♤ **演習問題 0.1** (問 1). M を境界のない多様体とし、$\omega \in \Omega^1(M),\ \alpha \in \Omega^2(M)$ とする。ω は 0 をとらない (M 上至るところ 0 でない) とし、また $\omega \wedge \alpha = 0$ とする。

(1) $M = \mathbb{R}^n$ とする。このとき、$\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\alpha = \omega \wedge \beta$ が成り立つことを示せ。

(2) M が一般の場合に、$\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\alpha = \omega \wedge \beta$ が成り立つことを示せ。

解答. (1), (2) $p \in M$ とし、p のまわりのチャート $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とその上の局所座標 $x^1, \dots, x^n$ に関し座標表示を $\omega = \sum_i \omega_i dx^i,\ \alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$ とおく。いま $\omega \neq 0$ だからある添字 i_0 が存在して $\omega_{i_0} \neq 0$ である。そこで必要ならば U を小さくとりなおして ω_{i_0} は U 上つねに非零であるとしてよい。いま $0 = \omega \wedge \alpha$ より

$$0 = \omega \wedge \alpha = \left(\sum_i \omega_i dx^i\right) \wedge \left(\sum_{i<j} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j\right) \tag{1}$$

$$= \sum_{i_1<i_2<i_3} \underbrace{(\omega_{i_1}\alpha_{i_2 i_3} - \omega_{i_2}\alpha_{i_1 i_3} + \omega_{i_3}\alpha_{i_1 i_2})}_{(*)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \tag{2}$$

が成り立ち、(*) の部分は U 上つねに 0 である。ここで U 上の 1 形式 β を $\beta = \sum_i \beta_i dx^i$ とおくと

$$\omega \wedge \beta = \det \begin{bmatrix} \omega_i & \beta_i \\ \omega_j & \beta_j \end{bmatrix} dx^i \wedge dx^j \tag{3}$$

だから、U 上で $\omega \wedge \beta = \alpha$ が成り立つ条件は

$$\det \begin{bmatrix} \omega_i & \beta_i \\ \omega_j & \beta_j \end{bmatrix} = \alpha_{ij} \quad (i < j) \tag{4}$$

である。考察として、添字に i_0 を含まない α_{ij} は関係式 (*) により添字に i_0 を含む α_{ij} により決定される。そこでまず $i < j$ のいずれかが i_0 である場合に限って式 (4) を $\beta_1, \dots, \beta_n$ に関し解くことを考える。これは実際解けて、まず $\beta_{i_0} = 0$ とおき、各 $i < i_0$ に対し $\beta_i = -\alpha_{i i_0}/\omega_{i_0}$ とおき、各 $j > i_0$ に対し $\beta_j = \alpha_{i_0 j}/\omega_{i_0}$ とおけばよい。こうして得られた β は添字に i_0 を含まない α_{ij} についても式 (4) をみたす。実際、$i_0 < i < j$ なら (*) より

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\omega_{i_0}}(\omega_i \alpha_{i_0 j} - \omega_j \alpha_{i_0 i}) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\omega_{i_0}} \left(\omega_i(\omega_{i_0}\beta_j - \omega_j \beta_{i_0}) - \omega_j(\omega_{i_0}\beta_i - \omega_i \beta_{i_0})\right) \tag{6}$$

$$= \omega_i \beta_j - \omega_j \beta_i \tag{7}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \omega_i & \beta_i \\ \omega_j & \beta_j \end{bmatrix} \tag{8}$$

である。$i < i_0 < j$ や $i < j < i_0$ の場合も同様に成り立つ。したがって β は U 上で $\omega \wedge \beta = \alpha$ をみたす。

各 $p \in M$ に対し以上のように $U_p = U$ を選んで U_p 上で $\beta_p = \beta$ を構成すると、いま M は第 2 可算だから開被覆 $\{U_p\}_{p\in M}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_p\}_{p\in M}$ が存在する。そこで M 上の 1 形式 β を $\beta = \sum_p \rho_p\beta_p$ で定義すれば

$$\omega \wedge \beta = \omega \wedge \sum_p \rho_p\beta_p = \sum_p \rho_p\omega \wedge \beta_p = \sum_p \rho_p\alpha|_{U_p} = \alpha \tag{9}$$

