
「小林昭七 曲線と曲面の微分幾何」を読む

2021年4月16日

八幡 圭嗣

目次

1. 曲線の概念
2. 曲線のパラメータ表示
3. 曲率の導入
4. 曲率の意味
5. Gauss の表示
6. 曲率による曲線の特徴付け
7. 一般のパラメータによる曲率の表式
8. 問題

1 曲線の概念

本書は曲線という概念そのものの定義には深入りしていないが、参考情報として曲線の定義に関するいくつかの立場に触れておく。

参考：曲線の定義

「 $y = x^2$ のグラフが曲線」とか「 $F(x, y) = 0$ により定まる曲線」とかいうとき、暗に点集合を指して曲線と呼んでいるものと考えられる。

一方、有界閉区間上の連続関数 $p(t) = (x(t), y(t))$ 自体を（パラメータ付）曲線と呼ぶ立場もある [1]:

定義（パラメータ付曲線）*1

R の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された R^2 値連続関数 $p(t)$ をパラメータ付曲線という。

この立場では t の増加する向きによって "曲線" に自然な向きが定まる。

*1 より一般の多様体を扱う場合は定義域を開集合にしたり、逆関数の連続性を仮定したりする [2][4]。

参考：パラメータ付曲線の同値

2つのパラメータ付曲線に対し次のように同値関係を定め、その同値類を曲線と呼ぶという立場がある[1]。

定義（パラメータ付曲線の同値）

2つのパラメータ付曲線 $p : I \rightarrow \mathbf{R}^2, q : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対し次が成り立つとき、 p, q は同値であるという：

ある狭義単調増加な連続関数 $\varphi : I \rightarrow \varphi(I) = J$ が存在して $p = q \circ \varphi$

定義（曲線）

上の同値関係により定まる同値類を曲線という。曲線 C の元（すなわちパラメータ付曲線）を C のパラメータ表示という。

このとき曲線のパラメータ表示に像、始点、終点、弧長が存在すれば、それぞれはパラメータ表示のとり方によらず、曲線のみによって定まる。

パラメータ表示 $p(t)$ に仮定すること

本スライドではパラメータ表示 $p(t)$ に対してさらに以下を仮定する。

- $p(t)$ は2回微分可能とする。
- $p(t)$ は1対1であるとする。
- $p(t)$ は停留点を持たないとする。

本書では「点集合としての曲線」「パラメータ付曲線」「パラメータ付曲線と同値類としての曲線」などを明確には区別していないため、曲線という語の意味は文脈によって判断するしかない。

2 曲線のパラメータ表示

一般のパラメータ t によるパラメータ表示と、その特別な場合としての弧長 s によるパラメータ表示について述べる。

一般のパラメータ

$p(t)$ を微分したものを

$$\dot{p}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \ddot{p}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \quad (1)$$

などと表す。仮に t を時間とみなせば、物理的意味は

- 位置ベクトル: $p(t)$
- 速度ベクトル: $\dot{p}(t)$
- 速さ: $|\dot{p}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
- 加速度ベクトル: $\ddot{p}(t)$

といえる。

弧長

パラメータが0から t まで動くときの弧長は

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (2)$$

である。両辺を微分して

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\dot{\mathbf{p}}(t)| \quad (3)$$

を得る。

弧長パラメータ表示

$p(t)$ は停留点を持たないから

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{p}| > 0$$

$\therefore s(t)$ は狭義単調増加な連続関数

$\therefore s(t)$ は逆関数 $t(s)$ を持ち、 $t(s)$ も狭義単調増加な連続関数

したがって、 $p(t)$ が表す曲線は弧長によるパラメータ表示（省略して弧長パラメータ表示） $p(s)$ も可能である。導関数は

$$p'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{4}$$

と表す。

3 曲率の導入

前頁で述べた弧長パラメータ表示 $p(s)$ は、曲線に対して唯一つに定まる。そこで次に $p(s)$ を用いて単位接ベクトル・単位法ベクトルを表し、それらによって曲率を定義する。

