微分積分学②（火曜 4 限; O 先生）の講義資料の行間を埋める資料です.

目次

2 多変数関数の微分

2.8 テイラーの定理（2 変数 version）

2.8.1 連鎖律と数学的帰納法

行間 1. 自然数 $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \cdot (x_1 - x_0)^{k-i}(y_1 - y_0)^i \tag{1}$$

が成立する．ただし n, φ, f, x, y は講義資料で定義されたものである．

この命題は，テイラーの定理（2 変数 version）の証明のなかで「同様に連鎖律をくり返し使うことにより…」と議論が省略されている部分です．

証明. $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ とおく．まず $k = 1$ に対して (1) は明らかに成立する．つぎに $k\,(= 1, 2, \ldots, n)$ を任意にとり，(1) の成立を仮定する．(1) の両辺を t で微分して次を得る．

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \left\{ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} \right\} && (2) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k-i} \partial y^{i+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k-i} \Delta y^{i+1} && (3) \\
&= \sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (4) \\
&= \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}}(x(t), y(t)) \Delta y^{k+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (5) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i}(x(t), y(t)) \Delta x^{k+1-i} \Delta y^i && (6)
\end{aligned}$$

したがって $k+1$ に対しても (1) が成立する．以上より，自然数 $k=1,2,\dots,n+1$ に対して (1) が成立する． ■

2.9 C^2 級の 2 変数関数の極大・極小

2.9.1 極値を取るための必要条件

行間 2. 点 (x_0,y_0) で f が極大，または極小になるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \tag{7}$$

である．ただし x_0,y_0,f は講義資料で定義されたものである．

この命題は「すぐにわかる」ものです．

<u>**証明.**</u> 点 (x_0,y_0) が f の極大点である場合を示す．極小点の場合も同様である．一変数関数 g,h を $g(x)=f(x,y_0)$, $h(y)=f(x_0,y)$ と定めると，g,h はそれぞれ点 x_0,y_0 で微分可能であって局所的に最大となる．したがって，共通資料第 4 章命題 2 より点 x_0,y_0 はそれぞれ g,h の停留点である．よって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=h'(y_0)=0 \tag{8}$$

が従う． ■

2.9.2 A,B,C と a,b,c の関係性

行間 3. (x_0,y_0) に十分近い任意の点 (x,y) に対して

$$A>0 \text{ かつ } AC-B^2>0 \quad \Longrightarrow \quad \text{常に } a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{9}$$

が成立する．ただし x,y,x_0,y_0,A,B,C,a,b,c は講義資料で定義されたものである．

この命題は，A,B,C に関する大小関係がまわりの a,b,c に関しても成立するというものです．

<u>**証明.**</u> $(x,y)\to(x_0,y_0)$ で

$$a\to A>0 \tag{10}$$

$$ac-b^2\to AC-B^2>0 \tag{11}$$

なので，ある $\delta>0$ が存在して

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad a>0 \text{ かつ } ac-b^2>0 \tag{12}$$

が成立する． ■

2.9.3 「$|t|$: 十分小」の意味

行間 4. 「$|t|$: 十分小」という制約は，f が C^2 級である領域の上だけを点 (x_0+t, y_0) が動くように課されている．

「$AC-B^2<0$ の場合」というスライドでは「$|t|$: 十分小」という制約が登場しますが，これは何のためにあるのか気になりませんか？ O 先生に尋ねたところ上のような回答でした．証明はとくにありません．

2.9.4 「iii) $A=0$ のとき」の省略された計算

行間 5. 講義資料のように

$$\varphi(t)=f(x_0+p_1t, y_0+t),\quad \psi(t)=f(x_0+p_2t, y_0+t) \tag{13}$$

とおくと次が成り立つ．

$$\varphi'(0)=\psi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=2p_1B+C,\quad \psi''(0)=2p_2B+C \tag{14}$$

