

微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

目次

| | | |
|-------|----------------------------|----|
| 2 | 多変数関数の微分 | 2 |
| 2.8 | テイラーの定理 (2 変数 version) | 2 |
| 2.8.1 | 連鎖律と数学的帰納法 | 2 |
| 2.9 | C^2 級の 2 変数関数の極大・極小 | 3 |
| 2.9.1 | 極値を取るための必要条件 | 3 |
| 2.9.2 | A, B, C と a, b, c の関係性 | 3 |
| 2.9.3 | 「 $ t $: 十分小」の意味 | 4 |
| 2.9.4 | 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算 | 4 |
| 3 | 1 変数関数の積分 | 5 |
| 3.2 | 区分求積法 | 5 |
| 3.2.1 | 区分求積法の成立 | 5 |
| 3.4 | 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性 | 6 |
| 3.4.1 | すぐに分かること 2 | 6 |
| 3.4.2 | 有界閉区間上の連続関数の一様連続性 | 6 |
| 3.4.3 | リーマンの判定法 | 7 |
| 3.5 | リーマン積分の基本性質 | 7 |
| 3.5.1 | リーマン積分の線型性 (1) | 7 |
| 3.5.2 | リーマン積分の線型性 (2) | 8 |
| 3.5.3 | 積のリーマン積分可能性 | 8 |
| 3.5.4 | 商のリーマン積分可能性 | 10 |
| 3.5.5 | 被積分関数の大小と積分値の大小 | 12 |
| 3.5.6 | 積分範囲の分割 | 13 |
| 3.5.7 | 積分の平均値の定理 | 14 |
| 3.6 | 広義積分 | 15 |
| 3.6.1 | 上に有界な広義単調増加関数の収束先 | 15 |

2 多変数関数の微分

2.8 テイラーの定理 (2 変数 version)

2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i} (y_1 - y_0)^i \quad (1)$$

が成立する. ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである.

この命題は, テイラーの定理 (2 変数 version) の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です.

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく. まず $k = 1$ に対して (1) は明らかに成立する. つぎに $k (= 1, 2, \dots, n)$ を任意にとり, (1) の成立を仮定する. (1) の両辺を t で微分して次を得る.

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^k {}^k C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} {}^k C_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k {}^{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} {}^{k+1} C_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \quad (6)$$

したがって $k+1$ に対しても (1) が成立する. 以上より, 自然数 $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して (1) が成立する. ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

行間 2. 点 (x_0, y_0) で f が極大, または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (7)$$

である. ただし x_0, y_0, f は講義資料で定義されたものである.

この命題は「すぐにわかる」ものです.

証明. 点 (x_0, y_0) が f の極大点である場合を示す. 極小点の場合も同様である. 一変数関数 g, h を $g(x) = f(x, y_0)$, $h(y) = f(x_0, y)$ と定めると, g, h はそれぞれ点 x_0, y_0 で微分可能であって局所的に最大となる. したがって, 共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0, y_0 はそれぞれ g, h の停留点である. よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0 \quad (8)$$

が従う. ■

2.9.2 A, B, C と a, b, c の関係性

行間 3. (x_0, y_0) に十分近い任意の点 (x, y) に対して

$$A > 0 \text{ かつ } AC - B^2 > 0 \implies \text{常に } a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (9)$$

が成立する. ただし $x, y, x_0, y_0, A, B, C, a, b, c$ は講義資料で定義されたものである.

この命題は, A, B, C に関する大小関係がまわりの a, b, c に関しても成立するというものです.

証明. $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ で

$$a \rightarrow A > 0 \quad (10)$$

$$ac - b^2 \rightarrow AC - B^2 > 0 \quad (11)$$

なので, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies a > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0 \quad (12)$$

が成立する. ■

2.9.3 「 $|t|$: 十分小」の意味

行間 4. 「 $|t|$: 十分小」という制約は, f が C^2 級である領域の上だけを点 $(x_0 + t, y_0)$ が動くように課されている.

「 $AC - B^2 < 0$ の場合」というスライドでは「 $|t|$: 十分小」という制約が登場しますが, これは何のためにあるのか気になりませんか? O 先生に尋ねたところ上のような回答でした. 証明はとくにありません.