単位接ベクトル e_1

ベクトル $e_1(s)$ を

$$e_1(s) = \boldsymbol{p}'(s) \tag{5}$$

と定義する。 $e_1(s_0)$ は $p(s)$ で表される曲線の点 $p(s_0)$ における単位接ベクトルである。

単位法ベクトル e_2

ベクトル $e_2(s)$ を

各点で $e_1(s)$ に直交する単位ベクトルであって e_1 の左側にあるものと定義する。すなわち

$$e_2(s) = e_1(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。

曲率

e_1, e_2 の関係を整理すると

$$e_1 \cdot e_1 = 1 \quad (7)$$

$$e_2 \cdot e_2 = 1 \quad (8)$$

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad (9)$$

である。 e_1, e_2 が正規直交基底をなすことに注意すれば、ある実数値関数 $\kappa(s)$ が唯一つ存在して

$$e'_1 = \kappa e_2, \quad e'_2 = -\kappa e_1 \quad (10)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

が成り立つ。この $\kappa(s)$ を曲率 (curvature) という。

4 曲率の意味

前節で定義された曲率が文字通り「曲がり具合」を表していることを、いくつかの具体例によって確かめる。

例2.1. 円の曲率

パラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad (12)$$

で表される半径 $r(> 0)$ の円を考える。弧長は

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{p}'(t)| dt \quad (13)$$

$$= \int_0^t r dt \quad (14)$$

$$= rt \quad (15)$$

なので逆関数は $t(s) = \frac{s}{r}$ であり、この円の弧長パラメータ表示は

$$\boldsymbol{p}(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right) \quad (16)$$

となる。

弧長パラメータ表示

$$\mathbf{p}(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right) \quad (17)$$

から

$$\mathbf{e}_1(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_2(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{e}'_1(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right) \quad (20)$$

$$\mathbf{e}'_2(s) = \left(\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \right) \quad (21)$$

を得る。したがって

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_1 \quad (22)$$

ゆえに半径 r の円の曲率は $\kappa = \frac{1}{r}$ (定数) である。

定理 2.1. 直線の曲率

定理 2.1

弧長パラメータ表示 $p(s)$ で表される曲線の曲率 $\kappa(s)$ について

$$\kappa = 0 \iff p(s) \text{ が直線を表す} \quad (23)$$

ただし、「 $p(s)$ が直線を表す」とは、定数 $\alpha, \beta, a, b, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ を用いて

$$p(s) = (\alpha, \beta)s + (a, b) \quad (24)$$

と表せることを指すものとする。

証明. 「 $\kappa = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}(s)$ が直線を表す」 について

$\kappa = 0$ と仮定すると、 $\boldsymbol{e}'_1 = \kappa \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ なので、各成分を s に関して積分すれば

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \quad (25)$$

よって

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (26)$$

と表せる。すなわち $\boldsymbol{p}(s)$ は直線を表す。

「 $\kappa = 0 \Leftarrow \boldsymbol{p}(s)$ が直線を表す」について

$\boldsymbol{p}(s)$ が直線を表すと仮定する。すなわち、定数 $\alpha, \beta, a, b, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ を用いて

$$\boldsymbol{p} = (\alpha, \beta)s + (a, b) \quad (27)$$

と表せると仮定する。このとき $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = (\alpha, \beta)$ より $\boldsymbol{e}'_1 = (0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (-\beta, \alpha)$ である。
したがって、曲率の定義式 $\boldsymbol{e}'_1 = \kappa \boldsymbol{e}_2$ から $\kappa = 0$ が従う。 \square

2次近似

$p(s)$ の点 s_0 における 2 次近似は

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{p}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}''(s_0)(s - s_0)^2 \quad (28)$$

すなわち

$$\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{e}_1(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\kappa(s_0)\boldsymbol{e}_2(s_0)(s - s_0)^2 \quad (29)$$

である。

2次近似の例

点 $(0, 1)$ を中心とする半径1の正の向きの円のパラメータ表示

$$\boldsymbol{p}(t) = (\sin t, 1 - \cos t) \quad (30)$$

の、原点における2次近似を考える。例2.1（円の曲率）と同様に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \kappa$ を求めると

$$\boldsymbol{e}_1(0) = (1, 0), \quad \boldsymbol{e}_2(0) = (0, 1), \quad \kappa(0) = 1 \quad (31)$$

