# 振り返りと導入

- [TODO]

## 1 Amari-Chentsov テンソル

Amari-Chentsov テンソルを定義する。

**命題-定義 1.1** (Amari-Chentsov テンソル). $\mathcal{P}$ は開であるとし、$D$ を $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の標準的な [TODO] とは?平坦アファイン接続、$\theta^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の $D$-アファイン座標とする。$\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の写像 $S \colon \Theta^{\mathcal{P}} \to T^{(0,3)}\Theta^{\mathcal{P}}$ を

$$\theta \mapsto S_\theta := E_{P(\theta)}[(T - E_{P(\theta)}[T])^{\otimes 3}] \tag{1.1}$$

で定めると [TODO] 値域あってる?、座標 $\theta^i$ に関する $S$ の成分表示は

$$S = \partial_i \partial_j \partial_k \psi \, d\theta^i d\theta^j d\theta^k \tag{1.2}$$

となる。とくに $\psi$ の $C^\infty$ 性より $S$ は対称 $(0,3)$-テンソル場となる。$S$ を **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** と呼ぶ。

**証明** 成分表示は `0516_資料.pdf` の系 2.4 を使って式変形すればわかる。 □

**命題-定義 1.2** ($\mathcal{P}$ の Amari-Chentsov テンソル). $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 $(V, T, \mu)$ をひとつ選ぶと、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Amari-Chentsov テンソル $S$ を $\theta$ で引き戻して $\mathcal{P}$ 上の対称 $(0,3)$-テンソル場 $\theta^* S$ が定まる。このテンソル場は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ 上の **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** と呼ぶ。

**証明** $S$ の定義より $L^{\otimes 3} S'_{\theta'} = S_\theta$ が成り立つから、Fisher 計量の場合と同様の議論により $\theta^* S = \theta'^* S'$ が成り立つ。 □

## 2 期待値パラメータ空間

**定義 2.1** (期待値パラメータ空間). 集合 $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$

$$\mathcal{M}_{(V,T,\nu)} := \left\{ \mu \in V \mid \exists\, p \colon \mathcal{X} \text{ 上の確率分布 s.t. } p \ll \nu,\ E_p[T] = \mu \right\} \tag{2.1}$$

を $(V, T, \nu)$ の**期待値パラメータ空間 (mean parameter space)** という。

期待値パラメータ空間 $\mathcal{M}$ は、$\mathcal{P}$ に属する確率分布に関する $T$ の期待値をすべて含んでいる (一般には真に含んでいる)。

**命題 2.2.** $\mu \in V$ がある $p \in \mathcal{P}$ に関する $T$ の期待値ならば (すなわち $\mu = E_p[T]$ ならば)、$\mu$ は $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ に属する。

**証明** [TODO] □

**命題 2.3** ($\mathcal{M}$ は凸集合). $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ は $V$ の凸集合である。

**証明** [TODO] □

## 3 Fisher 計量

**例 3.1** (正規分布族). [TODO] ちゃんと書く $\mathcal{P}$ を $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上の正規分布族とし、実現 $(V, T, \mu)$ を $V = \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, x^2)$, $\mu = \lambda$ とおく。これは条件 A をみたす。

自然パラメータ空間は $\Theta = \Theta^\circ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。

対数分配関数は

$$\psi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{3.1}$$

である。ただし $\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ とおいた。よって

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\mu}{\sigma^2} d\mu + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\sigma^3} d\sigma & (3.2) \\ &= -\frac{\theta^1}{2\theta^2} d\theta^1 + \left( -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{4(\theta^2)^2} \right) d\theta^2 & (3.3) \\ \operatorname{Hess}\psi &= D d\psi & (3.4) \\ &= \left( -\frac{1}{2\theta^2} d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2} d\theta^2 \right) d\theta^1 + \left( \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2} d\theta^1 + \left( \frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3} \right) d\theta^2 \right) d\theta^2 & (3.5) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 & (3.6) \end{aligned}$$

である。Fisher 計量 $g := \operatorname{Hess}\psi$ から定まる Levi-Civita 接続 $\nabla^{(g)}$ の、座標 $\mu, \sigma$ に関する接続係数を求めてみる。

$$\begin{aligned} &\Gamma^{(g)}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(g)}{}^1_{12} = \Gamma^{(g)}{}^1_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)}{}^1_{22} = 0, & (3.7) \\ &\Gamma^{(g)}{}^2_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)}{}^2_{12} = \Gamma^{(g)}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(g)}{}^2_{22} = -\frac{1}{\sigma} & (3.8) \end{aligned}$$

測地線の方程式は

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y} x' y' = 0 \\ y'' + \frac{1}{2y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

である。これを直接解くのは少し大変である。その代わりに、既知の Riemann 多様体との間の等長同型を利用して測地線を求める。$(\Theta, g)$ は、上半平面 $H$ に計量 $\breve{g} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2y^2}$ を入れた Riemann 多様体との間に等長同型 $(\Theta, g) \to (H, \breve{g})$, $(x, y) \mapsto (x, \sqrt{2}y)$ を持つ。Levi-Civita 接続に関する測地線は等長同型で保たれるから、$(H, \breve{g})$ の測地線を求めればよい。$(H, \breve{g})$ の測地線は、$y$ 軸に平行な直線と $x$ 軸上に中心を持つ半円で尽くされることが知られている。これらを等長同型で写して、$(\Theta, g)$ の測地線として $y$ 軸に平行な直線と $x$ 軸上に長軸を持つ半楕円が得られる。

## 今後の予定

- [TODO]

# 参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).