1　本問に関する議論

整数 n に対して，n の倍数のうち n と異なるものを n の真の倍数と呼ぶことにする。

素数の集合を P，合成数の集合を C，「素数っぽい」集合を Q，2, 3, 5 のいずれでも割り切れないような 2 以上の整数の集合を T とおく。題意により，

$$\begin{cases} N \in P \Longrightarrow N \in Q \\ N \in C \text{ かつ } N \in T \Longrightarrow N \in Q \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} N \in T &\Longrightarrow (N \in P \text{ または } N \in C) \text{ かつ } N \in T \\ &\Longrightarrow N \in Q \end{aligned}$$

である。また，T に含まれない正整数は，次のいずれかである：

i). 1 ($\notin Q$)

ii). 2, 3, 5 ($\in Q$)

iii). 2, 3, 5 のいずれかの真の倍数 ($\notin Q$)

2　エラトステネスの篩に関する議論

整数 n に対して，n の倍数のうち n と異なるものを n の真の倍数と呼ぶことにする。

2 以上のすべての整数の集合を A_0 とおく。k を 4 以上の整数として，A_0 の要素のうちで次を満たすものすべての集合を A_k とおく：

2 以上 $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ 以下のいかなる整数 j に対してもその真の倍数でない。

整数 N に関する条件

$$x \in A_N \text{ かつ } 2 \leq x \leq N \Longleftrightarrow x \text{ は 2 以上 } N \text{ 以下の素数}$$

を $P(N)$ とおく。4 以上のすべての整数 N に対して $P(N)$ が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $N = 4$ のとき

$A_4 = \{2, 3, 5, \ldots\}$ なので，$P(4)$ が成り立つ。

[2] $N \geq 4$ のとき

ある N (≥ 4) に対して $P(N)$ の成立を仮定する。A_{N+1} の N 以下の要素すべての集合は，A_N の N 以下の要素すべての集合に一致するから，$P(N+1)$ の成立を示すには,

$$N+1 \text{ が素数である} \iff N+1 \in A_{N+1}$$

を示せば十分であるが,

$$N+1 \text{ が素数である} \iff N+1 \text{ が } 2 \text{ 以上 } \lfloor\sqrt{N+1}\rfloor \text{ 以下のいかなる整数でも割り切れない}$$

なので，$P(N+1)$ が成り立つ。

以上より，4 以上のすべての整数 N に対して $P(N)$ が成り立つ。