$A=1$ のときは題意の操作によって成分が変化することはないから，以後 $A>1$ のときを考える。

所与の整数列に題意の操作を n 回施したものを N 次元ベクトルとして扱うことにする。次のことを定義しておく。

並び方が等しいふたつのベクトル

定義 1. N 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して次のことが成り立つとき，$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y}$ と表す：

任意の自然数 i, j $(1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N)$ に対して，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の i 番目の成分をそれぞれ x_i, y_i，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の j 番目の成分をそれぞれ x_j, y_j とおくとき，x_i, x_j の間の大小関係と y_i, y_j の間の大小関係が一致する。

まず，数列 $\{\boldsymbol{V}_n\}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_{n+1} = f_A(\boldsymbol{V}_n) \quad (n \geq 0)$$

ただし，$f_A(\boldsymbol{V})$ は $\boldsymbol{V}$ の最小の成分うち最もはやいものに A を掛けたベクトルを返す。$a_1, a_2, \ldots, a_N$ はすべて正なので，$\boldsymbol{V}_0$ の任意の成分について底を A とする対数をとることができる。そこで，数列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} \log_A a_1 \\ \log_A a_2 \\ \vdots \\ \log_A a_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n+1}} = f_1(\boldsymbol{v}_n) \quad (n \geq 0)$$

ただし，$f_1(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ の最小の成分のうち最もはやい[0]ものに 1 を足したベクトルを返す。したがって，

$$f_1(\boldsymbol{v}) \text{ によってベクトルの成分の小数部は変化しない} \tag{1}$$

数列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ について考える。次のことを証明しておく。

補題 1. 任意の自然数 i, j に対して，$\boldsymbol{v}_i$ の成分の整数部がすべて一致しており，$\boldsymbol{v}_j$ の成分の整数部がすべて一致しているならば，$\boldsymbol{v}_i \equiv \boldsymbol{v}_j$ である。

証明. 任意の自然数 k に対して，$\boldsymbol{v}_k$ の成分の整数部がすべて一致しているならば，$\boldsymbol{v}_k$ の成分間の大小関係は成分の整数部にはよらず，小数部のみによって決まる。このことと (1) から，補題 1 が成り立つ。 □

[0]ベクトルの成分を順に並べたときに番目の最も小さいもの

$f_1(\boldsymbol{v})$ の性質から明らかに，項番号を増やしていったときに $\boldsymbol{v}_{B_0}$ ではじめて成分の整数部がすべて一致するようなある非負整数 B_0 が存在する[1]。$\boldsymbol{v}_0$ の成分のうち整数部が最大のものの整数部を I とおくと，

$$\boldsymbol{v}_{B_0} \text{ の成分の整数部はすべて } I \tag{2}$$

である。ここで，

$$I = \max\{\lfloor \log_A a_1 \rfloor, \ldots, \lfloor \log_A a_1 \rfloor\}$$

であり，B_0 を I を用いて表すと，

$$B_0 = \sum_{k=1}^{N} (I - \lfloor \log_A a_k \rfloor)$$

である。

ふたたび $f_1(\boldsymbol{v})$ の性質から明らかに，$\boldsymbol{v}_{B_0+N}$ の成分の整数部はすべて $I+1$ となる。同様に，

$$\text{任意の非負整数 } k \text{ に対して } \boldsymbol{v}_{B_0+kN} \text{ の成分の整数部はすべて } I+k \tag{3}$$

が成り立つ。したがって，補題 1 により

$$\boldsymbol{v}_{B_0} \equiv \boldsymbol{v}_{B_0+kN} \quad (k \text{ は任意の非負整数})$$

である。

[1] $B > B_0$ **のとき**

$B - B_0$ を N で割った余り商を b，余りを B_1 とおき[2]，$\boldsymbol{v}_0$ の成分の整数部をすべて I に置き換えたベクトルを $\boldsymbol{v}'_0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_{B_0+bN+B_1} \\
&= f_1^{B_1}(\boldsymbol{v}_{B_0+bN}) \\
&= f_1^{B_1}(\boldsymbol{v}_{B_0}+b) \quad (\because (3)) \\
&= f_1^{B_1}(\boldsymbol{v}'_0+b) \quad (\because (2))
\end{aligned}$$

であり，$\boldsymbol{v}_B$ の各成分について底を A とする指数をとると $\boldsymbol{V}_B$ を得る。

[2] $B \leq B_0$ **のとき**

$$\boldsymbol{v}_B = f_1^B(\boldsymbol{v}_0)$$

であり，$\boldsymbol{v}_B$ の各成分について底を A とする指数をとると $\boldsymbol{V}_B$ を得る。

[1] B_0 回目から”ループ”が始まる

[2] b は”ループ”の回数，B_1 は最後のループが終わってから B 回目に至るまでの操作回数