第 1 章　初等解法

この章では初等解法について述べる。

1.1　変数分離形

[TODO]

1.2　同次形

同次形の微分方程式について述べる1)。

[TODO]

1.3　1 階線型常微分方程式

定義 1.3.1 (1 階線型常微分方程式)**.**

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.3.1}$$

の形の微分方程式を **1 階線型常微分方程式** という。

定数係数の場合は後の §3 の内容でカバーされるので、ここでは変数係数の場合を列挙する。ちなみに、変数係数の場合は未定係数法が使えないことに注意せよ。

A.　定数変化法

同次方程式の一般解の任意定数の部分を未知変数に置き換え、その未知変数に関する微分方程式を解くことで非同次方程式の解を求める方法を**定数変化法** という。

例 1.3.2 (定数変化法)**.** [TODO]

B.　ベルヌーイの微分方程式

[TODO]

C.　リッカチの微分方程式

[TODO]

1)　ここでいう「同次」は、線型常微分方程式の「同次」とは異なる概念である。

1.4 完全形

定義 1.4.1 (全微分方程式と完全形). 微分方程式 $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ を

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4.1}$$

の形に書いたものを**全微分方程式**という。さらに、局所的に或る C^2 級関数 Φ を用いて

$$P(x,y) = \Phi_x(x,y), \quad Q(x,y) = \Phi_y(x,y) \tag{1.4.2}$$

と書けるとき**完全形**であるという。

定義 1.4.2 (積分因子). 全微分方程式が完全形でなくとも、或る $\lambda(x,y) \neq 0$ により

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y) = 0 \tag{1.4.3}$$

が完全形になることがある。このような $\lambda(x,y)$ を**積分因子**という。

全微分方程式が完全形のとき

$$d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0 \tag{1.4.4}$$

と書けるから、一般解は

$$\Phi = C \tag{1.4.5}$$

となる。

定理 1.4.3 (2.4.1). 全微分方程式が完全形であることと

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad ((x,y) \in U) \tag{1.4.6}$$

が成り立つこととは同値である。

証明. 必要条件であることは明らか。十分条件であることは

$$\Phi(x,y) = \int_\alpha^x P(s,y)\,ds + \int_\beta^y Q(\alpha,t)\,dt \tag{1.4.7}$$

とおいて変形していけば示せる。 □

全微分方程式の解法は以下の通りである。

(1) 全微分方程式の形に書き直し、

(2) P_y, Q_x を求めて完全形か否かを確かめ、

$$\underbrace{P(x,y)}_{\downarrow \atop P_y}\ dx + \underbrace{Q(x,y)}_{\downarrow \atop Q_x}\ dy = 0 \tag{1.4.8}$$

(3) 完全形でなければ、元の方程式の代わりに次の方程式を考える。

$$(\lambda P)\, dx + (\lambda Q)\, dy = 0 \tag{1.4.9}$$

(a) 積分因子タイプ 1 の場合は $\lambda \coloneqq x^{\alpha} y^{\beta}$ と置く。

(b) 積分因子タイプ 2 の場合は $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ が x のみの関数になることを利用して $\lambda \coloneqq \lambda(x)$ とおく（y の場合も同様)。

1.5 演習問題

♤ **演習問題 1.1** (2.1.2 変数分離形). (1) ロジスティック方程式

$$y' = (a - by)y, \quad a, b > 0 \tag{1.5.1}$$

を解け。(ヒント: 解の一意性より、ある点 $x = x_0$ で $y(x_0) = a/b$ をみたすとすれば $y(x) \equiv a/b$ でなければならないことがわかる。)

(2) 次の微分方程式を解け。

$$y' = \sin x \tan y \tag{1.5.2}$$

♤ **演習問題 1.2.**

$$y' = \sqrt{ax + by + c} \tag{1.5.3}$$

(ヒント: 根号の中身を u とおけば変数分離形に帰着できる。)

♤ **演習問題 1.3** (2.2.1 同次形).

$$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} \tag{1.5.4}$$

(ヒント: $z := \dfrac{y}{x}$ とおくことで変数分離形に帰着できる。)

♤ **演習問題 1.4** (2.2.2).

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \tag{1.5.5}$$

(ヒント: 分母分子を x^2 で割ることで同次形に帰着できる。)

♤ **演習問題 1.5** (2.2.3).

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x + y - 4} \tag{1.5.6}$$

(ヒント: $ad - bc \neq 0$ なので平行移動により同次形に帰着できる[2)]。)

♤ **演習問題 1.6** (2.2.3′).

$$y' = \frac{x - y + 3}{-x + y - 4} \tag{1.5.7}$$

(ヒント: $ad - bc = 0$ なので分子または分母を z とおくことで変数分離形に帰着できる。)

♤ **演習問題 1.7** (2.2.4 同次形の一般化).

$$y' = \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x^2} + 1\right) \tag{1.5.8}$$

(ヒント: $f(\lambda x, \lambda^2 y) = \lambda^{2-1} f(x, y)$ なので、$z := \dfrac{y}{x^2}$ とおくことで変数分離形に帰着できる。)

---

2) いきなり $z = \dfrac{y-2}{x-1}$ と置いてもよいが、一旦 $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$ と置いたほうが見通しが良い。

♤ **演習問題 1.8** (2.3.1).

$$y' = xy - x^3 \tag{1.5.9}$$

(ヒント: 非同次 1 階線型なので定数変化法によって解ける。)

♤ **演習問題 1.9** (2.3.2).

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \cos x \tag{1.5.10}$$

定数変化法によって解ける。

♤ **演習問題 1.10** (2.3.3).

$$y' = xy - x^5 \tag{1.5.11}$$

の解のひとつが $y = x^4 + 4x^2 + 8$ であることを利用して一般解を求めよ。

♤ **演習問題 1.11** (2.3.4). 非斉次項が $Q(x)y^m$ であるようなものを**ベルヌーイの微分方程式**という [3)]。

$$y' = -xy + x^3y^4 \tag{1.5.12}$$

$z := y^{1-m}$ とおくと 1 階線型に帰着できる。

♤ **演習問題 1.12** (2.3.5). 正規形で表したときに右辺が y の 2 次式になるものを**リッカチの微分方程式**という [4)]。

$$y' = y^2 + (2-x)y - 2x + 1 \tag{1.5.13}$$

の解のひとつが $\varphi(x) = x$ であることを利用して一般解を求めよ。$z := y - \varphi(x)$ とおくとベルヌーイの微分方程式に帰着できる。

♤ **演習問題 1.13.** 教科書の問 2.3, 問 2.4 を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 1.14** (2.4.2 完全形).

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + \cos y} \tag{1.5.14}$$

解答：

$$x^2y + \sin y = C \tag{1.5.15}$$

♤ **演習問題 1.15** (2.4.3 積分因子タイプ 1).

$$(3x + 2y)y\,dx + (2x + 3y)x\,dy = 0 \tag{1.5.16}$$

3) 忘れがちだが、たとえば $m = 1/2$ などの場合にも適用できる。
4) 右辺が y の 1 次式となるものは 1 階線型常微分方程式である。

解答：

$$x^3y^2 + x^2y^3 = C \tag{1.5.17}$$

♤ **演習問題 1.16** (2.4.4 積分因子タイプ 2)**.**

$$(x^2 + y)dx - x\,dy = 0 \tag{1.5.18}$$

解答：

$$y = x^2 - Cx \tag{1.5.19}$$

♤ **演習問題 1.17.** 教科書の問 2.5, 問 2.7 を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 1.18.** **[?**] 第 2 章例題 1-9 を読者の演習問題とする。