ただし x_0, y_0, p_1, p_2, B, C は講義資料で定義されたものである．

<u>**証明.**</u> φ についてのみ示す．ψ の場合も同様である．f が C^2 級関数であることに注意すれば，φ の導関数は

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot 1 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t)=&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1^2\\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot p_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+p_1t, y_0+t)\cdot 1\end{aligned} \tag{16}$$

である．点 (x_0, y_0) は f の停留点なので，(15) より $\varphi'(0)=0$ である．また，A, B, C の定義と $A=0$ に注意すれば，(16) より

$$\varphi''(0)=0\cdot p_1^2+2B\cdot p_1+C\cdot 1=2p_1B+C \tag{17}$$

を得る． ■

3　1 変数関数の積分

3.2　区分求積法

3.2.1　区分求積法の成立

行間 6. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\lim_{n\to\infty}|\triangle_n|=0$ なる $[a,b]$ の分割の列 $\{\triangle_n\}_{n=1,2,\dots}$ を任意にとり，各 $\triangle_n$ の代表点集合 $\xi_{\mathbf{n}}$ を任意にとれば，

$$\lim_{n\to\infty}R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})=\int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

が成立する．

こちらはリーマン積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです．

証明. $S=\int_a^b f(x)dx$ とおく．正数 ϵ を任意にとる．f はリーマン積分可能なので，ある正数 δ であって次を満たすものが存在する．

$$\begin{cases}|\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f:\triangle,\xi)-S|<\epsilon \tag{19}$$

このような δ をひとつとる．$\lim_{n\to\infty}|\triangle_n|=0$ より，ある自然数 N であって次を満たすものが存在する．

$$n>N\Longrightarrow|\triangle_n|<\delta \tag{20}$$

このような N をひとつとる．自然数 $n>N$ を任意にとる．(20)，(19) より

$$|R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})-S|<\epsilon \tag{21}$$

が成立する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}R(f:\triangle_n,\xi_{\mathbf{n}})=S=\int_a^b f(x)dx \tag{22}$$

が成立する．■

3.4 有界な関数のリーマン積分可能性・不可能性

3.4.1 すぐに分かること 2

行間 7. 区間 $[a,b]$ の *2* つの分割 $\triangle_1$ と $\triangle_2$ について，$\triangle_2$ が $\triangle_1$ の細分ならば

$$s(f:\triangle_1) \leq s(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_2) \leq S(f:\triangle_1) \tag{23}$$

が成立する．

この命題は「簡単なので略」されています．

<u>証明.</u> (23) の最も左の不等号についてのみ示す．分割 $\triangle_1$ の隣り合う分点 x_{j-1} と x_j の間に分点 x' を追加することを考える．区間 $[x_{j-1},x_j],[x_{j-1},x'],[x',x_j]$ 上での f の下限をそれぞれ m_j, m'_j, m'_{j+1} とおく．ここで，

$$m'_j,\, m'_{j+1} \geq m_j \tag{24}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} s(f:\triangle_2)-s(f:\triangle_1) &= m'_j(x'-x_{j-1})+m'_{j+1}(x_j-x')-m_j(x_j-x_{j-1}) && (25)\\ &\geq m_j(x'-x_{j-1})+m_j(x_j-x')-m_j(x_j-x_{j-1}) && (26)\\ &=0 && (27)\end{aligned}$$

が成立する． ■

3.4.2 有界閉区間上の連続関数の一様連続性

行間 8. 関数 $f:D\to\mathbb{R}$ について，D が $\mathbb{R}$ の有界閉集合かつ f が連続であるならば，f は一様連続である．

これは証明が解析学基礎に投げられている定理ですが，数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*1] [*2]の定理 8 で証明されていますので，証明はそちらに譲ります．

[*1] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`

[*2] K 先生の資料は神です

3.4.3 リーマンの判定法

行間 9. 有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ について，
$\forall\epsilon>0$ に対し，区間 $[a,b]$ のある分割 $\triangle$ が存在して $S(f:\triangle)-s(f:\triangle)<\epsilon$ となる．
$\iff$ f が区間 $[a,b]$ 上でリーマン積分可能

