「小林昭七 曲線と曲面の微分幾何」を読む

2021年4月16日

八幡 圭嗣

目次

1　曲線の概念

本書は曲線という概念そのものの定義には深入りしていないが、参考情報として曲線の定義に関するいくつかの立場に触れておく。

参考：曲線の定義

「$y = x^2$のグラフが曲線」とか「$F(x, y) = 0$により定まる曲線」とかいうとき、暗に点集合を指して曲線と呼んでいるものと考えられる。

一方、有界閉区間上の連続関数$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$自体を（パラメータ付）曲線と呼ぶ立場もある[1]:

定義（パラメータ付曲線)*1

$\boldsymbol{R}$の有界閉区間$I = [a, b]$上で定義された$\boldsymbol{R}^2$値連続写像$\boldsymbol{p}(t)$をパラメータ付曲線という。

この立場ではtの増加する向きによって"曲線"に自然な向きが定まる。

*1 より一般の多様体を扱う場合は定義域を開集合にしたり、逆関数の連続性を仮定したりする[2][4]。

参考：パラメータ付曲線の同値

2つのパラメータ付曲線に対し次のように同値関係を定め、その同値類を曲線と呼ぶという立場がある[1]。

定義（パラメータ付曲線の同値）

2つのパラメータ付曲線$\boldsymbol{p} : I \to \mathbf{R}^2, \boldsymbol{q} : J \to \mathbf{R}^2$ に対し次が成り立つとき、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$は同値であるという:

ある狭義単調増加な連続関数$\varphi : I \to \varphi(I) = J$が存在して$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \circ \varphi$

定義（曲線）

上の同値関係により定まる同値類を曲線という。曲線Cの元（すなわちパラメータ付曲線）をCのパラメータ表示という。

このとき曲線のパラメータ表示に像、始点、終点、弧長が存在すれば、それぞれはパラメータ表示のとり方によらず、曲線のみによって定まる。

パラメータ表示$\boldsymbol{p}(t)$に仮定すること

本スライドではパラメータ表示$\boldsymbol{p}(t)$に対してさらに以下を仮定する。

- $\boldsymbol{p}(t)$は2回微分可能とする。
- $\boldsymbol{p}(t)$は1対1であるとする。
- $\boldsymbol{p}(t)$は停留点を持たないとする。

留意

本書では「点集合としての曲線」「パラメータ付曲線」「パラメータ付曲線の同値類としての曲線」などを明確には区別していないため、曲線という語の意味は文脈によって判断するしかない。本スライドでも以後これらの概念を明確には区別せず用いる。

2　曲線のパラメータ表示

一般のパラメータ t によるパラメータ表示と、その特別な場合としての弧長 s によるパラメータ表示について述べる。

一般のパラメータ

$\boldsymbol{p}(t)$ を微分したものを

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \ddot{\boldsymbol{p}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \tag{1}$$

などと表す。仮に t を時間とみなせば、物理的意味は

- 位置ベクトル: $\boldsymbol{p}(t)$
- 速度ベクトル: $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$
- 速さ: $|\dot{\boldsymbol{p}}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
- 加速度ベクトル: $\ddot{\boldsymbol{p}}(t)$

といえる。

弧長

パラメータが0からtまで動くときの弧長は

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| dt \tag{2}$$

である。両辺を微分して

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| \tag{3}$$

を得る。

弧長パラメータ表示

$\boldsymbol{p}(t)$ は停留点を持たないから

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{p}}| > 0$$

$\therefore s(t)$ は狭義単調増加な連続関数

$\therefore s(t)$ は逆関数 $t(s)$ を持ち、$t(s)$ も狭義単調増加な連続関数

したがって、$\boldsymbol{p}(t)$ が表す曲線は弧長によるパラメータ表示（省略して弧長パラメータ表示）$\boldsymbol{p}(s)$ も可能である。導関数は

$$\boldsymbol{p}'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{4}$$

と表す。

3　曲率の導入

前頁で述べた弧長パラメータ表示 $\boldsymbol{p}(s)$ は、曲線に対して唯一つに定まる。そこで次に $\boldsymbol{p}(s)$ を用いて単位接ベクトル・単位法ベクトルを表し、それらによって曲率を定義する。