である。したがって、求める2次近似は

$$\boldsymbol{p}(0) + \boldsymbol{e}_1(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)\boldsymbol{e}_2(0)s^2 \quad (32)$$

$$= (0, 0) + (1, 0)s + \frac{1}{2}(0, 1)s^2 \quad (33)$$

$$= \left(s, \frac{1}{2}s^2 \right) \quad (34)$$

である。

5 Gauss の表示

曲率の意味を説明するもうひとつの方法として、つぎに Gauss の表示を考える。

Gauss の表示

「曲線 p の各点 $p(s)$ に対して、原点からでる、 $e_2(s)$ に平行なベクトルを対応させる。点 $p(s)$ からでているベクトル $e_2(s)$ も、原点からでている平行なベクトルも同じであるから、同様に $e_2(s)$ と書くことにする。曲線 p から単位円への対応 $p(s) \rightarrow e_2(s)$ を Gauss の頭文字をとり g と書くことにする。」

点 p が $p(s)$ から $p(s + \Delta s)$ まで動くとき、点 $g(p)$ は $e_2(s)$ から $e_2(s + \Delta s)$ まで動く。

$$e_2(s + \Delta s) = e_2(s) + e_2'(s)\Delta s + o(\Delta s) \quad (35)$$

$$= e_2(s) - \kappa(s)e_1(s)\Delta s + o(\Delta s) \quad (36)$$

なので、点 e_2 は速度 $-\kappa e_1$ で単位円上を動く。

$g(p)$ が定点であるのは曲率が常に 0、すなわち直線のと看で、そのときに限る。

6 曲率による曲線の特徴付け

曲線 \rightarrow 曲率

曲線 $\overset{?}{\leftarrow}$ 曲率

κ が一定の場合

$p(s)$ で表される曲線の曲率を $\kappa(s)$ とおく。 κ が0でない定数の場合を考える。まず、「円の中心になるであろう点」 $p + \frac{1}{\kappa}e_2$ は定点である。実際

$$\frac{d}{ds} \left(p + \frac{1}{\kappa} e_2 \right) = e_1 + \frac{1}{\kappa} (-\kappa e_1) = \mathbf{0} \quad (37)$$

である。この定点から点 $p(s)$ へのベクトルは

$$p - \left(p + \frac{1}{\kappa} e_2 \right) = -\frac{1}{\kappa} e_2 \quad (38)$$

なので、 $p(s)$ は半径 $\frac{1}{|\kappa|}$ の円を表し、 $\kappa > 0$ ならば円は正の向き、 $\kappa < 0$ ならば円は負の向きである。

定理 2.2. 曲率による曲線の特徴付け

定理 2.2

$p(s), \bar{p}(s)$ で表される曲線とその曲率 $\kappa(s), \bar{\kappa}(s)$ について

$$\kappa = \bar{\kappa} \iff \text{回転と平行移動で } p, \bar{p} \text{ が重なる} \quad (39)$$

証明. 「 \Leftarrow 」 について

回転と平行移動で p, \bar{p} が重なると仮定する。すなわち、ある回転行列 A と定ベクトル b が存在して

$$\bar{p}(s) = Ap(s) + b \quad (40)$$

と表せると仮定する。

前頁の仮定

$$\bar{\boldsymbol{p}}(s) = A\boldsymbol{p}(s) + \boldsymbol{b} \quad (41)$$

より、

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = \bar{\boldsymbol{p}}' \quad (42)$$

$$= A\boldsymbol{p}' \quad (43)$$

$$= A\boldsymbol{e}_1 \quad (44)$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 \quad (45)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 \quad (46)$$

$$= A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \quad (47)$$

$$= A\boldsymbol{e}_2 \quad (48)$$

である。

前頁の結果

$$\bar{e}_1 = Ae_1, \quad \bar{e}_2 = Ae_2 \quad (49)$$

より、

$$\bar{e}'_1 = A\bar{e}'_1 = A(\kappa e_2) = \kappa \bar{e}_2 \quad (50)$$

である。このことと曲率の定義式 $\bar{e}'_1 = \bar{\kappa} \bar{e}_2$ とを比較すれば $\kappa = \bar{\kappa}$ を得る。

「 $\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow$ 回転と平行移動で p, \bar{p} が重なる」について

