微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

目次

2 多変数関数の微分

2.8 テイラーの定理（2 変数 version）

2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i}(y_1 - y_0)^i \tag{1}$$

が成立する．ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである．

この命題は，テイラーの定理（2 変数 version）の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより⋯」と議論が省略されている部分です．

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく．まず $k = 1$ に対して (1) は明らかに成立する．つぎに $k\,(= 1, 2, \ldots, n)$ を任意にとり，(1) の成立を仮定する．(1) の両辺を t で微分して次を得る．

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} && (2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} && (3) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (4) \\
&= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (5) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (6)
\end{aligned}$$

したがって $k+1$ に対しても (1) が成立する．以上より，自然数 $k=1,2,\ldots,n+1$ に対して (1) が成立する． ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

行間 2. 点 (x_0,y_0) で f が極大，または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \tag{7}$$

である．ただし x_0,y_0,f は講義資料で定義されたものである．

この命題は「すぐにわかる」ものです．

<u>**証明.**</u> 点 (x_0,y_0) が f の極大点である場合を示す．極小点の場合も同様である．一変数関数 g,h を $g(x)=f(x,y_0)$, $h(y)=f(x_0,y)$ と定めると，g,h はそれぞれ点 x_0,y_0 で微分可能であって局所的に最大となる．したがって，共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0,y_0 はそれぞれ g,h の停留点である．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=h'(y_0)=0 \tag{8}$$

が従う． ■

2.9.2 A,B,C と a,b,c の関係性

行間 3. (x_0,y_0) に十分近い任意の点 (x,y) に対して

$$A>0 \text{ かつ } AC-B^2>0 \quad \Longrightarrow \quad \text{常に } a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{9}$$

が成立する．ただし x,y,x_0,y_0,A,B,C,a,b,c は講義資料で定義されたものである．

この命題は，A,B,C に関する大小関係がまわりの a,b,c に関しても成立するというものです．

<u>**証明.**</u> $(x,y)\to(x_0,y_0)$ で

$$a \to A > 0 \tag{10}$$
$$ac-b^2 \to AC-B^2>0 \tag{11}$$

なので，ある $\delta>0$ が存在して

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{12}$$

が成立する． ■

2.9.3 「$|t|$: 十分小」の意味

行間 4. 「$|t|$: 十分小」という制約は，f が C^2 級である領域の上だけを点 (x_0+t, y_0) が動くように課されている．

「$AC-B^2<0$ の場合」というスライドでは「$|t|$: 十分小」という制約が登場しますが，これは何のためにあるのか気になりませんか？ O 先生に尋ねたところ上のような回答でした．証明はとくにありません．

2.9.4 「iii) $A=0$ のとき」の省略された計算

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t)=f(x_0+p_1t, y_0+t), \quad \psi(t)=f(x_0+p_2t, y_0+t) \tag{13}$$

とおくと次が成り立つ．

$$\varphi'(0)=\psi'(0)=0, \quad \varphi''(0)=2p_1B+C, \quad \psi''(0)=2p_2B+C \tag{14}$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである．

<u>**証明.**</u> φ についてのみ示す．ψ の場合も同様である．f が C^2 級関数であることに注意すれば，φ の導関数は

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot 1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t)=&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1^2\\&+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot 1\end{aligned} \tag{16}$$

である．点 (x_0, y_0) は f の停留点なので，(15) より $\varphi'(0)=0$ である．また，A, B, C の定義と $A=0$ に注意すれば，(16) より

$$\varphi''(0)=0\cdot p_1^2+2B\cdot p_1+C\cdot 1=2p_1B+C \tag{17}$$

を得る． ■

3　1 変数関数の積分

3.2　区分求積法

3.2.1　区分求積法の成立

行間 6. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\lim_{n\to\infty}|\triangle_n|=0$ なる $[a,b]$ の分割の列 $\{\triangle_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を任意にとり，各 $\triangle_n$ の代表点集合 $\xi_{\mathbf{n}}$ を任意にとれば，

$$\lim_{n\to\infty}R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})=\int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