これは「ダルブーの定理」というものが必要です，として証明が省略されていますが，リーマンの判定法の証明のためにはダルブーの定理以外にも色々と補題を準備しておかないといけません．

この定理は数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*3] で証明されていますので，証明はそちらに譲ります．以下，講義資料内の定理番号を用いて証明の流れを示します．

行間 14 の主張は直接的には定理 13「積分可能条件 : ϵ-δ バージョン」として証明されますが，もともとのリーマン積分可能性の定義と定理 13 のいう積分可能条件との同値性は次のように示されます．ただし，同値記号の下に書き添えてある定理は，その同値性を示すために用いられる定理です．

$$\begin{aligned}
\text{定理 13 のいう積分可能条件} &\iff \text{定理 12 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 11}} \text{定理 6 のいう積分可能条件}\\
&\iff \text{定理 4 のいう積分可能条件}\\
&\underbrace{\iff}_{\text{定理 2,3}} \text{定義}
\end{aligned}$$

3.5 リーマン積分の基本性質

3.5.1 リーマン積分の線型性 (1)

行間 10. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $f+g:[a,b]\to\mathbb{R}\,(x\mapsto f(x)+g(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \tag{28}$$

<u>**証明.**</u> 表記の簡略化のため $\alpha=\int_a^b f(x)dx$，$\beta=\int_a^b g(x)dx$ とおく．

正数 ϵ を任意にとる．f,g がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases}|\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle\\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi\end{cases} \quad \text{に対し} \quad \begin{cases}|R(f:\triangle,\xi)-\alpha|<\epsilon/2\\ |R(f:\triangle,\xi)-\beta|<\epsilon/2\end{cases}$$

[*3] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(f+g:\triangle,\xi) = R(f:\triangle,\xi) + R(g:\triangle,\xi) \tag{29}$$

なので

$$\begin{aligned} |R(f+g:\triangle,\xi) - (\alpha+\beta)| &= |R(f:\triangle,\xi) + R(g:\triangle,\xi) - (\alpha+\beta)| \quad (30)\\ &\leq |R(f:\triangle,\xi) - \alpha| + |R(g:\triangle,\xi) - \beta| \quad (31)\\ &< \epsilon \quad (32) \end{aligned}$$

が成立する．したがって (28) が成立する． ■

3.5.2 リーマン積分の線型性 (2)

行間 11. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$\forall c\in\mathbb{R}$ に対し，関数 $cf:[a,b]\to\mathbb{R}\ (x\mapsto cf(x))$ もリーマン積分可能で

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{33}$$

<u>**証明.**</u> 表記の簡略化のため $\alpha=\int_a^b f(x)dx$ とおく．

$c\in\mathbb{R}$ を任意にとる．正数 ϵ を任意にとる．f がリーマン積分可能であることから，ある正数 δ が存在して

$$\begin{cases} |\triangle|<\delta \text{ なる } [a,b] \text{ の任意の分割 } \triangle \\ \triangle \text{ の任意の代表点集合 } \xi \end{cases} \quad \text{に対し} \quad |R(f:\triangle,\xi)-\alpha| < \frac{\epsilon}{|c|+1}$$

が成立する．ここで，リーマン和の定義から明らかに

$$R(cf:\triangle,\xi) = cR(f:\triangle,\xi) \tag{34}$$

なので

$$\begin{aligned} |R(cf:\triangle,\xi) - c\alpha| &= |cR(f:\triangle,\xi) - c\alpha| \quad (35)\\ &= |c||R(f:\triangle,\xi) - \alpha| \quad (36)\\ &\leq |c|\frac{\epsilon}{|c|+1} \quad (37)\\ &< \epsilon \quad (38) \end{aligned}$$

