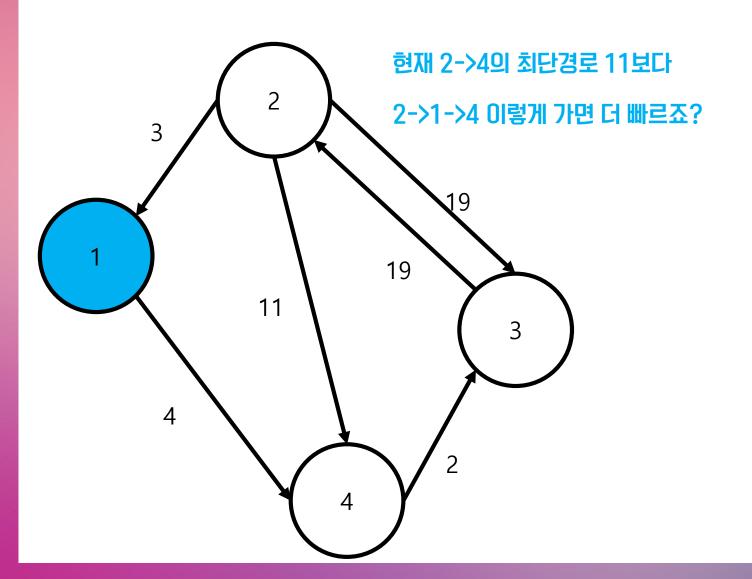
출발부터 도착까지의 거리가 저장되어 있고요.

도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	11
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

Floyd-Warshall_GIAL

오른쪽에 있는 16개의 모든 길을 중간에 1을 경유하는 길로 돌아 갔을 때 더 빠르다면 갱신해주는 것입니다. 19

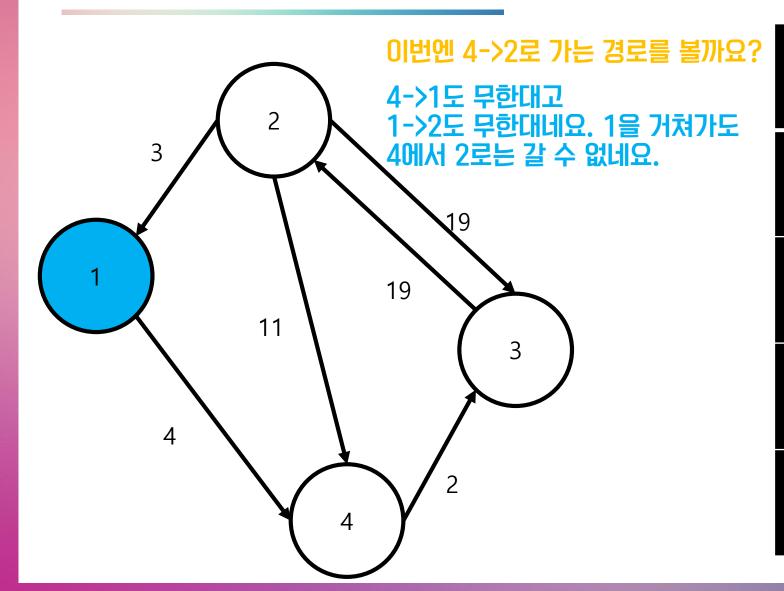
도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	11
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0



도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	11
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

2->4가 7로 갱신 된것 보이시나요? 19

도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0



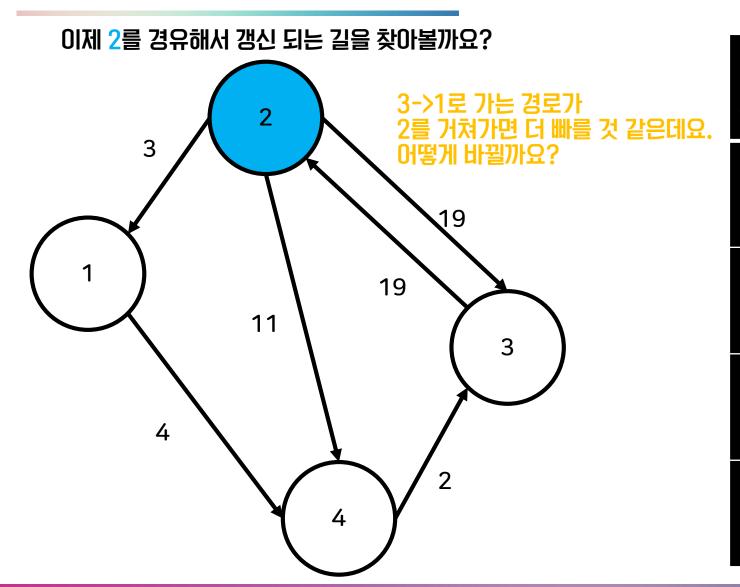
도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