を得る。 □

♤ **演習問題 0.2** (問 2). (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標とする。$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とし、$\mathbb{R}^2$ の向きから定まる向きを入れる。また、M 上の Riemann 計量 g を

$$g_{(x,y)} = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{x^2 + y^2} \tag{10}$$

により定め、g により定まる M の体積形式を μ とする。最後に、$\mathrm{CO}_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists r > 0,\ B \in \mathrm{O}_2,\ A = rB\}$ と書く。

(1) g により定まる M の体積形式を求めよ。

(2) $A \in \mathrm{CO}_2$ とし、$\varphi\colon M \to M$ を $\varphi(x, y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定める (値は列ベクトルだが行ベクトルとみなす)。$\varphi^*g = g$ が成り立つことを示せ。また、$\varphi^*\mu = \mu$ が成り立つことを示せ。

(3) $0 < r \le R$ とし、$D = \{(x, y) \in M \mid r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$ とおく。$\int_D \mu$ を求めよ。

解答. (1) $\mu = \sqrt{|\det g|}dx \wedge dy = \dfrac{1}{x^2 + y^2}dx \wedge dy.$

(2) $A = (a_{ij})_{i,j} = rB$, $r > 0$, $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{O}_2$ とおく。φ の定義より形式的に $\varphi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)A$ が成り立つから

$$(\varphi^*g)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_{\varphi(x,y)}\left(\varphi_*\frac{\partial}{\partial x}, \varphi_*\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{11}$$

$$= g_{\varphi(x,y)}\left(a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y},\ a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{12}$$

$$= a_{11}^2 g_{\varphi(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + a_{21}^2 g_{\varphi(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{a_{11}^2 + a_{21}^2}{r^2(x^2+y^2)} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} \tag{15}$$

同様にして

$$(\varphi^* g)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}, \quad (\varphi^* g)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \quad (\varphi^* g)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \tag{16}$$

となり $\varphi^* g = g$ が成り立つ。

$\varphi^*\mu = \mu$ を示す。$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ とおけば

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = d(\varphi^* x) \wedge d(\varphi^* y) \tag{17}$$

$$= d\varphi^1 \wedge d\varphi^2 \tag{18}$$

$$= (a_{11}dx + a_{21}dy) \wedge (a_{12}dx + a_{22}dy) \tag{19}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) dx \wedge dy \tag{20}$$

$$= r^2\, dx \wedge dy \tag{21}$$

だから

$$(\varphi^*\mu)_{(x,y)} = \frac{1}{r^2(x^2+y^2)}\varphi^*(dx \wedge dy) = \frac{1}{x^2+y^2} = \mu_{(x,y)} \tag{22}$$

を得る。

(3)　D には $\mathbb{R}^2$ の標準的な向きから定まる向きが入っているものと考える。

$$\int_D \mu = \int_D \frac{1}{x^2+y^2} dx \wedge dy \tag{23}$$

$$= \int_D \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \tag{24}$$

$$= \int_r^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta \tag{25}$$

$$= 2\pi(\log R - \log r) \tag{26}$$

である。 □

♤ **演習問題 0.3** (問 3).

解答. (1)　直接計算により

$$d\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dy \wedge dz\right) = \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} dx \wedge dy \wedge dz \tag{27}$$

$$d\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz\wedge dx\right)=\frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dx\wedge dy\wedge dz \tag{28}$$
$$d\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx\wedge dy\right)=\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dx\wedge dy\wedge dz \tag{29}$$

だから $d\omega=0$、したがって ω は閉形式である。

(2) 単位閉球 $D^3\subset\mathbb{R}^3$ に $\mathbb{R}^3$ から定まる自然な向きを入れ、$S^2=\partial D^3$ には境界としての向きを入れる。包含写像 $S^2\to M$ を ι とおく。$d\omega=0$ が M 上で成り立つから原点での値を 0 として $d\omega$ を $\mathbb{R}^3$ 上、とくに D^3 上に拡張できる。Stokes の定理より $\int_{S^2}\iota^*\omega=\int_{D^3}d\omega=0$ が成り立つ。

一方 $\int_{S^2}\iota^*\omega$ を直接計算すると値が 0 にならないことを示す。S^2 上で $\iota^*(x^2+y^2+z^2)=1$ だから

$$\iota^*\omega=x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy \tag{30}$$