が成立する．したがって (33) が成立する． ■

3.5.3 積のリーマン積分可能性

行間 12. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，関数 $fg:[a,b]\to\mathbb{R}\ (x\mapsto f(x)g(x))$ もリーマン積分可能である．

この証明にはリーマンの判定法を利用します．

<u>**証明．**</u> まず

$$M = \max\left\{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\ \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\right\} \tag{39}$$

とおく[*4]．$M = 0$ の場合は $f = g = 0$ ゆえに明らかに主張が成立するから，$M > 0$ の場合を考える．

正数 ϵ を任意にとる．f, g はリーマン積分可能なので，リーマンの判定法によれば $[a, b]$ の分割 $\triangle_f, \triangle_g$ が存在して

$$S(f : \triangle_f) - s(f : \triangle_f) < \frac{\epsilon}{2M}, \tag{40}$$
$$S(g : \triangle_g) - s(g : \triangle_g) < \frac{\epsilon}{2M} \tag{41}$$

が成立する．$\triangle_f, \triangle_g$ の分点をあわせた分割を $\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とおく．

$\triangle$ に関する関数 fg の上限和と下限和の差を評価する．まず

$$\begin{aligned}
S(fg : \triangle) - s(fg : \triangle) &= \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)(x_i - x_{i-1}) && (42)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|(x_i - x_{i-1}) && (43)
\end{aligned}$$

である（補題 1）．ここで

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |g(x)\{f(x) - f(y)\} + f(y)\{g(x) - g(y)\}| && (44)\\
&\le |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| && (45)\\
&\le M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)| && (46)
\end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned}
((43)\text{式}) &\le \sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\{M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|\}(x_i - x_{i-1}) && (47)\\
&= M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x) - f(y)|(x_i - x_{i-1}) + M\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|g(x) - g(y)|(x_i - x_{i-1}) && (48)\\
&= M\{S(f : \triangle) - s(f : \triangle)\} + M\{S(g : \triangle) - s(g : \triangle)\} && (49)
\end{aligned}$$

が成立する．$\triangle$ は $\triangle_f, \triangle_g$ の細分であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
((49)\ \text{式}) &\le M\{S(f : \triangle_f) - s(f : \triangle_f)\} + M\{S(g : \triangle_g) - s(g : \triangle_g)\} && (50)\\
&\le M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} && (51)\\
&= \epsilon && (52)
\end{aligned}$$

が成立する．すなわち

$$S(fg : \triangle) - s(fg : \triangle) < \epsilon \tag{53}$$

である．したがって，リーマンの判定法により fg はリーマン積分可能である． ■

[*4] f, g の有界性により上限が存在します．

補題 1. 有界な実関数 f と f の定義域の任意の部分集合 A に対して

$$\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x,y\in A} |f(x)-f(y)| \tag{54}$$

が成立する.

<u>証明.</u>

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x) &= \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A}\{-f(x)\} &(55)\\ &= \sup_{x,y\in A}\{f(x)-f(y)\} &(56)\\ &= \sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)| &(57)\end{aligned}$$

■

3.5.4 商のリーマン積分可能性

補題 2. 関数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき,

$$\text{関数 } \frac{1}{g}:[a,b]\to\mathbb{R}\ \left(x\mapsto\frac{1}{g(x)}\right) \text{ が有界関数} \tag{58}$$

ならば,関数 $\dfrac{1}{g}:[a,b]\to\mathbb{R}\ \left(x\mapsto\dfrac{1}{g(x)}\right)$ もリーマン積分可能である.

まずひとつ補題を証明しておきます.