Floyd-Warshall_GIAL

두 길만 예시를 들었는데요. 1을 경유하며 갱신되는 경로는 4->2가 11에서 7로 변경되는 것 밖에 없었네요. 19 19

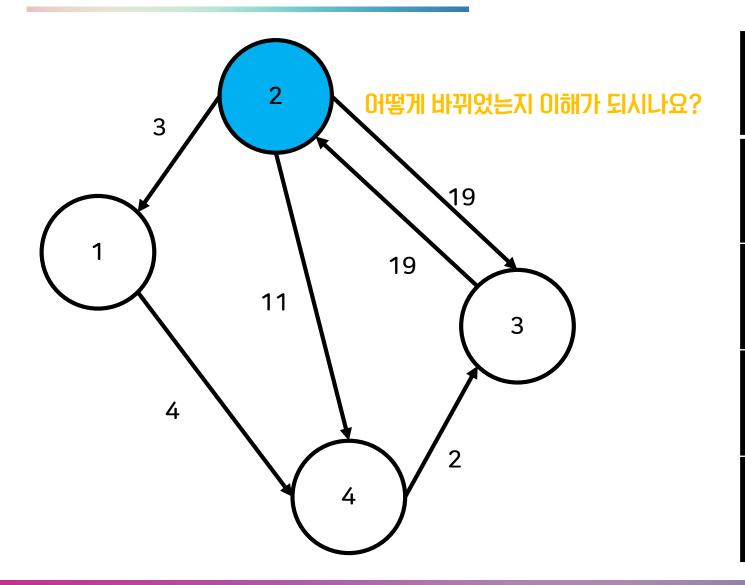
도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

Floyd-Warshall_GIAL



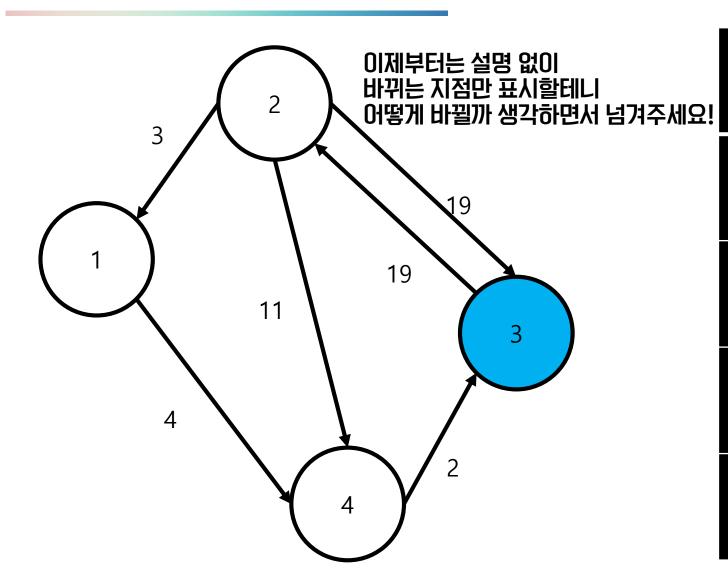
도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	INF	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

Floyd-Warshall_@All

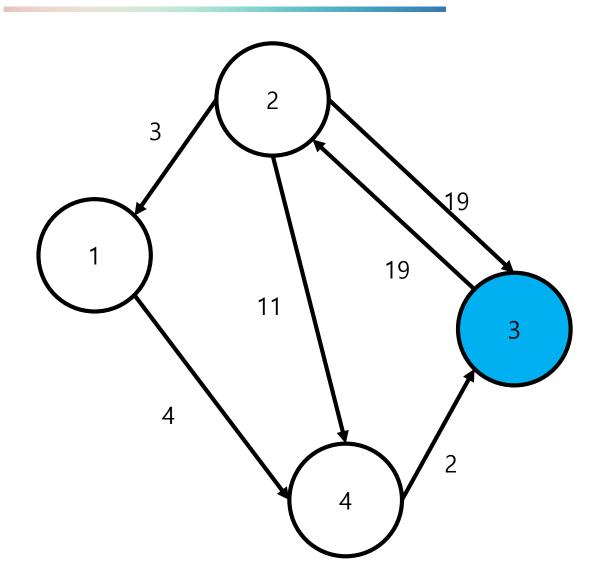


도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	22	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

