ある長方形を 3 つの長方形に分割する方法は，ある 1 辺に平行な 2 本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か，各辺にそれぞれ平行な 1 本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれ I 型，T 型と呼ぶことにする。

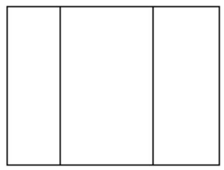

Figure 1: I 型

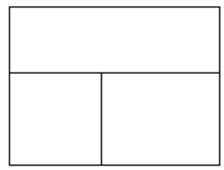

Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。H, W の少なくとも一方が 3 で割り切れるならば，I 型の分割によってちょうど 3 等分することができ，このとき $\Delta S = 0$ である。以下，H, W のいずれも 3 で割り切れないときを考える。

求める値は，長方形を I 型，T 型に分割したときのそれぞれの ΔS の最小値の大きくない方である。

[1] I 型に分割するとき

まず，(fig. 1) のように縦の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合を考える。$W = 2$ のときは I 型の分割が存在しないから，2 以上の整数 k を用いて $W = 3k+1$ または $W = 3k-1$ と表せるときを考えればよい。

このとき，ΔS が最小となるような 3 つの長方形の幅の組は $k, k, k+1$ または $k, k, k-1$ であり，このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

同様に，横の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合も考えると，I 型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\min\{H, W\} \tag{1}$$

である。

[2] T 型に分割するとき

まず，(fig. 2) のように 1 辺の長さが W の長方形ができるように分割する場合 (縦向きの T 型と呼ぶことにする) を考える。T 型の分割は任意の W, H に対して存在する。

(fig. 2) 下部の 2 つの長方形の幅の差が最小となるような 2 つの長方形の幅の組は

$$\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor,\ \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \tag{2}$$

である。これら 2 つの長方形の高さを h とおくと，3 つの長方形の面積はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
A(h) &= W(H-h),\\
B(h) &= h\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor\\
C(h) &= h\left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil
\end{aligned}
$$

であり，$A(h)$ は h に関して単調減少，$B(h), C(h)$ は h に関して単調増加で

$$
B(h) \le C(h) \tag{3}
$$

が成り立つ。よって，$A(h), B(h), C(h)$ の大小関係は次の 3 通りである：

$$
\begin{aligned}
B(h) \le A(h) \le C(h) \quad (4)\\
A(h) \le B(h) \le C(h) \quad (5)\\
B(h) \le C(h) \le A(h) \quad (6)
\end{aligned}
$$

それぞれの不等号の成立に関する h の条件は

$$
B(h) \le A(h) \Longleftrightarrow h \le \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor}
$$

$$
A(h) \le C(h) \Longleftrightarrow \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \le h
$$

である。ここで，(4) については，W が偶数ならば (4) を満たす h が存在するが，そのときは (5), (6) のいずれかも成立しているので考えなくてよく，W が奇数ならば (4) を満たす h は存在しないのでやはり考えなくてよい。

$A(h), B(h), C(h)$ の単調性と，

$$
h = \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \quad \text{および} \quad h = \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil}
$$

を境に $A(h)$ と $B(h)$，$A(h)$ と $C(h)$ の大小関係がそれぞれ逆転することに注意すれば，ΔS が最小となるのは，h の値が

$$
h_1 = \left\lceil \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \right\rceil \quad \text{または} \quad h_2 = \left\lfloor \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \right\rfloor
$$

のときであり，このとき，ΔS の最小値は

$$
\min\{C(h_1) - A(h_1),\ A(h_2) - B(h_2)\} \tag{7}
$$

である。これらの値は W, H のみに依存する。

同様に，1 辺の長さが H の長方形ができるように分割する場合 (横向きの T 型と呼ぶことにする) は W, H を互いに交換して (7) の値を求めればよい。

したがって，T 型の分割をするときの ΔS の最小値は，縦向き，横向きの T 型の分割のそれぞれに対して求めた (7) の値の大きくない方である。