偏微分方程式と Fourier 変換

Yahata

概要

偏微分方程式と Fourier 変換について整理する。

目次

第 I 部

1 階偏微分方程式

この部では、偏微分方程式の基礎概念と 1 階偏微分方程式を扱う。

第 1 章　偏微分方程式の基礎

偏微分方程式の基礎概念を述べる。

1.1　解の存在と一意性

1.2　Sobolev Spaces and Weak Solutions

定義 1.2.1 (Sobolev Spaces)**.** [TODO]

第 2 章　1 階偏微分方程式

1 階偏微分方程式の一般論を述べた後、簡単な例に触れる。

2.1　1 階偏微分方程式

定義 2.1.1 (1 階偏微分方程式)**.** $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし、$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}$ を写像とする。未知関数 $u\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ に対し、式

$$F(Du, u, x) = 0 \quad (x \in U) \tag{2.1.1}$$

を **1 階偏微分方程式 (first-order partial differential equation)** という。

第 II 部

2 階線型偏微分方程式

この部では 2 階偏微分方程式を扱う。

第 3 章　Laplace 方程式

あらゆる偏微分方程式のうち最も重要なものが Laplace 方程式である。

3.1　基本解

定義 3.1.1 (Laplace 方程式). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする。未知関数 $u\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ に対し、式

$$\Delta u = 0 \quad (x \in U) \tag{3.1.1}$$

を **Laplace 方程式 (Laplace's equation)** という。

定義 3.1.2 (調和関数). Laplace 方程式をみたす C^2 関数を**調和関数 (harmonic function)** という。

定義 3.1.3 (Poisson 方程式). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし、$f\colon U \to \mathbb{R}$ を写像とする。未知関数 $u\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ に対し、式

$$-\Delta u = f \quad (x \in U) \tag{3.1.2}$$

を **Poisson 方程式 (Poisson's equation)** という。

一般に偏微分方程式の解を求めるとき、或る種の対称性を持った関数のクラスから始めるとよい場合が多い。いま Laplace 方程式は回転不変性を持つ (問題 3.1) から、解が

$$u(x) = v(r), \quad r = |x| \tag{3.1.3}$$

の形に書けると仮定して v を求める。すると $r > 0$ のとき

$$v(r) = \begin{cases} b\log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

(b, c は定数) が解となることがわかる。そこで次のように定義する[1]:

定義 3.1.4 (基本解). 関数 $\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases} \tag{3.1.5}$$

を Laplace 方程式の**基本解 (fundamental solution)** という。ただし、$\alpha(n)$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積である。

例 3.1.5 (基本解の例).

1)　これは超関数に関する Malgrange–Ehrenpreis の定理の具体例の一つである。

- $n = 3$ のときの基本解は

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3.1.6}$$

で与えられる。

Poisson 方程式の非斉次項 f の属するクラスを $C_c^2(\mathbb{R}^2)$ に制限すれば、基本解と f の畳み込みで Poisson 方程式の解が得られる。

定理 3.1.6 (Poisson 方程式の解). $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ とし、$u := \Phi * f$ とする。このとき

(1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(2) $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$

が成り立つ。

証明. cf. [Evans] p.23 □

♤ **演習問題 3.1** (Laplace 方程式の回転不変性). u が Laplace 方程式の解ならば、直交行列 A に対し $v(x) := u(Ax)$ も解であることを示せ。

3.2 Mean-Value Formulas

定義 3.2.1 (平均値の記法). $D \subset \mathbb{R}^n$ 上の f の値の平均値を

$$⨍_D f(x)dx := \frac{1}{\mu(D)} \int_D f(x)dx \tag{3.2.1}$$

と書くことにする。

定理 3.2.2 (Gauss の平均値定理). u を $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ 上の調和関数とする。このとき、任意の球 $B(x,r) \subset U$ に対し

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\, dV(y) = ⨍_{B(x,r)} u(y)\, dV(y) \tag{3.2.2}$$

が成り立つ。ただし第 2, 3 項の積分は体積形式の積分である。

証明. 第 1 の等号について示す。関数 $\varphi(r)$ を

$$\varphi(r) := ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\, dV(y) \tag{3.2.3}$$

と定める。変数変換により

$$\varphi(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x + rz)\, dV(z) \tag{3.2.4}$$