Floyd-Warshall_GIAL

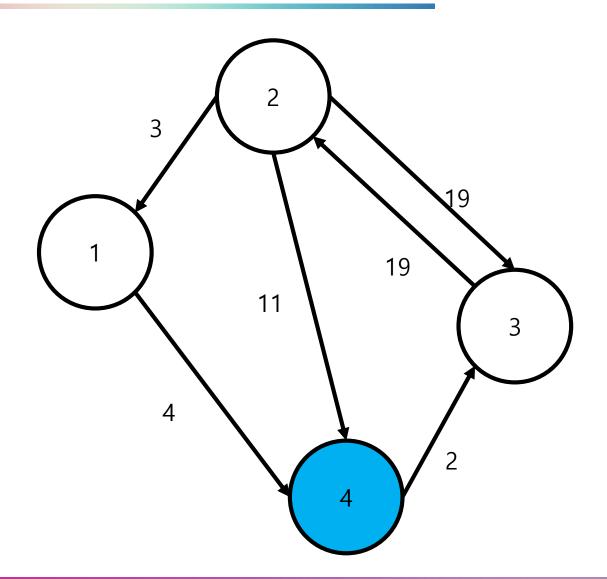


도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	22	19	0	INF
4	INF	INF	2	0

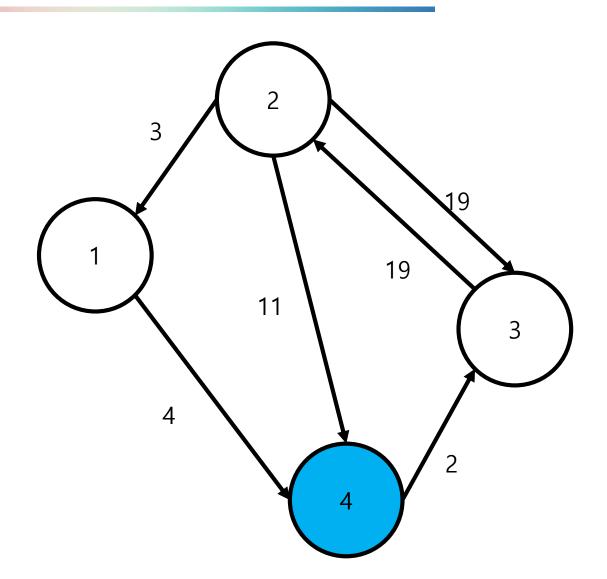


경유지 : 3

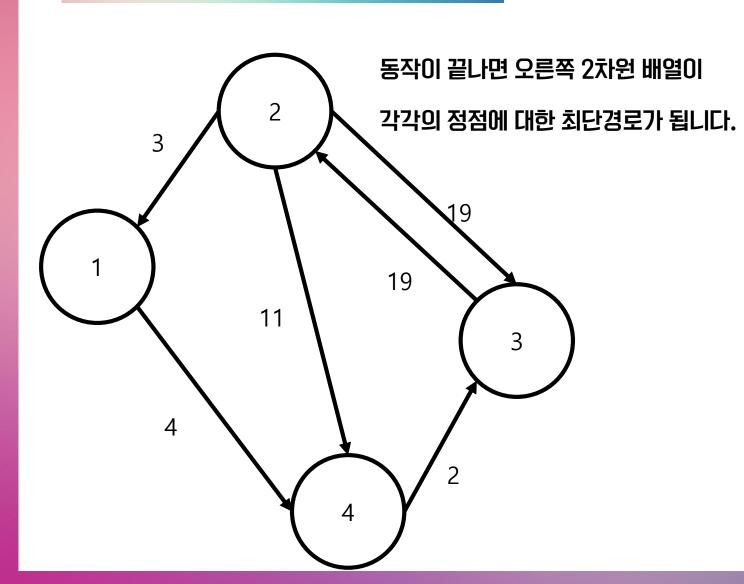
도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	22	19	0	INF
4	INF	21	2	0



도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	INF	4
2	3	0	19	7
3	22	19	0	INF
4	INF	21	2	0



도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	6	4
2	3	0	9	7
3	22	19	0	INF
4	INF	21	2	0



도착 출발	1	2	3	4
1	0	INF	6	4
2	3	0	9	7
3	22	19	0	INF
4	INF	21	2	0

아직도... 모르겠나요...

