

ある長方形を3つの長方形に分割する方法は、ある1辺に平行な2本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か、各辺にそれぞれ平行な1本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれI型、T型と呼ぶことにする。

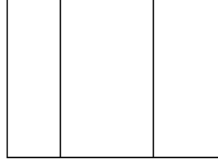


Figure 1: I 型

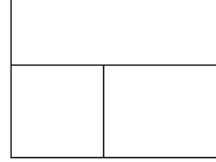


Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。 H, W の少なくとも一方が3で割り切れるならば、I型の分割によってちょうど3等分することができ、このとき $\Delta S = 0$ である。以下、 H, W のいずれも3で割り切れないときを考える。

求める値は、長方形をI型、T型に分割したときのそれぞれの ΔS の最小値の大きい方である。

[1] I型に分割するとき

まず、(fig. 1) のように縦の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合を考える。 $W = 2$ のときはI型の分割が存在しないから、2以上の整数 k を用いて $W = 3k+1$ または $W = 3k-1$ と表せるときを考えればよい。

このとき、 ΔS が最小となるような3つの長方形の幅の組は $k, k, k+1$ または $k, k, k-1$ であり、このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

同様に、横の辺に平行な2本の線分を引いて分割する場合も考えると、I型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\min\{H, W\} \quad (1)$$

である。

[2] T型に分割するとき

まず、(fig. 2) のように1辺の長さが W の長方形ができるように分割する場合 (縦向きのT型と呼ぶことにする) を考える。T型の分割は任意の W, H に対して存在する。

(fig. 2) 下部の2つの長方形の幅の差が最小となるような2つの長方形の幅の組は

$$\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \quad (2)$$

である。これら2つの長方形の高さを h とおくと、3つの長方形の面積はそれぞれ、

$$\begin{aligned} A(h) &= W(H - h), \\ B(h) &= h \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor \\ C(h) &= h \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

であり、 $A(h)$ は h に関して単調増加、 $B(h), C(h)$ は h に関して単調減少で

$$B(h) \leq C(h) \quad (3)$$

が成り立つ。よって、 $A(h), B(h), C(h)$ の大小関係は次の3通りである：

$$B(h) \leq A(h) \leq C(h) \quad (4)$$

$$A(h) \leq B(h) \leq C(h) \quad (5)$$

$$B(h) \leq C(h) \leq A(h) \quad (6)$$

それぞれの不等号の成立に関する h の条件は

$$\begin{aligned} B(h) \leq A(h) &\iff h \leq \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \\ A(h) \leq C(h) &\iff \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \leq h \end{aligned}$$

である。ここで、(4) については、 W が偶数ならば (4) を満たす h が存在するが、そのときは (5), (6) のいずれかも成立しているので考えなくてよく、 W が奇数ならば (4) を満たす h は存在しないのでやはり考えなくてよい。

$A(h), B(h), C(h)$ の単調性と、

$$h = \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \quad \text{および} \quad h = \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil}$$

を境に $A(h)$ と $B(h)$ 、 $A(h)$ と $C(h)$ の大小関係がそれぞれ逆転することに注意すれば、 ΔS が最小となるのは、 h の値が

$$h_1 = \left\lceil \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \right\rceil \quad \text{または} \quad h_2 = \left\lfloor \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \right\rfloor$$

のときであり、このとき、 ΔS の最小値は

$$\min\{C(h_1) - A(h_1), A(h_2) - B(h_2)\} \quad (7)$$

である。これらの値は W, H のみに依存する。

同様に、1 辺の長さが H の長方形ができるように分割する場合 (横向きの T 型と呼ぶことにする) は W, H を互いに交換して (7) の値を求めればよい。

したがって、T 型の分割をするときの ΔS の最小値は、縦向き、横向きの T 型の分割のそれぞれに対して求めた (7) の値の大きくない方である。