まず，文字列 $s = s_1 s_2 \ldots s_N$ が標準形であることと，s に関する次の条件 $P(s)$ は同値であることを示す。

i). $s_1 =$ "a"

ii). $s_k \leq \max\{s_1, \ldots, s_{k-1}\} + 1 \quad \text{for } \forall k,\ 2 \leq k \leq N$

証明. $N,\ N \geq 1$ に対する条件 $Q(N)$ を次のように定義する。

> N 文字の文字列 s を任意にとると，s が標準形であることと $P(s)$ は同値である

[1] 1 文字の標準形は $s = s_1 =$ "a" なので $Q(1)$ が成立する。

[2] 任意の $N,\ N \geq 1$ に対して $Q(N)$ の成立を仮定する。$N+1$ 文字の文字列 s を任意にとる。

[2-1] $P(s)$ の成立を仮定する。$Q(N)$ が成立するから，s の末尾を除いた文字列

$$s_1 s_2 \ldots s_N$$

は標準形である。よって，s が標準形でないと仮定すると，s の $N+1$ 文字目を $s'_{N+1} (< s_{N+1})$ に変えた文字列 s' で s と同型なものが存在することになる。ところが、ii) が成立することから

$$s'_{N+1} < s_{N+1} \leq \max\{s_1, \ldots, s_N\} + 1$$

なので s' と s とは同型でない[1]。ゆえに矛盾する。したがって s は標準形である。

[2-2] s が標準形であると仮定する。s は明らかに i) を満たす。ここで s が ii) を満たさないと仮定すると，$Q(N)$ から

$$s_{N+1} > \max\{s_1, \ldots, s_N\} + 1$$

が従う。ところが，s の $N+1$ 文字目を $\max\{s_1, \ldots, s_N\} + 1$ に変えた文字列を s' とおくと s' は $s' \neq s$ かつ s と同型な標準形であるから，s が標準形であることに矛盾する。したがって s は ii) を満たす。

以上 [2-1][2-2] より，$Q(N+1)$ が成立する。

以上 [1][2] より，任意の $N,\ N \geq 1$ に対して $Q(N)$ が成立する。 ■

[1] ii) によれば、文字列 $s_1 s_2 \ldots s_N$ は "a" から $\max\{s_1, \ldots, s_N\}$ までのすべての文字を使っているので、s と s' とでは構成要素の文字の対ごとの一致状況が異なる

つぎに，文字列を要素とする配列 S_N を次の擬似コードで定義する。

$N = 1$ のとき

```
S_N = { "a" }
```

$N > 1$ のとき

```
S_{N+1} = {}

for s in S_N:
    c_max = max{s_1, ..., s_N}

    for c from "a" to c_max + 1:
        t = concat(s, c)
        push t to S_{N+1}
```

N に関する数学的帰納法のようなもの[2]によって，任意の N, $N \geq 1$ に対して S_N の要素は辞書順で昇順に整列していることがわかる。また，t の作り方から明らかに t は標準形である。したがって，S_N は N 文字の標準形の文字列すべてが辞書順で昇順に整列した配列である。

[2]擬似コードで定義された対象について厳密に論じる方法がよくわからない