● DP[i][j]: i부터 j까지의 최단거리

진짜 이게 끝이에요.

서순주의!!!

예제

11404 - 플로이드

문제를 풀어보면 쉽습니다. 진짜

11404_플로이드

- 문제 이해가 안되는 사람은 없겠죠?(제발)
- 최단 '거리' 알고리즘이라고 거리만 생각하면 안되요!! 거리, 시간, 돈 어떠한 개념이 와도 응용할 수 있어야 합니다.
- 다음 슬라이드에 해답이 있습니다.
- 혼자서 풀기 힘들거나 잘 안될 때는 강사의 코드를 베껴 보아요.

11404_플로이드

```
#include <iostream>
#include <algorithm>

#include <climits>
using namespace std;

int N, M;
int a, b, c;
const int MAX_N = 102;
int DP[MAX_N][MAX_N];

const int INF = MAX_N * 100'000;

void Floyd_Warshall(void);
```

Floyd_Warshall함수만 작성하면 정답입니다.

```
int main(void)
   ios_base::sync_with_stdio(false);
   cin.tie(NULL);
   for ( int i = 0; i < MAX_N; i++ )
        for ( int j = 0; j < MAX_N; j++ )
           if (i == j)
               DP[i][j] = 0;
               DP[i][j] = INF;
   cin >> N >> M;
   for ( int m = 1; m <= M; m++ )
       cin >> a >> b >> c;
       DP[a][b] = min(DP[a][b], c);
   Floyd Warshall();
   for ( int i = 1; i \le N; i++ )
       for ( int j = 1; j <= N; j++ )
           if ( DP[i][j] == INF )
               DP[i][j] = 0;
           cout << DP[i][j] << ' ';
       cout << '\n';
   return 0;
```

11404 - 플로이드

이번엔 자신의 스타일로 코드를 바꿔서 다시 제출해보아요.

연습문제

2610 - 회의준비

2610_회의준비

- 일단 Floyd-Warshall을 한번 돌리고 생각해보자.
- 의사전달시간을 구해보자(1~N)

연습문제



11780_플로이드 2

● Hint: 플로이드 트래킹

● 구글에 쳐봐도 돼요. 물론 '플로이드 트래킹'을

Bellman-Ford Algorithm

모르면 어떻게 하라고?

따라한다. 외운다. 제출한다. 맞았습니다~ 그럼 이해된다!

그래도 모르면? 멘토를 부른다~

Bellman-Ford_male

- 하나의 시작점에서 모든 정점의 최단경로를 구할 수 있다!
- 음수 가중치가 있어도 OK!
- 음수사이클 검출에 좋음.

Bellman-Ford_mg

임의의 간선을 경유해서 가는 경로가 더 빠르다면 갱신

V개의 정점이 있을 때, 한 정점에서 다른 정점으로 가는 최단거리는 최대 (V - 1)개의 간선을 지난다.

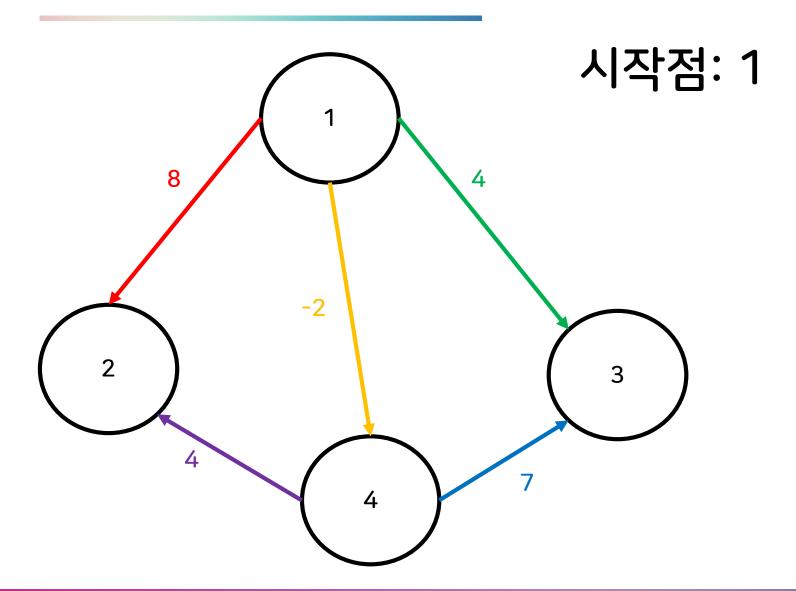
→ Ex) 1번 정점에서 5번 정점까지 정점을 최대한 거쳐가는 최단경로는 1->2->3->4->5 이렇게 4개의 간선을 거쳐가는 것이 최대이다. 1->2->5 는 최단경로가 될 수는 있지만 1->2->3->2->4->5 는 될 수가 없다.

