1 証明

点 (X, Y) を P とおく。移動の対称性により，P は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下，この前提のもとで考える。

P に到達できる移動の仕方が存在するためには，X も Y も D で割り切れることが必要である。このとき，ある非負整数 k, l が存在し，次が成り立つ。

$$\begin{cases} X = kD \\ Y = lD \end{cases} \tag{1}$$

よって，原点から P までのマンハッタン距離は $X + Y = (k+l)D$ と表すことができる。このことと，N 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は ND であることから，

$$N \geq k + l \tag{2}$$

が必要である。

ここで，X, Y 軸に平行な移動の回数をそれぞれ A, B とおくと，

$$\begin{cases} N = A + B \\ k \leq A \leq N \end{cases}$$

である。

さらに，$+x$，$-x$，$+y$，$-y$ 方向の移動の回数をそれぞれ A_+，A_-，B_+，B_- とおく。各軸に平行な移動について "行き過ぎた分は戻らないといけない" ことにも注意すれば，

$$\begin{cases} A = A_+ + A_- \\ B = B_+ + B_- \\ k = A_+ - A_- \\ l = B_+ - B_- \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} A_\pm = \dfrac{A \pm k}{2} & \text{(複号同順)} \\ B_\pm = \dfrac{B \pm l}{2} & \text{(複号同順)} \end{cases}$$

が成り立つ。よって，A を固定すると他の方向の移動の回数もすべて決まる。移動の仕方の個数は次の選び方の個数に等しい：

i) N 回の移動のうち x 軸に平行な移動をする A 回を選ぶ
ii) このそれぞれに対して，x 軸に平行な A 回の移動のうち $+x$ 方向に移動する A_+ 回を選ぶ
iii) このそれぞれに対して，y 軸に平行な B 回の移動のうち $+y$ 方向に移動する B_+ 回を選ぶ

N 回の移動の仕方は 4^N 通りあり，これらはの起こり方は同様に確からしいから，求める確率は，

$$\frac{1}{4^N} \sum_A \left({}_N\mathrm{C}_A \times {}_A\mathrm{C}_{A_+} \times {}_B\mathrm{C}_{B_+} \right) = \sum_A \left(\frac{{}_N\mathrm{C}_A}{2^N} \frac{{}_A\mathrm{C}_{A_+}}{2^A} \frac{{}_B\mathrm{C}_{B_+}}{2^B} \right) \tag{3}$$

である。

つぎに，A の範囲を求める。$A_\pm$，$B_\pm$ がいずれも整数であるためには A と k, B と l の偶奇がそれぞれ一致しなければならないから，非負整数 t, u を用いて

$$\begin{cases} A = k + 2t \\ B = l + 2u \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分であり，$N = A + B$ を用いて整理すると，t, u が

$$t - u = \frac{1}{2}(N - (k + l))$$

を満たすことが必要十分である。このような整数 t, u が存在するためには，

$$N - (k + l) \text{ が偶数} \tag{4}$$

が必要である。また，A, B が $k \leq A \leq N,\ l \leq B \leq N$ を満たすための t の条件は，

$$0 \leq t \leq \frac{N - (k + l)}{2} \tag{5}$$

である。

以上より，求める確率は，(1), (2), (4) が成り立つならば，(5) の範囲のすべての t により定まる A に関する和 (3) であり，そうでない場合は 0 である。

2　計算手法に関する証明

一般に，非負整数 n, r $(n \geq 2,\ 2 \leq r \leq n - 1)$ に対して次が成り立つ：

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

このことと二項係数の定義から，非負整数 s, n, r $(r \leq n)$ に対して $f(n, r) = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{s^n}$ とおくと，次の漸化式が成り立つ。

$$f(n, 0) = \frac{1}{s^n},\ f(n, n) = \frac{1}{s^n}$$
$$f(n, r) = \frac{1}{s}\{f(n - 1, r - 1) + f(n - 1, r)\}$$

このことを用いて，再帰的に確率の値を計算することができる。