「小林昭七 曲線と曲面の微分幾何」を読む

2021年4月16日

八幡 圭嗣

目次

1　曲線の概念

ここでは主にパラメータによる表示$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$を用いて曲線を扱うので、まず$\boldsymbol{p}(t)$に関する仮定を整理しておく。また、本書は曲線という概念そのものの定義には深入りしていないが、参考情報として曲線の定義に関するいくつかの立場にも触れておく。

曲線$\boldsymbol{p}(t)$に仮定すること

- $\boldsymbol{p}(t)$の定義域は区間とする。
- $\boldsymbol{p}(t)$は2,3回微分可能とする（今回は2回で十分）。
- 特に断らない限り、$\boldsymbol{p}(t)$は必ずしも1対1ではない。
- 特に断らない限り、$\boldsymbol{p}(t)$は停留点を持ちうる。

※より一般の多様体を扱う場合は定義域を開集合にしたり、単射性を仮定したり、逆関数の連続性を仮定したり、停留点を持たないと仮定したりする場合がある[2][4]。

参考：曲線の定義

「$y = x^2$ のグラフが曲線」とか「$F(x, y) = 0$ により定まる曲線」とかいうとき、暗に点集合を指して曲線と呼んでいるものと考えられる。

一方、有界閉区間上の連続関数 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$ 自体を（パラメータ付）曲線と呼ぶ立場もあり [1]、この立場では t の増加する向きによって曲線に自然な向きが定まる。

参考：2つの曲線が同じであるとは

2つのパラメータ付曲線$\boldsymbol{p} : I \to \mathbf{R}^2, \boldsymbol{q} : J \to \mathbf{R}^2$に対し、次のように同値関係を定義できる:

ある狭義単調増加な連続関数$\varphi : I \to \varphi(I) = J$が存在して
$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \circ \varphi$であるとき、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$は同値であるという

この同値関係により定まる同値類を曲線と呼び、曲線Cの元をCのパラメータ表示と呼ぶ、という立場がある[1]。このとき曲線の像、始点、終点、弧長が存在すれば、それぞれはパラメータ表示のとり方によらない。

留意

※本書では「点集合としての曲線」「パラメータ付曲線」「パラメータ付曲線の同値類としての曲線」などを明確には区別していないため、曲線という語の意味は文脈によって判断するしかない。本スライドでも以後これらの概念を明確には区別せず用いる。

2　曲線のパラメータ表示

一般のパラメータ t によるパラメータ表示と、その特別な場合としての弧長 s によるパラメータ表示について述べる。

一般のパラメータ

$\boldsymbol{p}(t)$ を微分したものを

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \ddot{\boldsymbol{p}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \tag{1}$$

などと表す。仮に t を時間とみなせば、物理的意味は

- 位置ベクトル: $\boldsymbol{p}(t)$
- 速度ベクトル: $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$
- 速さ: $|\dot{\boldsymbol{p}}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
- 加速度ベクトル: $\ddot{\boldsymbol{p}}(t)$

といえる。

弧長

パラメータが0からtまで動くときの曲線の長さ（弧長）は

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| dt \tag{2}$$

である。両辺を微分して

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\boldsymbol{p}}(t)| \tag{3}$$

を得る。

弧長によるパラメータ表示

以下、$\boldsymbol{p}(t)$ が停留点を持たない場合を考える。

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{p}}| > 0$$

$\therefore s(t)$ は狭義単調増加な連続関数

$\therefore s(t)$ は逆関数 $t(s)$ を持ち、$t(s)$ も狭義単調増加な連続関数

したがって、$\boldsymbol{p}(t)$ が表す曲線は弧長によるパラメータ表示 $\boldsymbol{p}(s)$ も可能である。導関数は

$$\boldsymbol{p}'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{4}$$

と表す。

3　曲率の導入

前頁で述べた弧長によるパラメータ表示$\boldsymbol{p}(s)$は、曲線に対して唯一つに定まる。そこで次に$\boldsymbol{p}(s)$を用いて単位接ベクトル・単位法ベクトルを表し、それらによって曲率を定義する。

単位接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$

ベクトル（値関数）$\boldsymbol{e}_1(s)$ を

$$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{p}'(s) \tag{5}$$

と定義する。$\boldsymbol{e}_1(s_0)$ は曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の点 $\boldsymbol{p}(s_0)$ における単位接ベクトルである。

単位法ベクトル$\boldsymbol{e}_2$

ベクトル$\boldsymbol{e}_2(s)$を

各点で$\boldsymbol{e}_1(s)$に直交する単位ベクトルであって$\boldsymbol{e}_1$の左側にあるもの

と定義する。すなわち

$$\boldsymbol{e}_2(s) = \boldsymbol{e}_1(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