<u>証明.</u> (58) により $M=\sup_{x\in[a,b]}\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|$ なる実数 M が存在する.このような M をひとつとる.補題 1 にも注意すれば

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]}\frac{1}{g(x)} - \inf_{x\in[a,b]}\frac{1}{g(x)} &= \sup_{x,y\in[a,b]}\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right| &(59)\\ &= \sup_{x,y\in[a,b]}\left|\frac{1}{g(x)}\right|\left|\frac{1}{g(y)}\right||g(x)-g(y)| &(60)\\ &\le M^2\sup_{x,y\in[a,b]}|g(x)-g(y)| &(61)\\ &= M^2\left\{\sup_{x\in[a,b]}g(x)-\inf_{x\in[a,b]}g(x)\right\} &(62)\\ & &(63)\end{aligned}$$

であるから,任意の分割 $\triangle$ に対して

$$S\left(\frac{1}{g}:\triangle\right) - s\left(\frac{1}{g}:\triangle\right) \le M^2\{S(g:\triangle)-s(g:\triangle)\} \tag{64}$$

が成立する．正数 ϵ を任意にとる．g はリーマン積分可能であるから，リーマンの判定法によれば，ある分割 $\triangle$ が存在して

$$((64)\text{ の右辺}) \leq \epsilon \tag{65}$$

が成立する．よって

$$((64)\text{ の左辺}) \leq \epsilon \tag{66}$$

が成立する．したがって，リーマンの判定法により $\dfrac{1}{g}$ はリーマン積分可能である． ■

行間 13. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \text{に対し} \quad g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \dfrac{1}{g} : [a,b] \to \mathbb{R} \left(x \mapsto \dfrac{1}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \tag{67}$$

ならば，関数 $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

講義資料のもともとの定理は $\dfrac{f}{g}$ の有界性を前提としていますが，かわりに $\dfrac{1}{g}$ の有界性を前提としたものを先に示しておきましょう．この証明には補題 2 を使います．

<u>**証明.**</u> 補題 2 により $\dfrac{1}{g}$ はリーマン積分可能なので，積のリーマン積分可能性により $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である． ■

行間 14. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \text{に対し} \quad g(x) \neq 0 \\ \text{関数 } \dfrac{f}{g} : [a,b] \to \mathbb{R} \left(x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \right) \text{ が有界関数} \end{cases} \tag{68}$$

ならば，関数 $\dfrac{f}{g}$ もリーマン積分可能である．

つぎに，講義資料のもともとの定理を示します．できれば行間 13 を利用したいところですが，残念ながら行間 14 の前提を満たしても行間 13 の前提を満たすとは限らない[*5] ので利用できません．

[*5] 有界閉区間 $[0,1]$ 上で f,g を次のように定めたものはそのような例のひとつです．

$$f(x) = x \tag{69}$$

$$g(x) = x(x \neq 0), 1(x = 0) \tag{70}$$

そこで，この証明にはルベーグの可積分条件[*6] を使います．零集合であることとルベーグ測度が 0 であることの同値性や，測度の基本的性質は認めるものとします．

__証明.__ μ をルベーグ測度とする．$f, g, \dfrac{f}{g}$ の不連続点全体の集合をそれぞれ D, D_f, D_g とおく．$\dfrac{f}{g}$ がリーマン積分不可能であると仮定して矛盾を導く．

$\dfrac{f}{g}$ は有界関数なので，ルベーグの可積分条件によれば $\mu(D) > 0$ である．一方 f, g はリーマン可積分なので $\mu(D_f) = \mu(D_g) = 0$ であり，したがって $\mu(D \cap D_f) = \mu(D \cap D_g) = 0$ である[*7]．

ここで，D の点 x であって g が x で連続であるようなもの全体の集合，すなわち $D \setminus (D_g \cap D)$ について

$$\begin{aligned} \mu(D \setminus (D_g \cap D)) &= \mu(D) - \mu(D_g \cap D) \quad (\because D_g \cap D \subset D) && (71)\\ &= \mu(D) \quad (\because \mu(D \cap D_g) = 0) && (72)\\ &> 0 && (73) \end{aligned}$$

が成立する．一方，D の任意の点 x に対して

$$g \text{ が } x \text{ で連続ならば } f = \frac{f}{g} g \text{ は } x \text{ で不連続である} \tag{74}$$

