微分積分学（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

目次

2　多変数関数の微分

2.8　テイラーの定理（2 変数 version）

2.8.1　連鎖律と数学的帰納法

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i}(y_1 - y_0)^i \tag{1}$$

が成立する．ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである．

この命題は，テイラーの定理（2 変数 version）の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です．

<u>**証明.**</u> $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく．まず $k = 1$ に対して (1) は明らかに成立する．つぎに $k\,(= 1, 2, \ldots, n)$ を任意にとり，(1) の成立を仮定する．(1) の両辺を t で微分して次を得る．

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} &(2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} &(3) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i &(4) \\
&= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i &(5) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i &(6)
\end{aligned}$$

したがって $k+1$ に対しても (1) が成立する．以上より，自然数 $k=1,2,\ldots,n+1$ に対して (1) が成立する． ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

行間 2. 点 (x_0,y_0) で f が極大，または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \tag{7}$$

である．ただし x_0,y_0,f は講義資料で定義されたものである．

この命題は「すぐにわかる」ものです．

<u>**証明.**</u> 点 (x_0,y_0) が f の極大点である場合を示す．極小点の場合も同様である．一変数関数 g,h を $g(x)=f(x,y_0)$, $h(y)=f(x_0,y)$ と定めると，g,h はそれぞれ点 x_0,y_0 で微分可能であって局所的に最大となる．したがって，共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0,y_0 はそれぞれ g,h の停留点である．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=h'(y_0)=0 \tag{8}$$

が従う． ■

2.9.2 A,B,C と a,b,c の関係性

行間 3. (x_0,y_0) に十分近い任意の点 (x,y) に対して

$$A>0 \text{ かつ } AC-B^2>0 \quad \Longrightarrow \quad \text{常に } a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{9}$$

が成立する．ただし x,y,x_0,y_0,A,B,C,a,b,c は講義資料で定義されたものである．

この命題は，A,B,C に関する大小関係がまわりの a,b,c に関しても成立するというものです．

<u>**証明.**</u> $(x,y)\to(x_0,y_0)$ で

$$a\to A>0 \tag{10}$$

$$ac-b^2\to AC-B^2>0 \tag{11}$$

なので，ある $\delta>0$ が存在して

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{12}$$

が成立する． ■

2.9.3 「$|t|$: 十分小」の意味

行間 4. 「$|t|$: 十分小」という制約は，f が C^2 級である領域の上だけを点 (x_0+t, y_0) が動くように課されている．

「$AC - B^2 < 0$ の場合」というスライドでは「$|t|$: 十分小」という制約が登場しますが，これは何のためにあるのか気になりませんか？ O 先生に尋ねたところ上のような回答でした．証明はとくにありません．

2.9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \tag{13}$$

とおくと次が成り立つ．

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \tag{14}$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである．

<u>証明.</u> φ についてのみ示す．ψ の場合も同様である．f が C^2 級関数であることに注意すれば，φ の導関数は

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1\end{aligned} \tag{16}$$

である．点 (x_0, y_0) は f の停留点なので，(15) より $\varphi'(0) = 0$ である．また，A, B, C の定義と $A = 0$ に注意すれば，(16) より

$$\varphi''(0) = 0 \cdot p_1^2 + 2B \cdot p_1 + C \cdot 1 = 2p_1 B + C \tag{17}$$

を得る． ■

3　1変数関数の積分

3.2　区分求積法

3.2.1　区分求積法の成立

行間 6. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\lim_{n\to\infty} |\triangle_n| = 0$ なる $[a,b]$ の分割の列 $\{\triangle_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を任意にとり，各 $\triangle_n$ の代表点集合 $\xi_{\mathbf{n}}$ を任意にとれば，

$$\lim_{n\to\infty} R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) = \int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

が成立する．

こちらはリーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです．

<u>**証明.**</u> $S = \int_a^b f(x)dx$ とおく．正数 ϵ を任意にとる．f はリーマン積分可能なので，ある正数 δ であって次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases} |\triangle| < \delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f : \triangle, \xi) - S| < \epsilon \tag{19}$$