である。ただし右辺の x,y,z は $\mathbb{R}^3$ の座標 x,y,z を ι で引き戻したものを記号の濫用で同じ文字を使っている。そこで $\mathbb{R}^3$ 上の 2-形式 μ を

$$\mu=x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy \tag{31}$$

で定めると $\iota^*\omega=\iota^*\mu$ が成り立つ。$d\mu=3\,dx\wedge dy\wedge dz$ だから

$$\int_{S^2}\iota^*\omega=\int_{\partial D^3}\iota^*\omega \tag{32}$$
$$=\int_{\partial D^3}\iota^*\mu \tag{33}$$
$$=\int_{D^3}d\mu\quad(\text{Stokes の定理}) \tag{34}$$
$$=\int_{D^3}3\,dx\wedge dy\wedge dz \tag{35}$$
$$=4\pi \tag{36}$$

を得る。これは $\int_{S^2}\iota^*\omega=0$ に矛盾。したがって ω は完全形式でない。

(3) [TODO] 書き直す $A:=[0,\pi]\times[0,2\pi]\subset\mathbb{R}^2$ とおき

$$G\colon A\to S,\quad (s,t)\mapsto(10\sin s\cos t+1,10\sin s\sin t+2,10\cos s+3) \tag{37}$$

と定めると、A の $\mathbb{R}^2$ における内部 $\mathring{A}$ への G の制限は向きを保つ微分同相写像であり、$\mathrm{Cl}\,G(\mathring{A})=S$ が成り立つ。よって、(2) での計算結果も用いれば

$$\int_S\omega=\int_A\big((10\sin s\cos t+1)\cdot100\sin^2 s\cos t \tag{38}$$
$$+(10\sin s\sin t+2)\cdot100\sin^2 s\sin t \tag{39}$$

$$+ (10\cos s + 3) \cdot 100 \sin s \cos s\big)\, ds \wedge dt \tag{40}$$

$$= 4000\pi + 100 \int_A \left(\sin^2 s \cos t + 2\sin^2 s \sin t + 3 \sin s \cos s\right) ds \wedge dt \tag{41}$$

$$= 4000\pi + 600\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin s \cos s\, ds}_{=0} \tag{42}$$

$$= 4000\pi \tag{43}$$

を得る。 □

♤ **演習問題 0.4** (問 4).

解答. (1) $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ とする。z が関数 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ であることに注意して初期値問題

$$1 = dz(X_{(a,b,c)}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} z \circ \varphi_t(a, b, c) \tag{44}$$

$$z \circ \varphi_0(a, b, c) = c \tag{45}$$

を考えると $z \circ \varphi_t(a, b, c) = c + t$ $(t \in \mathbb{R})$ は解のひとつであり、解の一意性よりこれが唯一の解である。よって $z \circ \varphi_{-c}(a, b, c) = c - c = 0$ だから $\varphi_{-c}(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ である。

(2) (2-a) ⇒(2-b):

$$\pi \circ \varphi_t(x, y, z) = \varphi_{-z\circ\varphi_t(x,y,z)}(\varphi_t(x, y, z)) \tag{46}$$

$$= \varphi_{-t-z}(\varphi_t(x, y, z)) \tag{47}$$

$$= \varphi_{-z} \circ \varphi_{-t} \circ \varphi_t(x, y, z) \tag{48}$$

$$= \varphi_{-z}(x, y, z) \tag{49}$$

$$= \pi(x, y, z) \tag{50}$$

だから $\varphi_t^*\omega = \varphi_t^*\pi^*\alpha = (\pi \circ \varphi_t)^*\alpha = \pi^*\alpha = \omega$ である。

(2-b) ⇒(2-a):

[TODO] わからない

(3) (2-b) との同値を示す。

(2-b) ⇒(3): $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とする。Lie 微分の定義より

$$(L_X\omega)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_p = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = 0 \tag{51}$$

である。

(3) ⇒(2-b):　$p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とする。一般に次が成り立つ。

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\varphi_t^* \omega)_p = (\varphi_{t_0}^*(L_X\omega))_p \quad (\forall t_0 \in \mathbb{R}) \tag{52}$$