である。$\boldsymbol{e}_2(s_0)$は曲線$\boldsymbol{p}(s)$の点$\boldsymbol{p}(s_0)$における単位法ベクトルである。

曲率

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の関係を整理すると

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \tag{9}$$

である。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が正規直交基底をなすことに注意すれば、ある実数値関数 $\kappa(s)$ が唯一つ存在して

$$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\kappa \boldsymbol{e}_1 \tag{10}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

が成り立つ。この $\kappa(s)$ を曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の曲率 (curvature) という。

補足：シュミットの直交化

曲線$\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$の曲率$\kappa$が非負である場合を考える。ある点において$\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}''$が線型独立であるとき、これは2次元ユークリッド空間の基底であり、これにシュミットの直交化を施したものは$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$である。

4　曲率の意味

前節で定義された曲率は、その名の通り「曲がり具合」を表しているであろうか？ここでいくつかの具体例に触れながら曲率の意味を考察する。

例2.1. 円の曲率

パラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (r\cos t, r\sin t) \tag{12}$$

で表される半径$r(>0)$の円を考える。弧長は

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\boldsymbol{p}'(t)|dt \qquad (13)\\ &= \int_0^t r dt \qquad (14)\\ &= rt \qquad (15)\end{aligned}$$

なので、$t = t(s) = \dfrac{s}{r}$と表せて、この円の弧長によるパラメータ表示は

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \tag{16}$$

となる。

弧長によるパラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \tag{17}$$

から

$$\boldsymbol{e}_1(s) = (\quad -\sin\frac{s}{r}, \qquad \cos\frac{s}{r}) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{e}_2(s) = (\quad -\cos\frac{s}{r}, \quad -\sin\frac{s}{r}) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{e}_1'(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{e}_2'(s) = (\quad \frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}) \tag{21}$$

を得る。したがって

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_1 \tag{22}$$

ゆえに半径rの円の曲率は$\kappa = \dfrac{1}{r}$（定数）である。

定理2.1. 直線の曲率

定理2.1

曲線$\boldsymbol{p}(s)$の曲率$\kappa(s)$について

$$\kappa = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{p}(s)\text{が直線} \tag{23}$$

証明.「$\kappa = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}(s)$ が直線」について

$\kappa = 0$ と仮定すると、$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ なので、各成分を s に関して積分すれば

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \tag{24}$$

よって

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \quad (a, b \text{ は定数}) \tag{25}$$

と表せる。すなわち $\boldsymbol{p}(s)$ は直線を表す。

「$\kappa = 0 \Leftarrow \boldsymbol{p}(s)$ が直線」について

$\boldsymbol{p}(s)$ が直線であると仮定する。すなわち、定数 $\alpha, \beta, a, b, (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ を用いて

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \tag{26}$$

と表せると仮定する。このとき $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta)$ より $\boldsymbol{e}_1' = (0,0), \boldsymbol{e}_2 = (-\beta, \alpha)$ である。したがって、曲率の定義式 $\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$ から $\kappa = 0$ が従う。 $\square$

2次近似

曲線$\boldsymbol{p}(s)$の点s_0における2次近似は

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{p}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}''(s_0)(s - s_0)^2 \tag{27}$$

すなわち

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{e}_1(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\kappa(s_0)\boldsymbol{e}_2(s_0)(s - s_0)^2 \tag{28}$$

である。

2次近似の例

点$(0,1)$を中心とする半径1の正の向きの円のパラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (\sin t, 1 - \cos t) \tag{29}$$

の、原点における2次近似を考える。例2.1（円の曲率）と同様に$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \kappa$を求めると

$$\boldsymbol{e}_1(0) = (1,0), \quad \boldsymbol{e}_2(0) = (0,1), \quad \kappa(0) = 1 \tag{30}$$

である。したがって、求める2次近似は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}(0) + \boldsymbol{e}_1(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)\boldsymbol{e}_2(0)s^2 && (31)\\
=&(0,0) + (1,0)s + \frac{1}{2}(0,1)s^2 && (32)\\
=&\left(s, \frac{1}{2}s^2\right) && (33)
\end{aligned}$$

である。

5　Gaussの表示

曲率の意味を説明するもうひとつの方法として、つぎにGaussの表示を考える。

Gaussの表示

ここでは曲線$\boldsymbol{p}(s)$は1対1写像であるとして考える。このとき、各点$\boldsymbol{p}(s_0)$に対してベクトル$\boldsymbol{e}_2(s_0)$が唯一つ定まり、さらに$\boldsymbol{e}_2(s_0)$を位置ベクトルとみたときに$\boldsymbol{e}_2(s_0)$が表す単位円上の点が唯一つ定まる。この単位円上の点を同じ記号で$\boldsymbol{e}_2(s_0)$と表すことにする。