単位接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1(s)$ を

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{p}'(s) \tag{5}$$

と定義する。$\boldsymbol{e}_1(s_0)$ は曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の点 $\boldsymbol{p}(s_0)$ における単位接ベクトルである。

単位法ベクトル $\boldsymbol{e}_2$

ベクトル $\boldsymbol{e}_2(s)$ を

各点で $\boldsymbol{e}_1(s)$ に直交する単位ベクトルであって $\boldsymbol{e}_1$ の左側にあるもの

と定義する。すなわち

$$\boldsymbol{e}_2(s) = \boldsymbol{e}_1(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

である。$\boldsymbol{e}_2(s_0)$ は曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の点 $\boldsymbol{p}(s_0)$ における単位法ベクトルである。

曲率

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の関係を整理すると

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \tag{9}$$

である。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が正規直交基底をなすことに注意すれば、ある実数値関数 $\kappa(s)$ が唯一つ存在して

$$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\kappa \boldsymbol{e}_1 \tag{10}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

が成り立つ。この $\kappa(s)$ を曲率 (curvature) という。

補足：シュミットの直交化

曲率κが非負である場合を考える。ある点において$\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}''$が線型独立であるとき、これは2次元ユークリッド空間の基底であり、これにシュミットの直交化を施したものは$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$である。

4　曲率の意味

前節で定義された曲率が文字通り「曲がり具合」を表していることを、いくつかの具体例によって確かめる。

例2.1. 円の曲率

パラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (r\cos t, r\sin t) \tag{12}$$

で表される半径$r(>0)$の円を考える。弧長は

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\boldsymbol{p}'(t)| dt \quad (13)\\ &= \int_0^t r dt \quad (14)\\ &= rt \quad (15)\end{aligned}$$

なので逆関数は$t(s) = \dfrac{s}{r}$であり、この円の弧長パラメータ表示は

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \tag{16}$$

となる。

弧長パラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \tag{17}$$

から

$$\boldsymbol{e}_1(s) = (\quad -\sin\frac{s}{r}, \qquad \cos\frac{s}{r}) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{e}_2(s) = (\quad -\cos\frac{s}{r}, \quad -\sin\frac{s}{r}) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{e}_1'(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{e}_2'(s) = (\quad \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}) \tag{21}$$

を得る。したがって

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_1 \tag{22}$$

ゆえに半径rの円の曲率は$\kappa = \dfrac{1}{r}$（定数）である。

定理2.1. 直線の曲率

定理2.1

弧長パラメータ表示$\boldsymbol{p}(s)$で表される曲線の曲率$\kappa(s)$について

$$\kappa = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{p}(s)\text{が直線を表す} \tag{23}$$

ただし、「$\boldsymbol{p}(s)$が直線を表す」とは、定数$\alpha, \beta, a, b, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$を用いて

$$\boldsymbol{p}(s) = (\alpha, \beta)s + (a, b) \tag{24}$$

と表せることを指すものとする。

証明. 「$\kappa = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}(s)$ が直線を表す」について

$\kappa = 0$ と仮定すると、$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ なので、各成分を s に関して積分すれば

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \tag{25}$$

よって

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \quad (a, b \text{ は定数}) \tag{26}$$

と表せる。すなわち $\boldsymbol{p}(s)$ は直線を表す。

「$\kappa = 0 \Leftarrow \boldsymbol{p}(s)$が直線を表す」について

$\boldsymbol{p}(s)$が直線を表すと仮定する。すなわち、定数$\alpha, \beta, a, b, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$を用いて

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \tag{27}$$

と表せると仮定する。このとき$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta)$より$\boldsymbol{e}_1' = (0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (-\beta, \alpha)$である。したがって、曲率の定義式$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$から$\kappa = 0$が従う。 □

2次近似

$\boldsymbol{p}(s)$ の点 s_0 における2次近似は

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{p}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}''(s_0)(s - s_0)^2 \tag{28}$$

すなわち

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{e}_1(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\kappa(s_0)\boldsymbol{e}_2(s_0)(s - s_0)^2 \tag{29}$$

である。

2次近似の例

点 $(0,1)$ を中心とする半径 1 の正の向きの円のパラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (\sin t, 1 - \cos t) \tag{30}$$

