# 1　証明

点 $(X, Y)$ を $P$ とおく。移動の対称性により，$P$ は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下，この前提のもとで考える。

$P$ に到達できる移動の仕方が存在するためには，$X$ も $Y$ も $D$ で割り切れることが必要である。このとき，ある非負整数 $k, l$ が存在し，次が成り立つ。

$$\begin{cases} X = kD \\ Y = lD \end{cases} \tag{1}$$

よって，原点から $P$ までのマンハッタン距離は $X + Y = (k + l)D$ と表すことができる。このことと，$N$ 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は $ND$ であることから，

$$N \geq k + l \tag{2}$$

が必要である。

ここで，$X, Y$ 軸に平行な移動の回数をそれぞれ $A, B$ とおくと，

$$\begin{cases} N = A + B \\ k \leq A \leq N \end{cases}$$

である。

さらに，$+x$，$-x$，$+y$，$-y$ 方向の移動の回数をそれぞれ $A_+$，$A_-$，$B_+$，$B_-$ とおく。各軸に平行な移動について ”行き過ぎた分は戻らないといけない” ことにも注意すれば，

$$\begin{cases} A = A_+ + A_- \\ B = B_+ + B_- \\ k = A_+ - A_- \\ l = B_+ - B_- \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} A_\pm = \dfrac{A \pm k}{2} & (\text{複号同順}) \\ B_\pm = \dfrac{B \pm l}{2} & (\text{複号同順}) \end{cases}$$

が成り立つ。よって，$A$ を固定すると他の方向の移動の回数もすべて決まる。移動の仕方の個数は次の選び方の個数に等しい：

i) $N$ 回の移動のうち $x$ 軸に平行な移動をする $A$ 回を選ぶ
ii) このそれぞれに対して，$x$ 軸に平行な $A$ 回の移動のうち $+x$ 方向に移動する $A_+$ 回を選ぶ
iii) このそれぞれに対して，$y$ 軸に平行な $B$ 回の移動のうち $+y$ 方向に移動する $B_+$ 回を選ぶ

$N$ 回の移動の仕方は $4^N$ 通りあり，これらはの起こり方は同様に確からしいから，求める確率は，

$$\frac{1}{4^N} \sum_A \left( {}_N\mathrm{C}_A \times {}_A\mathrm{C}_{A_+} \times {}_B\mathrm{C}_{B_+} \right) = \sum_A \left( \frac{{}_N\mathrm{C}_A}{2^N} \frac{{}_A\mathrm{C}_{A_+}}{2^A} \frac{{}_B\mathrm{C}_{B_+}}{2^B} \right) \tag{3}$$

である。

つぎに，$A$ の範囲を求める。$A_\pm$, $B_\pm$ がいずれも整数であるためには $A$ と $k$, $B$ と $l$ の偶奇がそれぞれ一致しなければならないから，非負整数 $t, u$ を用いて

$$\begin{cases} A = k + 2t \\ B = l + 2u \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分であり，$N = A + B$ を用いて整理すると，$t, u$ が

$$t - u = \frac{1}{2}(N - (k + l))$$

を満たすことが必要十分である。このような整数 $t, u$ が存在するためには，

$$N - (k + l) \text{ が偶数} \tag{4}$$

が必要十分である。また，$A, B$ が $k \leq A \leq N,\ l \leq B \leq N$ を満たすための $t$ の条件は，

$$0 \leq t \leq \frac{N - (k + l)}{2} \tag{5}$$

である。

以上より，求める確率は，(1), (2), (4) が成り立つならば，(5) の範囲のすべての $t$ により定まる $A$ に関する和 (3) であり，そうでない場合は 0 である。

## 2　計算手法に関する証明

一般に，非負整数 $n, r$ $(n \geq 2,\ 2 \leq r \leq n - 1)$ に対して次が成り立つ：

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

このことと二項係数の定義から，非負整数 $s, n, r$ $(r \leq n)$ に対して $f(n, r) = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{s^n}$ とおくと，次の漸化式が成り立つ。

$$f(n, 0) = \frac{1}{s^n},\ f(n, n) = \frac{1}{s^n}$$
$$f(n, r) = \frac{1}{s}\{f(n - 1, r - 1) + f(n - 1, r)\}$$

このことを用いて，再帰的に確率の値を計算することができる。