微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です。

Contents

8　テイラーの定理（2 変数 version）

8.1　連鎖律と数学的帰納法

次の命題は、テイラーの定理（2 変数 version）の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です。

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i}(y_1 - y_0)^i \tag{1}$$

が成立する。ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである。

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく。まず $k = 1$ に対して eq. (1) は明らかに成立する。つぎに $k\,(= 1, 2, \ldots, n)$ を任意にとり、eq. (1) の成立を仮定する。eq. (1) の両辺を t で微分して次を得る。

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \Bigg\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \Bigg\} && (2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} && (3) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (4) \\
&= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (5) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (6)
\end{aligned}$$

したがって $k+1$ に対しても eq. (1) が成立する。以上より、自然数 $k=1,2,\dots,n+1$ に対して eq. (1) が成立する。 ■

9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

9.1 極値を取るための必要条件

次の命題は「すぐにわかる」ものです。

行間 2. 点 (x_0,y_0) で f が極大、または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \tag{7}$$

である。ただし x_0,y_0,f は講義資料で定義されたものである。

証明. 点 (x_0,y_0) が f の極大点である場合を示す。極小点の場合も同様である。一変数関数 g,h を $g(x)=f(x,y_0)$, $h(y)=f(x_0,y)$ と定めると、g,h はそれぞれ点 x_0,y_0 で微分可能であって局所的に最大となる。したがって、共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0,y_0 はそれぞれ g,h の停留点である。よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=h'(y_0)=0 \tag{8}$$

が従う。 ■

9.2 A,B,C と a,b,c の関係性

次の命題は、A,B,C に関する大小関係がまわりの a,b,c に関しても成立するというものです。

行間 3. (x_0,y_0) に十分近い任意の点 (x,y) に対して

$$A>0 \text{ かつ } AC-B^2>0 \quad \Longrightarrow \quad \text{常に } a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{9}$$

が成立する。ただし x,y,x_0,y_0,A,B,C,a,b,c は講義資料で定義されたものである。

証明. $(x,y)\to(x_0,y_0)$ で

$$a \to A > 0 \tag{10}$$

$$ac-b^2 \to AC-B^2>0 \tag{11}$$

なので、ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \tag{12}$$

が成立する。 ■

9.3 「$|t|$: 十分小」の意味

ところで「$AC - B^2 < 0$ の場合」というスライドでは「$|t|$: 十分小」という制約が登場しますが、これは何のためにあるのか気になりませんか？ O 先生に尋ねたところ次のような回答でした。証明はとくにありません。

行間 4. 「$|t|$: 十分小」という制約は、f が C^2 級である領域の上を点 (x_0+t, y_0) が動くように課されている。

9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算）

以下の計算が省略されています。

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \tag{13}$$

とおくと次が成り立つ。

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \tag{14}$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである。

証明. φ についてのみ示す。ψ の場合も同様である。 ■