

ある長方形を3つの長方形に分割する方法は、ある1辺に平行な2本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か、各辺にそれぞれ平行な1本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれI型、T型と呼ぶことにする。

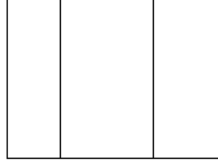


Figure 1: I 型

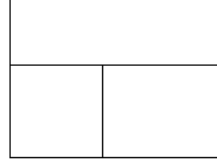


Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。 H, W の少なくとも一方が3で割り切れるならば、I型の分割によってちょうど3等分することができ、このとき $\Delta S = 0$ である。以下、 H, W のいずれも3で割り切れないときを考える。

[1] I型に分割するとき

まず、(fig. 1) のように縦の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合を考える。 $W = 2$ のときはI型の分割が存在しないから、2以上の整数 k を用いて $W = 3k + 1$ または $W = 3k - 1$ と表せるときを考えればよい。

このとき、 ΔS が最小となるような3つの長方形の幅の組は $k, k, k + 1$ または $k, k, k - 1$ であり、このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

同様に、横の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合も考えると、I型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\min\{H, W\} \quad (1)$$

である。

[2] T型に分割するとき

まず、(fig. 2) のように1辺の長さが W の長方形ができるように分割する場合を考える。T型の分割は任意の W, H に対して存在する。

(fig. 2) 下部の2つの長方形の幅の差が最小となるような2つの長方形の幅の組は

$$\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil$$

である。また、これら 2 つの長方形の高さを l とおくと、

$$\Delta S = \max \left\{ W(H-l), l \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \right\} - \min \left\{ W(H-l), l \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor \right\}$$

である。

同様に、1 辺の長さが H の長方形ができるように分割する場合も考えると、T 型の分割をするときの ΔS の最小値は、次の 2 つの値の大きくない方である：

$$\min_l \left\{ \max \left\{ W(H-l), l \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \right\} - \min \left\{ W(H-l), l \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor \right\} \right\}, \quad (2)$$

$$\min_m \left\{ \max \left\{ H(W-m), m \left\lceil \frac{H}{2} \right\rceil \right\} - \min \left\{ H(W-m), m \left\lfloor \frac{H}{2} \right\rfloor \right\} \right\} \quad (3)$$

ただし、これらの値が最小をとるためには、それぞれ

$$l \geq \frac{H}{2}, \quad m \geq \frac{W}{2}$$

が必要である。

以上より、求める値は (1), (2), (3) のうち最小のものである。