問題文に与えられた「よい文字列」がみたす条件を箇条書きの上から順に i), ii), iii) とおく。$l = \mathrm{lcm}(N, M)$ とおいて，「よい文字列」が存在するならば $|X| = l$ のときに存在することを示す。

よい文字列が存在するとき，これを X' とおくと，$|X'|$ は N でも M でも割り切れるから，$|X'| = kl$ なる非負整数 k が存在する。

$NM = \gcd(N, M) \times \mathrm{lcm}(N, M)$ により，

$$\frac{l}{N} = \frac{M}{\gcd(N, M)} \qquad (= M'\text{とおく})$$
$$\frac{l}{M} = \frac{N}{\gcd(N, M)} \qquad (= N'\text{とおく})$$

であるから，M' と N' は互いに素である。M', N' を用いて条件 ii), iii) を表すと，

$$X' \text{ の } 1,\ kM'+1,\ 2kM'+1,\ \ldots,\ (N-1)kM'+1 \text{ 番目の連結は } S$$
$$X' \text{ の } 1,\ kN'+1,\ 2kN'+1,\ \ldots,\ (M-1)kN'+1 \text{ 番目の連結は } T$$

となる。

文字列 S, T をなす文字の位置，すなわち $1 \leq i \leq N-1,\ 1 \leq j \leq M-1$ に対する $(i-1)kM'+1,\ (j-1)kN'+1$ の値をそれぞれ M', N' で割った余りがすべて 1 であることに注意すると，中国剰余定理により，文字の位置は $M'N'$ ごとに唯一つ重なる。