1　証明

点 (X,Y) を P とおく。移動の対称性により，P は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下，この前提のもとで考える。

P に到達できる移動方法が存在するためには，X も Y も D で割り切れることが必要である。このとき，ある非負整数 k, l が存在し，次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X &= kD \\ Y &= lD \end{aligned}$$

よって，原点から P までのマンハッタン距離は $X + Y = (k + l)D$ と表すことができる。このことと，N 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は ND であることから，

$$N \geq k + l \tag{1}$$

が必要である。

ここで，

　X 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ a, b
　Y 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ c, d

とおく。

ちょうど N 回で P に到達するような移動の仕方は，非負整数 k', l' を用いて表すと，

　X 軸の正方向に $k + k'$ 回，負方向に k' 回だけ移動
　Y 軸の正方向に $l + l'$ 回，負方向に l' 回だけ移動

するような場合なので，

$$a = k + k',\ b = k',\ c = l + l',\ d = l'$$

である。このような移動の仕方を「ゴールできる移動の仕方」と呼ぶことにする。ただし，k', l' は

$$N = a + b + c + d = (k + k') + k' + (l + l') + l'$$

を満たすので，

$$l' = \frac{1}{2}(N - k - 2k' - l)$$

が成り立ち，このような整数 l' が存在するためには $N - (k + l)$ が偶数であることが必要である。この条件のもとで，$0 \leq k' \leq N, 0 \leq l' \leq N$ から，k' の範囲は，

$$0 \leq k' \leq \frac{1}{2}(N - (k + l)) \tag{2}$$

であり，(1) の制約のもとでこれを満たす k' が存在する。

「ゴールできる移動の仕方」の個数は，k' を固定すると，

$$ {}_N C_a \times {}_{N-a} C_b \times {}_{N-a-b} C_c = \frac{N!}{a!b!c!d!} $$

である。k' は (2) の範囲をくまなく動くので，「ゴールできる移動の仕方」の個数は，

$$ \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!} $$

である。P までの移動の仕方は 4^N 通りであり，これらの起こり方は同様に確からしいから，求める確率は，

$$ \frac{1}{4^N} \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!} \tag{3} $$

である。

2　計算手法に関する証明

一般に、非負整数 n, r $(n \geq 2,\ 2 \leq r \leq n-1)$ に対して次が成り立つ：

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r $$

このことと二項係数の定義から、非負整数 s, n, r $(r \leq n)$ に対して $f(n,r) = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{s^n}$ とおくと、次の漸化式が成り立つ。

$$ f(n,0) = \frac{1}{s^n},\ f(n,n) = \frac{1}{s^n} $$
$$ f(n,r) = \frac{1}{s}\{f(n-1,r-1) + f(n-1,r)\} $$

したがって (3) は、$s=4$ として、

$$ \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \{f(N,a) \times f(N-a,b) \times f(N-a-b,c)\} $$

である。