問題文に与えられた「よい文字列」がみたす条件を上から順に i), ii), iii) とおき，$l = \mathrm{lcm}(N, M)$ とおく。

まず，次を示す。

$$\text{「よい文字列」が存在するならば，その長さは } l \text{ 以上である} \quad (1)$$
$$\text{「よい文字列」が存在するならば，その長さが } l \text{ のときにも存在する} \quad (2)$$

よい文字列が存在するとき，これを Y とおくと，条件 i) により，正整数 k を用いて $|Y| = kl$ と表せることが必要である。したがって (1) が成り立つ。

$NM = \mathrm{gcd}(N, M) \times \mathrm{lcm}(N, M)$ により，

$$\frac{l}{N} = \frac{M}{\mathrm{gcd}(N, M)} \qquad (= M' \text{とおく})$$
$$\frac{l}{M} = \frac{N}{\mathrm{gcd}(N, M)} \qquad (= N' \text{とおく})$$

が成り立ち，M' と N' は互いに素である。M', N' を用いて条件 ii), iii) を表すと，

$$Y \text{ の } 1,\ kM'+1,\ 2kM'+1,\ \ldots,\ (N-1)kM'+1 \text{ 番目の連結は } S$$
$$Y \text{ の } 1,\ kN'+1,\ 2kN'+1,\ \ldots,\ (M-1)kN'+1 \text{ 番目の連結は } T$$

となる。

ここで，文字列 Y を"圧縮"して，長さ l の新たな文字列 X をつくることを考える。Y, X の n 文字目の文字をそれぞれ y_n, x_n とおくと，$1 \le i < N,\ 1 \le j < M$ なるすべての整数 i, j に対して

$$\begin{cases} y_{(i-1)kM'+1} = x_{(i-1)M'+1} \\ y_{(j-1)kN'+1} = x_{(j-1)N'+1} \end{cases} \quad (3)$$

を満たす文字列 X が存在するならば X もまた「よい文字列」であるが，

$$\begin{aligned} (i-1)kM'+1 = (j-1)kN'+1 \quad &\iff \quad (i-1)kM' = (j-1)kN' \\ &\iff \quad (i-1)M' = (j-1)N' \\ &\iff \quad (i-1)M'+1 = (j-1)N'+1 \quad (4) \end{aligned}$$

により，"圧縮"の前後で文字の一致のしかたは変わらないといえるので，(3) を満たす X が存在する。したがって (2) が成り立つ。

つぎに，$|X| = l$ のもとで，X が存在するために文字列 S, T が満たすべき条件を考える。(4) と，M', N' が互いに素であることから，任意の整数 d を用いて

$$(4) \iff \begin{cases} i = N'd + 1 \\ j = M'd + 1 \end{cases}$$

が成り立つ。ただし，i, j の範囲に関する条件から，d の範囲は

$$0 \leq d < \gcd(N, M) \tag{5}$$

である。したがって，S, T の n 文字目の文字をそれぞれ s_n, t_n とおくと，X が存在するためには，

(5) を満たす整数 d によって定まるすべての i, j に対して $s_i = t_j$

が必要十分である。