発表中にコメントがあった命題などを整理する。

ベクトル値関数の可積分性は、次のように双対空間を用いると簡潔に定義できる。

定義 0.1 (ベクトル値関数の可積分性). $\mathcal{X}$ を可測空間、V を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、μ を $\mathcal{X}$ 上の測度、$f\colon \mathcal{X} \to V$ を可測写像とする。すべての $g \in V^\vee$ に対し $g \circ f \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$ が成り立つとき、f は μ に関し**可積分 (integrable)** であるという。

アファイン部分空間の定義を整理する。

定義 0.2 (アファイン部分空間). K を体、V を K-ベクトル空間、$A \subset V$ を部分集合とする。A が V の K 上の**アファイン部分空間 (affine subspace)** であるとは、次が成り立つことをいう: $\exists\,(S, v)$ s.t.

- **(A1)** $S \subset V$ は K-部分ベクトル空間である。
- **(A2)** $v \in V$ であり、$A = v + S$ が成り立つ。

次の命題より、アファイン部分空間に値を持つ写像の期待値も定義できる。

命題 0.3 (アファイン部分空間に値を持つ写像の積分). $\mathcal{X}$ を可測空間、p を $\mathcal{X}$ 上の確率測度、V を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$f\colon \mathcal{X} \to V$ を p-可積分写像とする。このとき、V のあるアファイン部分空間 A が存在して $f(x) \in A$ p-a.e.x が成り立つならば、$\int_{\mathcal{X}} f(x)\,p(dx) \in A$ となる。

証明 $f(x) \in A$ p-a.e.x より、$f(x) = v + \tilde{f}(x)$ なる p-可積分写像 $\tilde{f}\colon \mathcal{X} \to S$ が存在する。これより

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} f(x)\,p(dx) &= \int_{\mathcal{X}} (v + \tilde{f}(x))\,p(dx) && (0.1)\\
&= v + \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}(x)\,p(dx) \quad (p \text{ は確率測度}) && (0.2)\\
&\in v + S && (0.3)\\
&= A && (0.4)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

ベクトル値関数の可積分性の定義を q-乗可積分まで拡張し、また q-乗可積分関数全体の集合を $L^q(\mathcal{X}, p; V)$ と書くことにすれば、次が成り立つ。

補題 0.4 (分散の存在条件). 可測写像 $f\colon \mathcal{X} \to V$ に関し次の 2 条件は同値である:

(1) f および $(f - E_p[f]) \otimes (f - E_p[f])$ が p-可積分

(2) $f \otimes f$ が p-可積分

(3) $f \in L^2(\mathcal{X}, p; V)$

証明 (2) ⇒(3) 明らか。

(3) ⇒(2) Hölder の不等式を用いて示せる。 □

命題 0.5. V にノルム $\|\cdot\|$ が与えられているとする。このとき次は同値である。

(1) $\|f\| \in L^1(\mathcal{X}, p)$
(2) $f \in L^1(\mathcal{X}, p; V)$

証明 (2) $\Rightarrow$(1) 三角不等式より明らか。

(1) $\Rightarrow$(2) V の基底 E をひとつ選んで固定し、成分に関する 2-ノルムを $\|\cdot\|_E$ とおく。有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間上のノルムの同値性を用いて $|f_i(x)| \le \|f(x)\|_E \le C\|f(x)\|$ p-a.e.x が成り立つから $f_i \in L^1(\mathcal{X}, p)$ が従う。 □

自然パラメータ空間 Θ は、指数型分布族の定義の条件 (E3) をみたす θ をすべて含んでいる (一般には真に含んでいる)。

命題 0.6. $\theta \in V^\vee$ がある $p \in \mathcal{P}$ に対し指数型分布族の条件 (E3) をみたすならば、θ は Θ に属する。すなわち、

$$\left\{\theta \in V^\vee \,\middle|\, \exists\, p \in \mathcal{P} \quad \text{s.t.} \quad \frac{dp}{d\nu}(x) = \frac{\exp\langle\theta, T(x)\rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle\theta, T(y)\rangle\, \nu(dy)} \quad (\nu\text{-a.e.}x)\right\} \subset \Theta \tag{0.5}$$

が成り立つ。

証明 まず $\theta \in V^\vee$ とし、θ はある $p \in \mathcal{P}$ に対し**??**の条件 (E3) をみたすものとする。背理法のため $\theta \notin \Theta$ と仮定する。すると Θ の定義より $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \exp\langle\theta, T(y)\rangle\, \nu(dy) = +\infty$ が成り立つから、条件 (E3) より $\dfrac{dp}{d\nu}(x) = \dfrac{\exp\langle\theta, T(x)\rangle}{\infty} = 0$ (ν-a.e.x) が成り立つ。よって

$$1 = \int_{\mathcal{X}} \frac{dp}{d\nu}(x)\, \nu(dx) = \int_{\mathcal{X}} 0\, \nu(dx) = 0 \tag{0.6}$$

となり矛盾が従う。背理法より $\theta \in \Theta$ が成り立つ。 □

1 参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[WJ07] Martin J. Wainwright and Michael I. Jordan, **Graphical Models, Exponential Families, and Variational Inference**, Foundations and Trends in Machine Learning **1** (2007).

[Yos] Taro Yoshino, **bn1970.pdf**, Dropbox.