目次

第 2 章　接続

2.8　平行移動とホロノミー

A.　ベクトルバンドルの平行移動とホロノミー

速度ベクトルの一般化として、曲線に沿う切断を定義する。

定義 2.8.1 (曲線に沿う切断). M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトルバンドル、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。C^∞ 写像 $\xi\colon J \to E$ が**曲線 γ に沿う E の切断 (section along a curve)** であるとは、

$$\xi(t) \in E_{\gamma(t)} \quad (\forall t \in J) \tag{1}$$

が成り立つことをいう。$\xi(t)$ を ξ_t とも書く。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ J \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "\gamma"'] & M \end{tikzcd} \tag{2}$$

例 2.8.2. 曲線 γ の速度ベクトルは、曲線 γ に沿う TM の切断である。

さて、ここで曲線 γ に沿う ξ の共変微分「$\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi$」を定義したい。ところが、ややこしいことに「曲線 γ に沿う E の切断」は「E の切断」ではないため、「$\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi$」という文字列に正確な意味を与えるにはさらなる定義が必要となる。

引き戻しを用いて定義したほうがよさそう。

定義 2.8.3 (曲線に沿う切断の拡張可能性). M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトルバンドル、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。曲線 γ に沿う E の切断 $\xi\colon J \to E$ が**拡張可能 (extendible)** であるとは、γ の像 $\gamma(J)$ を含む $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の E の切断 $\widetilde{\xi}$ が存在して

$$\widetilde{\xi}_{\gamma(t)} = \xi_t \quad (\forall t \in J) \tag{3}$$

が成り立つことをいう。$\widetilde{\xi}$ を **ξ の拡張**という。

例 2.8.4 (拡張可能でない例). 8 の字曲線 $\gamma\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\sin t, \sin t \cos t)$ の速度ベクトル $\dot{\gamma}$ は拡張可能でない。なぜならば、8 の字の中央部分で速度ベクトルが 2 方向に出ているからである。

定義 2.8.5 (曲線に沿う共変微分). 上の定義の状況で、さらに ∇ を E の接続とし、ξ は拡張可能であるとする。このとき、ξ の拡張 $\widetilde{\xi} \in \Gamma(E)$ をひとつ選び

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi \coloneqq \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\widetilde{\xi} \quad (t \in J) \tag{4}$$

と定義し、これを**曲線 γ に沿う共変微分 (covariant derivative along γ)** という。これは $\widetilde{\xi}$ の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

命題 2.8.6. 上の定義の状況で、さらに $\widetilde{\xi} \in \Gamma(E)$ を ξ の拡張、$t \in J$、U を M における $\gamma(t)$ の開近傍、$e_1, \dots, e_r$ を U 上の E の局所フレーム、$x^1, \dots, x^n$ を U 上の M の局所座標とする。$\widetilde{\xi}$ を局所的に

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}^\lambda e_\lambda \quad (\widetilde{\xi}^\lambda \in C^\infty(U)) \tag{5}$$

と表し、$\xi^\lambda \coloneqq \widetilde{\xi}^\lambda \circ \gamma$ とおく。また ∇e_μ を局所的に

$$\nabla e_\mu = \omega_\mu^\lambda \otimes e_\lambda \quad (\omega_\mu^\lambda \in A^1(U)) \tag{6}$$

$$= \Gamma_{\mu i}^\lambda dx^i \otimes e_\lambda \quad (\Gamma_{\mu i}^\lambda \in C^\infty(U)) \tag{7}$$

と表す。このとき

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi = \left\{ \frac{d\xi^\lambda}{dt}(t) + \xi^\mu(t)\Gamma_{\mu i}^\lambda(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t) \right\} (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{8}$$

が成り立つ。したがってとくに $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi$ の値は $\widetilde{\xi}$ の選び方によらず well-defined に定まる。

証明. まず記法を整理すると

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\widetilde{\xi} = (\nabla\widetilde{\xi})(\dot{\gamma}(t)) = \underbrace{(\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)}}_{\in T^*_{\gamma(t)}M \otimes E_{\gamma(t)}} (\underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\in T_{\gamma(t)}M}) \tag{9}$$

と書けることに注意する。そこで $\nabla\widetilde{\xi}$ を変形すると

$$\nabla\widetilde{\xi} = d\widetilde{\xi}^\lambda \otimes e_\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \nabla e_\mu \tag{10}$$

$$= d\widetilde{\xi}^\lambda \otimes e_\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \Gamma_{\mu i}^\lambda dx^i \otimes e_\lambda \tag{11}$$

$$= \left\{ d\widetilde{\xi}^\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \Gamma_{\mu i}^\lambda dx^i \right\} \otimes e_\lambda \tag{12}$$

