

ある長方形を3つの長方形に分割する方法は、ある1辺に平行な2本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か、各辺にそれぞれ平行な1本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれI型、T型と呼ぶことにする。

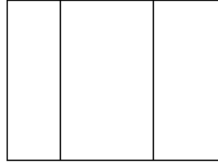


Figure 1: I 型

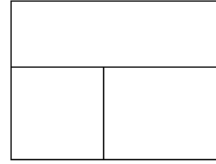


Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。 H, W の少なくとも一方が3で割り切れるならば、I型の分割によってちょうど3等分することができ、このように分割すれば $\Delta S = 0$ である。以下、 H, W のいずれも3で割り切れないときを考える。

[1] I型に分割するとき

まず、縦の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合を考える。 $W = 2$ のときはI型の分割が存在しないから、2以上の整数 k を用いて $W = 3k + 1$ または $W = 3k - 1$ と表せるときを考えればよい。

このとき、 ΔS が最小となるような3つの長方形の横の長さの組は $k, k, k + 1$ または $k, k, k - 1$ であり、このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

横の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合も同様に考えて $\Delta S = W$ を得る。

したがって、I型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\Delta S = \min\{H, W\}$$

である。

[2] T型に分割するとき