2.9.4 「iii) $A = 0$ のとき」の省略された計算

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t) = f(x_0 + p_1 t, y_0 + t), \quad \psi(t) = f(x_0 + p_2 t, y_0 + t) \quad (13)$$

とおくと次が成り立つ.

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2p_1 B + C, \quad \psi''(0) = 2p_2 B + C \quad (14)$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである.

証明. φ についてのみ示す. ψ の場合も同様である. f が C^2 級関数であることに注意すれば, φ の導関数は

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + p_1 t, y_0 + t) \cdot 1 \end{aligned} \quad (16)$$

である. 点 (x_0, y_0) は f の停留点なので, (15) より $\varphi'(0) = 0$ である. また, A, B, C の定義と $A = 0$ に注意すれば, (16) より

$$\varphi''(0) = 0 \cdot p_1^2 + 2B \cdot p_1 + C \cdot 1 = 2p_1 B + C \quad (17)$$

を得る. ■

3 1 変数関数の積分

3.2 区分求積法

3.2.1 区分求積法の成立

行間 6. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ なる $[a, b]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1,2,\dots}$ を任意にとり, 各 Δ_n の代表点集合 ξ_n を任意にとれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = \int_a^b f(x) dx \quad (18)$$

が成立する.

こちらはリーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです.

証明. $S = \int_a^b f(x) dx$ とおく. 正数 ϵ を任意にとる. f はリーマン積分可能なので, ある正数 δ であって次を満たすものが存在する.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \text{ に対し } |R(f : \Delta, \xi) - S| < \epsilon \quad (19)$$

このような δ をひとつとる. $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$ より, ある自然数 N であって次を満たすものが存在する.

$$n > N \implies |\Delta_n| < \delta \quad (20)$$

このような N をひとつとる. 自然数 $n > N$ を任意にとる. (20), (19) より

$$|R(f : \Delta_n, \xi_n) - S| < \epsilon \quad (21)$$

が成立する. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f : \Delta_n, \xi_n) = S = \int_a^b f(x) dx \quad (22)$$

が成立する. ■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること 2

行間 7. 区間 $[a, b]$ の 2 つの分割 Δ_1 と Δ_2 について, Δ_2 が Δ_1 の細分ならば

$$s(f : \Delta_1) \leq s(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_2) \leq S(f : \Delta_1) \quad (23)$$

が成立する.

この命題は「簡単なので略」されています.

証明. (23) の最も左の不等号についてのみ示す. 分割 Δ_1 の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える. 区間 $[x_{j-1}, x_j], [x_{j-1}, x'], [x', x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j, m'_j, m'_{j+1} とおく. ここで,

$$m'_j, m'_{j+1} \geq m_j \quad (24)$$

ゆえに

$$s(f : \Delta_2) - s(f : \Delta_1) = m'_j(x' - x_{j-1}) + m'_{j+1}(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (25)$$

$$\geq m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \quad (26)$$

$$= 0 \quad (27)$$

が成立する. ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

行間 8. 関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ について, D が \mathbb{R} の有界閉集合かつ f が連続であるならば, f は一様連続である.

これは証明が解析学基礎に投げられている定理ですが, 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料^{*1} ^{*2}の定理 8 で証明されていますので, 証明はそちらに譲ります.

^{*1} https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

^{*2} K 先生の資料は神です

3.4.3 リーマンの判定法

行間 9. 有界関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について,
 $\forall \epsilon > 0$ に対し, 区間 $[a, b]$ のある分割 Δ が存在して $S(f : \Delta) - s(f : \Delta) < \epsilon$ となる.
 $\iff f$ が区間 $[a, b]$ 上でリーマン積分可能

これは「ダルブーの定理」というものが重要です, として証明が省略されていますが, リーマンの判定法の証明のためにはダルブーの定理以外にも色々と補題を準備しておかないといけません.

この定理は数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料^{*3} で証明されていますので, 証明はそちらに譲ります. 以下, 講義資料内の定理番号を用いて証明の流れを示します.