모든 간선에 대해 V-1번 갱신하면?

방문되지 않은 정점(값이 무한대)에서 출발하는 edge는 고려하지 않음.

이번에도 예시를 통해 알아보아요.

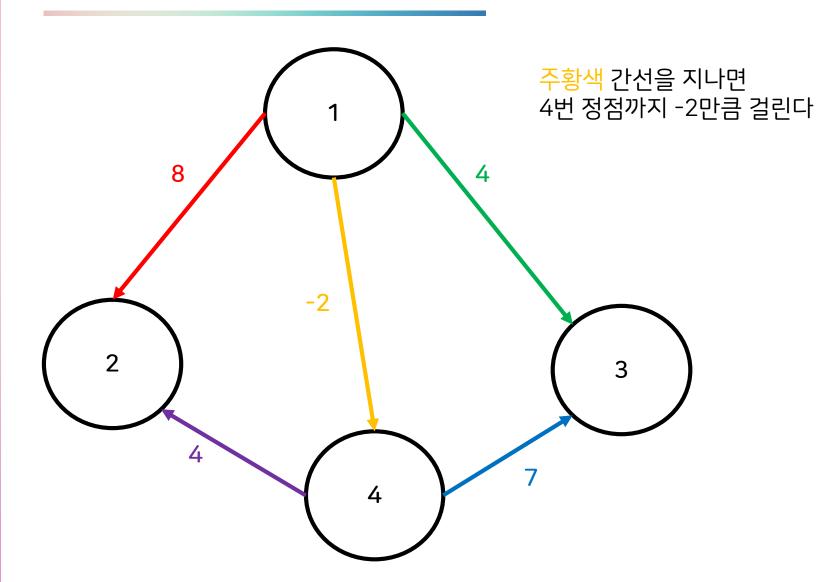
간선 탐색순서: 무지개



정점번호	최단거리
1	0
2	INF
3	INF
4	INF

빨간색 간선을 지나면 2번 정점까지 8만큼 걸린다 8

정점번호	최단거리
1	0
2	8
3	INF
4	INF



정점번호	최단거리
1	0
2	8
3	INF
4	-2

초록색 간선을 지나면 3번 정점까지 4만큼 걸린다 8

정점번호	최단거리
1	0
2	8
3	4
4	-2

파란색 간선을 지나면 3번 정점까지 5만큼 걸린다. 1->4->3 -2 + 78

정점번호	최단거리
1	0
2	8
3	5
4	-2

Bellman-Ford_@IAI

보라색 간선을 지나면 2번 정점까지 2만큼 걸린다. 1->4->2 -2 + 48

1번째 방문

정점번호	최단거리
1	0
2	2
3	5
4	-2

Bellman-Ford_@IAI

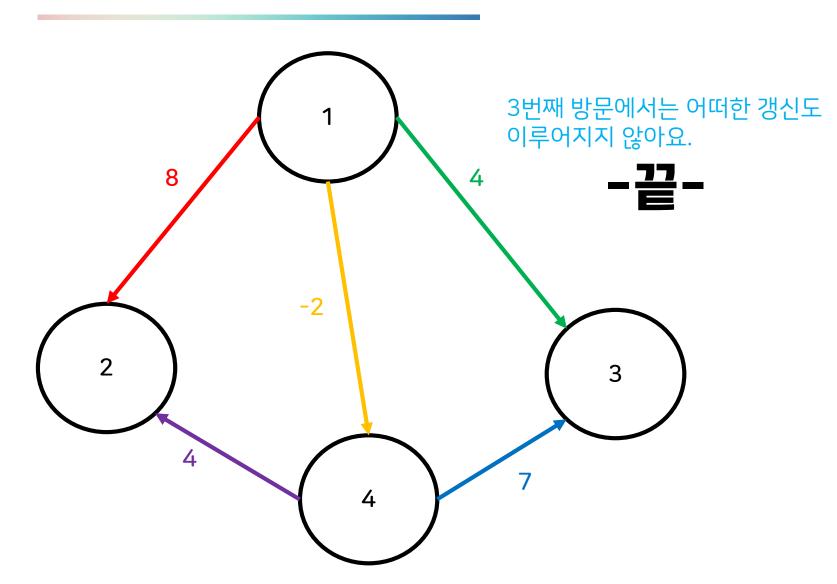
2번째 방문에서는 어떠한 갱신도 이루어지지 않아요. 8

2번째 방문

정점번호	최단거리
1	0
2	2
3	5
4	-2

Bellman-Ford_@IAI

3번째 방문



정점번호	최단거리
1	0
2	2
3	5
4	-2

Bellman-Ford_@AI

만약 무지개 순서가 아니라 거꾸로 한다면?

→ 2번째에도 갱신이 일어남.

간선을 체크하는 순서에 따라 갱신되는 과정이 달라짐.