$\kappa = \bar{\kappa}$ を仮定する。まず適当な回転と平行移動で

$$p(s_0) = \bar{p}(s_0), \quad e_1(s_0) = \bar{e}_1(s_0) \quad (51)$$

となるようにしておく。このとき $p = \bar{p}$ であることを示そう。そのためには

$$\frac{d}{ds}(p - \bar{p}) = 0 \quad (52)$$

すなわち

$$e_1 - \bar{e}_1 = 0 \quad (53)$$

を示せばよい。

各ベクトルの成分を

$$\boldsymbol{e}_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}) \quad (54)$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}) \quad (55)$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = (\bar{\xi}_{11}, \bar{\xi}_{12}) \quad (56)$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2 = (\bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}) \quad (57)$$

とおく。さらに

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{11} \\ \bar{\xi}_{21} \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{f}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{12} \\ \bar{\xi}_{22} \end{bmatrix} \quad (59)$$

とおく。このとき、行列

$$X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2] \quad (60)$$

は直交行列であるから、 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は正規直交基底である ($\bar{\boldsymbol{f}}_1, \bar{\boldsymbol{f}}_2$ も同様)。

さて、今示したいことは

$$e_1 - \bar{e}_1 = \mathbf{0} \tag{61}$$

であった。そのためには

$$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0, \quad |\boldsymbol{f}_2 - \bar{\boldsymbol{f}}_2|^2 = 0 \tag{62}$$

を示せばよい。

まず $|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$ を示す。ここで

$$|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = (\xi_{11} - \bar{\xi}_{11})^2 + (\xi_{21} - \bar{\xi}_{21})^2 \quad (63)$$

$$= \xi_{11}^2 + \xi_{21}^2 + \bar{\xi}_{11}^2 + \bar{\xi}_{21}^2 - 2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) \quad (64)$$

$$= 2 - 2(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) \quad (65)$$

なので

$$\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21} = 1 \quad (66)$$

を示せばよいが、 $s = s_0$ のときは

$$\xi_{11}(s_0)\bar{\xi}_{11}(s_0) + \xi_{21}(s_0)\bar{\xi}_{21}(s_0) = \xi_{11}(s_0)^2 + \xi_{21}(s_0)^2 \quad (67)$$

$$= |\boldsymbol{f}_1|^2 \quad (68)$$

$$= 1 \quad (69)$$

が成り立っているから、結局

$$\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) = 0 \quad (70)$$

を示せばよい。

前頁の考察で、 $|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$ を示すには

$$\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) = 0 \quad (71)$$

を示せばよいことがわかった。実際に s について微分してみると

$$\frac{d}{ds}(\xi_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{21}\bar{\xi}_{21}) = \xi'_{11}\bar{\xi}_{11} + \xi_{11}\bar{\xi}'_{11} + \xi'_{21}\bar{\xi}_{21} + \xi_{21}\bar{\xi}'_{21} \quad (72)$$

$$= \kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11} + \kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21} - \kappa\xi_{11}\bar{\xi}_{21} - \kappa\xi_{21}\bar{\xi}_{11} \quad (73)$$

$$= 0 \quad (74)$$

なので、示したかった $|\boldsymbol{f}_1 - \bar{\boldsymbol{f}}_1|^2 = 0$ がいえた。同様にして $|\boldsymbol{f}_2 - \bar{\boldsymbol{f}}_2|^2 = 0$ も示せる。

以上より「 $\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow$ 回転と平行移動で $\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}$ が重なる」がいえた。

□

7 一般のパラメータによる曲率の表式

弧長 s によるパラメータ表示を具体的に求めることは一般には難しい。そこで、一般のパラメータ t による曲率の表式を考える。

例2.2. 楕円の曲率

楕円のパラメータ表示

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (a > b > 0) \quad (75)$$

から曲率を求める。

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (76)$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (77)$$

$$= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \quad (78)$$

$$\therefore \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad (79)$$

また

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' \quad (80)$$

$$= \dot{\boldsymbol{p}} \frac{dt}{ds} \quad (81)$$

$$= (-a \sin t, b \cos t) \frac{dt}{ds} \quad (82)$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_2 = (-b \cos t, -a \sin t) \frac{dt}{ds} \quad (83)$$