が成立するから，$D \setminus (D_g \cap D) \subset D_f \cap D$ である．したがって $\mu(D_f) \geq \mu(D_f \cap D) \geq \mu(D \setminus (D_g \cap D)) > 0$ である．f は有界関数であることに注意すれば，ルベーグの可積分条件によって f はリーマン積分不可能であるという矛盾を得る． ■

3.5.5 被積分関数の大小と積分値の大小

まずひとつ補題を証明しておきます．

補題 3. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，

$$\forall x \in [a, b] \text{ に対して } f(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{75}$$

が成立する．とくに f が連続であるとすると，右辺の等号が成立するのは f の値が恒等的に 0 のとき，またそのときのみである．

__証明.__ 任意の分割 $\triangle$ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$R(f : \triangle, \xi) \geq \inf_{x \in [a,b]} f(x)(b - a) \tag{76}$$

[*6] 杉浦 光夫『解析入門 I』東京大学出版会〈基礎数学 2〉p.266

[*7] $D \cap D_f \subset D_f$ なので，測度の単調性より $\mu(D \cap D_f) \leq \mu(D_f)$ が成立します．このことと，測度の非負性および $\mu(D_f) = 0$ より $\mu(D \cap D_f) = 0$ が従います．D_g についても同様です．

であり，$\forall x \in [a,b]$ に対して $f(x) \geq 0$ であると仮定すると (76) の右辺は 0 以上である．したがって

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{77}$$

である．

以下，f は連続であるとする．f の値が恒等的に 0 ならば，明らかに

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \tag{78}$$

である．一方，ある $c \in [a,b]$ が存在して $f(c) > 0$ であると仮定する．このような c をひとつとる．f の連続性により，ある正数 δ が存在して，閉区間 $I = [c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ 上で f は常に正の値をとる．よって f の I 上での積分値は正である．また，この証明の前半の議論によれば f の $[a,b] \setminus I$ 上での積分値は非負である．これらを足し合わせることにより

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{79}$$

が従う． ■

行間 15. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ がともにリーマン積分可能であるとき，

$$\forall x \in [a,b] \text{ に対して } f(x) \leq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{80}$$

が成立する．とくに f, g が連続であるとすると，右辺の等号が成立するのは f, g が恒等的に等しいとき，またそのときのみである．

<u>**証明.**</u> 補題 3 とリーマン積分の線型性からすぐにわかる． ■

3.5.6 積分範囲の分割

行間 16. 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，$a < c < b$ となる任意の実数 c に対して，関数 f は $[a,b]$ 上でも $[c,b]$ 上でもリーマン積分可能で，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{81}$$

<u>**証明.**</u> f はリーマン積分可能なので，任意の正数 ϵ に対して，ある $[a,b]$ の分割 $\triangle$ が存在して

$$S(f : \triangle) - s(f : \triangle) < \epsilon \tag{82}$$

が成立する．$\triangle$ の分点に c を追加したものを $\triangle'$ とおくと，$\triangle'$ は $\triangle$ の細分なので

$$S(f : \triangle') - s(f : \triangle') < \epsilon \tag{83}$$

が成立する．$\triangle'$ の $[a,c]$ の部分，$[c,b]$ の部分をそれぞれ $\triangle_1, \triangle_2$ とおく．$\triangle_1$ について

$$\begin{aligned} S(f:\triangle_1) - s(f:\triangle_1) &\leq S(f:\triangle_1) - s(f:\triangle_1) + S(f:\triangle_2) - s(f:\triangle_2) && (84) \\ &\leq S(f:\triangle') - s(f:\triangle') && (85) \\ &< \epsilon && (86) \end{aligned}$$

が成立するから，リーマンの判定法によれば f は $[a,c]$ 上でリーマン積分可能である．$\triangle_2$ についても同様の議論を行うことによって，f は $[c,b]$ 上でリーマン積分可能である．

