ある長方形を 3 つの長方形に分割する方法は，ある 1 辺に平行な 2 本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か，各辺にそれぞれ平行な 1 本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれ I 型，T 型と呼ぶことにする。

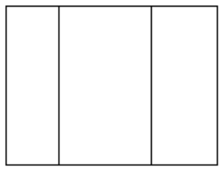

Figure 1: I 型

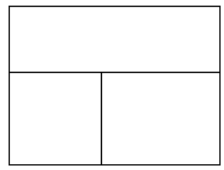

Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。H, W の少なくとも一方が 3 で割り切れるならば，I 型の分割によってちょうど 3 等分することができ，このとき $\Delta S = 0$ である。以下，H, W のいずれも 3 で割り切れないときを考える。

[1] I 型に分割するとき

まず，(fig. 1) のように縦の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合を考える。$W = 2$ のときは I 型の分割が存在しないから，2 以上の整数 k を用いて $W = 3k+1$ または $W = 3k-1$ と表せるときを考えればよい。

このとき，ΔS が最小となるような 3 つの長方形の幅の組は $k, k, k+1$ または $k, k, k-1$ であり，このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

同様に，横の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合も考えると，I 型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\min\{H, W\} \tag{1}$$

である。

[2] T 型に分割するとき

まず，(fig. 2) のように 1 辺の長さが W の長方形ができるように分割する場合を考える。T 型の分割は任意の W, H に対して存在する。

(fig. 2) 下部の 2 つの長方形の幅の差が最小となるような 2 つの長方形の幅の組は

$$\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil$$

である。また，これら 2 つの長方形の高さを l とおくと，

$$\Delta S = \max\left\{W(H-l),\ l\left\lceil\frac{W}{2}\right\rceil\right\} - \min\left\{W(H-l),\ l\left\lfloor\frac{W}{2}\right\rfloor\right\}$$

である。

同様に，1 辺の長さが H の長方形ができるように分割する場合も考えると，T 型の分割をするときの ΔS の最小値は，次の 2 つの値の大きくない方である：

$$\min_{l}\left\{\max\left\{W(H-l),\ l\left\lceil\frac{W}{2}\right\rceil\right\} - \min\left\{W(H-l),\ l\left\lfloor\frac{W}{2}\right\rfloor\right\}\right\}, \tag{2}$$

$$\min_{m}\left\{\max\left\{H(W-m),\ m\left\lceil\frac{H}{2}\right\rceil\right\} - \min\left\{H(W-m),\ m\left\lfloor\frac{H}{2}\right\rfloor\right\}\right\} \tag{3}$$

ただし，これらの値が最小値をとるためには，それぞれ

$$l \geq \frac{H}{2},\ m \geq \frac{W}{2}$$

が必要である。

以上より，求める値は (1), (2), (3) のうち最小のものである。