

点 (X, Y) を P とおく。移動の対称性により、 P は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下、この前提のもとで考える。

P に到達できる移動方法が存在するためには、 X も Y も D で割り切れることが必要である。このとき、ある非負整数 k, l が存在し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X &= kD \\ Y &= lD \end{aligned}$$

よって、原点から P までのマンハッタン距離は $X + Y = (k + l)D$ と表すことができる。このことと、 N 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は ND であることから、

$$N \geq k + l \quad (1)$$

が必要である。

ここで、

X 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ a, b
 Y 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ c, d

とおく。

ちょうど N 回で P に到達するような移動の仕方は、非負整数 k', l' を用いて表すと、

X 軸の正方向に $k + k'$ 回、負方向に k' 回だけ移動
 Y 軸の正方向に $l + l'$ 回、負方向に l' 回だけ移動

するような場合なので、

$$a = k + k', \quad b = k', \quad c = l + l', \quad d = l'$$

である。このような移動の仕方を「ゴールできる移動の仕方」と呼ぶことにする。ただし、 k', l' は

$$N = a + b + c + d = (k + k') + k' + (l + l') + l'$$

を満たすので、

$$l' = \frac{1}{2}(N - k - 2k' - l)$$

が成り立ち、このような整数 l' が存在するためには $N - (k + l)$ が偶数であることが必要である。この条件のもとで、 $0 \leq k' \leq N, 0 \leq l' \leq N$ から、 k' の範囲は、

$$0 \leq k' \leq \frac{1}{2}(N - (k + l)) \quad (2)$$

であり、(1) の制約のもとでこれを満たす k' が存在する。

「ゴールできる移動の仕方」の個数は、 k' を固定すると、

$${}_N C_a \times {}_{N-a} C_b \times {}_{N-a-b} C_c = \frac{N!}{a!b!c!d!}$$

である。 k' は (2) の範囲をくまなく動くので、「ゴールできる移動の仕方」の個数は、

$$\sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!}$$

である。 P までの移動の仕方は 4^N 通りであり、これらの起こり方は同様に確からしいから、求める確率は、

$$\frac{1}{4^N} \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!}$$

である。