1 証明

点 (X, Y) を P とおく。移動の対称性により，P は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下，この前提のもとで考える。

P に到達できる移動方法が存在するためには，X も Y も D で割り切れることが必要である。このとき，ある非負整数 k, l が存在し，次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X &= kD \\ Y &= lD \end{aligned}$$

よって，原点から P までのマンハッタン距離は $X + Y = (k + l)D$ と表すことができる。このことと，N 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は ND であることから，

$$N \geq k + l$$

が必要である。

ここで，X, Y 軸に平行な移動の回数をそれぞれ A, B とおくと，

$$\begin{gathered} N = A + B \\ k \leq A \leq N \end{gathered}$$

である。

さらに，$+x$, $-x$, $+y$, $-y$ 方向の移動の回数をそれぞれ A_+, A_-, B_+, B_- とおく。各軸に平行な移動について "行き過ぎた分は戻らないといけない" ことに注意すれば，

$$\begin{gathered} A = A_+ + A_- \\ B = B_+ + B_- \\ k = A_+ - A_- \\ l = B_+ - B_- \end{gathered}$$

が成り立つ。

A を固定すると，他の方向の移動の回数もすべて決まる。x, y 軸に平行な移動の仕方は互いに独立であり，それぞれの個数は，

$${}_A\mathrm{C}_{A_+},\ {}_B\mathrm{C}_{B_+}$$

であるから，固定された A に対して，点 P にちょうど到達する確率は，

$$\frac{{}_A\mathrm{C}_{A_+}}{2^A} \frac{{}_B\mathrm{C}_{B_+}}{2^B}$$

である。

したがって，A の固定を解除すると，求める確率は，

$$\sum_A \left(\frac{{}_A\mathrm{C}_{A_+}}{2^A} \frac{{}_B\mathrm{C}_{B_+}}{2^B} \right) \tag{1}$$

である。ただし，$A_+ = \dfrac{A+k}{2}$ なる整数 A_+ が存在するためには A と k の偶奇が一致しなければならないから，非負整数 t を用いて

$$A = k + 2t$$

を満たすことが必要である。t の範囲は，A, B の範囲に注意すれば，

$$0 \leq t \leq \frac{N-(k+l)}{2}$$

である。

2　計算手法に関する証明

一般に，非負整数 n, r $(n \geq 2,\ 2 \leq r \leq n-1)$ に対して次が成り立つ：

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

このことと二項係数の定義から，非負整数 s, n, r $(r \leq n)$ に対して $f(n,r) = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{s^n}$ とおくと，次の漸化式が成り立つ。

$$f(n,0) = \frac{1}{s^n},\ f(n,n) = \frac{1}{s^n}$$
$$f(n,r) = \frac{1}{s}\{f(n-1,r-1) + f(n-1,r)\}$$

このことを用いて，再帰的に確率の値を計算することができる。