行間 14 の主張は直接的には定理 13「積分可能条件: ϵ - δ パージョン」として証明されますが, もともとのリーマン積分可能性の定義と定理 13 のいう積分可能条件との同値性は次のように示されます. ただし, 同値記号の下に書き添えてある定理は, その同値性を示すために用いられる定理です.

定理 13 のいう積分可能条件 \iff 定理 12 のいう積分可能条件
 \iff 定理 6 のいう積分可能条件
定理 11
 \iff 定理 4 のいう積分可能条件
 \iff 定義
定理 2,3

3.5 リーマン積分の基本性質

3.5.1 リーマン積分の線型性 (1)

行間 10. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき, 関数 $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (x \mapsto f(x) + g(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (28)$$

証明. 表記の簡略化のため $\alpha = \int_a^b f(x)dx$, $\beta = \int_a^b g(x)dx$ とおく.

正数 ϵ を任意にとる. f, g がリーマン積分可能であることから, ある正数 δ が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \quad \text{に対し} \quad \left\{ \begin{array}{l} |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| < \epsilon/2 \\ |R(g : \Delta, \xi) - \beta| < \epsilon/2 \end{array} \right.$$

^{*3} https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(f + g : \Delta, \xi) = R(f : \Delta, \xi) + R(g : \Delta, \xi) \quad (29)$$

なので

$$|R(f + g : \Delta, \xi) - (\alpha + \beta)| = |R(f : \Delta, \xi) + R(g : \Delta, \xi) - (\alpha + \beta)| \quad (30)$$

$$\leq |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| + |R(g : \Delta, \xi) - \beta| \quad (31)$$

$$< \epsilon \quad (32)$$

が成立する．したがって (28) が成立する. ■

3.5.2 リーマン積分の線型性 (2)

行間 11. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $cf : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (x \mapsto cf(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad (33)$$

証明. 表記の簡略化のため $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ とおく.

$c \in \mathbb{R}$ を任意にとる. 正数 ϵ を任意にとる. f がリーマン積分可能であることから, ある正数 δ が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta| < \delta \text{ なる } [a, b] \text{ の任意の分割 } \Delta \\ \Delta \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{array} \right. \text{ に対し } |R(f : \Delta, \xi) - \alpha| < \frac{\epsilon}{|c| + 1}$$

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(cf : \Delta, \xi) = cR(f : \Delta, \xi) \quad (34)$$

なので

$$|R(cf : \Delta, \xi) - c\alpha| = |cR(f : \Delta, \xi) - c\alpha| \quad (35)$$

$$= |c||R(f : \Delta, \xi) - \alpha| \quad (36)$$

$$\leq |c| \frac{\epsilon}{|c| + 1} \quad (37)$$

$$< \epsilon \quad (38)$$

が成立する．したがって (33) が成立する. ■

3.5.3 積のリーマン積分可能性

行間 12. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき, 関数 $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (x \mapsto f(x)g(x))$ もリーマン積分可能である.

この証明にはリーマンの判定法を利用します。

証明. まず

$$M = \max \left\{ \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \right\} \quad (39)$$

とおく*4. $M = 0$ の場合は $f = g = 0$ ゆえに明らかに主張が成立するから、 $M > 0$ の場合を考える。

正数 ϵ を任意にとる. f, g はリーマン積分可能なので、リーマンの判定法によれば $[a, b]$ の分割 Δ_f, Δ_g が存在して

$$S(f : \Delta_f) - s(f : \Delta_f) < \frac{\epsilon}{2M}, \quad (40)$$

$$S(g : \Delta_g) - s(g : \Delta_g) < \frac{\epsilon}{2M} \quad (41)$$

が成立する. Δ_f, Δ_g の分点をあわせた分割を $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とおく.