が成り立つことに注意する。$\varphi(r)$ が定数 $u(x)$ であることを示す。そこで $\varphi'(r)$ を計算すると

$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr} u(x + rz)\, dV(z) \tag{3.2.5}$$

$$= \fint_{\partial B(0,1)} \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} u(x+rz) z^i \, dV(z) \tag{3.2.6}$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} u(y) \frac{y^i - x^i}{r} \, dV(y) \tag{3.2.7}$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} \left\langle \operatorname{grad} u, \underbrace{\sum_i \frac{y^i - x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\frac{\partial}{\partial n} \text{とおく}} \right\rangle_g dV(y) \tag{3.2.8}$$

$$= \frac{1}{\mu(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} \left\langle \operatorname{grad} u, \frac{\partial}{\partial n} \right\rangle_g dV(y) \tag{3.2.9}$$

$$= \frac{1}{\mu(\partial B(x,r))} \int_{B(x,r)} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, dV(y) \quad \text{(発散定理)} \tag{3.2.10}$$

$$= 0 \tag{3.2.11}$$

となる。ただし、g は $B(x,r)$ 上の誘導計量である。したがって $\varphi(r)$ は定数であるが、

$$\lim_{r\to 0} \varphi(r) = \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B(x,r)} u(y) \, dV(y) = u(x) \tag{3.2.12}$$

だから $\varphi(r) = u(x)$ を得る。[TODO] 第 2 の等式 □

定理 3.2.3 (平均値定理の逆). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.2.4 (最大値原理). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.2.5 (最小値原理). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.2.6 (境界値問題の一意性). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし、$g \in C^0(\partial U), f \in C^0(U)$ とする。このとき、次の境界値問題の解 $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ は一意に定まる：

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad U \tag{3.2.13}$$

$$u = g \quad \text{on} \quad \partial U \tag{3.2.14}$$

証明. $u, \tilde{u}$ が定理の境界値問題の解であるとする。このとき $u - \tilde{u}$ は U 上調和で ∂U 上で恒等的に 0 だから、最大値原理および最小値原理より $\max_{x\in\overline{U}}(u(x) - \tilde{u}(x)) = \min_{x\in\overline{U}}(u(x) - \tilde{u}(x)) = 0$ が成り立つ。したがって $u, \tilde{u}$ は $\overline{U}$

上恒等的に一致する。 □

3.3 解の滑らかさ

定理 3.3.1 (正則性). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.3.2 (導関数の評価). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.3.3 (解析性). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする。u を U 上の調和関数ならば、u は U 上解析的である。

証明. [TODO] □

定理 3.3.4 (Liouville の定理). $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が有界な調和関数ならば、u は定数関数である。

証明. [TODO] □

定理 3.3.5 (積分表示). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 3.3.6 (Harnack の不等式). [TODO]

証明. [TODO] □

3.4 Poisson 方程式

簡単な形をした有界領域では、Green 関数が具体的に構成でき、それを用いて Poisson 方程式を解くことができる。

[TODO] 以下の定義や定理では U は有界か？

定義 3.4.1 (Green 関数). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を領域、$x \in U$ とし、境界値問題

$$\Delta\phi^x = 0 \quad \text{in} \quad U \tag{3.4.1}$$

$$\phi^x = \Phi(y - x) \quad \text{on} \quad \partial U \tag{3.4.2}$$

の解を ϕ^x とする。関数

$$G(x,y) := \Phi(x-y) - \phi^x(y) \quad x,y \in U,\ x \neq y \tag{3.4.3}$$

を領域 U に対する **Green 関数 (Green function)** という。

定理 3.4.2 (Poisson 方程式の境界値問題の解)**.** $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を領域とし、U に対する Green 関数を G とする。
[TODO]

証明. [TODO] □

3.5 固有値問題

3.6 Dirichlet 問題と Neumann 問題

3.7 2 階楕円型方程式

一般の 2 階楕円型方程式では偏微分方程式を直接扱う必要がある。

定義 3.7.1 (弱解)**.** [TODO]

一般の 2 階楕円型方程式について古典解の存在を示すのは難しいが、弱解の存在は Lax-Milgram の定理により簡単に示せる。

定理 3.7.2 (Lax-Milgram の定理)**.** [TODO]

証明. [TODO] □

第 4 章　熱伝導方程式

例 4.0.1 (同次 1 次元熱伝導方程式). [TODO]

例 4.0.2 (非同次 1 次元熱伝導方程式). [TODO]

4.1 Fundamental Solutions

4.2 Mean-Value Formula

4.3 Properties of Solutions

4.4 Method of Fourier Series Expansion

第 5 章　波動方程式

例 5.0.1 (1 次元波動方程式)**.**

例 5.0.2 (2 次元波動方程式)**.**

例 5.0.3 (Huygens の原理)**.** cf. [Evans] p.80

5.1 Solution by Spherical Means

$n = 1, 2, 3$ の場合をそれぞれみる。

第 III 部

Fourier 変換

fuga

第 6 章　トーラス上の Fourier 変換

6.1 Fourier Coefficients and Summation Methods

定義 6.1.1 (Fourier 係数)**.** $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。各 $n \geq 0$ に対し