が成立する．

こちらはリーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです．

<u>**証明.**</u> $S=\int_a^b f(x)dx$ とおく．正数 ϵ を任意にとる．f はリーマン積分可能なので，ある正数 δ であって次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases}|\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f:\triangle,\xi)-S|<\epsilon \tag{19}$$

このような δ をひとつとる．$\lim_{n\to\infty}|\triangle_n|=0$ より，ある自然数 N であって次を満たすものが存在する．

$$n>N\Longrightarrow|\triangle_n|<\delta \tag{20}$$

このような N をひとつとる．自然数 $n>N$ を任意にとる．(20)，(19) より

$$|R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})-S|<\epsilon \tag{21}$$

が成立する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})=S=\int_a^b f(x)dx \tag{22}$$

が成立する．■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること 2

行間 7. 区間 $[a,b]$ の *2* つの分割 $\triangle_1$ と $\triangle_2$ について，$\triangle_2$ が $\triangle_1$ の細分ならば

$$s(f:\triangle_1) \leq s(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_1) \tag{23}$$

が成立する．

この命題は「簡単なので略」されています．

<u>証明.</u> (23) の最も左の不等号についてのみ示す．分割 $\triangle_1$ の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える．区間 $[x_{j-1},x_j],[x_{j-1},x'],[x',x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j,m'_j,m'_{j+1} とおく．ここで，

$$m'_j,\, m'_{j+1} \geq m_j \tag{24}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} s(f:\triangle_2)-s(f:\triangle_1) &= m'_j(x'-x_{j-1})+m'_{j+1}(x_j-x')-m_j(x_j-x_{j-1}) &(25)\\ &\geq m_j(x'-x_{j-1})+m_j(x_j-x')-m_j(x_j-x_{j-1}) &(26)\\ &= 0 &(27)\end{aligned}$$

が成立する． ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

行間 8. 関数 $f:D\to\mathbb{R}$ について，D が $\mathbb{R}$ の有界閉集合かつ f が連続であるならば，f は一様連続である．

これは証明が解析学基礎に投げられている定理ですが，数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*1] [*2]の定理 8 で証明されていますので，証明はそちらに譲ります．

[*1] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`
[*2] K 先生の資料は神です

3.4.3 リーマンの判定法

行間 9. 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，
$\forall\epsilon>0$ に対し，区間 $[a,b]$ のある分割 $\triangle$ が存在して $S(f:\triangle)-s(f:\triangle)<\epsilon$ となる．
$\iff f$ が区間 $[a,b]$ 上でリーマン積分可能

これは「ダルブーの定理」というものが必要です，として証明が省略されていますが，リーマンの判定法の証明のためにはダルブーの定理以外にも色々と補題を準備しておかないといけません．

この定理は数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*3] で証明されていますので，証明はそちらに譲ります．以下，講義資料内の定理番号を用いて証明の流れを示します．

行間 14 の主張は直接的には定理 13「積分可能条件：ϵ-δ バージョン」として証明されますが，もともとのリーマン積分可能性の定義と定理 13 のいう積分可能条件との同値性は次のように示されます．ただし，同値記号の下に書き添えてある定理は，その同値性を示すために用いられる定理です．

$$
\begin{aligned}
\text{定理 13 のいう積分可能条件} &\iff \text{定理 12 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 11}} \text{定理 6 のいう積分可能条件}\\
&\iff \text{定理 4 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 2,3}} \text{定義}
\end{aligned}
$$

3.5 リーマン積分の基本性質

3.5.1 リーマン積分の線型性 (1)

行間 10. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $f+g:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto f(x)+g(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \tag{28}$$

