

## 1 本問に関する議論

素数の集合を  $P$ , 合成数の集合を  $C$ , 「素数っぽい」集合を  $Q$ , 2, 3, 5 のいずれでも割り切れないような 2 以上の整数の集合を  $T$  とおく。題意により,

$$\begin{cases} N \in P \implies N \in Q \\ N \in C \text{ かつ } N \in T \implies N \in Q \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} N \in T &\implies (N \in P \text{ または } N \in C) \text{ かつ } N \in T \\ &\implies N \in Q \end{aligned}$$

である。

## 2 エラトステネスの篩に関する議論

整数  $n$  に対して,  $n$  の倍数のうち  $n$  と異なるものを  $n$  の真の倍数と呼ぶことにする。

2 以上のすべての整数の集合を  $A_0$  とおく。  $k$  を 4 以上の整数として,  $A_0$  の要素のうちで次を満たすものすべての集合を  $A_k$  とおく:

2 以上  $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$  以下のいかなる整数  $j$  に対してもその真の倍数でない。

整数  $N$  に関する条件

$$x \in A_N \text{ かつ } 2 \leq x \leq N \iff x \text{ は } 2 \text{ 以上 } N \text{ 以下の素数}$$

を  $P(N)$  とおく。4 以上のすべての整数  $N$  に対して  $P(N)$  が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1]  $N = 4$  のとき

$A_4 = \{2, 3, 5, \dots\}$  なので,  $P(4)$  が成り立つ。

[2]  $N \geq 4$  のとき

ある  $N (\geq 4)$  に対して  $P(N)$  の成立を仮定する。  $A_{N+1}$  の  $N$  以下の要素すべての集合は,  $A_N$  の  $N$  以下の要素すべての集合に一致するから,  $P(N+1)$  の成立を示すには,

$$\begin{aligned} N+1 \text{ が素数である} \\ \iff \\ N+1 \in A_{N+1} \end{aligned}$$

を示せば十分であるが、

$N + 1$  が素数である

$\Longleftrightarrow$

$N + 1$  が 2 以上  $\lfloor \sqrt{N + 1} \rfloor$  以下のいかなる整数でも割り切れない

なので、 $P(N + 1)$  が成り立つ。

以上より、4 以上のすべての整数  $N$  に対して  $P(N)$  が成り立つ。