

2つの自然数 m, n に対して, $f(m, n)$ を, m を n で割った余りと定義すると, 除法の定理により $f(m, n)$ は $0 \leq f(m, n) < n$ の範囲にただひとつ存在する。

数列 $\{r_n\}$ を次の漸化式によって定める:

$$\begin{aligned} r_0 &= a, \quad r_1 = b \quad (a, b \text{ は正整数}) \\ r_n &= f(r_{n-2}, r_{n-1}) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

ただし, ユークリッドの互除法の基本原理由れば $\{r_n\}$ は狭義単調減少であって $r_{n+1} = 0$ となるような n (このような n を N とおく) が存在するから, 割り算の余りが定義できない。したがって, 第 N 項より後は定義しないものとする。

数列 $\{r_n\}$ に対して, ユークリッドの互除法によって

$$\gcd(a, b) = \gcd(r_0, r_1) = \gcd(r_{N-1}, r_N) = r_N$$

が成り立ち, N は本問における「再帰の回数」に一致する。

ここで, フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ を次の漸化式によって定める:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \quad F_1 = 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

3 以上の任意の正整数 k に対して

$$f(F_{k+1}, F_k) = F_{k-1}$$

が成り立つから, 任意の正整数 K に対して $a = F_{K+2}$, $b = F_{K+1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} r_0 &= F_{K+2} \\ r_1 &= F_{K+1} \\ r_2 &= f(F_{K+2}, F_{K+1}) = F_K \\ &\vdots \\ r_K &= f(F_4, F_3) = F_2 \\ r_{K+1} &= f(F_3, F_2) = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって, K が指定されたとき, 求める正整数の組 (a, b) のひとつは (F_{K+2}, F_{K+1}) である。