所与の整数列に題意の操作を施したものを N 次元列ベクトルとして扱うことにする。まず，数列 $\{\boldsymbol{V}_n\}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_{n+1} = f_A(\boldsymbol{V}_n) \quad (n \geq 0)$$

ただし，$f_A(\boldsymbol{V})$ は $\boldsymbol{V}$ の最小の成分うち最も行番号の小さいものに A を掛けたベクトルを返す。我々は $\boldsymbol{V}_B$ を求めたい。

$A = 1$ のときは題意の操作によって値が変化することはないから $\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_0$ である。以後 $A > 1$ のときを考える。

$a_1, a_2, \ldots, a_N$ はすべて正なので，$\boldsymbol{V}_0$ の任意の成分について底を A とする対数をとることができる。そこで，数列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} \log_A a_1 \\ \log_A a_2 \\ \vdots \\ \log_A a_N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n+1}} = f(\boldsymbol{v}_n) \quad (n \geq 0)$$

ただし，$f(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ の最小の成分のうち最も行番号の小さいものに 1 を足したベクトルを返す[1]。したがって，$f(\boldsymbol{v})$ によって $\boldsymbol{v}$ の成分の小数部は変化しない。

ここからは数列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ について考える。正実数 $\log_A a_n$ の整数部の表記を簡単にするために，$\log_A a_n$ の整数部 $\lfloor \log_A a_n \rfloor$ を $g(a_n)$ と表すことにする。

補題 2 より，項番号を増やしていったときに $\boldsymbol{v}_{B_0}$ ではじめて成分の整数部がすべて一致するようなある非負整数 B_0 が存在し[2]，$\boldsymbol{v}_0$ の成分のうち整数部が最大のものの整数部を I とおくと，

$$\boldsymbol{v}_{B_0} \text{ の成分の整数部はすべて } I \tag{1}$$

である。ここで，

$$I = \max\{g(a_1), \ldots, g(a_N)\}$$

であり，B_0 を I を用いて表すと，

$$B_0 = \sum_{k=1}^{N} (I - g(a_k))$$

である。

補題 1 より，

$$\text{任意の非負整数 } k \text{ に対して } \boldsymbol{v}_{B_0+kN} \text{ の成分の整数部はすべて } I + k \tag{2}$$

が成り立つ。

[1] これは A 進法におけるシフト演算や，N 次元空間における軸に平行な距離 1 の移動と解釈することができる

[2] B_0 回目から”ループ”が始まる

[1] $B > B_0$ **のとき**

$B - B_0$ を N で割った商を b，余りを B_1 とおき[3]，$\boldsymbol{v}_0$ の成分の整数部をすべて I に置き換えたベクトルを $\boldsymbol{v}_0'$，すべての成分が 1 であるような N 次元ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_{B_0+bN+B_1}\\ &= f^{B_1}(\boldsymbol{v}_{B_0+bN})\\ &= f^{B_1}(\boldsymbol{v}_{B_0}+b\boldsymbol{u}) \quad (\because (2))\\ &= f^{B_1}(\boldsymbol{v}_0'+b\boldsymbol{u}) \quad (\because (1))\end{aligned}$$

であり，$\boldsymbol{v}_B$ の各成分について底を A とする指数をとると $\boldsymbol{V}_B$ を得るから，

$$\boldsymbol{V}_B = f_A^{B_1}\left(\begin{pmatrix} a_1A^{-g(a_1)+I+b}\\ a_2A^{-g(a_2)+I+b}\\ \vdots\\ a_NA^{-g(a_N)+I+b}\end{pmatrix}\right)$$

である。

[2] $B \leq B_0$ **のとき**

$$\boldsymbol{v}_B = f^B(\boldsymbol{v}_0)$$

であり，$\boldsymbol{v}_B$ の各成分について底を A とする指数をとると $\boldsymbol{V}_B$ を得るから，

$$\boldsymbol{V}_B = f_A^{B}\left(\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}\right)$$

である。

1 補題

記号の意味は本文中で用いられているものと同一である。

ループが存在すること

補題 1. 任意の非負整数 k に対して次が成り立つ：
ある整数 I_0 に対して $\boldsymbol{v}_k$ の成分の整数部がすべて I_0 ならば，$\boldsymbol{v}_{k+N}$ の成分の整数部はすべて I_0+1 である。

[3] b はループの回数，B_1 は最後のループが終わってから B 回目に至るまでの操作回数

証明. 省略 □

有限回の操作でループに突入すること

補題 2. 任意の $a_1, a_2, \ldots, a_N$ に対して，ある整数 M が存在し，$\boldsymbol{v}_M$ の成分の整数部はすべて一致する。

証明. 省略 □