Δ に関する関数 fg の上限和と下限和の差を評価する. まず

$$S(fg : \Delta) - s(fg : \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) \quad (42)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|(x_i - x_{i-1}) \quad (43)$$

である (補題 1). ここで

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |g(x)\{f(x) - f(y)\} + f(y)\{g(x) - g(y)\}| \quad (44)$$

$$\leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \quad (45)$$

$$\leq M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)| \quad (46)$$

により

$$((43) \text{ 式}) \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} \{M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|\}(x_i - x_{i-1}) \quad (47)$$

$$= M \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|(x_i - x_{i-1}) + M \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |g(x) - g(y)|(x_i - x_{i-1}) \quad (48)$$

$$= M\{S(f : \Delta) - s(f : \Delta)\} + M\{S(g : \Delta) - s(g : \Delta)\} \quad (49)$$

が成立する. Δ は Δ_f, Δ_g の細分であることに注意すれば

$$((49) \text{ 式}) \leq M\{S(f : \Delta_f) - s(f : \Delta_f)\} + M\{S(g : \Delta_g) - s(g : \Delta_g)\} \quad (50)$$

$$\leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} \quad (51)$$

$$= \epsilon \quad (52)$$

が成立する. すなわち

$$S(fg : \Delta) - s(fg : \Delta) < \epsilon \quad (53)$$

である. したがって、リーマンの判定法により fg はリーマン積分可能である. ■

*4 f, g の有界性により上限が存在します.

補題 1. 有界な実関数 f と f の定義域の任意の部分集合 A に対して

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \quad (54)$$

が成立する.

証明.

$$\sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} \{-f(x)\} \quad (55)$$

$$= \sup_{x, y \in A} \{f(x) - f(y)\} \quad (56)$$

$$= \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| \quad (57)$$

■

3.5.4 商のリーマン積分可能性

補題 2. 関数 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき,

$$\text{関数 } \frac{1}{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \left(x \mapsto \frac{1}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \quad (58)$$

ならば, 関数 $\frac{1}{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \left(x \mapsto \frac{1}{g(x)} \right)$ もリーマン積分可能である.

まずひとつ補題を証明しておきます.

証明. (58) により $M = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{g(x)} \right|$ なる実数 M が存在する. このような M をひとつとる. 補題 1 にも注意すれば

$$\sup_{x \in [a, b]} \frac{1}{g(x)} - \inf_{x \in [a, b]} \frac{1}{g(x)} = \sup_{x, y \in [a, b]} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| \quad (59)$$

$$= \sup_{x, y \in [a, b]} \left| \frac{1}{g(x)} \right| \left| \frac{1}{g(y)} \right| |g(x) - g(y)| \quad (60)$$

$$\leq M^2 \sup_{x, y \in [a, b]} |g(x) - g(y)| \quad (61)$$

$$= M^2 \left\{ \sup_{x \in [a, b]} g(x) - \inf_{x \in [a, b]} g(x) \right\} \quad (62)$$

$$(63)$$

であるから, 任意の分割 Δ に対して

$$S\left(\frac{1}{g} : \Delta\right) - s\left(\frac{1}{g} : \Delta\right) \leq M^2 \{S(g : \Delta) - s(g : \Delta)\} \quad (64)$$

が成立する．正数 ϵ を任意にとる． g はリーマン積分可能であるから，リーマンの判定法によれば，ある分割 \triangle が存在して

$$((64) \text{ の右辺 }) \leq \epsilon \quad (65)$$

が成立する．よって

$$((64) \text{ の左辺 }) \leq \epsilon \quad (66)$$

が成立する．したがって，リーマンの判定法により $\frac{1}{g}$ はリーマン積分可能である． ■

行間 13. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \text{ に対し } g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \frac{1}{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \left(x \mapsto \frac{1}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \quad (67)$$

ならば，関数 $\frac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

講義資料のもともとの定理は $\frac{f}{g}$ の有界性を前提としていますが，かわりに $\frac{1}{g}$ の有界性を前提としたものを先に示しておきましょう．この証明には補題 2 を使います．

証明. 補題 2 により $\frac{1}{g}$ はリーマン積分可能なので，積のリーマン積分可能性により $\frac{f}{g}$ もリーマン積分可能である． ■

行間 14. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \text{ に対し } g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \frac{f}{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \left(x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \quad (68)$$

ならば，関数 $\frac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

つぎに，講義資料のもともとの定理を示します．できれば行間 13 を利用したいところですが，残念ながら行間 14 の前提を満たしても行間 13 の前提を満たすとは限らない^{*5} ので利用できません．