点$\boldsymbol{p}(s)$を点$\boldsymbol{e}_2(s)$に写す対応をGaussの表示(Gauss map; ガウス写像とも)と呼び、gで表す。

点 $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}(s)$ から $\boldsymbol{p}(s+\Delta s)$ まで動くとき、点 $g(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{e}_2(s)$ から $\boldsymbol{e}_2(s+\Delta s)$ まで動く。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_2(s+\Delta s) &= \boldsymbol{e}_2(s) + \boldsymbol{e}_2'(s)\Delta s + o(\Delta s) && (34)\\
&= \boldsymbol{e}_2(s) - \kappa(s)\boldsymbol{e}_1(s)\Delta s + o(\Delta s) && (35)
\end{aligned}
$$

なので、点 $\boldsymbol{e}_2$ は速度 $-\kappa\boldsymbol{e}_1$ で単位円上を動く。

$g(\boldsymbol{p})$ が定点であるのは曲率が常に 0、すなわち直線のときで、そのときに限る。

6　曲率による曲線の特徴付け

ここまで、曲線に対して定まる曲率について具体例を交えて考察を進めてきた。それでは逆に、曲率から曲線を定めることはできるであろうか？その特別な場合として、$\kappa = 0$ならば$\boldsymbol{p}(s)$が直線であることは既に確認した。ここではより一般の曲線に対して考察を広げる。

κ が一定の場合

曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の曲率を $\kappa(s)$ とおく。κ が 0 でない定数の場合を考える。まず、「円の中心になるであろう点」$\boldsymbol{p} + \dfrac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2$ は定点である。実際

$$\frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2\right) = \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{0} \tag{36}$$

である。この定点から点 $\boldsymbol{p}(s)$ へのベクトルは

$$\boldsymbol{p} - \left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2\right) = -\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{e}_2 \tag{37}$$

なので、曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ は半径 $\dfrac{1}{|\kappa|}$ の円を表し、$\kappa > 0$ ならば円は正の向き、$\kappa < 0$ ならば円は負の向きである。

定理2.2. 曲率による曲線の特徴付け

定理2.2

2曲線$\boldsymbol{p}(s), \bar{\boldsymbol{p}}(s)$とその曲率$\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$について

$$\kappa = \bar{\kappa} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{回転と平行移動で}\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}\text{が重なる} \tag{38}$$

証明.「$\Leftarrow$」について

回転と平行移動で$\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$が重なると仮定する。すなわち、ある回転行列$A$と定ベクトル$\boldsymbol{b}$が存在して

$$\bar{\boldsymbol{p}}(s) = A\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{b} \tag{39}$$

と表せると仮定する。

前頁の仮定

$$\bar{\boldsymbol{p}}(s) = A\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{b} \tag{40}$$

より、

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{e}}_1 &= \bar{\boldsymbol{p}}' && (41)\\
&= A\boldsymbol{p}' && (42)\\
&= A\boldsymbol{e}_1 && (43)\\
\bar{\boldsymbol{e}}_2 &= \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\bar{\boldsymbol{e}}_1 && (44)\\
&= \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]A\boldsymbol{e}_1 && (45)\\
&= A\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\boldsymbol{e}_1 && (46)\\
&= A\boldsymbol{e}_2 && (47)
\end{aligned}$$

である。

前頁の結果

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = A\boldsymbol{e}_1, \quad \bar{\boldsymbol{e}}_2 = A\boldsymbol{e}_2 \tag{48}$$

より、

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1' = A\bar{\boldsymbol{e}}_1' = A(\kappa \boldsymbol{e}_2) = \kappa \bar{\boldsymbol{e}}_2 \tag{49}$$

である。このことと曲率の定義式 $\bar{\boldsymbol{e}}_1' = \bar{\kappa}\bar{\boldsymbol{e}}_2$ とを比較すれば $\kappa = \bar{\kappa}$ を得る。

「$\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow$ 回転と平行移動で$\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$が重なる」について

$\kappa = \bar{\kappa}$を仮定する。まず適当な回転と平行移動で

$$\boldsymbol{p}(s_0) = \bar{\boldsymbol{p}}(s_0), \quad \boldsymbol{e}_1(s_0) = \bar{\boldsymbol{e}}_1(s_0) \tag{50}$$

となるようにしておく。このとき$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$であることを示そう。そのためには

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0} \tag{51}$$

すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 - \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{0} \tag{52}$$

