

微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

## 目次

2	多変数関数の微分	2
2.8	テイラーの定理 (2 変数 version)	2
2.9	$C^2$ 級の 2 変数関数の極大・極小	3
3	1 変数関数の積分	5
3.2	区分求積法	5
3.4	有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性	6
3.5	リーマン積分の基本性質	7

## 2 多変数関数の微分

### 2.8 テイラーの定理 (2 変数 version)

#### 2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

行間 1. 自然数  $k = 1, 2, \dots, n+1$  に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i} (y_1 - y_0)^i \quad (1)$$

が成立する. ただし  $n, \varphi, f, x, y$  は講義資料で定義されたものである.

この命題は, テイラーの定理 (2 変数 version) の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です.

証明.  $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$  とおく. まず  $k = 1$  に対して (1) は明らかに成立する. つぎに  $k (= 1, 2, \dots, n)$  を任意にとり, (1) の成立を仮定する. (1) の両辺を  $t$  で微分して次を得る.

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} {}^k C_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k {}^{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} {}^{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \quad (6)$$

したがって  $k+1$  に対しても (1) が成立する. 以上より, 自然数  $k = 1, 2, \dots, n+1$  に対して (1) が成立する. ■

## 2.9 $C^2$ 級の 2 変数関数の極大・極小

### 2.9.1 極値を取るための必要条件

行間 2. 点  $(x_0, y_0)$  で  $f$  が極大, または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (7)$$

である. ただし  $x_0, y_0, f$  は講義資料で定義されたものである.

この命題は「すぐにわかる」ものです.

証明. 点  $(x_0, y_0)$  が  $f$  の極大点である場合を示す. 極小点の場合も同様である. 一変数関数  $g, h$  を  $g(x) = f(x, y_0)$ ,  $h(y) = f(x_0, y)$  と定めると,  $g, h$  はそれぞれ点  $x_0, y_0$  で微分可能であって局所的に最大となる. したがって, 共通資料第 4 章命題 2 より点  $x_0, y_0$  はそれぞれ  $g, h$  の停留点である. よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0 \quad (8)$$

が従う. ■

### 2.9.2 $A, B, C$ と $a, b, c$ の関係性

行間 3.  $(x_0, y_0)$  に十分近い任意の点  $(x, y)$  に対して

$$A > 0 \text{ かつ } AC - B^2 > 0 \implies \text{常に } a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (9)$$

が成立する. ただし  $x, y, x_0, y_0, A, B, C, a, b, c$  は講義資料で定義されたものである.

この命題は,  $A, B, C$  に関する大小関係がまわりの  $a, b, c$  に関しても成立するというものです.

証明.  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  で

$$a \rightarrow A > 0 \quad (10)$$

$$ac - b^2 \rightarrow AC - B^2 > 0 \quad (11)$$

なので, ある  $\delta > 0$  が存在して

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (12)$$

が成立する. ■

2.9.3 「 $|t|$ : 十分小」の意味

行間 4. 「 $|t|$ : 十分小」という制約は,  $f$  が  $C^2$  級である領域の上だけを点  $(x_0 + t, y_0)$  が動くように課されている.

「 $AC - B^2 < 0$  の場合」というスライドでは「 $|t|$ : 十分小」という制約が登場しますが, これは何のためにあるのか気になりませんか? O 先生に尋ねたところ上のような回答でした. 証明はとくにありません.

2.9.4 「iii)  $A = 0$  のとき」の省略された計算

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \quad (13)$$

とおくと次が成り立つ.

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \quad (14)$$

ただし  $x_0, y_0, p_1, p_2, B, C$  は講義資料で定義されたものである.

証明.  $\varphi$  についてのみ示す.  $\psi$  の場合も同様である.  $f$  が  $C^2$  級関数であることに注意すれば,  $\varphi$  の導関数は

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \end{aligned} \quad (16)$$

である. 点  $(x_0, y_0)$  は  $f$  の停留点なので, (15) より  $\varphi'(0) = 0$  である. また,  $A, B, C$  の定義と  $A = 0$  に注意すれば, (16) より

$$\varphi''(0) = 0 \cdot p_1^2 + 2B \cdot p_1 + C \cdot 1 = 2p_1 B + C \quad (17)$$

を得る. ■

### 3 1 変数関数の積分

#### 3.2 区分求積法

##### 3.2.1 区分求積法の成立

**行間 6.** 関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  がリーマン積分可能であるとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$  なる  $[a, b]$  の分割の列  $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\dots}$  を任意にとり, 各  $\Delta_n$  の代表点集合  $\xi_n$  を任意にとれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = \int_a^b f(x) dx \quad (18)$$

が成立する.

こちらはリーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです.

**証明.**  $S = \int_a^b f(x) dx$  とおく. 正数  $\epsilon$  を任意にとる.  $f$  はリーマン積分可能なので, ある正数  $\delta$  であって次を満たすものが存在する.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \text{ に対し } |R(f : \Delta, \xi) - S| < \epsilon \quad (19)$$

このような  $\delta$  をひとつとる.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$  より, ある自然数  $N$  であって次を満たすものが存在する.

$$n > N \implies |\Delta_n| < \delta \quad (20)$$

このような  $N$  をひとつとる. 自然数  $n > N$  を任意にとる. (20), (19) より

$$|R(f : \Delta_n, \xi_n) - S| < \epsilon \quad (21)$$

が成立する. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = S = \int_a^b f(x) dx \quad (22)$$

が成立する. ■

### 3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

#### 3.4.1 すぐに分かること 2

行間 7. 区間  $[a, b]$  の 2 つの分割  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  について,  $\Delta_2$  が  $\Delta_1$  の細分ならば

$$s(f : \Delta_1) \leq s(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_1) \quad (23)$$

が成立する.

この命題は「簡単なので略」されています.

証明. (23) の最も左の不等号についてのみ示す. 分割  $\Delta_1$  の隣り合う分点  $x_{j-1}$  と  $x_j$  の間に分点  $x'$  を追加することを考える. 区間  $[x_{j-1}, x_j], [x_{j-1}, x'], [x', x_j]$  上での  $f$  の下限をそれぞれ  $m_j, m'_j, m'_{j+1}$  とおく. ここで,

$$m'_j, m'_{j+1} \geq m_j \quad (24)$$

ゆえに

$$s(f : \Delta_2) - s(f : \Delta_1) = m'_j(x' - x_{j-1}) + m'_{j+1}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (25)$$

$$\geq m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (26)$$

$$= 0 \quad (27)$$

が成立する. ■

#### 3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

行間 8. 関数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $D$  が  $\mathbb{R}$  の有界閉集合かつ  $f$  が連続であるならば,  $f$  は一様連続である.

これは証明が解析学基礎に投げられている定理です.

証明. 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料<sup>\*1</sup> <sup>\*2</sup>の定理 8 で証明されている. ■

<sup>\*1</sup> [https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14\\_kami.html](https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html)

<sup>\*2</sup> K 先生の資料は神です

## 3.4.3 リーマンの判定法

**行間 9.** 有界関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  について,  
 $\forall \epsilon > 0$  に対し, 区間  $[a, b]$  のある分割  $\Delta$  が存在して  $S(f : \Delta) - s(f : \Delta) < \epsilon$  となる.  
 $\iff f$  が区間  $[a, b]$  上でリーマン積分可能

これは「ダルブーの定理」というものが要ります, として証明が省略されていますが, リーマンの判定法の証明のためにはダルブーの定理以外にも色々と補題を準備しておかないといけません.

**証明.** 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料<sup>\*3</sup> で証明されている. 以下, 講義資料内の定理番号を用いて証明の流れを示す.

行間 9 の主張は直接的には定理 13「積分可能条件:  $\epsilon$ - $\delta$  バージョン」として証明されるが, もともとのリーマン積分可能性の定義と定理 13 のいう積分可能条件との同値性は次のように示される. ただし, 同値記号の下に書き添えてある定理は, その同値性を示すために用いられる定理である.

定理 13 のいう積分可能条件  $\iff$  定理 12 のいう積分可能条件

$\iff$  定理 6 のいう積分可能条件

定理 11

$\iff$  定理 4 のいう積分可能条件

$\iff$  定義

定理 2,3

■

## 3.5 リーマン積分の基本性質

## 3.5.1 リーマン積分の線型性 (1)

**行間 10.** 関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  がともにリーマン積分可能であるとき, 関数  $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $x \mapsto f(x) + g(x)$ ) もリーマン積分可能で

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (28)$$

**証明.** 表記の簡略化のため  $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ ,  $\beta = \int_a^b g(x)dx$  とおく.

<sup>\*3</sup> [https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14\\_kami.html](https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html)

正数  $\epsilon$  を任意にとる.  $f, g$  がリーマン積分可能であることから, ある正数  $\delta$  が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \quad \text{に対し} \quad \left\{ \begin{array}{l} |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| < \epsilon/2 \\ |R(g : \Delta, \xi) - \beta| < \epsilon/2 \end{array} \right.$$