さて，f は区間 $[a,c],[c,b]$ 上でリーマン積分可能であるから，リーマンの判定法によれば，それぞれの区間の分割の列 $\{\triangle_{1,n}\},\{\triangle_{2,n}\}$ であって $n \to \infty$ で幅が 0 に収束するようなものが存在する．このような $\{\triangle_{1,n}\},\{\triangle_{2,n}\}$ をひとつずつとり，$\triangle_{1,n}$ と $\triangle_{2,n}$ を合わせたものを $\triangle_n$ とおけば，$\{\triangle_n\}$ は $[a,b]$ の分割の列であって，$n \to \infty$ で幅が 0 に収束する．ここで

$$S(f:\triangle_n) = S(f:\triangle_{1,n}) + S(f:\triangle_{2,n}) \tag{87}$$

であるから，数学 IA 演習 (2014 年度) 第 9 回講義資料[*8] の定理 3 より，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{88}$$

が成立する． ■

3.5.7 積分の平均値の定理

行間 17. 関数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとき，f の上限，下限をそれぞれ M, m とすると，

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \tag{89}$$

が成立する．とくに f が連続ならば，$a<c<b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{90}$$

が成立する．

証明. 任意の分割 $\triangle$ と任意の代表点集合 ξ に対して

$$m(b-a) \leq R(f:\triangle,\xi) \leq M(b-a) \tag{91}$$

であるから，

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{92}$$

すなわち (89) が成立する．

[*8] https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html

以下，f が連続であるとする．最大値の定理により m, M はそれぞれ f の最小値，最大値に等しい．

まず $m = M$ の場合を考える．これは f が定数関数ということであるから，$a < c < b$ なる任意の c に対して $f(c) = m$ である．一方，(89) によれば

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{93}$$

である．したがって，$a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{94}$$

が成立する．

つぎに $m < M$ の場合を考える．このとき，f は恒等的には $f(x) = m$ でも $f(x) = M$ でもないから，行間 15 より

$$m(b-a) = \int_a^b mdx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b Mdx = M(b-a) \tag{95}$$

すなわち

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M \tag{96}$$

である．一方，中間値の定理によれば，$m < y < M$ なる任意の y に対して，$y = f(c), a < c < b$ なる c が存在する．したがって，$a < c < b$ なる c が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{97}$$

が成立する． ■

3.7 広義積分

3.7.1 上に有界な広義単調増加関数の収束先

行間 18. 上に有界な広義単調増加関数はその上限に収束する．

「非負関数の優関数による判定法」の証明のなかでこの命題が使われていますので，証明しておきます．

証明. 関数 $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ を考える．f は上に有界なので，実数の連続性により上限 $M = \sup_{x\in[a,b)} f(x)$ が存在する．ここで，正数 ϵ を任意にとる．M は f の上限であるから，ある $\xi \in [a, b)$ が存在して

$$M - \epsilon < f(\xi) \leq M \tag{98}$$

が成立する．一方，f は広義単調増加なので，$x > \xi$ なる任意の x に対して

$$f(x) \geq f(\xi) \tag{99}$$

が成立する．したがって，(98)，(99) より

$$M - f(x) \leq M - f(\xi) < \epsilon \tag{100}$$

が成立する．以上より

$$\lim_{x \to b} f(x) = M \tag{101}$$

である． ■

4　多変数関数の積分（重積分）

4.1　多重有界閉区間上の重積分の定義から基本性質まで

4.1.1　区分求積法の成立

行間 19. 関数 $f : K \to \mathbb{R}$ が重積分可能であるとき，$\lim_{n\to\infty} |\triangle_n| = 0$ なる K の分割の列 $\{\triangle_n\}_{n=1,2,\dots}$ を任意にとり，各 $\triangle_n$ の代表点集合 $\xi_{\mathbf{n}}$ を任意にとれば，

$$\lim_{n\to\infty} R(f : \triangle_n, \xi_{\mathbf{n}}) = \iint_K f(x, y) dx dy \tag{102}$$

