

微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

Contents

2	多変数関数の微分	2
2.8	テイラーの定理 (2 変数 version)	2
2.8.1	連鎖律と数学的帰納法	2
2.9	C^2 級の 2 変数関数の極大・極小	3
2.9.1	極値を取るための必要条件	3
2.9.2	A, B, C と a, b, c の関係性	4
2.9.3	「 $ t $: 十分小」の意味	4
2.9.4	「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算	5
3	1 変数関数の積分	5
3.2	区分求積法	5
3.2.1	区分求積法の成立	5
3.4	有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性	6
3.4.1	すぐに分かること②	6
3.4.2	有界閉区間上の連続関数の一様連続性	7

2 多変数関数の微分

2.8 テイラーの定理 (2 変数 version)

2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

次の命題は、テイラーの定理 (2 変数 version) の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です。

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \dots, n + 1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k {}^kC_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i} (y_1 - y_0)^i \quad (1)$$

が成立する。ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである。

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく。まず $k = 1$ に対して eq. (1) は明らかに成立する。つぎに $k (= 1, 2, \dots, n)$ を任意にとり, eq. (1) の成立を仮定する。

eq. (1) の両辺を t で微分して次を得る.

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^k {}_k C_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}_k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=0}^k {}_k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}_k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k C_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k {}_{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \quad (6)$$

したがって $k+1$ に対しても eq. (1) が成立する. 以上より, 自然数 $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して eq. (1) が成立する. ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

次の命題は「すぐにわかる」ものです.

行間 2. 点 (x_0, y_0) で f が極大, または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (7)$$

である. ただし x_0, y_0, f は講義資料で定義されたものである.

証明. 点 (x_0, y_0) が f の極大点である場合を示す. 極小点の場合も同様である. 一変数関数 g, h を $g(x) = f(x, y_0)$, $h(y) = f(x_0, y)$ と定めると, g, h はそれぞれ点 x_0, y_0 で微分可能であって局所的に最大となる. したがって, 共通資料第4章命題2より点 x_0, y_0 はそれぞれ g, h の停留点である. よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0 \quad (8)$$

が従う. ■

2.9.2 A, B, C と a, b, c の関係性

次の命題は, A, B, C に関する大小関係がまわりの a, b, c に関しても成立するというものです.

行間 3. (x_0, y_0) に十分近い任意の点 (x, y) に対して

$$A > 0 \text{ かつ } AC - B^2 > 0 \implies \text{常に } a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (9)$$

が成立する. ただし $x, y, x_0, y_0, A, B, C, a, b, c$ は講義資料で定義されたものである.

証明. $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ で

$$a \rightarrow A > 0 \quad (10)$$

$$ac - b^2 \rightarrow AC - B^2 > 0 \quad (11)$$

なので, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (12)$$

が成立する. ■

2.9.3 「 $|t|$: 十分小」の意味

ところで「 $AC - B^2 < 0$ の場合」というスライドでは「 $|t|$: 十分小」という制約が登場しますが, これは何のためにあるのか気になりますか? O 先生に尋ねたところ次のような回答でした. 証明はとくにありません.

行間 4. 「 $|t|$: 十分小」という制約は, f が C^2 級である領域の上だけを点 $(x_0 + t, y_0)$ が動くように課されている.

2.9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算

以下の計算が省略されています。

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \quad (13)$$

とおくと次が成り立つ。

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \quad (14)$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである。

証明. φ についてのみ示す。 ψ の場合も同様である。 f が C^2 級関数であることに注意すれば、 φ の導関数は

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \end{aligned} \quad (16)$$

である。点 (x_0, y_0) は f の停留点なので、eq. (15) より $\varphi'(0) = 0$ である。また、 A, B, C の定義と $A = 0$ に注意すれば、eq. (16) より

$$\varphi''(0) = 0 \cdot p_1^2 + 2B \cdot p_1 + C \cdot 1 = 2p_1 B + C \quad (17)$$

を得る。 ■

3 1 変数関数の積分

3.2 区分求積法

3.2.1 区分求積法の成立

リーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです。

行間 6. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ なる $[a, b]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\dots}$ を任意にとり, 各 Δ_n の代表点集合 ξ_n を任意にとれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = \int_a^b f(x) dx \quad (18)$$

が成立する.

証明. $S = \int_a^b f(x) dx$ とおく. 正数 ϵ を任意にとる. f はリーマン積分可能なので, ある正数 δ であって次を満たすものが存在する.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \text{ に対し } |R(f : \Delta, \xi) - S| < \epsilon \quad (19)$$

このような δ をひとつとる. $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ より, ある自然数 N であって次を満たすものが存在する.

$$n > N \implies |\Delta_n| < \delta \quad (20)$$

このような N をひとつとる. 自然数 $n > N$ を任意にとる. eq. (20), eq. (19) より

$$|R(f : \Delta_n, \xi_n) - S| < \epsilon \quad (21)$$

が成立する. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = S = \int_a^b f(x) dx \quad (22)$$

が成立する. ■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること②

次の命題は「簡単なので略」されています.

行間 7. 区間 $[a, b]$ の 2 つの分割 Δ_1 と Δ_2 について, Δ_2 が Δ_1 の細分ならば

$$s(f : \Delta_1) \leq s(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_1) \quad (23)$$

が成立する.

証明. eq. (23) の最も左の不等号についてのみ示す．分割 Δ_1 の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える．区間 $[x_{j-1}, x_j], [x_{j-1}, x'], [x', x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j, m'_j, m'_{j+1} とおく．ここで,

$$m'_j, m'_{j+1} \geq m_j \quad (24)$$

ゆえに

$$s(f : \Delta_2) - s(f : \Delta_1) = m'_j(x' - x_{j-1}) + m'_{j+1}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (25)$$

$$\geq m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (26)$$

$$= 0 \quad (27)$$

が成立する. ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

証明が解析学基礎に投げられている定理です．

行間 8. 関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ について, D が \mathbb{R} の有界閉集合かつ f が連続であるならば, f は一様連続である．

証明. 余裕があったら追記します. ■