

N を 3 以上の整数とすると, N は素数あるいは合成数のいずれかである。 N が合成数ならば, 2 つの正整数 n_1, n_2 ($2 \leq n_1 \leq n_2 \leq N-1$) を用いて $N = n_1 n_2$ と表すことができ, $\lceil \sqrt{N} \rceil \geq \sqrt{N}$ より $\lceil \sqrt{N} \rceil^2 \geq N$ であることに注意すれば, $n_1 \leq \lceil \sqrt{N} \rceil$ である。実際, $n_1 > \lceil \sqrt{N} \rceil$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &> \lceil \sqrt{N} \rceil n_2 \\ &\geq \lceil \sqrt{N} \rceil n_1 \\ &> \lceil \sqrt{N} \rceil^2 \\ &\geq N \end{aligned}$$

となり矛盾する。

したがって, 次が成り立つ:

$$N \text{ が合成数} \implies N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil \sqrt{N} \rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持つ}$$

また, 素数の定義から明らかに次が成り立つ:

$$N \text{ が素数} \implies N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil \sqrt{N} \rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持たない}$$

したがって, 次が成り立つ:

$$N \text{ が素数} \iff N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil \sqrt{N} \rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持たない}$$