<u>**証明.**</u> 表記の簡略化のため $\alpha=\int_a^b f(x)dx$，$\beta=\int_a^b g(x)dx$ とおく．

正数 ϵ を任意にとる．f,g がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases}|\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle\\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad\text{に対し}\quad \begin{cases}|R(f:\triangle,\xi)-\alpha|<\epsilon/2\\ |R(f:\triangle,\xi)-\beta|<\epsilon/2\end{cases}$$

[*3] https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(f+g:\triangle,\xi)=R(f:\triangle,\xi)+R(g:\triangle,\xi) \tag{29}$$

なので

$$\begin{align}|R(f+g:\triangle,\xi)-(\alpha+\beta)| &= |R(f:\triangle,\xi)+R(g:\triangle,\xi)-(\alpha+\beta)| \tag{30}\\ &\leq |R(f:\triangle,\xi)-\alpha|+|R(g:\triangle,\xi)-\beta| \tag{31}\\ &< \epsilon \tag{32}\end{align}$$

が成立する．したがって (28) が成立する． ■

3.5.2 リーマン積分の線型性 (2)

行間 11. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\forall c\in\mathbb{R}$ に対し，関数 $cf:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto cf(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

<u>**証明.**</u> 表記の簡略化のため $\alpha=\int_a^b f(x)dx$ とおく．

$c\in\mathbb{R}$ を任意にとる．正数 ϵ を任意にとる．f がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases}|\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f:\triangle,\xi)-\alpha|<\frac{\epsilon}{|c|+1}$$

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(cf:\triangle,\xi)=cR(f:\triangle,\xi) \tag{34}$$

なので

$$\begin{align}|R(cf:\triangle,\xi)-c\alpha| &= |cR(f:\triangle,\xi)-c\alpha| \tag{35}\\ &= |c||R(f:\triangle,\xi)-\alpha| \tag{36}\\ &\leq |c|\frac{\epsilon}{|c|+1} \tag{37}\\ &< \epsilon \tag{38}\end{align}$$

が成立する．したがって (33) が成立する． ■

3.5.3 積のリーマン積分可能性

行間 12. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $fg:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto f(x)g(x))$ もリーマン積分可能である．

この証明にはリーマンの判定法を利用します．

証明． まず

$$M = \max\left\{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\right\} \tag{39}$$

とおく[*4]．$M=0$ の場合は $f=g=0$ ゆえに明らかに主張が成立するから，$M>0$ の場合を考える．

正数 ϵ を任意にとる．f,g はリーマン積分可能なので，リーマンの判定法によれば $[a,b]$ の分割 $\triangle_f, \triangle_g$ が存在して

$$S(f:\triangle_f) - s(f:\triangle_f) < \frac{\epsilon}{2M}, \tag{40}$$

$$S(g:\triangle_g) - s(g:\triangle_g) < \frac{\epsilon}{2M} \tag{41}$$

が成立する．$\triangle_f, \triangle_g$ の分点をあわせた分割を $\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とおく．

$\triangle$ に関する関数 fg の上限和と下限和の差を評価する．まず

$$S(fg:\triangle) - s(fg:\triangle) = \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) \tag{42}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|(x_i - x_{i-1}) \tag{43}$$

である（補題 1）．ここで

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |g(x)\{f(x)-f(y)\} + f(y)\{g(x)-g(y)\}| \tag{44}$$

$$\leq |g(x)||f(x)-f(y)| + |f(y)||g(x)-g(y)| \tag{45}$$

$$\leq M|f(x)-f(y)| + M|g(x)-g(y)| \tag{46}$$

により

$$((43)\text{式}) \leq \sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\{M|f(x)-f(y)| + M|g(x)-g(y)|\}(x_i - x_{i-1}) \tag{47}$$

$$= M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|(x_i - x_{i-1}) + M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|g(x)-g(y)|(x_i - x_{i-1}) \tag{48}$$

$$= M\{S(f:\triangle) - s(f:\triangle)\} + M\{S(g:\triangle) - s(g:\triangle)\} \tag{49}$$