が成立する．

こちらは重積分可能性の定義から区分求積法の成立を導くものです．証明の流れは 1 変数のときとほぼ同じです．余裕があれば詳細を書きます．

4.1.2　非有界関数の重積分不可能性

行間 20. 関数 $f : K \to \mathbb{R}$ が有界でなければ，f は K 上で重積分可能ではない．

証明の流れは 1 変数のときとほぼ同じです．余裕があれば詳細を書きます．

4.1.3　連続関数の重積分可能性

行間 21. 関数 $f : K \to \mathbb{R}$ について，

$$f \text{ が区間 } K \text{ 上で連続} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ は区間 } K \text{ 上で重積分可能} \tag{103}$$

証明の流れは 1 変数のときとほぼ同じです．余裕があれば詳細を書きます．

4.1.4 リーマンの判定法

行間 22. 有界関数 $f : K \to \mathbb{R}$ について，
$\forall \epsilon > 0$ に対し，区間 K のある分割 $\triangle$ が存在して $S(f : \triangle) - s(f : \triangle) < \epsilon$ となる．
$\iff$ f が区間 K 上で重積分可能
（このとき，$\underline{\iint_K} f(x,y)dxdy = \overline{\iint_K} f(x,y)dxdy = \iint_K f(x,y)dxdy$ が成立する）

余力があれば証明を書きます．

4.1.5 重積分の基本性質

証明の流れは 1 変数のときとほぼ同じです．余裕があれば詳細を書きます．

4.2 多重閉区間上の反復積分とフビニ（?）の定理

4.2.1 M_i，m_i の存在証明

行間 23. 関数 $f : K \to \mathbb{R}$ は重積分可能であるとする．また，$\forall x \in [a,b]$ に対し $f(x,y)$ が $[c,d]$ 上 y で積分可能であるとする．このとき，$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ とおくと $F(x)$ は $[a,b]$ において上限と下限を持つ．

<u>**証明.**</u> f は重積分可能ゆえに有界であるから，f のリーマン和全体の集合もまた有界である．したがって，実数の連続性により F は上限と下限をもつ． ■

4.4 一般の有界閉集合上での重積分

4.4.1 連続関数の重積分可能性

行間 24. D が有限個の滑らかな曲線で囲まれた $\mathbb{R}^2$ の有界閉領域であるとき，

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ が連続関数} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ は } D \text{ 上で重積分可能} \tag{104}$$

この定理は数学 IA 演習 (2014 年度) 第 11 回講義資料[*9] 定理 9 で証明されていますので，証明はそちらに譲ります．

[*9] `https://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/14_kami.html`

4.4.2　重積分の基本性質

> ステートメントが長いので省略します．

余力があれば証明を書きます．

4.5　重積分での変数変換

4.5.1　重積分での変数変換の公式

> ステートメントが長いので省略します．

証明はかなり長いです．余力があれば書きます．

5　級数と冪級数

5.1　$\mathbb{R}$ における級数の収束と発散

5.1.1　高校数学でやったこと④

> **行間 25.**
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束する} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{105}$$

<u>**証明.**</u> 正数 ϵ を任意にとる．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するから，ある自然数 N が存在して，$m > N$ なる任意の自然数 m に対して

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n - S\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{106}$$

が成立する．ただし，$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ である．よって，ある自然数 N が存在して，$m > N$ なる任意の自然数 m に対して

$$\begin{cases} S - \dfrac{\epsilon}{2} < \displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n < S + \dfrac{\epsilon}{2} \\ S - \dfrac{\epsilon}{2} < \displaystyle\sum_{n=1}^{m-1} a_n < S + \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases} \tag{107}$$

が成立し，したがって

$$|a_m| = \left| \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \right| < \epsilon \tag{108}$$

が成立する．よって，

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{109}$$

が成立する． ■