発表中にコメントがあった事柄を整理する。

命題-定義 0.1 (測度の押し出し). $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を可測空間、μ を $\mathcal{X}$ 上の測度、$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を可測写像とする。このとき、$\mu \circ f^{-1}$ は $\mathcal{Y}$ 上の測度となる。これを **f による μ の押し出し**と呼び、$f_*\mu$ と書く。

証明 $\mu \circ f^{-1}$ が $\mathcal{Y}$ 上の測度となることは、測度の定義を直接確かめればすぐにわかる。 □

♤ **演習問題 0.1.** 条件 A (3) は次と同値か？

(4) $\operatorname{aspan}(\operatorname{supp} T_*\mu) = V$

演習問題 0.1 の解答. [TODO] □

♤ **演習問題 0.2.** 条件 A (2) は次と同値か？

(5) 任意の $\mathbb{R}$-ベクトル空間 V' および線型写像 $F \in \operatorname{Lin}(V, V')$ に対し「$F(T(x)) = \text{const.}$ μ-a.e.$x \Rightarrow F = 0$」が成り立つ。

演習問題 0.2 の解答. [TODO] 任意の V' ではなく、有限次元に限定すれば言えそう □

命題 0.2. $(V, T, \mu), (V', T', \mu')$ を $\mathcal{P}$ の実現とする。このとき、ある $c > 0$ および $\theta^0 \in V^\vee$ であって

$$\mu' = c \exp \left\langle \theta^0, T(x) \right\rangle \cdot \mu \tag{0.1}$$

をみたすものがただ 1 組存在する。

証明 μ, μ' がみたす関係式

$$\langle \theta, T(x) \rangle - \psi(\theta) = \langle \theta', T'(x) \rangle - \psi'(\theta') + \log \frac{d\mu'}{d\mu}(x) \qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{0.2}$$

に定理 1.12 と系 1.13 を合わせて式変形するとわかる。 □

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[BN78] O. E. Barndorff-Nielsen, **Information and exponential families: In statistical theory**, Wiley, 1978.

[Yos] Taro Yoshino, **bn1970.pdf**, Dropbox.