^{*5} 有界閉区間 $[0, 1]$ 上で f, g を次のように定めたものはそのような例のひとつです．

$$f(x) = x \quad (69)$$

$$g(x) = x(x \neq 0), 1(x = 0) \quad (70)$$

そこで、この証明にはルベークの可積分条件^{*6}を使います。零集合であることとルベーク測度が0であることの同値性や、測度の基本的性質は認めるものとします。

証明. μ をルベーク測度とする。 $f, g, \frac{f}{g}$ の不連続点全体の集合をそれぞれ D, D_f, D_g とおく。 $\frac{f}{g}$ がリーマン積分不可能であると仮定して矛盾を導く。

$\frac{f}{g}$ は有界関数なので、ルベークの可積分条件によれば $\mu(D) > 0$ である。一方 f, g はリーマン可積分なので $\mu(D_f) = \mu(D_g) = 0$ であり、したがって $\mu(D \cap D_f) = \mu(D \cap D_g) = 0$ である^{*7}。

ここで、 D の点 x であって g が x で連続であるようなものの全体の集合、すなわち $D \setminus (D_g \cap D)$ について

$$\mu(D \setminus (D_g \cap D)) = \mu(D) - \mu(D_g \cap D) \quad (\because D_g \cap D \subset D) \quad (71)$$

$$= \mu(D) \quad (\because \mu(D \cap D_g) = 0) \quad (72)$$

$$> 0 \quad (73)$$

が成立する。一方、 D の任意の点 x に対して

$$g \text{ が } x \text{ で連続ならば } f = \frac{f}{g}g \text{ は } x \text{ で不連続である} \quad (74)$$

が成立するから、 $D \setminus (D_g \cap D) \subset D_f \cap D$ である。したがって $\mu(D_f) \geq \mu(D_f \cap D) \geq \mu(D \setminus (D_g \cap D)) > 0$ である。 f は有界関数であることに注意すれば、ルベークの可積分条件によって f はリーマン積分不可能であるという矛盾を得る。 ■

3.5.5 被積分関数の大小と積分値の大小

まずひとつ補題を証明しておきます。

補題 3. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき、

$$\forall x \in [a, b] \text{ に対して } f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (75)$$

が成立する。とくに f が連続であるとする、右辺の等号が成立するのは f の値が恒等的に0のとき、またそのときのみである。

証明. 任意の分割 Δ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$R(f : \Delta, \xi) \geq \inf_{x \in [a, b]} f(x)(b - a) \quad (76)$$

^{*6} 杉浦 光夫『解析入門 I』東京大学出版会〈基礎数学 2〉p.266

^{*7} $D \cap D_f \subset D_f$ なので、測度の単調性より $\mu(D \cap D_f) \leq \mu(D_f)$ が成立します。このことと、測度の非負性および $\mu(D_f) = 0$ より $\mu(D \cap D_f) = 0$ が従います。 D_g についても同様です。

であり, $\forall x \in [a, b]$ に対して $f(x) \geq 0$ であると仮定すると (76) の右辺は 0 以上である. したがって

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (77)$$

である.

以下, f は連続であるとする. f の値が恒等的に 0 ならば, 明らかに

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad (78)$$

である. 一方, ある $c \in [a, b]$ が存在して $f(c) > 0$ であると仮定する. このような c をひとつとる. f の連続性により, ある正数 δ が存在して, 閉区間 $I = [c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$ 上で f は常に正の値をとる. よって f の I 上での積分値は正である. また, この証明の前半の議論によれば f の $[a, b] \setminus I$ 上での積分値は非負である. これらを足し合わせることににより

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad (79)$$

が従う. ■

行間 15. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき,

$$\forall x \in [a, b] \text{ に対して } f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (80)$$

が成立する. とくに f, g が連続であるとする, 右辺の等号が成立するのは f, g が恒等的に等しいとき, またそのときのみである.