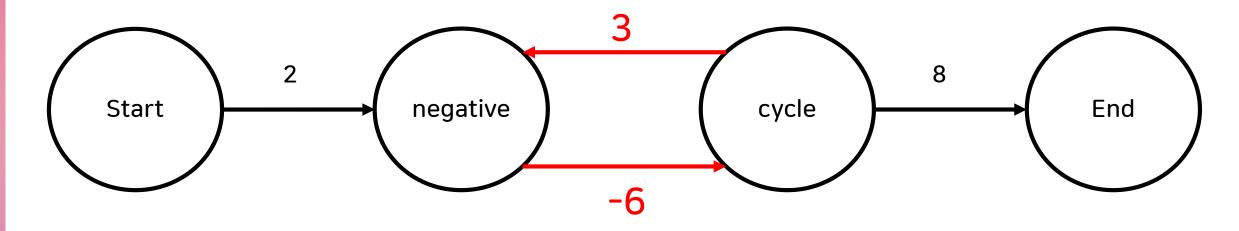
그러나 V-1번 이후에는 갱신이 일어나지 않음.

생각보다 쉬운데???

Bellman-Ford 음수 사이클

진짜가 나타났다.

Bellman-Ford_음수사이클



Negative랑 cycle을 계속 왔다 갔다 하면???

최단경로가 음의 무한대로 발산한다???

이걸 어떻게 찾지?

Bellman-Ford_#4

임의의 간선을 경유해서 가는 경로가 더 빠르다면 갱신

이말은?? 다음 슬라이드에

V개의 정점이 있을 때, 한 정점에서 다른 정점으로 가는 최단거리는 최대 (V - 1)개의 간선을 지난다.

→ Ex) 1번 정점에서 5번 정점까지 정점을 최대한 거쳐가는 최단경로는 1->2->3->4->5 이렇게 4개의 간선을 거쳐가는 것이 최대이다. 1->2->5 는 최단경로가 될 수는 있지만 1->2->3->2->4->5 는 될 수가 없다.

모든 간선에 대해 V-1번 갱신하면?

방문되지 않은 정점(값이 무한대)에서 출발하는 edge는 고려하지 않음.

Bellman-Ford_음수사이클

V개의 정점이 있을 때, 한 정점에서 다른 정점으로 가는 최단거리는 최대 (V - 1)개의 간선을 지난다.

- → V-1번 돌린 이후에는 갱신이 일어나지 않는다.
- → V-1번만 갱신하면 된다. (예시에서도 3번만 했어요.)

음수사이클이 있다면?

- → 몇 번을 돌리든 계속 갱신이 일어남.
- →V번째 돌렸을 때도 갱신이 일어나면 음수사이클 존재!!!

