ある長方形を 3 つの長方形に分割する方法は，ある 1 辺に平行な 2 本の線分によって分割する方法 (fig. 1) か，各辺にそれぞれ平行な 1 本ずつの線分によって分割する方法 (fig. 2) のいずれかのみである。これらをそれぞれ I 型，T 型と呼ぶことにする。

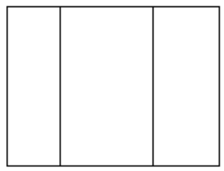

Figure 1: I 型

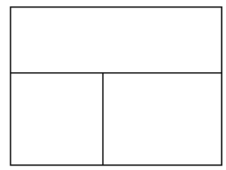

Figure 2: T 型

$\Delta S = S_{max} - S_{min}$ とおく。H, W の少なくとも一方が 3 で割り切れるならば，I 型の分割によってちょうど 3 等分することができ，このとき $\Delta S = 0$ である。以下，H, W のいずれも 3 で割り切れないときを考える。

[1] I 型に分割するとき

まず，(fig. 1) のように縦の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合を考える。$W = 2$ のときは I 型の分割が存在しないから，2 以上の整数 k を用いて $W = 3k+1$ または $W = 3k-1$ と表せるときを考えればよい。

このとき，ΔS が最小となるような 3 つの長方形の幅の組は $k, k, k+1$ または $k, k, k-1$ であり，このように分割すれば $\Delta S = H$ である。

同様に，横の辺に平行な 2 本の線分を引いて分割する場合も考えると，I 型の分割をするときの ΔS の最小値は

$$\min\{H, W\} \tag{1}$$

である。

[2] T 型に分割するとき

まず，(fig. 2) のように 1 辺の長さが W の長方形ができるように分割する場合を考える。T 型の分割は任意の W, H に対して存在する。

(fig. 2) 下部の 2 つの長方形の幅の差が最小となるような 2 つの長方形の幅の組は

$$\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil \tag{2}$$

である。これら2つの長方形の高さを h とおくと，3つの長方形の面積はそれぞれ，

$$A(h) = W(H-h),$$
$$B(h) = h\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor$$
$$C(h) = h\left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil$$

であり，$A(h)$ は h に関して単調増加，$B(h), C(h)$ は h に関して単調減少で

$$B(h) \leq C(h) \tag{3}$$

が成り立つ。

[2-1] W が偶数のとき

W が偶数ならば，(2) の2数は互いに等しいので，

$$B(l) = C(l) = \frac{W}{2}h$$

である。

$A(h), B(h), C(h)$ の単調性と，

$$A(l) > B(l) \Longleftrightarrow \frac{2}{3}H > h$$

すなわち $h = \dfrac{2}{3}H$ を境に $A(h)$ と $B(h)$ の大小関係が逆転することに注意すれば，ΔS が最小となるのは，h の値が

$$h_1 = \left\lfloor \frac{2}{3}H \right\rfloor \qquad \text{または} \qquad h_2 = \left\lceil \frac{2}{3}H \right\rceil$$

のときであり，このとき，ΔS の最小値は

$$\begin{cases} A(h) - B(h) & (h = h_1\text{のとき}) \\ \\ B(h) - A(h) & (h = h_2\text{のとき}) \end{cases} \tag{4}$$

である。これらの値は W, H のみに依存する。

[2-2] W が奇数のとき

(3) により，$A(h), B(h), C(h)$ の大小関係は次の 3 通りである：

$$B(h) \leq A(h) \leq C(h) \tag{5}$$
$$A(h) \leq B(h) \leq C(h) \tag{6}$$
$$B(h) \leq C(h) \leq A(h) \tag{7}$$

ここで，

$$B(h) \leq A(h) \Longleftrightarrow h \leq \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor}$$
$$A(h) \leq C(h) \Longleftrightarrow \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \leq h$$

であることから，(5) を満たす h は存在しない。

$A(h), B(h), C(h)$ の単調性と，

$$h = \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \qquad \text{および} \qquad h = \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil}$$

を境に $A(h)$ と $B(h)$，$A(h)$ と $C(h)$ の大小関係がそれぞれ逆転することに注意すれば，ΔS が最小となるのは，h の値が

$$h_3 = \left\lceil \frac{WH}{W + \left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor} \right\rceil \qquad \text{または} \qquad h_4 = \left\lfloor \frac{WH}{W + \left\lceil \frac{W}{2} \right\rceil} \right\rfloor$$

のときであり，このとき，ΔS の最小値は

$$\begin{cases} A(h) - B(h) & (h = h_3 \text{のとき}) \\ \\ B(h) - A(h) & (h = h_4 \text{のとき}) \end{cases} \tag{8}$$

である。これらの値は W, H のみに依存する。

以上より，求める最小値は (1), (4), (8) のうち最小のものである。