が成立する. ここで, リーマン和の定義から明らかに

$$R(f + g : \Delta, \xi) = R(f : \Delta, \xi) + R(g : \Delta, \xi) \quad (29)$$

なので

$$|R(f + g : \Delta, \xi) - (\alpha + \beta)| = |R(f : \Delta, \xi) + R(g : \Delta, \xi) - (\alpha + \beta)| \quad (30)$$

$$\leq |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| + |R(g : \Delta, \xi) - \beta| \quad (31)$$

$$< \epsilon \quad (32)$$

が成立する. したがって (28) が成立する. ■

### 3.5.2 リーマン積分の線型性 (2)

**行間 11.** 関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  がリーマン積分可能であるとき,  $\forall c \in \mathbb{R}$  に対し, 関数  $cf : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (x \mapsto cf(x))$  もリーマン積分可能で

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad (33)$$

証明. 表記の簡略化のため  $\alpha = \int_a^b f(x)dx$  とおく.

$c \in \mathbb{R}$  を任意にとる. 正数  $\epsilon$  を任意にとる.  $f$  がリーマン積分可能であることから, ある正数  $\delta$  が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \quad \text{に対し} \quad |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| < \frac{\epsilon}{|c| + 1}$$

が成立する. ここで, リーマン和の定義から明らかに

$$R(cf : \Delta, \xi) = cR(f : \Delta, \xi) \quad (34)$$

なので

$$|R(cf : \Delta, \xi) - c\alpha| = |cR(f : \Delta, \xi) - c\alpha| \quad (35)$$

$$= |c||R(f : \Delta, \xi) - \alpha| \quad (36)$$

$$\leq |c| \frac{\epsilon}{|c| + 1} \quad (37)$$

$$< \epsilon \quad (38)$$

が成立する. したがって (33) が成立する. ■



## 3.5.3 積のリーマン積分可能性

**行間 12.** 関数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  がともにリーマン積分可能であるとき, 関数  $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $x \mapsto f(x)g(x)$ ) もリーマン積分可能である.

この証明にはリーマンの判定法を利用します.

証明. まず

$$M = \max \left\{ \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \right\} \quad (39)$$

とおく<sup>\*4</sup>.  $M = 0$  の場合は  $f = g = 0$  ゆえに明らかに主張が成立するから,  $M > 0$  の場合を考える.

正数  $\epsilon$  を任意にとる.  $f, g$  はリーマン積分可能なので, リーマンの判定法によれば  $[a, b]$  の分割  $\Delta_f, \Delta_g$  が存在して

$$S(f : \Delta_f) - s(f : \Delta_f) < \frac{\epsilon}{2M}, \quad (40)$$

$$S(g : \Delta_g) - s(g : \Delta_g) < \frac{\epsilon}{2M} \quad (41)$$

が成立する.  $\Delta_f, \Delta_g$  の分点をあわせた分割を  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  とおく.

$\Delta$  に関する関数  $fg$  の上限和と下限和の差を評価する. まず

$$S(fg : \Delta) - s(fg : \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) \quad (42)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|(x_i - x_{i-1}) \quad (43)$$

である (補題 1). ここで

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |g(x)\{f(x) - f(y)\} + f(y)\{g(x) - g(y)\}| \quad (44)$$

$$\leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \quad (45)$$

$$\leq M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)| \quad (46)$$

により

$$((43)\text{式}) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} \{M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|\}(x_i - x_{i-1}) \quad (47)$$

$$= M \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|(x_i - x_{i-1}) + M \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |g(x) - g(y)|(x_i - x_{i-1}) \quad (48)$$

$$= M\{S(f : \Delta) - s(f : \Delta)\} + M\{S(g : \Delta) - s(g : \Delta)\} \quad (49)$$

---

<sup>\*4</sup>  $f, g$  の有界性により上限が存在します.

が成立する.  $\Delta$  は  $\Delta_f, \Delta_g$  の細分であることに注意すれば

$$((49) \text{ 式}) \leq M\{S(f : \Delta_f) - s(f : \Delta_f)\} + M\{S(g : \Delta_g) - s(g : \Delta_g)\} \quad (50)$$

$$\leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} \quad (51)$$

$$= \epsilon \quad (52)$$

が成立する. すなわち

$$S(fg : \Delta) - s(fg : \Delta) < \epsilon \quad (53)$$

である. したがって, リーマンの判定法により  $fg$  はリーマン積分可能である. ■

**補題 1.** 有界な実関数  $f$  と  $f$  の定義域の任意の部分集合  $A$  に対して

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \quad (54)$$

が成立する.

証明.

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} \{-f(x)\} \quad (55)$$

$$= \sup_{x, y \in A} \{f(x) - f(y)\} \quad (56)$$

$$= \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \quad (57)$$

■