証明. 補題 3 とリーマン積分の線型性からすぐにわかる. ■

3.5.6 積分範囲の分割

行間 16. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき, $a < c < b$ となる任意の実数 c に対して, 関数 f は $[a, b]$ 上でも $[c, b]$ 上でもリーマン積分可能で,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (81)$$

証明. f はリーマン積分可能なので, 任意の正数 ϵ に対して, ある $[a, b]$ の分割 Δ が存在して

$$S(f : \Delta) - s(f : \Delta) < \epsilon \quad (82)$$

が成立する. Δ の分点に c を追加したものを Δ' とおくと, Δ' は Δ の細分なので

$$S(f : \Delta') - s(f : \Delta') < \epsilon \quad (83)$$

が成立する． Δ' の $[a, c]$ の部分, $[c, b]$ の部分をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とおく． Δ_1 について

$$S(f : \Delta_1) - s(f : \Delta_1) \leq S(f : \Delta_1) - s(f : \Delta_1) + S(f : \Delta_2) - s(f : \Delta_2) \quad (84)$$

$$\leq S(f : \Delta') - s(f : \Delta') \quad (85)$$

$$< \epsilon \quad (86)$$

が成立するから, リーマンの判定法によれば f は $[a, c]$ 上でリーマン積分可能である． Δ_2 についても同様の議論を行うことによって, f は $[c, b]$ 上でリーマン積分可能である．

さて, f は区間 $[a, c], [c, b]$ 上でリーマン積分可能であるから, リーマンの判定法によれば, それぞれの区間の分割の列 $\{\Delta_{1,n}\}, \{\Delta_{2,n}\}$ であって $n \rightarrow \infty$ で幅が 0 に収束するようなものが存在する．このような $\{\Delta_{1,n}\}, \{\Delta_{2,n}\}$ をひとつずつとり, $\Delta_{1,n}$ と $\Delta_{2,n}$ を合わせたものを Δ_n とおけば, $\{\Delta_n\}$ は $[a, b]$ の分割の列であって, $n \rightarrow \infty$ で幅が 0 に収束する．ここで

$$S(f : \Delta_n) = S(f : \Delta_{1,n}) + S(f : \Delta_{2,n}) \quad (87)$$

であるから, 数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料^{*8} の定理 3 より,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (88)$$

が成立する. ■

3.5.7 積分の平均値の定理

行間 17. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき, f の上限, 下限をそれぞれ M, m とすると,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M \quad (89)$$

が成立する．とくに f が連続ならば, $a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c) \quad (90)$$

が成立する．

証明. 任意の分割 Δ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$m(b-a) \leq R(f : \Delta, \xi) \leq M(b-a) \quad (91)$$

であるから,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (92)$$

すなわち (89) が成立する．

^{*8} https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

以下, f が連続であるとする. 最大値の定理により m, M はそれぞれ f の最小値, 最大値に等しい.

まず $m = M$ の場合を考える. これは f が定数関数ということであるから, $a < c < b$ なる任意の c に対して $f(c) = m$ である. 一方, (89) によれば

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (93)$$

である. したがって, $a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad (94)$$

が成立する.

つぎに $m < M$ の場合を考える. このとき, f は恒等的には $f(x) = m$ でも $f(x) = M$ でもないから, 行間 15 より

$$m(b-a) = \int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx = M(b-a) \quad (95)$$

すなわち

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M \quad (96)$$

である. 一方, 中間値の定理によれば, $m < y < M$ なる任意の y に対して, $y = f(c)$, $a < c < b$ なる c が存在する. したがって, $a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad (97)$$

が成立する. ■

3.6 広義積分

3.6.1 上に有界な広義単調増加関数の収束先

行間 18. 上に有界な広義単調増加関数はその上限に収束する.

「非負関数の優関数による判定法」の証明のなかでこの命題が使われていますので, 証明しておきます.

証明. 関数 $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. f は上に有界なので, 実数の連続性により上限 $M = \sup_{x \in [a, b)} f(x)$ が存在する. ここで, 正数 ϵ を任意にとる. M は f の上限であるから, ある $\xi \in [a, b)$ が存在して

$$M - \epsilon < f(\xi) \leq M \quad (98)$$

が成立する. 一方, f は広義単調増加なので, $x > \xi$ なる任意の x に対して

$$f(x) \geq f(\xi) \quad (99)$$

が成立する。したがって, (98), (99) より

$$M - f(x) \leq M - f(\xi) < \epsilon \quad (100)$$

が成立する。以上より

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M \quad (101)$$

である。 ■