である。

前頁で

$$\mathbf{e}_1 = (-a \sin t, b \cos t) \frac{dt}{ds} \quad (84)$$

$$\mathbf{e}_2 = (-b \cos t, -a \sin t) \frac{dt}{ds} \quad (85)$$

を得た。ここで

$$\mathbf{e}'_1 = \dot{\mathbf{e}}_1 \frac{dt}{ds} \quad (86)$$

$$= \left(\frac{-ab^2 \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}, \frac{-a^2 b \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right) \frac{dt}{ds} \quad (87)$$

$$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} (-b \cos t, -a \sin t) \frac{dt}{ds} \quad (88)$$

$$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \mathbf{e}_2 \quad (89)$$

なので

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \quad (90)$$

である。

8 問題

一般の曲線に対する $\kappa(t)$

問2.1

パラメータ表示 $p(t) = (x(t), y(t))$ で表される曲線の曲率は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \quad (91)$$

である。

証明. まず

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \quad (92)$$

$$= \frac{1}{|\dot{\mathbf{p}}|} \quad (93)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (94)$$

である。また

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}' \quad (95)$$

$$= \dot{\mathbf{p}} \frac{dt}{ds} \quad (96)$$

$$= (\dot{x}, \dot{y}) \frac{dt}{ds} \quad (97)$$

$$\therefore \mathbf{e}_2 = (-\dot{y}, \dot{x}) \frac{dt}{ds} \quad (98)$$

である。

ここで

$$\mathbf{e}'_1 = \dot{\mathbf{e}}_1 \frac{dt}{ds} \quad (99)$$

$$= \left(\frac{-(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \frac{(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right) \frac{dt}{ds} \quad (100)$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} (-\dot{y}, \dot{x}) \frac{dt}{ds} \quad (101)$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \mathbf{e}_2 \quad (102)$$

なので

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (103)$$

である。

□

問2.2

パラメータ表示 $p(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $r = F(\theta)$ で表される曲線の曲率は

$$\kappa = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right\}^{3/2}} \quad (104)$$

である。

証明.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \quad (105)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \quad (106)$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{d\theta} \sin \theta - r \cos \theta \quad (107)$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \quad (108)$$

より

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \quad (109)$$

$$\frac{dx}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\theta^2} \frac{dy}{d\theta} = r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \quad (110)$$

である。

前頁の結果

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad (111)$$

$$\frac{dx}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\theta^2} \frac{dy}{d\theta} = r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \quad (112)$$

を問2.1の式に代入して

$$\kappa = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}^{3/2}} \quad (113)$$

を得る。

□

問2.3

パラメータ表示 $p(t) = (\cosh t, \sinh t)$ で表される曲線の曲率は

$$\kappa = -\frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \quad (114)$$

である。

証明. 各成分を微分したものは

$$\dot{x} = \sinh t \quad (115)$$

$$\dot{y} = \cosh t \quad (116)$$

$$\ddot{x} = \cosh t \quad (117)$$

$$\ddot{y} = \sinh t \quad (118)$$

なので、問2.1の式より

$$\kappa = \frac{\sinh^2 t - \cosh^2 t}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{3/2}} \quad (119)$$

$$= -\frac{1}{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)^{3/2}} \quad (120)$$

$$= -\frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}} \quad (121)$$

である。

□

問2.4

$a > 0$ とする。パラメータ表示 $p(t) = \left(t, a \cosh \frac{t}{a}\right)$ で表される曲線の $0 \leq t \leq x$ における弧長は

$$s = a \sinh \frac{x}{a} \quad (122)$$

であり、弧長によるパラメータ表示は

$$p(s) = \left(a \sinh^{-1} \frac{s}{a}, \sqrt{a^2 + s^2}\right) \quad (123)$$

である。

証明. 弧長は

$$s = \int_0^x |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (124)$$

$$= \int_0^x \cosh t dt \quad (125)$$

$$= a \sinh \frac{x}{a} \quad (126)$$

である。よって

$$x = a \sinh^{-1} \frac{s}{a} \quad (127)$$

$$y = a \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} \quad (128)$$

$$= a \sqrt{1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2} \quad (129)$$

$$= \sqrt{a^2 + s^2} \quad (130)$$

である。

□

参考文献

- [1] 杉浦光夫、解析入門Ⅰ、東京大学出版会
- [2] 杉浦光夫、解析入門Ⅱ、東京大学出版会
- [3] 齋藤正彦、線型代数入門、東京大学出版会
- [4] 松本幸夫、多様体の基礎、東京大学出版会