2016 A1. (1) A_1 の階数は A_1 の $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な行ベクトルの最大個数に等しい。したがって、$a = 0$ または $a = 1$ のとき $\operatorname{rank} A_1 = 3$ であり、$a \neq 0, a \neq 1$ のとき $\operatorname{rank} A_1 = 4$ である。

(2) 答えは $a = 1$ で尽くされることを以下で示す。

まず $a = 0, 1$ が必要であることを示す。そこで $a \neq 0,\ a \neq 1$ を仮定すると、(1) より $\dim V_1 = 5 - 4 = 1$ であり、$\operatorname{rank} A_2 = 4$ より $\dim V_2 = 5 - 4 = 1$ であり、さらに $\dim V_3 = 2$ である。したがって $\dim(V_1 + V_2 + V_3) \leq 1 + 1 + 2 = 4 < 5$ となり、$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$ とはなりえない。よって $a \neq 0,\ a \neq 1$ が必要である。

$a = 0$ の場合を考える。各 $v \in \mathbb{C}^5$ に対し v の第 2 成分を $(v)_2$ と書くことにすれば、任意の $v_i \in V_i\ (i = 1, 2, 3)$ に対し $(v_1)_2 = (A_1 v_1)_2 = 0,\ (v_2)_2 = (A_2 v_2)_2 = 0,\ (v_3)_2 = 0$ が成り立つから、$e_2 \notin V_1 + V_2 + V_3$ である。よって $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$ とはなりえない。

$a = 1$ の場合を考える。明らかに $V_3 = \mathbb{C}\,{}^t(1, 1, 0, 0, 0)$ である。また、${}^t(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{C}^5$ が V_1 に属する条件は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in V_1 \iff \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \exists s, t \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -s \\ x_5 = t \end{cases} \tag{0.1}$$

となるから $V_1 = \mathbb{C}\,{}^t(1, 0, 0, -1, 0) \oplus \mathbb{C}\,{}^t(0, 0, 0, 0, 1)$ である。同様にして $V_2 = \mathbb{C}\,{}^t(1, 0, 1, -1, 0) \oplus \mathbb{C}\,{}^t(0, 1, 0, 0, 0)$ を得る。以上の V_1, V_2, V_3 の基底たちを並べた行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は行と列の基本変形により単位行列となるから階数は 5 で、したがって正則である。よってこの行列の列ベクトルは $\mathbb{C}^5$ の基底であり、$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$ が示された。 □

2016 A2. (1) $I_n := \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx\ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とおくと、$n = 0$ に対しては

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \{-\cos x\}_0^{\pi/2} = 1 \tag{0.2}$$

であり、各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対しては部分積分より

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx \tag{0.3}$$

$$= \left\{-\cos x (\sin x)^{2n}\right\}_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2n \cos^2 x (\sin x)^{2n-1}\, dx \tag{0.4}$$

$$= 2n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)(\sin x)^{2n-1}\, dx \tag{0.5}$$

$$= 2n I_{n-1} - 2n I_n \tag{0.6}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \tag{0.7}$$

となる。したがって $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \cdots \frac{2}{3}$ である。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ が優級数となることを示せばよい。まず、この級数が収束することは $\frac{1}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ より従う。また、各 $n \geq 0$ に対し

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sin x)^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \quad (\forall x \in [0, \pi/2]) \tag{0.8}$$

が成り立つ。したがって、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ を優級数として $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sin x)^{2n+1}$ は $[0, \pi/2]$ 上一様収束する。

(3) 求める答えは 0.89 であることを示す。そのためには

$$\left| \int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx - 0.895 \right| < 0.005 \tag{0.9}$$

の成立を示せば十分である。まず所与の積分を式変形すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sin x)^{2n+1}\, dx && (0.10)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx \qquad (\text{一様収束性より項別積分が可能}) && (0.11)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} I_n && (0.12)
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx - 0.895 \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} I_n - 0.895 \right| && (0.13)\\
&\leq \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} I_n \right| + \left| \left(I_0 - \frac{1}{3!} I_1 + \frac{1}{5!} I_2 \right) - 0.895 \right| && (0.14)
\end{aligned}$$

の右辺を評価すればよい。

まず (0.14) の第 1 項を評価すると

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} I_n \right| &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad (|I_n| \leq 1) && (0.15)\\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10^n} \qquad (*) && (0.16)\\
&= \frac{1}{10^3} \frac{1}{9} && (0.17)\\
&\leq \frac{1}{10^3} \frac{1}{8} && (0.18)\\
&= 0.00125 && (0.19)
\end{aligned}$$