となるから、点 $\gamma(t)$ での値は

$$(\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)} = \left\{d\widetilde{\xi}^{\lambda}_{\gamma(t)} + \widetilde{\xi}^{\mu}(\gamma(t))\Gamma^{\lambda}_{\mu i}(\gamma(t))dx^{i}_{\gamma(t)}\right\} \otimes (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{13}$$

$$= \left\{d\widetilde{\xi}^{\lambda}_{\gamma(t)} + \xi^{\mu}(\gamma(t))\Gamma^{\lambda}_{\mu i}(\gamma(t))dx^{i}_{\gamma(t)}\right\} \otimes (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{14}$$

である。ここで

$$(d\widetilde{\xi}^{\lambda})_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t} \widetilde{\xi}^{\lambda} \circ \gamma(t) = \frac{d\xi^{\lambda}}{dt}(t) \tag{15}$$

$$(dx^{i})_{\gamma}(t)(\dot{\gamma}(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t} x^{i} \circ \gamma(t) = \frac{d\gamma^{i}}{dt}(t) \tag{16}$$

だから

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi = (\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)} = \left\{\frac{d\xi^{\lambda}}{dt}(t) + \xi^{\mu}(t)\Gamma^{\lambda}_{\mu i}(\gamma(t))\frac{d\gamma^{i}}{dt}(t)\right\}(e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{17}$$

を得る。関数 ξ^{λ} は $\widetilde{\xi}$ の選び方によらないから well-defined 性もいえた。 □

測地線の一般化として、平行の概念を定義する。

定義 2.8.7 (平行). M を多様体、$E \to M$ をベクトルバンドル、∇ を E の接続、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^{∞} 曲線、ξ を曲線 γ に沿う E の切断とする。ξ が

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi = 0 \quad (\forall t \in J) \tag{18}$$

をみたすとき、ξ は**曲線 γ に沿って平行 (parallel along γ)** であるという。上の命題より、これは次の斉次 1 階常微分方程式系が成り立つことと同値である:

$$\frac{d\xi^{\lambda}}{dt}(t) + \xi^{\mu}(t)\Gamma^{\lambda}_{\mu i}(\gamma(t))\frac{d\gamma^{i}}{dt}(t) = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots, r) \tag{19}$$

$\boldsymbol{\xi} := {}^{t}(\xi^{1}, \ldots, \xi^{r}),\ A := \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu i}\dfrac{d\gamma^{i}}{dt}\right)_{\lambda,\mu}$ とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = -A\boldsymbol{\xi} \tag{20}$$

と書ける。

注意 2.8.8. 測地線とは、その速度ベクトルが自身に沿って平行な曲線のことである。

定義 2.8.9 (平行移動). 上の命題の状況でさらに $J = [a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$ とするとき、初期値問題の解の存在と一意性より任意の $\xi_a \in E_{\gamma(a)}$ に対し $\xi(a) = \xi_a$ なる解 ξ が一意に定まる。このとき、ξ は ξ_a を曲線 γ に沿って**平行移動 (parallel displacement)** して得られたという。

命題 2.8.10. 上の定義の状況で、写像

$$E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}, \quad \xi_a \mapsto \xi_b := \xi(b) \tag{21}$$

は $\mathbb{R}$-線型同型である。

証明. 初期値問題の解の存在と一意性より、写像であることはよい。全射性は $t = b$ での ξ の値を指定した初期値問題を考えればよい。$\mathbb{R}$-スカラー倍を保つことは次のようにしてわかる: ξ が $\xi(a) = \xi_a$ なる解であったとすると、各 $c \in \mathbb{R}$ に対し $\eta(t) := c\xi(t)$ は $\eta(a) = c\xi_a$ をみたすただひとつの解であるから、$c\xi_a = \eta(a)$ を曲線 γ に沿って平行移動して得られる値は $\eta(b) = c\xi(b) = c\xi_b$ に他ならない。和を保つことも同様にして示せる。よって命題の写像は全射 $\mathbb{R}$-線型写像である。$\dim_{\mathbb{R}} E_{\gamma(a)} = \dim_{\mathbb{R}} E_{\gamma(b)}$ より $\mathbb{R}$-線型同型であることが従う。 □