が成立する．$\triangle$ は $\triangle_f, \triangle_g$ の細分であることに注意すれば

$$((49)\ \text{式}) \leq M\{S(f:\triangle_f) - s(f:\triangle_f)\} + M\{S(g:\triangle_g) - s(g:\triangle_g)\} \tag{50}$$

$$\leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} \tag{51}$$

$$= \epsilon \tag{52}$$

が成立する．すなわち

$$S(fg:\triangle) - s(fg:\triangle) < \epsilon \tag{53}$$

である．したがって，リーマンの判定法により fg はリーマン積分可能である． ■

[*4] f,g の有界性により上限が存在します．

補題 1. 有界な実関数 f と f の定義域の任意の部分集合 A に対して

$$\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x,y\in A} |f(x)-f(y)| \tag{54}$$

が成立する.

証明.

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) &= \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A}\{-f(x)\} &(55)\\ &= \sup_{x,y\in A}\{f(x)-f(y)\} &(56)\\ &= \sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)| &(57)\end{aligned}$$

■

3.5.4　商のリーマン積分可能性

補題 2. 関数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき,

$$\text{関数 } \frac{1}{g}:[a,b]\to\mathbb{R}\ \left(x\mapsto\frac{1}{g(x)}\right) \text{ が有界関数} \tag{58}$$

ならば, 関数 $\dfrac{1}{g}:[a,b]\to\mathbb{R}\ \left(x\mapsto\dfrac{1}{g(x)}\right)$ もリーマン積分可能である.

まずひとつ補題を証明しておきます.

証明. (58) により $M=\sup_{x\in[a,b]}\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|$ なる実数 M が存在する. このような M をひとつとる. 補題 1 にも注意すれば

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]}\frac{1}{g(x)} - \inf_{x\in[a,b]}\frac{1}{g(x)} &= \sup_{x,y\in[a,b]}\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right| &(59)\\ &= \sup_{x,y\in[a,b]}\left|\frac{1}{g(x)}\right|\left|\frac{1}{g(y)}\right||g(x)-g(y)| &(60)\\ &\le M^2\sup_{x,y\in[a,b]}|g(x)-g(y)| &(61)\\ &= M^2\left\{\sup_{x\in[a,b]}g(x)-\inf_{x\in[a,b]}g(x)\right\} &(62)\\ & &(63)\end{aligned}$$

であるから, 任意の分割 $\triangle$ に対して

$$S\left(\frac{1}{g}:\triangle\right) - s\left(\frac{1}{g}:\triangle\right) \le M^2\left\{S(g:\triangle)-s(g:\triangle)\right\} \tag{64}$$

が成立する．正数 ϵ を任意にとる．g はリーマン積分可能であるから，リーマンの判定法によれば，ある分割 $\triangle$ が存在して

$$((64)\text{ の右辺}) \leq \epsilon \tag{65}$$

が成立する．よって

$$((64)\text{ の左辺}) \leq \epsilon \tag{66}$$

が成立する．したがって，リーマンの判定法により $\dfrac{1}{g}$ はリーマン積分可能である． ■

行間 13. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \text{に対し} \quad g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \dfrac{1}{g} : [a,b] \to \mathbb{R} \left(x \mapsto \dfrac{1}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \tag{67}$$

ならば，関数 $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

講義資料のもともとの定理は $\dfrac{f}{g}$ の有界性を前提としていますが，かわりに $\dfrac{1}{g}$ の有界性を前提としたものを先に示しておきましょう．この証明には補題 2 を使います．

<u>**証明.**</u> 補題 2 により $\dfrac{1}{g}$ はリーマン積分可能なので，積のリーマン積分可能性により $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である． ■

行間 14. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \text{に対し} \quad g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \dfrac{f}{g} : [a,b] \to \mathbb{R} \left(x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \tag{68}$$