を得る。ただし (*) の式変形は、帰納法よりすべての $n \geq 3$ に対し $(2n+1)! \geq 10^n$ が成り立つことを用いた。

次に (0.14) の第 2 項を評価すると

$$\begin{aligned}
\left| \left(I_0 - \frac{1}{3!} I_1 + \frac{1}{5!} I_2 \right) - 0.895 \right| &= \left| 1 - \frac{1}{3!} \frac{2}{3} + \frac{1}{5!} \frac{4}{5} \frac{2}{3} - 0.895 \right| && (0.20)\\
&= \left| \frac{105}{1000} - \frac{1}{3!} \frac{2}{3} + \frac{1}{5!} \frac{4}{5} \frac{2}{3} \right| && (0.21)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} &(0.22)\\
&= \frac{30}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3} &(0.23)\\
&< \frac{36}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3} &(0.24)\\
&= \frac{4}{2^4 \cdot 5^3} &(0.25)\\
&= 0.002 &(0.26)
\end{aligned}
$$

を得る。

以上の評価を用いて (0.14) から

$$\left| \int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx - 0.895 \right| < 0.00125 + 0.002 < 0.005 \tag{0.27}$$

が得られた。 □

2016 A4. (1) 以下 $T \in \mathbb{R}$ は固定し、$S_T := \{x \in X \mid g(x) \leq T\}$ とおいておく。$X = \mathbb{R}^n$ だから、Heine-Borel の定理より、S_T がコンパクトであることを示すには S_T が X で有界かつ閉であることを示せばよい。

Step 1: S_T が閉であること　S_T は $\mathbb{R}$ の閉集合 $(\infty, T]$ の g による逆像であり、また g はふたつの連続写像 $d_Y(-, y_0)\colon Y \to \mathbb{R}$ および $f\colon X \to Y$ の合成ゆえに連続だから、S_T は X で閉である。

Step 2: S_T が有界であること　任意の $x \in S_T$ に対し $d_X(x, x_0) \in T + d_Y(f(x_0), y_0)$ が成り立つことを示せば十分。

$$
\begin{aligned}
d_X(x, x_0) &\leq d_Y(f(x), f(x_0)) \qquad (\text{問題の仮定}) &(0.28)\\
&\leq d_Y(f(x), y_0) + d_Y(f(x_0), y_0) &(0.29)\\
&\leq g(x) + d_Y(f(x_0), y_0) &(0.30)\\
&\leq T + d_Y(f(x_0), y_0) \qquad (g(x) \in S_T) &(0.31)\\
& &(0.32)
\end{aligned}
$$

より、S_T は有界である。

以上より S_T は X で有界かつ閉だから、コンパクトである。

(2)　$T_0 := g(x_0)$ とおくと、集合 S_{T_0} は (1) よりコンパクトであり、x_0 を含むから非空である。よって連続関数 g の S_{T_0} 上への制限は、非空コンパクト空間上の連続関数だから最小値をもつ。すなわち、ある $x_1 \in S_{T_0}$ が存在して、すべての $x \in S_{T_0}$ に対し $g(x) \geq g(x_1)$ が成り立つ。このとき $g(x_1)$ は X 上の g の最小値でもある。実際、$x \in X$ に関し $x \in S_{T_0}$ ならば $g(x) \geq g(x_1)$ であるし、$x \notin S_{T_0}$ ならば $g(x) > T_0 \geq g(x_1)$ である。よって g は X 上で最小値をもつことが示された。 □

2016 A6. 求める解のひとつは

$$\begin{cases} x(t) = (t^2 + 2t)e^{2t} \\ y(t) = (-2t^2 - 2t + 1)e^{2t} \end{cases} \tag{0.33}$$

であり、初期値問題の解の一意性より、これが求める解のすべてである。以下に求め方を記す。

所与の方程式から y を消去すると

$$x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} \tag{0.34}$$

を得る。この斉次解は $x = ce^{2t}$, (c は任意定数) である。定数変化法により c を t の関数とみると

$$x'' - 4x' + 4x = c''e^{2t} \tag{0.35}$$

となるから、(0.34) と比較して $c'' = 2$、したがって $c = t^2 + c_0 t + c_1$ (c_0, c_1 は任意定数) を得る。よって $x = (t^2 + c_0 t + c_1)e^{2t}$ であるが、初期条件 $x(0) = 0$ より $c_1 = 0$ だから $x = (t^2 + c_0 t)e^{2t}$ である。所与の方程式の第 1 式より

$$y = x' - 4x - e^{2t} \tag{0.36}$$

$x = (t^2 + c_0 t)e^{2t}$ を代入して整理すると

$$= (-2t^2 + 2(-c_0 + 1)t + c_0 - 1)e^{2t} \tag{0.37}$$

を得る。初期条件 $y(0) = 1$ より $c_0 = 2$ を得る。以上より $x(t) = (t^2 + 2t)e^{2t}$, $y(t) = (-2t^2 - 2t + 1)e^{2t}$ が得られた。 $\square$