定義 2.8.11 (区分的に C^∞ な曲線). M を多様体、$J = [a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$、$\gamma\colon J \to M$ を連続写像とする。γ が**区分的に C^∞ な曲線 (piecewise smooth curve)** であるとは、$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ なる $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と C^∞ 曲線 $\gamma_i\colon [t_{i-1}, t_i] \to M\ (1 \leq i \leq k)$ が存在し

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & (t \in [t_0, t_1]) \\ \gamma_2(t) & (t \in [t_1, t_2]) \\ \cdots & \\ \gamma_k(t) & (t \in [t_{k-1}, t_k]) \end{cases} \tag{22}$$

が成り立つことをいう。

定義 2.8.12 (ベクトルバンドルの接続のホロノミー群). $x_0 \in M$ とする。x_0 を基点とする区分的に C^∞ な任意の閉曲線 c に対し、平行移動により $\mathbb{R}$-ベクトル空間 E_{x_0} の自己同型写像 (τ_c とおく) が得られる。そこで

$$\Psi_{x_0} := \{\tau_c \in GL(E_{x_0}) \mid c \text{ は } x_0 \text{ を基点とする区分的に } C^\infty \text{ な閉曲線}\} \tag{23}$$

とおくと、Ψ_{x_0} は $GL(E_{x_0})$ の部分群となる (このあと示す)。Ψ_{x_0} を x_0 を基点とする**ホロノミー群 (holonomy group)** という。

証明. <u>写像の合成について閉じていること</u>　$\tau_c, \tau_{c'} \in \Psi_{x_0}$ とすると $c \circ c'$ は x_0 を基点とする区分的に C^∞ な閉曲線であり、$\tau_c \circ \tau_{c'} = \tau_{c \circ c'}$ が成り立つ。

<u>単位元を含むこと</u>　定値曲線 x_0 に対し $\tau_{x_0} \in \Psi_{x_0}$ が恒等写像となる。

<u>逆元を含むこと</u>　$\tau_c \in \Psi_{x_0}$ とする。c を逆向きに動く曲線 d を $d(t) \coloneqq c(a+b-t)$ $t \in [a,b]$ で定め、ξ を逆向きに動く曲線 η を $\eta(t) \coloneqq \xi(a+b-t)$ $t \in [a,b]$ で定める。このとき d は x_0 を基点とする区分的に C^∞ な閉曲線だから $\tau_d \in \Psi_{x_0}$ である。また、η は d に沿う E の切断である。さらに η が d に沿って平行であることは、ξ の拡張を $\widetilde{\xi}$ として (これは η の拡張でもある)

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{d}(t)}\eta &= \nabla_{\dot{d}(t)}\widetilde{\xi} &(24)\\ &= \nabla_{-\dot{c}(a+b-t)}\widetilde{\xi} &(25)\\ &= -\nabla_{\dot{c}(a+b-t)}\widetilde{\xi} &(26)\\ &= -\nabla_{\dot{c}(a+b-t)}\xi &(27)\\ &= 0 &(28)\end{aligned}$$

よりわかる。よって $\xi_b = \eta(a)$ を d に沿って平行移動すると $\eta(b) = \xi(a) = \xi_a$ が得られる。したがって $\eta_d = \eta_c^{-1}$ である。 □

B. 主ファイバーバンドルの平行移動とホロノミー

定義 2.8.13 (水平な曲線). M を多様体、G を Lie 群、$p\colon P \to M$ を主 G バンドル、ω を P の接続形式、$J \subset \mathbb{R}$ を区間とする。C^∞ 曲線 $u\colon J \to P$ が**水平 (horizontal)** であるとは、u の速度ベクトル $\dot{u}$ がつねに水平部分空間に含まれること、すなわち

$$\omega(\dot{u}(t)) = 0 \quad (\forall t \in J) \tag{29}$$

が成り立つことをいう。

定義 2.8.14 (平行移動). M を多様体、G を Lie 群、$p\colon P \to M$ を主 G バンドル、ω を P の接続形式、$J \subset \mathbb{R}$ を区間、$x\colon J \to M$ を $x_0 \in M$ を始点とする C^∞ 曲線とする。このとき各 $u_0 \in P_{x_0}$ に対し、u_0 を始点とする水平な C^∞ 曲線 $u\colon J \to P$ であって

$$\pi(u(t)) = x(t) \quad (t \in J) \tag{30}$$

をみたすものが一意に存在する (証明略)。このとき、u は曲線 x に沿った u_0 の**平行移動**

(parallel displacement) であるという。

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "p"] \\
J \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "x"'] & M
\end{tikzcd}
\tag{31}
$$