このような δ をひとつとる．$\lim_{n\to\infty} |\triangle_n| = 0$ より，ある自然数 N であって次を満たすものが存在する．

$$n > N \Longrightarrow |\triangle_n| < \delta \tag{20}$$

このような N をひとつとる．自然数 $n > N$ を任意にとる．(20)，(19) より

$$|R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) - S| < \epsilon \tag{21}$$

が成立する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) = S = \int_a^b f(x)dx \tag{22}$$

が成立する． ■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること 2

行間 7. 区間 $[a,b]$ の *2* つの分割 $\triangle_1$ と $\triangle_2$ について，$\triangle_2$ が $\triangle_1$ の細分ならば

$$s(f:\triangle_1) \leq s(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_1) \tag{23}$$

が成立する．

この命題は「簡単なので略」されています．

証明. (23) の最も左の不等号についてのみ示す．分割 $\triangle_1$ の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える．区間 $[x_{j-1},x_j],[x_{j-1},x'],[x',x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j, m'_j, m'_{j+1} とおく．ここで，

$$m'_j,\, m'_{j+1} \geq m_j \tag{24}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} s(f:\triangle_2) - s(f:\triangle_1) &= m'_j(x'-x_{j-1}) + m'_{j+1}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) && (25)\\ &\geq m_j(x'-x_{j-1}) + m_j(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) && (26)\\ &= 0 && (27) \end{aligned}$$

が成立する． ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

行間 8. 関数 $f: D \to \mathbb{R}$ について，D が $\mathbb{R}$ の有界閉集合かつ f が連続であるならば，f は一様連続である．

これは証明が解析学基礎に投げられている定理です．

証明. 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*1] [*2]の定理 8 で証明されている． ■

[*1] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`
[*2] K 先生の資料は神です

3.4.3 リーマンの判定法

行間 9. 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，
$\forall\epsilon>0$ に対し，区間 $[a,b]$ のある分割 $\triangle$ が存在して $S(f:\triangle)-s(f:\triangle)<\epsilon$ となる．
$\iff f$ が区間 $[a,b]$ 上でリーマン積分可能

これは「ダルブーの定理」というものが必要です，として証明が省略されていますが，リーマンの判定法の証明のためにはダルブーの定理以外にも色々と補題を準備しておかないといけません．

証明. 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*3] で証明されている．以下，講義資料内の定理番号を用いて証明の流れを示す．

行間 9 の主張は直接的には定理 13「積分可能条件：ϵ-δ バージョン」として証明されるが，もともとのリーマン積分可能性の定義と定理 13 のいう積分可能条件との同値性は次のように示される．ただし，同値記号の下に書き添えてある定理は，その同値性を示すために用いられる定理である．

$$
\begin{aligned}
\text{定理 13 のいう積分可能条件} &\iff \text{定理 12 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 11}} \text{定理 6 のいう積分可能条件}\\
&\iff \text{定理 4 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 2,3}} \text{定義}
\end{aligned}
$$

■

3.5 リーマン積分の基本性質

3.5.1 リーマン積分の線型性 (1)

行間 10. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $f+g:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto f(x)+g(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \tag{28}$$

証明. 表記の簡略化のため $\alpha=\int_a^b f(x)dx$，$\beta=\int_a^b g(x)dx$ とおく．

[*3] https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

正数 ϵ を任意にとる．f, g がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases}|\triangle| < \delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad \begin{cases}|R(f:\triangle,\xi) - \alpha| < \epsilon/2 \\ |R(f:\triangle,\xi) - \beta| < \epsilon/2\end{cases}$$

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(f+g:\triangle,\xi) = R(f:\triangle,\xi) + R(g:\triangle,\xi) \tag{29}$$

なので

$$\begin{aligned}|R(f+g:\triangle,\xi) - (\alpha+\beta)| &= |R(f:\triangle,\xi) + R(g:\triangle,\xi) - (\alpha+\beta)| &(30)\\ &\leq |R(f:\triangle,\xi) - \alpha| + |R(g:\triangle,\xi) - \beta| &(31)\\ &< \epsilon &(32)\end{aligned}$$

が成立する．したがって (28) が成立する． ■

3.5.2 リーマン積分の線型性 (2)