ならば，関数 $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

つぎに，講義資料のもともとの定理を示します．できれば行間 13 を利用したいところですが，残念ながら行間 14 の前提を満たしても行間 13 の前提を満たすとは限らない[*5] ので利用できません．

[*5] 有界閉区間 $[0,1]$ 上で f, g を次のように定めたものはそのような例のひとつです．

$$f(x) = x \tag{69}$$

$$g(x) = x(x \neq 0), 1(x = 0) \tag{70}$$

そこで，この証明にはルベーグの可積分条件[*6] を使います．零集合であることとルベーグ測度が 0 であることの同値性や，測度の基本的性質は認めるものとします．

<u>**証明.**</u> μ をルベーグ測度とする．$f, g, \dfrac{f}{g}$ の不連続点全体の集合をそれぞれ D, D_f, D_g とおく．$\dfrac{f}{g}$ がリーマン積分不可能であると仮定して矛盾を導く．

$\dfrac{f}{g}$ は有界関数なので，ルベーグの可積分条件によれば $\mu(D) > 0$ である．一方 f, g はリーマン可積分なので $\mu(D_f) = \mu(D_g) = 0$ であり，したがって $\mu(D \cap D_f) = \mu(D \cap D_g) = 0$ である[*7]．

ここで，D の点 x であって g が x で連続であるようなもの全体の集合，すなわち $D \setminus (D_g \cap D)$ について

$$\begin{aligned}\mu(D \setminus (D_g \cap D)) &= \mu(D) - \mu(D_g \cap D) \quad (\because D_g \cap D \subset D) &(71)\\ &= \mu(D) \quad (\because \mu(D \cap D_g) = 0) &(72)\\ &> 0 &(73)\end{aligned}$$

が成立する．一方，D の任意の点 x に対して

$$g \text{ が } x \text{ で連続ならば } f = \frac{f}{g} g \text{ は } x \text{ で不連続である} \tag{74}$$

が成立するから，$D \setminus (D_g \cap D) \subset D_f \cap D$ である．したがって $\mu(D_f) \geq \mu(D_f \cap D) \geq \mu(D \setminus (D_g \cap D)) > 0$ である．f は有界関数であることに注意すれば，ルベーグの可積分条件によって f はリーマン積分不可能であるという矛盾を得る． ■

3.5.5 被積分関数の大小と積分値の大小

まずひとつ補題を証明しておきます．

補題 3. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，

$$\forall x \in [a, b] \text{ に対して } f(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{75}$$

が成立する．とくに f が連続であるとすると，右辺の等号が成立するのは f の値が恒等的に 0 のとき，またそのときのみである．

<u>**証明.**</u> 任意の分割 $\triangle$ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$R(f : \triangle, \xi) \geq \inf_{x \in [a,b]} f(x)(b - a) \tag{76}$$

[*6] 杉浦 光夫『解析入門 I』東京大学出版会〈基礎数学 2〉p.266

[*7] $D \cap D_f \subset D_f$ なので，測度の単調性より $\mu(D \cap D_f) \leq \mu(D_f)$ が成立します．このことと，測度の非負性および $\mu(D_f) = 0$ より $\mu(D \cap D_f) = 0$ が従います．D_g についても同様です．

であり，$\forall x \in [a,b]$ に対して $f(x) \geq 0$ であると仮定すると (76) の右辺は 0 以上である．したがって

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{77}$$

である．

以下，f は連続であるとする．f の値が恒等的に 0 ならば，明らかに

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \tag{78}$$

である．一方，ある $c \in [a,b]$ が存在して $f(c) > 0$ であると仮定する．このような c をひとつとる．f の連続性により，ある正数 δ が存在して，閉区間 $I = [c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ 上で f は常に正の値をとる．よって f の I 上での積分値は正である．また，この証明の前半の議論によれば f の $[a,b] \setminus I$ 上での積分値は非負である．これらを足し合わせることにより

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{79}$$

が従う． ■

行間 15. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\forall x \in [a,b] \text{ に対して } f(x) \leq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{80}$$