Bellman-Ford_==

- ShortPath[i]: 시작점에서 i번 정점까지의 최단경로
- N: 정점의 개수 M: 간선의 개수
- Edges: 간선들을 모아 놓은 vector
- ret: 음수사이클이 있으면 false
- V번(1번 더 돌린다고 큰일나지 않음) 돌려서 최단경로 탐색
- V번(대변) 해도 돼 또 돌려서 음수사이클 존재 파악

```
bool Bellman Ford(void)
   ShortPath[1] = 0;
   for ( int n = 1; n <= N; n++ )
        for ( int m = 0; m < M; m++ )
            auto e = Edges[m];
            if ( ShortPath[e.from] == INF )
                continue;
            else if ( ShortPath[e.to] > ShortPath[e.from] + e.weight )
                ShortPath[e.to] = ShortPath[e.from] + e.weight;
    bool ret = true;
   for ( int n = 1; n <= N; n++ )
        for ( int m = 0; m < M; m++ )
            auto e = Edges[m];
            if ( ShortPath[e.from] == INF )
                continue;
            else if ( ShortPath[e.from] == -INF )
                ShortPath[e.to] = -INF;
            else if ( ShortPath[e.to] > ShortPath[e.from] + e.weight
                ShortPath[e.to] = -INF;
                ret = false;
   return ret;
```

Shortest Path_ ***

Floyd-Warshall

모든 정점에 대하여~ 모든 경로에 대해 다 구할 수 있음. 시간 복잡도는 $O(V^3)$

Dijkstra

시작점 정해져 있음 음수가중치 불가 시간 복잡도는 $O(E \log V)$

Bellman-Ford

모든 간선에 대하여~ 시작점 정해져 있음 음수사이클 체크 가능 시간 복잡도는 O(VE)

E: 간선의 개수 V: 정점의 개수

참고: $V - 1 \le E \le V^2$

예제

11657 - 타임머신

11657_타임머신

- 문제 이해가 안되는 사람은 없겠죠?(제발제발제발제발)
- 역시나 첫 문제는 쉽습니다.
- 다음 슬라이드에 해답이 있습니다.
- 혼자서 풀기 힘들거나 잘 안될 때는 강사의 코드를 베껴 보아요.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <climits>
using namespace std;
using ll = long long;
const 11 INF = LLONG_MAX;
int N, M;
int A, B, C;
class Edge
    int from, to, weight;
    Edge(void)
        from = 0;
        to = 0;
        weight = 0;
   Edge(int u, int v, int w)
        from = u;
        to = v;
        weight = w;
   Edge(const Edge& edge)
        from = edge.from;
        to = edge.to;
        weight = edge.weight;
};
vector<Edge> Edges;
vector<11> ShortPath;
bool Bellman_Ford(void);
```

```
int main(void)
    ios_base::sync_with_stdio(false);
   cin.tie(NULL);
   cin >> N >> M;
   ShortPath.resize(N + 1, INF);
    for ( int m = 1; m <= M; m++ )
        cin >> A >> B >> C;
        Edges.push_back(Edge(A, B, C));
    if ( Bellman Ford() )
        for ( int n = 2; n <= N; n++ )
            if ( ShortPath[n] == INF )
                cout << "-1\n";
            else
                cout << ShortPath[n] << '\n';</pre>
    else
        cout << "-1\n";
   return 0;
```

11657_타임머신

Bellman_Ford함수만 작성 하면 정답입니다.

11657 - 타임머신

이번엔 자신의 스타일로 코드를 바꿔서 다시 제출해보아요.

연습문제

1865 - 윔홀

1866_윔홀

● 사실 타임머신 보다 쉬운 문제

● 모든 시작점에 대해 음수사이클이 하나라도 있으면 YES!

• 이 밑에 답이있어요.

음수사이클이 하나라도 있으면 YES가 답

연습문제



1219_오민식의 고민

- 모델링을 신경 써 주세요. 어떠한 자료구조가 필요할지 어떤 방법으로 동작할지
- 돈을 많~~~이 버는 것이 목적이죠? 최대 돈 알고리즘이 필요합니다.
- 최단→최대, 거리↔돈
- 음수 사이클이 있다고 해서 그 사이클이 목적지와 꼭 연결되라는 법은 없겠죠?

연습문제

3860 -할로원 묘지

이 문제를 푼 선착순 10명(알고리즘반 학생만) 밥 사드립니다. (수업 열심히 듣고 Bellman Ford 열심히 공부 했다면 누구나 해결할 수 있어요.)

고생하셨습니다!!