微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

Contents

2 多変数関数の微分 **2**
2.8 テイラーの定理（2 変数 version） 2
2.8.1 連鎖律と数学的帰納法 2
2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小 3
2.9.1 極値を取るための必要条件 3
2.9.2 A, B, C と a, b, c の関係性 4
2.9.3 「$|t|$: 十分小」の意味 4
2.9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算 5

3 1 変数関数の積分 **5**
3.2 区分求積法 5
3.2.1 区分求積法の成立 5
3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性 6
3.4.1 すぐに分かること② 6
3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性 7

2 多変数関数の微分

2.8 テイラーの定理（2 変数 version）

2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

次の命題は，テイラーの定理（2 変数 version）の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です．

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i} (y_1 - y_0)^i \tag{1}$$

が成立する．ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである．

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく．まず $k = 1$ に対して eq. (1) は明らかに成立する．つぎに $k\,(= 1, 2, \ldots, n)$ を任意にとり，eq. (1) の成立を仮定する．

eq. (1) の両辺を t で微分して次を得る．

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} \qquad (2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \qquad (3) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \qquad (4) \\
&= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \qquad (5) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \qquad (6)
\end{aligned}$$

したがって $k+1$ に対しても eq. (1) が成立する．以上より，自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して eq. (1) が成立する． ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

次の命題は「すぐにわかる」ものです．

行間 2. 点 (x_0, y_0) で f が極大，または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \qquad (7)$$

である．ただし x_0, y_0, f は講義資料で定義されたものである．

証明. 点 (x_0, y_0) が f の極大点である場合を示す．極小点の場合も同様である．一変数関数 g, h を $g(x) = f(x, y_0)$, $h(y) = f(x_0, y)$ と定めると，g, h はそれぞれ点 x_0, y_0 で微分可能であって局所的に最大となる．したがって，共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0, y_0 はそれぞれ g, h の停留点である．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0 \tag{8}$$

が従う． ■

2.9.2 A, B, C と a, b, c の関係性

次の命題は，A, B, C に関する大小関係がまわりの a, b, c に関しても成立するというものです．

行間 3. (x_0, y_0) に十分近い任意の点 (x, y) に対して

$$A > 0 \text{ かつ } AC - B^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{常に } a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \tag{9}$$

が成立する．ただし $x, y, x_0, y_0, A, B, C, a, b, c$ は講義資料で定義されたものである．

証明. $(x, y) \to (x_0, y_0)$ で

$$a \to A > 0 \tag{10}$$

$$ac - b^2 \to AC - B^2 > 0 \tag{11}$$

なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \tag{12}$$

が成立する． ■

2.9.3 「$|t|$: 十分小」の意味

ところで「$AC - B^2 < 0$ の場合」というスライドでは「$|t|$: 十分小」という制約が登場しますが，これは何のためにあるのか気になりませんか？ O 先生に尋ねたところ次のような回答でした．証明はとくにありません．

行間 4. 「$|t|$: 十分小」という制約は，f が C^2 級である領域の上を点 (x_0+t, y_0) が動くように課されている．

2.9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算

以下の計算が省略されています．

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \tag{13}$$

とおくと次が成り立つ．

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \tag{14}$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである．

証明. φ についてのみ示す．ψ の場合も同様である．f が C^2 級関数であることに注意すれば，φ の導関数は

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1\end{aligned} \tag{16}$$

である．点 (x_0, y_0) は f の停留点なので，eq. (15) より $\varphi'(0) = 0$ である．また，A, B, C の定義と $A = 0$ に注意すれば，eq. (16) より

$$\varphi''(0) = 0 \cdot p_1^2 + 2B \cdot p_1 + C \cdot 1 = 2p_1 B + C \tag{17}$$

を得る． ■

3 1変数関数の積分

3.2 区分求積法

3.2.1 区分求積法の成立

リーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです．

行間 6. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\lim_{n\to\infty} |\triangle_n| = 0$ なる $[a, b]$ の分割の列 $\{\triangle_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を任意にとり，各 $\triangle_n$ の代表点集合 $\xi_{\mathbf{n}}$ を任意にとれば，

$$\lim_{n\to\infty} R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) = \int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

が成立する．

<u>証明.</u> $S = \int_a^b f(x)dx$ とおく．正数 ϵ を任意にとる．f はリーマン積分可能なので，ある正数 δ であって次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases} |\triangle| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f : \triangle, \xi) - S| < \epsilon \tag{19}$$

このような δ をひとつとる．$\lim_{n\to\infty} |\triangle_n| = 0$ より，ある自然数 N であって次を満たすものが存在する．

$$n > N \Longrightarrow |\triangle_n| < \delta \tag{20}$$

このような N をひとつとる．自然数 $n > N$ を任意にとる．eq. (20)，eq. (19) より

$$|R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) - S| < \epsilon \tag{21}$$

が成立する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) = S = \int_a^b f(x)dx \tag{22}$$

が成立する． ■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること②

次の命題は「簡単なので略」されています．

行間 7. 区間 $[a, b]$ の *2* つの分割 $\triangle_1$ と $\triangle_2$ について，$\triangle_2$ が $\triangle_1$ の細分ならば

$$s(f : \triangle_1) \le s(f : \triangle_2) \le S(f : \triangle_2) \le S(f : \triangle_1) \tag{23}$$

が成立する．

<u>証明.</u> eq. (23) の最も左の不等号についてのみ示す．分割 $\triangle_1$ の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える．区間 $[x_{j-1}, x_j], [x_{j-1}, x'], [x', x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j, m'_j, m'_{j+1} とおく．ここで，

$$m'_j,\, m'_{j+1} \geq m_j \tag{24}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} s(f:\triangle_2) - s(f:\triangle_1) &= m'_j(x' - x_{j-1}) + m'_{j+1}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) && (25) \\ &\geq m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) && (26) \\ &= 0 && (27) \end{aligned}$$

が成立する． ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

証明が解析学基礎に投げられている定理です．

行間 8. 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ について，D が $\mathbb{R}$ の有界閉集合かつ f が連続であるならば，f は一様連続である．

<u>証明.</u> 余裕があったら追記します． ■