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{6.1.1}$$

を f の**第 n Fourier 係数**という。

定義 6.1.2 (Fourier 部分和)**.** $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。各 $N \geq 0$ に対し

$$S_N(f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int} \tag{6.1.2}$$

を f の**第 N Fourier 部分和**という。

次の定理は、Fourier 変換/逆変換に対する反転公式の、Fourier 係数/級数に対する類似物である。

定理 6.1.3. $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ ならば、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{T} \tag{6.1.3}$$

が成り立つ。

証明. 省略 □

6.2 Fourier Transform of L^2 functions

6.3 Trigonometric Series

第 7 章　$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換

7.1　Fourier 変換の基本性質

定義 7.1.1 (Fourier 変換). $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。$\mathbb{R}$ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{7.1.1}$$

で定義し、これを f の **Fourier 変換 (Fourier transform)** という。$\widehat{f}$ を $f^\wedge$ とも書く。$\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$ とおき、$\mathbb{R}, \widehat{\mathbb{R}}$ の座標をそれぞれ x, ξ で表すことが多い。

命題 7.1.2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し、$\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上一様連続である。

証明.

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}) dx \right| && (7.1.2)\\
&\le \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-i\eta x} - 1| dx && (7.1.3)\\
&\le 2\|f\|_1 && (7.1.4)\\
&< \infty && (7.1.5)
\end{aligned}$$

より、(7.1.3) は $\eta \in \widehat{\mathbb{R}}$ に関し可積分であり、優収束定理より $\eta \to 0$ で 0 に収束する。 □

命題 7.1.3. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}\times\mathcal{F}"] \arrow[d, "たたみ込み"'] & C_0(\mathbb{R}) \times C_0(\mathbb{R}) \arrow[d, "各点での積"] \\
L^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & C_0(\mathbb{R})
\end{tikzcd} \tag{7.1.6}$$

ただし、$C_0(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であって $|x| \to \infty$ で 0 に収束するもの全体の集合である。

証明.　省略 □

7.2　The Dirichlet and Fejér Kernels

$\mathbb{T}$ の場合と同様に Dirichlet 核と Fejér 核を定義する。

定義 7.2.1 (Dirichlet 核). $\mathbb{R}$ 上の関数の族

$$D_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi x}d\xi \quad (\lambda > 0) \tag{7.2.1}$$

を **Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)** という。

命題 7.2.2.

$$D_\lambda(x) = \frac{\sin\lambda x}{\pi x} \quad (x \neq 0) \tag{7.2.2}$$

証明. 省略 □

定義 7.2.3 (Fejér 核). $\mathbb{R}$ 上の関数の族

$$K_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)e^{i\xi x}d\xi \quad (\lambda > 0) \tag{7.2.3}$$

を **Fejér 核 (Fejér kernel)** という。

命題 7.2.4.

$$K_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin(\lambda x/2)}{\lambda x/2}\right)^2 \quad (x \neq 0) \tag{7.2.4}$$

証明. 省略 □

定義 7.2.5 (総和核). 次をみたす $L^1(\mathbb{R})$ の元の族 $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ を $\mathbb{R}$ 上の**総和核 (summability kernel)** という：

(1) $\forall\lambda > 0$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)dx = 1$

(2) $\exists C > 0$ が存在して、$\forall\lambda > 0$ に対し $\|k_\lambda\|_1 \geq C$

(3) $\forall\delta > 0$ に対し、$\lambda \to \infty$ で $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} |k_\lambda(x)|dx \to 0$

例 7.2.6.

- Dirichlet 核は $\mathbb{R}$ 上の総和核ではない。
- Fejér 核は $\mathbb{R}$ 上の総和核である。

総和核のたたみ込みにより、関数の近似が得られる。

定理 7.2.7. $\{k_\lambda(x)\}_{\lambda>0}$ を $\mathbb{R}$ 上の総和核とする。このとき、

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 f が有界かつ一様連続ならば、$\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に $\mathbb{R}$ 上一様収束する。

(2) $1 \leq p < \infty$ と $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対し、$\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に L^p 収束する。

証明. 省略 □

定理 7.2.8 (Riemann-Lebesgue の補題)**.** 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し、$|\xi| \to \infty$ で $\widehat{f}(\xi) \to 0$

証明. 省略 □

Fejér 核を用いて次の定理が示せる。Fejér 核を用いた証明は $\mathbb{T}$ の場合と似ている。

定理 7.2.9 (反転公式)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし、$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ と仮定する。このとき、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \tag{7.2.5}$$

が成り立つ。

証明. 省略 □

7.3 Relations to Fourier Transform on $\mathbb{T}$

Fourier 係数と Fourier 変換の関連をみる。

定理 7.3.1 (各点収束性)**.** [TODO]

証明. 省略 □

7.4 Periodization

定義 7.4.1 (周期化)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。$\mathbb{T}$ 上の関数

$$F(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi k) \tag{7.4.1}$$

を f の**周期化 (periodization)** という。

定理 7.4.2 (Poisson の和公式)**.** [TODO]