の、原点における2次近似を考える。例2.1（円の曲率）と同様に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \kappa$ を求めると

$$\boldsymbol{e}_1(0) = (1,0), \quad \boldsymbol{e}_2(0) = (0,1), \quad \kappa(0) = 1 \tag{31}$$

である。したがって、求める2次近似は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}(0) + \boldsymbol{e}_1(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)\boldsymbol{e}_2(0)s^2 & (32) \\ =&(0,0) + (1,0)s + \frac{1}{2}(0,1)s^2 & (33) \\ =&\left(s, \frac{1}{2}s^2\right) & (34) \end{aligned}$$

である。

5 Gaussの表示

曲率の意味を説明するもうひとつの方法として、つぎにGaussの表示を考える。

Gaussの表示

$\boldsymbol{p}(s)$ は1対1であるから、各点 $\boldsymbol{p}(s_0)$ に対してベクトル $\boldsymbol{e}_2(s_0)$ が唯一つ定まり、さらに $\boldsymbol{e}_2(s_0)$ を位置ベクトルとみたときに $\boldsymbol{e}_2(s_0)$ が表す単位円上の点が唯一つ定まる。この単位円上の点を同じ記号で $\boldsymbol{e}_2(s_0)$ と表すことにする。

点 $\boldsymbol{p}(s)$ を点 $\boldsymbol{e}_2(s)$ に写す写像をGaussの表示(Gauss map; ガウス写像とも)と呼び、g で表す。

点$\boldsymbol{p}$が$\boldsymbol{p}(s)$から$\boldsymbol{p}(s+\Delta s)$まで動くとき、点$g(\boldsymbol{p})$は$\boldsymbol{e}_2(s)$から$\boldsymbol{e}_2(s+\Delta s)$まで動く。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_2(s+\Delta s) &= \boldsymbol{e}_2(s) + \boldsymbol{e}_2'(s)\Delta s + o(\Delta s) &(35)\\ &= \boldsymbol{e}_2(s) - \kappa(s)\boldsymbol{e}_1(s)\Delta s + o(\Delta s) &(36)\end{aligned}$$

なので、点$\boldsymbol{e}_2$は速度$-\kappa\boldsymbol{e}_1$で単位円上を動く。

$g(\boldsymbol{p})$が定点であるのは曲率が常に0、すなわち直線のときで、そのときに限る。

6　曲率による曲線の特徴付け

$$\text{曲線} \longrightarrow \text{曲率}$$

$$\text{曲線} \overset{?}{\longleftarrow} \text{曲率}$$

κが一定の場合

$\boldsymbol{p}(s)$で表される曲線の曲率を$\kappa(s)$とおく。κが0でない定数の場合を考える。まず、「円の中心になるであろう点」$\boldsymbol{p}+\dfrac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2$は定点である。実際

$$\frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{p}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2\right)=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{0} \tag{37}$$

である。この定点から点$\boldsymbol{p}(s)$へのベクトルは

$$\boldsymbol{p}-\left(\boldsymbol{p}+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2\right)=-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2 \tag{38}$$

なので、$\boldsymbol{p}(s)$は半径$\dfrac{1}{|\kappa|}$の円を表し、$\kappa>0$ならば円は正の向き、$\kappa<0$ならば円は負の向きである。

定理2.2

$\boldsymbol{p}(s), \bar{\boldsymbol{p}}(s)$ で表される曲線とその曲率 $\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$ について

$$\kappa = \bar{\kappa} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{回転と平行移動で}\,\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}\,\text{が重なる} \tag{39}$$

証明.「$\Leftarrow$」について

回転と平行移動で $\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$ が重なると仮定する。すなわち、ある回転行列 A と定ベクトル $\boldsymbol{b}$ が存在して

$$\bar{\boldsymbol{p}}(s) = A\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{b} \tag{40}$$

と表せると仮定する。

前頁の仮定

$$\bar{\boldsymbol{p}}(s) = A\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{b} \tag{41}$$

より、

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{e}}_1 &= \bar{\boldsymbol{p}}' && (42)\\
&= A\boldsymbol{p}' && (43)\\
&= A\boldsymbol{e}_1 && (44)\\
\bar{\boldsymbol{e}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 && (45)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 && (46)\\
&= A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 && (47)\\
&= A\boldsymbol{e}_2 && (48)
\end{aligned}$$

である。

前頁の結果

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{e}_1, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_2 = A\boldsymbol{e}_2 \tag{49}$$

