点 (X,Y) を P とおく。移動の対称性により，P は $X \geq 0, Y \geq 0$ の範囲にあるとしても一般性を失わない。以下，この前提のもとで考える。

P に到達できる移動方法が存在するためには，X も Y も D で割り切れることが必要である。このとき，ある非負整数 k,l が存在し，次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X &= kD \\ Y &= lD \end{aligned}$$

よって，原点から P までのマンハッタン距離は $X+Y=(k+l)D$ と表すことができる。このことと，N 回で移動できるマンハッタン距離の最大値は ND であることから，

$$N \geq k+l \tag{1}$$

が必要である。

ここで，

X 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ a,b
Y 軸に平行に $+D, -D$ だけ移動する回数をそれぞれ c,d

とおく。

ちょうど N 回で P に到達するような移動の仕方は，非負整数 k', l' を用いて表すと，

X 軸の正方向に $k+k'$ 回，負方向に k' 回だけ移動
Y 軸の正方向に $l+l'$ 回，負方向に l' 回だけ移動

するような場合なので，

$$a=k+k',\ b=k',\ c=l+l',\ d=l'$$

である。このような移動の仕方を「ゴールできる移動の仕方」と呼ぶことにする。ただし，k', l' は

$$N=a+b+c+d=(k+k')+k'+(l+l')+l'$$

を満たすので，

$$l'=\frac{1}{2}(N-k-2k'-l)$$

が成り立ち，このような整数 l' が存在するためには $N-(k+l)$ が偶数であることが必要である。この条件のもとで，$0 \leq k' \leq N, 0 \leq l' \leq N$ から，k' の範囲は，

$$0 \leq k' \leq \frac{1}{2}(N-(k+l)) \tag{2}$$

であり，(1) の制約のもとでこれを満たす k' が存在する。

「ゴールできる移動の仕方」の個数は，k' を固定すると，

$${}_N C_a \times {}_{N-a} C_b \times {}_{N-a-b} C_c = \frac{N!}{a!b!c!d!}$$

である。k' は (2) の範囲をくまなく動くので，「ゴールできる移動の仕方」の個数は，

$$\sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!}$$

である。P までの移動の仕方は 4^N 通りであり，これらの起こり方は同様に確からしいから，求める確率は，

$$\frac{1}{4^N} \sum_{k'=0}^{\frac{1}{2}(N-(k+l))} \frac{N!}{a!b!c!d!} \tag{3}$$

である。

ところで、一般に次が成り立つ。

パスカルの三角形

非負整数 n,r に対して、$f(n,r)$ を次の漸化式によって定義すれば $f(n,r) = {}_n\mathrm{C}_r$ である。

$$f(n,0)=1,\ f(n,n)=1$$
$$f(n,r)=f(n-1,r-1)+f(n-1,r)$$

パスカルの三角形の拡張

非負整数 n,r に対して、$f(n,r)$ を次の漸化式によって定義すれば $f(n,r) = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{a^n}$ である。

$$f(n,0)=\frac{1}{a^n},\ f(n,n)=\frac{1}{a^n}$$
$$f(n,r)=\frac{1}{a}\{f(n-1,r-1)+f(n-1,r)\}$$