N を 2 以上の整数とすると，N は素数あるいは合成数のいずれかである。N が合成数ならば，2 つの正整数 n_1, n_2 $(2 \leq n_1 \leq n_2 \leq N-1)$ を用いて $N = n_1 n_2$ と表すことができ，$\lceil\sqrt{N}\rceil \geq \sqrt{N}$ より $\lceil\sqrt{N}\rceil^2 \geq N$ であることに注意すれば，$n_1 \leq \lceil\sqrt{N}\rceil$ である。実際，$n_1 > \lceil\sqrt{N}\rceil$ と仮定すると，

$$\begin{array}{rcl} n_1 n_2 & > & \lceil\sqrt{N}\rceil n_2 \\ & \geq & \lceil\sqrt{N}\rceil n_1 \\ & > & \lceil\sqrt{N}\rceil^2 \\ & \geq & N \end{array}$$

となり矛盾する。

したがって，次が成り立つ：

$$N \text{ が合成数} \Longrightarrow N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil\sqrt{N}\rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持つ}$$

また，素数の定義から明らかに次が成り立つ：

$$N \text{ が素数} \Longrightarrow N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil\sqrt{N}\rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持たない}$$

したがって，次が成り立つ：

$$N \text{ が素数} \Longleftrightarrow N \text{ は } 2 \leq n \leq \lceil\sqrt{N}\rceil \text{ なる約数 } n \text{ を持たない}$$