より、

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1' = A\bar{\boldsymbol{e}}_1' = A(\kappa\boldsymbol{e}_2) = \kappa\bar{\boldsymbol{e}}_2 \tag{50}$$

である。このことと曲率の定義式$\bar{\boldsymbol{e}}_1' = \bar{\kappa}\bar{\boldsymbol{e}}_2$とを比較すれば$\kappa = \bar{\kappa}$を得る。

「$\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow$ 回転と平行移動で$\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$が重なる」について

$\kappa = \bar{\kappa}$を仮定する。まず適当な回転と平行移動で

$$\boldsymbol{p}(s_0) = \bar{\boldsymbol{p}}(s_0), \quad \boldsymbol{e}_1(s_0) = \bar{\boldsymbol{e}}_1(s_0) \tag{51}$$

となるようにしておく。このとき$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$であることを示そう。そのためには

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0} \tag{52}$$

すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 - \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{0} \tag{53}$$

を示せばよい。

各ベクトルの成分を

$$\boldsymbol{e}_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}) \tag{54}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = (\bar{\xi}_{11}, \bar{\xi}_{12}) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}) \tag{56}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = (\bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}) \tag{57}$$

とおく。さらに

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{11} \\ \bar{\xi}_{21} \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{f}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{12} \\ \bar{\xi}_{22} \end{bmatrix} \tag{59}$$

とおく。このとき、行列

$$X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix} \tag{60}$$

は直交行列であるから、$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は正規直交基底である（$\bar{\boldsymbol{f}}_1, \bar{\boldsymbol{f}}_2$ も同様）。

さて、今示したいことは

$$\boldsymbol{e}_1 - \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{0} \tag{61}$$

であった。そのためには

$$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0, \quad |\boldsymbol{f}_2 - \bar{\boldsymbol{f}}_2|^2 = 0 \tag{62}$$

を示せばよい。

まず$|\boldsymbol{f}_1-\bar{\boldsymbol{f}}_1|^2=0$を示す。ここで

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}_1-\bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 &= (\xi_{11}-\bar{\xi}_{11})^2+(\xi_{21}-\bar{\xi}_{21})^2 && (63)\\
&= \xi_{11}^2+\xi_{21}^2+\bar{\xi}_{11}^2+\bar{\xi}_{21}^2-2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21}) && (64)\\
&= 2-2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21}) && (65)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21}=1 \tag{66}
$$

を示せばよいが、$s=s_0$のときは

$$
\begin{aligned}
\xi_{11}(s_0)\bar{\xi}_{11}(s_0)+\xi_{21}(s_0)\bar{\xi}_{21}(s_0) &= \xi_{11}(s_0)^2+\xi_{21}(s_0)^2 && (67)\\
&= |\boldsymbol{f}_1|^2 && (68)\\
&= 1 && (69)
\end{aligned}
$$

が成り立っているから、結局

$$
\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21})=0 \tag{70}
$$

を示せばよい。

前頁の考察で、$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$を示すには

$$\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) = 0 \tag{71}$$

を示せばよいことがわかった。実際にsについて微分してみると

$$\begin{align}
\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) &= \xi'_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{11}\bar{\xi}'_{11} + \xi'_{21}\bar{\xi}_{21} + \xi_{21}\bar{\xi}'_{21} \tag{72}\\
&= \kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11} + \kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21} - \kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21} - \kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11} \tag{73}\\
&= 0 \tag{74}
\end{align}$$

なので、示したかった$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$がいえた。同様にして$|\boldsymbol{f}_2 - \bar{\boldsymbol{f}}_2|^2 = 0$も示せる。

以上より「$\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow$ 回転と平行移動で$\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$が重なる」がいえた。 $\square$

7　一般のパラメータによる曲率の表式

弧長sによるパラメータ表示を具体的に求めることは一般には難しい。そこで、一般のパラメータtによる曲率の表式を考える。

例2.2. 楕円の曲率

楕円のパラメータ表示

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (a > b > 0) \tag{75}$$

から曲率を求める。

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt \tag{76}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{77}$$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \tag{78}$$

$$\therefore \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \tag{79}$$

また

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' \tag{80}$$

$$= \dot{\boldsymbol{p}}\frac{dt}{ds} \tag{81}$$

$$= (-a\sin t, b\cos t)\frac{dt}{ds} \tag{82}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{e}_2 = (-b\cos t, -a\sin t)\frac{dt}{ds} \tag{83}$$