命題 2.8.15. u が水平ならば、任意の $s \in G$ に対し $u(t).s$ も水平である。

証明. 水平接分布が G の作用で保たれることより明らか。 □

定義 2.8.16 (主ファイバーバンドルの接続のホロノミー群)**.** $u_0 \in P$ とし、$x_0 = p(u_0)$ とおく。x_0 を始点とする M 内の任意の閉曲線 c に対し、x に沿った u_0 の平行移動を u とおくと

$$u(b) = u_0.\tau_c \tag{32}$$

なる $\tau_c \in G$ が一意に定まる。このような τ_c 全体の集合を Ψ_{u_0} とおくと、Ψ_{u_0} は G の部分群となる。Ψ_{u_0} を u_0 を始点とする ω の**ホロノミー群 (holonomy group)** という。

命題 2.8.17 (ホロノミー群の共役)**.** $u_0, u_1 \in P$ とし、$x_0 = p(u_0)$, $x_1 = p(u_1)$ とおく。c_0 を x_0 から x_1 への区分的に C^∞ な曲線とし、曲線 c_0 に沿った u_0 の平行移動を $\widetilde{c}_0$ とおく。すると $\widetilde{c}_0(b) = u_1.a$ なる $a \in G$ がただひとつ存在するが、このとき $\Psi_{u_1} = a\Psi_{u_0}a^{-1}$ が成り立つ。

証明. $a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1}$ および $a^{-1}\Psi_{u_1}a \subset \Psi_{u_0}$ を示せばよい。実際、これらが示されたならば $a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1} = aa^{-1}\Psi_{u_1}aa^{-1} \subset a\Psi_{u_0}a^{-1}$ より $a\Psi_{u_0}a^{-1} = \Psi_{u_1}$ が従う。さらに u_0, u_1 に関する対称性より $a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1}$ を示せば十分。そこで $\tau_c \in \Psi_{u_1}$ とし、c に沿う u_0 の平行移動を $\widetilde{c}$ とおき、$a\tau_c a^{-1} \in \Psi_{u_0}$ を示す。そのためには $a\tau_c a^{-1} = \tau_{c_0 \circ c \circ c_0^{-1}}$ であること、すなわち $c_0 \circ c \circ c_0^{-1}$ に沿う u_1 の平行移動の終点が $u_1.a\tau_c a^{-1}$ であることをいえばよい。

まず c_0^{-1} に沿う u_1 の平行移動は $R_{a^{-1}} \circ \widetilde{c}_0^{-1}$ であり、その終点は $u_0.a^{-1}$ である。

つぎに c に沿う $u_0.a^{-1}$ の平行移動は $R_{a^{-1}} \circ \widetilde{c}$ であり、その終点は $u_0.\tau_c a^{-1}$ である。

最後に c_0 に沿う $u_0.\tau_c a^{-1}$ の平行移動は $R_{\tau_c a^{-1}} \circ \widetilde{c}_0$ であり、その終点は $u_1.a\tau_c a^{-1}$ である。これが示したいことであった。 □

付録 A　測地線

A.1　測地線

定理 A.1.1 (初期値問題の解の一意性). [TODO]

証明. [TODO] □

定義 A.1.2 (速度ベクトル). M を多様体、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。各 $t_0 \in J$ に対し、γ の $t = t_0$ における**速度ベクトル (velocity vector)** $\dot{\gamma}\colon J \to TM$ を

$$\dot{\gamma}(t_0) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \gamma(t) := d\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}\right) \quad (t_0 \in J) \tag{1}$$

で定義する。ただし $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}$ は $J \subset \mathbb{R}$ の標準的な座標 t により定まる $T_{t_0}\mathbb{R}$ の基底 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right._{t_0}$ のことである。

定義 A.1.3 (測地線). [TODO]

付録 B　前回までの振り返り

前回までの内容のうち、今回の内容にとくに関係するものを参照用に整理しておく。

B.1　主ファイバーバンドルの接続

定義 B.1.1 (主ファイバーバンドルの接続形式). M を多様体、G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数、$p\colon P \to M$ を主 G バンドルとする。$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $\bigcup U_\alpha = P$ なる P の局所自明化の族とし、これにより定まる切断の族を $\{\sigma_\alpha\}$ とおく。$\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1-形式 ω を各 $p^{-1}(U_\alpha) \subset P$ 上で

$$\omega := s_\alpha^{-1}\omega_\alpha s_\alpha + s_\alpha^{-1} d s_\alpha \tag{1}$$