実際、変数変換 $s = t - t_0$ により

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\varphi_t^* \omega)_p = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\varphi_{s+t_0}^* \omega)_p \tag{53}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\varphi_{t_0}^* \varphi_s^* \omega)_p \tag{54}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (d(\varphi_{t_0})_p)^* (\varphi_s^* \omega)_{\varphi_{t_0}(p)} \tag{55}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (d(\varphi_{t_0})_p)^* (d(\varphi_s)_{\varphi_{t_0}(p)})^* \omega_{\varphi_s \varphi_{t_0}(p)} \tag{56}$$

$$= (d(\varphi_{t_0})_p)^* \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (d(\varphi_s)_{\varphi_{t_0}(p)})^* \omega_{\varphi_s \varphi_{t_0}(p)} \right) \quad (\text{連続性}) \tag{57}$$

$$= (d(\varphi_{t_0})_p)^* \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (\varphi_s^* \omega)_{\varphi_{t_0}(p)} \right) \tag{58}$$

$$= (d(\varphi_{t_0})_p)^* (L_X\omega)_{\varphi_{t_0}(p)} \tag{59}$$

$$= (\varphi_{t_0}^*(L_X\omega))_p \tag{60}$$

だからである。よって $L_X\omega = 0$ なら $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\varphi_t^* \omega)_p = 0$ だから $(\varphi_t^* \omega)_p$ は t によらず一定で、したがって $(\varphi_t^* \omega)_p = \omega_p$ を得る。

(4)　(3) との同値を示す。

(4) ⇒(3):　Cartan のホモトピー公式 $L_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X d\omega$ より明らか。

(3) ⇒(4):

[TODO] わからない □

♤ 演習問題 0.5 (問 5).

解答. (1)　E が向きづけ可能なら $\bigwedge^1 E = E$ が自明束だから大域自明化が存在する。

(2-i, ii)　$[0, 1] \times \mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を $(0, y) \sim (1, -y)$ により生成されるものとして定め、$E := ([0, 1] \times \mathbb{R})/\sim$ とおき、商写像を p とおく。ベクトル束

$$\pi \colon E \to S^1, \quad p(x, y) \mapsto e^{2\pi i x} \tag{61}$$

は向きづけ不可能であることを示す。E が向きづけ可能であったとすると E はベクトル束と

して $S^1\times\mathbb{R}$ と同型だからとくに同相写像 $\varphi\colon E\to S^1\times\mathbb{R}$ が存在する。$K:=S^1\times\{0\}\subset S^1\times\mathbb{R}$、$L:=\varphi^{-1}(K)$ とおく。K はコンパクトだから L もコンパクトである。このとき $p^{-1}(L)$ は $[0,1]\times\mathbb{R}$ の有界閉集合である。よってある $a>0$ が存在して $[0,1]\times[-a,a]\supset p^{-1}(L)$、したがって $L':=p([0,1]\times[-a,a])\supset L$ となる。L' はコンパクトだから $K':=\varphi(L')$ もコンパクトである。したがってある $b>0$ が存在して $S^1\times(-b,b)\supset K'\supset K$ をみたす。よって $(S^1\times\mathbb{R})\setminus K'$ は連結でない。一方 $E\setminus L'$ は連結である。これで矛盾がいえた。 □

♤ **演習問題 0.6** (問 6).

解答. (1) 同型 $H^0_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\mathbb{R}$ は $c\in\mathbb{R}$ と定数関数 $S^1\to\mathbb{R}, z\mapsto c$ を対応させることで定める。

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) & \xrightarrow{f_n^*} & H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 1 & \longmapsto & [1] & \longmapsto & f_n^*[1]=[1\circ f_n]=[1] & \longmapsto & 1\end{array} \tag{62}$$

より f_n^* は恒等写像である。

(2) S^1 には単位閉円板 D^2 の境界としての向きが入っているとする。S^1 の極座標を θ とおくと $d\theta$ は S^1 の体積形式である。$d\theta$ に関する S^1 の体積は $\displaystyle\int_{S^1}d\theta=2\pi$ だから基本コホモロジー類は $[S^1]=\dfrac{1}{2\pi}[d\theta]$ である。同型 $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)\cong\mathbb{R}$ は $1\in\mathbb{R}$ と $[S^1]$ を対応させることで定める。

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) & \xrightarrow{f_n^*} & H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 1 & \longmapsto & [S^1] & \longmapsto & f_n^*[S^1]=\dfrac{1}{2\pi}[d(\theta\circ f_n)]=n[S^1] & \longmapsto & n\end{array} \tag{63}$$

より f_n^* は n 倍写像である。 □