証明. 省略 □

例 7.4.3 (Fejér 核)**.** [TODO]

例 7.4.4 (Dirichlet 核)**.** [TODO]

7.5 Schwartz Functions

$\mathbb{R}^d$ での話題に移る。

定義 7.5.1 (Fourier 変換). $f \in L^d(\mathbb{R})$ とする。ℝ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^d) \tag{7.5.1}$$

で定義し、これを f の **Fourier 変換 (Fourier transform)** という。

定義 7.5.2 (急減少). $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f が**急減少**であるとは、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $|x| \to \infty$ で $f(x) = o(|x|^{-k})$ となることをいう。

定義 7.5.3 (Schwartz 急減少関数). $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする。f が **Schwartz 急減少関数 (Schwartz function)** であるとは、任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha f$ が急減少であることをいう。$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbb{R}^d$ 上の Schwartz 急減少関数全体の集合を表す。

命題 7.5.4. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\partial_x^\alpha"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\xi^\alpha\times"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "x^\alpha\times"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \tag{7.5.2}$$

証明. 省略 □

定理 7.5.5 (反転公式). $f \in L^d(\mathbb{R})$ とし、$\widehat{f} \in L^d(\mathbb{R})$ と仮定する。このとき、

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d \tag{7.5.3}$$

が成り立つ。

証明. 省略 □

定理 7.5.6 (Planchrel の定理). [TODO]

証明. 省略 □

7.6 Some Partial Differential Equations

第 8 章　Distributions

8.1　Distributions

Distributions の定義と具体例を与える。

定義 8.1.1 (テスト関数)**.** $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とおく。$\mathcal{D}$ の元を**テスト関数 (test function)** という。

定義 8.1.2 ($\mathcal{D}$ の位相)**.** [TODO]

定義 8.1.3 (超関数)**.** $\mathcal{D}$ の位相的双対空間を $\mathcal{D}'$ と書き、$\mathcal{D}'$ の元を**超関数 (distribution)** という。$T \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}$ に対し $T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi \rangle$ とも書く。

例 8.1.4 (局所可積分関数)**.** [TODO]

命題 8.1.5 (変分法の基本補題)**.** [TODO]

証明.　省略 □

例 8.1.6 (Dirac のデルタ)**.** [TODO]

例 8.1.7 (波動方程式)**.** [TODO]

例 8.1.8 (Poisson 方程式)**.** [TODO]

8.2　Differentiation of Distributions

定義 8.2.1 (超関数の微分)**.** $T \in \mathcal{D}'$ と多重指数 α に対し、$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$ を

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}) \tag{8.2.1}$$

と定義する（ことができる）。

例 8.2.2 (Heaviside 関数)**.** [TODO]

定理 8.2.3 (2 次元 Laplace 方程式の基本解)**.** $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数

$$E(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{8.2.2}$$

は Laplacian Δ の基本解である。

証明. $\Delta T_E = \delta$ すなわち $\langle \Delta T_E, \varphi\rangle = \varphi(0)$ ($\varphi \in \mathcal{D}$) を示せばよい。積分の形で書けば

$$\int_{\mathbb{R}^2} E(x,y)\Delta\varphi(x,y)\,dxdy = \varphi(0,0) \tag{8.2.3}$$

である。ここで $\varepsilon > 0$ とし、

$$\Omega := \{(x,y)\colon x^2+y^2 \geq \varepsilon^2\} \tag{8.2.4}$$

とおく。Ω 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega := \varphi_x E\,dy \tag{8.2.5}$$

で定める。ω は compactly supported だから、Stokes の定理より

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega}\omega \tag{8.2.6}$$

が成り立つ。[TODO] □

8.3 Convolutions

8.4 Distributions with Compact Support

8.5 Tempered Distributions

Tempered distributions の Fourier 変換の基本性質を確かめる。

演習問題の解答

演習問題 3.1 の解答. $A = (a_{ij})_{i,j}$ とおく。

$$y_k \coloneqq \sum_{i_k} a_{i_k k} x_{i_n} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{8.5.1}$$

とおくと

$$v(x) = u(Ax) = u(y) \tag{8.5.2}$$

だから

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} v(x) = \sum_i \sum_j a_{ki} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} u(y) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{8.5.3}$$

が成り立つ。よって

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} v(x) = \sum_k \sum_i \sum_j a_{ki} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} u(y) \tag{8.5.4}$$

$$= \sum_i \sum_j \underbrace{\sum_k a_{ki} a_{kj}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} u(y) \tag{8.5.5}$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} u(y) \tag{8.5.6}$$

$$= 0 \tag{8.5.7}$$

が成り立つ。 □

参考文献

索引