と定めることができる (このあとすぐ示す)。ただし右辺の積は TG における積であり、s_α は

$$s_\alpha := \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to G, \quad (x, \sigma_\alpha(x).s) \mapsto s \tag{2}$$

と定めた。ω を P の**接続形式 (connection form)** という。

証明. (⇒)　$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $\bigcup U_\alpha = P$ なる P の局所自明化の族とし、これにより定まる切断の族を $\{\sigma_\alpha\}$ とおき、ω はこれにより定まる P の接続形式であるとする。 □

定理 B.1.2 (主ファイバーバンドルの接続形式の特徴付け). M を多様体、G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数、$p\colon P \to M$ を主 G バンドルとする。$\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1-形式 ω に関し、ω が P の接続形式であることと ω がつぎの条件をみたすこととは同値である:

(1)　$R_a^*\omega = a^{-1}\omega a \quad (a \in G)$

(2)　$\omega(A^*) = A \quad (A \in \mathfrak{g})$

証明. [TODO] □

B.2　水平部分空間

定義 B.2.1 (接分布). M を多様体とする。$D \subset TM$ が M 上の**接分布 (tangent distribution)** であるとは、D が TM の部分ベクトルバンドルであることをいう。

定義 B.2.2 (積分多様体). M を多様体、$D \subset TM$ を M 上の接分布とする。部分多様体 $N \subset M$ が D の**積分多様体 (integral manifold)** であるとは、

$$T_x N = D_x \quad (\forall x \in N) \tag{1}$$

が成り立つことをいう。

各 $x \in M$ に対し D のある積分多様体 $N \subset M$ が存在して $x \in N$ となるとき、D は**積分可能 (integrable)** であるという。

定義 B.2.3 (包合的). M を多様体、$D \subset TM$ を M 上の接分布とする。D が**包合的 (involutive)** であるとは、D の任意の局所切断 X, Y に対し $[X, Y]$ も D の局所切断となることをいう。

定理 B.2.4 (Frobenius). [TODO]

A.　垂直部分空間と水平部分空間

定義 B.2.5 (垂直部分空間). M を多様体、$p\colon P \to M$ を主 G バンドルとする。各 $u \in P$ に対し、$\mathbb{R}$-部分ベクトル空間

$$V_u := \{v \in T_u P \mid p_* v = 0\} \tag{2}$$

を $T_u P$ の**垂直部分空間 (vertical subspace)** という。

命題 B.2.6. $V_u = \{A^*_u \mid A \in \mathfrak{g}\}$

証明. [TODO] □

定理 B.2.7 (垂直接分布は積分可能). [TODO]

証明. [TODO] □

定義 B.2.8 (水平部分空間). M を多様体、$p\colon P \to M$ を主 G バンドル、ω を P の接続形式とする。各 $u \in P$ に対し、$\mathbb{R}$-部分ベクトル空間

$$H_u := \operatorname{Ker} \omega_u \tag{3}$$

を $T_u P$ の**水平部分空間 (horizontal subspace)** という。

定理 B.2.9 (水平接分布の積分可能性). P の水平接分布 $\coprod_{u \in P} H_u$ に関し次は同値である:

(1) $\coprod H_u$ は積分可能である。
(2) P の曲率は 0 である。

定理 B.2.10 (水平接分布による接続の特徴付け). P 上の接分布 $\bigcup_{u \in P} H_u$ であって

(1-i) $T_u P = V_u \oplus H_u$
(1-ii) $R_{a*}(H_u) = H_{ua}$

なるものと、P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 ω であって

(2-i) $\omega(A^*) = A$
(2-ii) $R_a^* \omega = a^{-1} \omega a$

なるものは

$$\operatorname{Ker} \omega_u = H_u, \quad \ldots \tag{4}$$

により 1:1 に対応する。[TODO]

証明. [TODO] □

命題 B.2.11. 接続形式 ω の曲率形式 Ω は

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) \quad (X, Y \in T_u P) \tag{5}$$

をみたす。

参考文献

[1] John. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012

[2] John. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2018

[3] 小林 昭七. "接続の微分幾何とゲージ理論". 裳華房, 2004

[4] Loring W. Tu. *Differential Geometry*. Springer, 2017

[5] Joseph J. Rotman *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2008

[6] Ivan Kolá, Jan Slovák, Peter W. Michor. *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer Berlin, Heidelberg, 1993