$M = 1000000007$ とおく。$(r,c),(r,c+1),(r+1,c)$ にたどり着く方法の個数をそれぞれ A',B',C' とおくと，A',B',C' を M で割った余りがそれぞれ A,B,C である。

$x \geq 1,\ y \geq 1$ のときマス (x,y) にたどり着く方法の個数は ${}_{x+y}\mathrm{C}_y$ であるから，A',B',C' は次のように表せる：

$$\begin{cases} A' = {}_{r+c}\mathrm{C}_r = {}_{r+c}\mathrm{C}_c \\ B' = {}_{r+c+1}\mathrm{C}_{c+1} \\ C' = {}_{r+c+1}\mathrm{C}_{r+1} \end{cases}$$

[1] $A \geq 2$ のとき

$A \geq 2$ ならば $A' \geq 2$ なので，$r \geq 1,\ c \geq 1$ である。

一般に，$n \geq 2,\ k \geq 1$ のとき

$$k \times {}_n\mathrm{C}_k = n \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つから，A',B',C' に関して次が成り立つ：

$$\begin{cases} (r+1)\ C' = (r+c+1)\ A' \\ (c+1)\ B' = (r+c+1)\ A' \end{cases}$$

$1 \leq A' < B',\ 1 \leq A' < C'$ に注意してこれを解くと，

$$\begin{cases} r = \dfrac{B'C' - A'C'}{-B'C' + A'B' + A'C'} \\ c = \dfrac{B'C' - A'B'}{-B'C' + A'B' + A'C'} \end{cases}$$

である。

1　逆元の存在証明

2　フェルマーの小定理の証明

整数 $m\ (\geq 2)$ に対して

$$d_m = \gcd({}_m\mathrm{C}_1, {}_m\mathrm{C}_2,\ \ldots\ , {}_m\mathrm{C}_{m-1})$$

と定義する。

補題 1

m が素数ならば $d_m = m$ が成り立つ。

一般に，$m \geq 2,\ k \geq 1$ のとき

$$k \times {}_m\mathrm{C}_k = m \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つ。このことと，$1 \leq k \leq m-1$ のとき m と k は互いに素であることから，任意の k $(1 \leq k \leq m-1)$ に対して ${}_m\mathrm{C}_k$ は m で割り切れる。

また，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ で m は素数なので $d_m = 1$ または $d_m = m$ が必要である。

したがって，$d_m = m$ である。

補題 2

任意の自然数 k に対して，$k^m - k$ は d_m で割り切れる。

自然数 n に関する条件「$n^m - n$ は d_m で割り切れる」を $P(n)$ とおく。

$n = 1$ のとき，$n^m - n$ すなわち 0 は d_m (≥ 1) で割り切れるから，$P(1)$ が成り立つ。

ある $n = k$ (≥ 1) に対して $P(k)$ が成り立つと仮定すると

$$k^m - k \equiv 0 \mod d_m \tag{1}$$

が成り立つが，このとき

$$\begin{aligned}
(k+1)^m - (k+1) &= \sum_{j=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_j k^j - (k+1) \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j k^j + k^m - k \\
&\equiv k^m - k \mod d_m \\
&\equiv 0 \mod d_m \qquad (\because (1))
\end{aligned}$$

なので，$P(k+1)$ も成り立つ。

以上より，補題 2 が成り立つ。

フェルマーの小定理

p が素数のとき，任意の自然数 k に対して $k^{p-1} \equiv 1 \mod p$ が成り立つ。

補題 1, 2 より，p が素数のとき，p と互いに素な任意の自然数 k に対して

$$k^p \equiv k \mod p$$

が成り立つ。k と p は互いに素であるから，両辺を k で割ることができ，

$$k^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

が成り立つ。