行間 11. 関数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\forall c \in \mathbb{R}$ に対し，関数 $cf:[a,b] \to \mathbb{R}\ (x \mapsto cf(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

<u>証明.</u> 表記の簡略化のため $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ とおく．

$c \in \mathbb{R}$ を任意にとる．正数 ϵ を任意にとる．f がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases}|\triangle| < \delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f:\triangle,\xi) - \alpha| < \frac{\epsilon}{|c|+1}$$

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(cf:\triangle,\xi) = cR(f:\triangle,\xi) \tag{34}$$

なので

$$\begin{aligned}|R(cf:\triangle,\xi) - c\alpha| &= |cR(f:\triangle,\xi) - c\alpha| &(35)\\ &= |c||R(f:\triangle,\xi) - \alpha| &(36)\\ &\leq |c|\frac{\epsilon}{|c|+1} &(37)\\ &< \epsilon &(38)\end{aligned}$$

が成立する．したがって (33) が成立する． ■

3.5.3　積のリーマン積分可能性

行間 12. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $fg:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto f(x)g(x))$ もリーマン積分可能である．

この証明にはリーマンの判定法を利用します．

証明. まず

$$M=\max\left\{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\right\} \tag{39}$$

とおく[*4]．$M=0$ の場合は $f=g=0$ ゆえに明らかに主張が成立するから，$M>0$ の場合を考える．

正数 ϵ を任意にとる．f,g はリーマン積分可能なので，リーマンの判定法によれば $[a,b]$ の分割 $\triangle_f,\triangle_g$ が存在して

$$S(f:\triangle_f)-s(f:\triangle_f)<\frac{\epsilon}{2M}, \tag{40}$$

$$S(g:\triangle_g)-s(g:\triangle_g)<\frac{\epsilon}{2M} \tag{41}$$

が成立する．$\triangle_f,\triangle_g$ の分点をあわせた分割を $\triangle:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ とおく．

$\triangle$ に関する関数 fg の上限和と下限和の差を評価する．まず

$$\begin{aligned}
S(fg:\triangle)-s(fg:\triangle)&=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)g(x)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)g(x)(x_i-x_{i-1}) &(42)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)g(x)-f(y)g(y)|(x_i-x_{i-1}) &(43)
\end{aligned}$$

である（補題 1）．ここで

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-f(y)g(y)|&=|g(x)\{f(x)-f(y)\}+f(y)\{g(x)-g(y)\}| &(44)\\
&\le|g(x)||f(x)-f(y)|+|f(y)||g(x)-g(y)| &(45)\\
&\le M|f(x)-f(y)|+M|g(x)-g(y)| &(46)
\end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned}
((43)\text{式})&\le\sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\{M|f(x)-f(y)|+M|g(x)-g(y)|\}(x_i-x_{i-1}) &(47)\\
&=M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|(x_i-x_{i-1})+M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|g(x)-g(y)|(x_i-x_{i-1}) &(48)\\
&=M\{S(f:\triangle)-s(f:\triangle)\}+M\{S(g:\triangle)-s(g:\triangle)\} &(49)
\end{aligned}$$

[*4] f,g の有界性により上限が存在します．

が成立する．$\triangle$ は $\triangle_f, \triangle_g$ の細分であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
((49)\text{ 式}) &\leq M\{S(f:\triangle_f) - s(f:\triangle_f)\} + M\{S(g:\triangle_g) - s(g:\triangle_g)\} && (50)\\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} && (51)\\
&= \epsilon && (52)
\end{aligned}
$$

が成立する．すなわち

$$
S(fg:\triangle) - s(fg:\triangle) < \epsilon \tag{53}
$$

である．したがって，リーマンの判定法により fg はリーマン積分可能である． ■

補題 1. 有界な実関数 f と f の定義域の任意の部分集合 A に対して

$$
\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)| \tag{54}
$$

が成立する．

<u>**証明.**</u>

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) &= \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A}\{-f(x)\} && (55)\\
&= \sup_{x,y\in A}\{f(x) - f(y)\} && (56)\\
&= \sup_{x,y\in A}|f(x) - f(y)| && (57)
\end{aligned}
$$

■