である。ここで

$$\begin{cases} \text{曲率の定義式から} & \boldsymbol{e}_1' = \kappa\boldsymbol{e}_2 = \kappa(-b\cos t, -a\sin t)\dfrac{dt}{ds} \\ \text{連鎖律から} & \boldsymbol{e}_1' = \dot{\boldsymbol{e}}_1\dfrac{dt}{ds} \end{cases} \tag{84}$$

なので、これをκについて解いて

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \tag{85}$$

を得る。

8 問題

一般の曲線に対する$\kappa(t)$

問2.1

パラメータ表示$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$で表される曲線の曲率は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \tag{86}$$

である。

証明. まず

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \tag{87}$$

$$= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{p}}|} \tag{88}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{89}$$

である。また

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' \tag{90}$$

$$= \dot{\boldsymbol{p}}\frac{dt}{ds} \tag{91}$$

$$= (\dot{x}, \dot{y})\frac{dt}{ds} \tag{92}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{e}_2 = (-\dot{y}, \dot{x})\frac{dt}{ds} \tag{93}$$

である。

ここで

$$\boldsymbol{e}_1' = \dot{\boldsymbol{e}}_1 \frac{dt}{ds} \tag{94}$$

$$= \left(\frac{-(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \frac{(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right) \frac{dt}{ds} \tag{95}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} (-\dot{y}, \dot{x}) \frac{dt}{ds} \tag{96}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_2 \tag{97}$$

なので

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{98}$$

である。 □

極座標で表される曲線の曲率

問2.2

パラメータ表示 $\boldsymbol{p}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta), r = F(\theta)$ で表される曲線の曲率は

$$\kappa = \frac{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}} \tag{99}$$

である。

証明.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \tag{100}$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta - r\cos\theta \tag{101}$$
$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta - r\cos\theta \tag{102}$$
$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta - 2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \tag{103}$$

より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \tag{104}$$
$$\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} \tag{105}$$

である。

前頁の結果

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \tag{106}$$

$$\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} \tag{107}$$

を問2.1の式に代入して

$$\kappa = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}} \tag{108}$$

を得る。 □

双曲線の曲率

問2.3

パラメータ表示$\boldsymbol{p}(t) = (\cosh t, \sinh t)$で表される曲線の曲率は

$$\kappa = -\frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \tag{109}$$

である。

証明. 各成分を微分したものは

$$\dot{x} = \sinh t \tag{110}$$

$$\dot{y} = \cosh t \tag{111}$$

$$\ddot{x} = \cosh t \tag{112}$$

$$\ddot{y} = \sinh t \tag{113}$$

なので、問2.1の式より

$$\kappa = \frac{\sinh^2 t - \cosh^2 t}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{3/2}} \tag{114}$$

$$= -\frac{1}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{3/2}} \tag{115}$$

$$= -\frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \tag{116}$$

である。 □

問2.4

$a>0$とする。パラメータ表示$\boldsymbol{p}(t)=\left(t, a\cosh\frac{t}{a}\right)$で表される曲線の$0\leq t\leq x$における弧長は

$$s=a\sinh\frac{x}{a} \tag{117}$$

であり、弧長によるパラメータ表示は

$$\boldsymbol{p}(s)=\left(a\sinh^{-1}\frac{s}{a}, \sqrt{a^2+s^2}\right) \tag{118}$$

である。

証明. 弧長は

$$s = \int_0^x |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| dt \tag{119}$$

$$= \int_0^x \cosh t dt \tag{120}$$

$$= a \sinh \frac{x}{a} \tag{121}$$

である。よって

$$x = a \sinh^{-1} \frac{s}{a} \tag{122}$$

$$y = a\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} \tag{123}$$

$$= a\sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \tag{124}$$

$$= \sqrt{a^2 + s^2} \tag{125}$$

である。 □

参考文献

[1] 杉浦光夫、解析入門I、東京大学出版会

[2] 杉浦光夫、解析入門II、東京大学出版会

[3] 齋藤正彦、線型代数入門、東京大学出版会

[4] 松本幸夫、多様体の基礎、東京大学出版会