を示せばよい。

各ベクトルの成分を

$$\boldsymbol{e}_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}) \tag{53}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = (\bar{\xi}_{11}, \bar{\xi}_{12}) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}) \tag{55}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = (\bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}) \tag{56}$$

とおく。さらに

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{11} \\ \bar{\xi}_{21} \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{f}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{12} \\ \bar{\xi}_{22} \end{bmatrix} \tag{58}$$

とおく。このとき、行列

$$X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix} \tag{59}$$

は直交行列であるから、$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は正規直交基底である（$\bar{\boldsymbol{f}}_1, \bar{\boldsymbol{f}}_2$ も同様）。

さて、今示したいことは

$$\boldsymbol{e}_1 - \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{0} \tag{60}$$

であった。そのためには

$$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0, \quad |\boldsymbol{f}_2 - \bar{\boldsymbol{f}}_2|^2 = 0 \tag{61}$$

を示せばよい。

まず $|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$ を示す。ここで

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 &= (\xi_{11} - \bar{\xi}_{11})^2 + (\xi_{21} - \bar{\xi}_{21})^2 && (62)\\
&= \xi_{11}^2 + \xi_{21}^2 + \bar{\xi}_{11}^2 + \bar{\xi}_{21}^2 - 2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) && (63)\\
&= 2 - 2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) && (64)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21} = 1 \tag{65}
$$

を示せばよいが、$s = s_0$ のときは

$$
\begin{aligned}
\xi_{11}(s_0)\bar{\xi}_{11}(s_0) + \xi_{21}(s_0)\bar{\xi}_{21}(s_0) &= \xi_{11}(s_0)^2 + \xi_{21}(s_0)^2 && (66)\\
&= |\boldsymbol{f}_1|^2 && (67)\\
&= 1 && (68)
\end{aligned}
$$

が成り立っているから、結局

$$
\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) = 0 \tag{69}
$$

を示せばよい。

前頁の考察で、$|\boldsymbol{f}_1-\bar{\boldsymbol{f}}_1|^2=0$を示すには

$$\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21})=0 \tag{70}$$

を示せばよいことがわかった。実際にsについて微分してみると

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{21}\bar{\xi}_{21}) &= \xi'_{11}\bar{\xi}_{11}+\xi_{11}\bar{\xi}'_{11}+\xi'_{21}\bar{\xi}_{21}+\xi_{21}\bar{\xi}'_{21} &(71)\\ &= \kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11}+\kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21}-\kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21}-\kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11} &(72)\\ &= 0 &(73)\end{aligned}$$

なので、示したかった$|\boldsymbol{f}_1-\bar{\boldsymbol{f}}_1|^2=0$がいえた。同様にして$|\boldsymbol{f}_2-\bar{\boldsymbol{f}}_2|^2=0$も示せる。

以上より「$\kappa=\bar{\kappa}\Rightarrow$ 回転と平行移動で$\boldsymbol{p},\bar{\boldsymbol{p}}$が重なる」がいえた。 $\square$

7　一般のパラメータによる曲率の表式

弧長sによるパラメータ表示を具体的に求めることは一般には難しい。そこで、一般のパラメータtによる曲率の表式を考える。

例2.2. 楕円の曲率

楕円のパラメータ表示

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad (a > b > 0) \tag{74}$$

から曲率を求める。

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \tag{75}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{76}$$

$$= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \tag{77}$$

$$\therefore \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \tag{78}$$

また

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{p}' && (79)\\
&= \dot{\boldsymbol{p}}\frac{dt}{ds} && (80)\\
&= (-a\sin t, b\cos t)\frac{dt}{ds} && (81)\\
\therefore\quad \boldsymbol{e}_2 &= (-b\cos t, -a\sin t)\frac{dt}{ds} && (82)
\end{aligned}
$$

である。ここで

$$
\begin{cases}
\text{曲率の定義式から} & \boldsymbol{e}_1' = \kappa\boldsymbol{e}_2 = \kappa(-b\cos t, -a\sin t)\dfrac{dt}{ds}\\
\text{連鎖律から} & \boldsymbol{e}_1' = \dot{\boldsymbol{e}}_1\dfrac{dt}{ds}
\end{cases}
\tag{83}
$$

なので、これをκについて解いて

$$
\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \tag{84}
$$

を得る。

一般の曲線に対する$\kappa(t)$

より一般の曲線に対しては

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \tag{85}$$

が成り立つ。

参考文献

[1] 杉浦光夫、解析入門I、東京大学出版会

[2] 杉浦光夫、解析入門II、東京大学出版会

[3] 齋藤正彦、線型代数入門、東京大学出版会

[4] 松本幸夫、多様体の基礎、東京大学出版会