が成立する．とくに f, g が連続であるとすると，右辺の等号が成立するのは f, g が恒等的に等しいとき，またそのときのみである．

<u>**証明.**</u> 補題 3 とリーマン積分の線型性からすぐにわかる． ■

3.5.6 積分範囲の分割

行間 16. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$a < c < b$ となる任意の実数 c に対して，関数 f は $[a,b]$ 上でも $[c,b]$ 上でもリーマン積分可能で，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{81}$$

<u>**証明.**</u> f はリーマン積分可能なので，任意の正数 ϵ に対して，ある $[a,b]$ の分割 $\triangle$ が存在して

$$S(f : \triangle) - s(f : \triangle) < \epsilon \tag{82}$$

が成立する．$\triangle$ の分点に c を追加したものを $\triangle'$ とおくと，$\triangle'$ は $\triangle$ の細分なので

$$S(f : \triangle') - s(f : \triangle') < \epsilon \tag{83}$$

が成立する．$\triangle'$ の $[a,c]$ の部分，$[c,b]$ の部分をそれぞれ $\triangle_1,\triangle_2$ とおく．$\triangle_1$ について

$$\begin{aligned} S(f:\triangle_1)-s(f:\triangle_1) &\leq S(f:\triangle_1)-s(f:\triangle_1)+S(f:\triangle_2)-s(f:\triangle_2) && (84)\\ &\leq S(f:\triangle')-s(f:\triangle') && (85)\\ &< \epsilon && (86)\end{aligned}$$

が成立するから，リーマンの判定法によれば f は $[a,c]$ 上でリーマン積分可能である．$\triangle_2$ についても同様の議論を行うことによって，f は $[c,b]$ 上でリーマン積分可能である．

さて，f は区間 $[a,c],[c,b]$ 上でリーマン積分可能であるから，リーマンの判定法によれば，それぞれの区間の分割の列 $\{\triangle_{1,n}\},\{\triangle_{2,n}\}$ であって $n\to\infty$ で幅が 0 に収束するようなものが存在する．このような $\{\triangle_{1,n}\},\{\triangle_{2,n}\}$ をひとつずつとり，$\triangle_{1,n}$ と $\triangle_{2,n}$ を合わせたものを $\triangle_n$ とおけば，$\{\triangle_n\}$ は $[a,b]$ の分割の列であって，$n\to\infty$ で幅が 0 に収束する．ここで

$$S(f:\triangle_n)=S(f:\triangle_{1,n})+S(f:\triangle_{2,n}) \tag{87}$$

であるから，数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*8] の定理 3 より，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{88}$$

が成立する． ■

3.5.7 積分の平均値の定理

行間 17. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，f の上限，下限をそれぞれ M,m とすると，

$$m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M \tag{89}$$

が成立する．とくに f が連続ならば，$a<c<b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c) \tag{90}$$

が成立する．

証明. 任意の分割 $\triangle$ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$m(b-a)\leq R(f:\triangle,\xi)\leq M(b-a) \tag{91}$$

であるから，

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a) \tag{92}$$

すなわち (89) が成立する．

[*8] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`

以下，f が連続であるとする．最大値の定理により m, M はそれぞれ f の最小値，最大値に等しい．

まず $m = M$ の場合を考える．これは f が定数関数ということであるから，$a < c < b$ なる任意の c に対して $f(c) = m$ である．一方，(89) によれば

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{93}$$

である．したがって，$a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{94}$$

が成立する．

つぎに $m < M$ の場合を考える．このとき，f は恒等的には $f(x) = m$ でも $f(x) = M$ でもないから，行間 15 より

$$m(b-a) = \int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx = M(b-a) \tag{95}$$

すなわち

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M \tag{96}$$

である．一方，中間値の定理によれば，$m < y < M$ なる任意の y に対して，$y = f(c), a < c < b$ なる c が存在する．したがって，$a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{97}$$

が成立する． ■