数学講究 XB レポート

シンプレクティック多様体において $C^\infty(M, \mathbb{R})$ が Poisson 括弧により Lie 代数となることの証明

05-220542
Keiji Yahata

本レポートでは、シンプレクティック多様体 (M,ω) において $C^\infty(M,\mathbb{R})$ が Poisson 括弧 $\{-,-\}$ により Lie 代数となることを証明する。まずいくつか用語の定義を整理しておく。

定義 1.1 (シンプレクティック多様体). M を有限次元実 C^∞ 多様体、ω を M 上の 2-形式とする。組 (M,ω) が**シンプレクティック多様体**であるとは、$\omega^n \neq 0$ かつ $d\omega = 0$ が成り立つことをいう。ただし ω^n とは $\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{ 個}}$ のことである。

以降、(M,ω) をシンプレクティック多様体とする。

命題-定義 1.2 (C^∞ 関数の Hamilton ベクトル場). 各 $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対し、あるベクトル場 $H_f \in \mathfrak{X}(M)$ がただひとつ存在して、任意のベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\omega(H_f, Y) = df(Y) \tag{1.1}$$

をみたす。この H_f を **f の Hamilton ベクトル場**という。

証明 $\omega^n \neq 0$ ゆえに ω は非退化であるから、写像 $\Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M),\ X \mapsto \omega(X,-)$ は $C^\infty(M)$-加群の同型となる。このことから直ちに H_f の存在と一意性が従う。 □

定義 1.3 (Poisson 括弧). 各 $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対し、f,g の **Poisson 括弧** $\{f,g\} \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ を

$$\{f,g\} \coloneqq \omega(H_f, H_g) \tag{1.2}$$

と定義する。

本レポートの目標の定理は次である:

定理 1.4. $C^\infty(M,\mathbb{R})$ は Poisson 括弧 $\{-,-\}$ を括弧積として Lie 代数となる。

この定理の証明には次の補題を用いる:

補題 1.5 (Poisson 括弧と Lie 括弧の関係). 任意の $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対し

$$H_{\{f,g\}} = -[H_f, H_g] \tag{1.3}$$

が成り立つ。

証明 すべての $Y \in \Gamma(TM)$ に対し $\omega(H_{\{f,g\}}, Y) + \omega([H_f,H_g], Y) = 0$ が成り立つことを示せばよい。まず Hamilton ベクトル場および Poisson 括弧の定義より

$$\begin{aligned}
\omega(H_{\{f,g\}}, Y) &= Y\{f,g\} && (1.4)\\
&= Y(\omega(H_f, H_g)) && (1.5)\\
&= Y H_g f && (1.6)
\end{aligned}$$

である。一方、$i_{H_g}\omega = dg$ および $d\omega = 0$ より Cartan の公式 $L_{H_g}\omega = d(i_{H_g}\omega) + i_{H_g}d\omega$ (i は内部積) の右辺は 0 となるから、

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{H_g}\omega)(H_f, Y) && (1.7)\\ &= H_g(\omega(H_f, Y)) - \omega([H_g, H_f], Y) - \omega(H_f, [H_g, Y]) && (1.8)\\ &= H_g Y f - \omega([H_g, H_f], Y) - [H_g, Y]f && (1.9)\\ &= -\omega([H_g, H_f], Y) + Y H_g f && (1.10)\\ \therefore\quad \omega([H_f, H_g], Y) &= -\omega([H_g, H_f], Y) = -Y H_g f && (1.11)\end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\omega(H_{\{f,g\}}, Y) + \omega([H_f, H_g], Y) = 0 \tag{1.12}$$

が成り立つ。よって $H_{\{f,g\}} = -[H_f, H_g]$ が示された。 □

定理 1.4 の証明　示すべきことは、Poisson 括弧が次をみたすことである:

(ℝ-双線型性)　任意の $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}$ および $\{h, af + bg\} = a\{h, f\} + b\{h, g\}$ が成り立つ。
(反対称性)　任意の $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して、$\{f, g\} = -\{g, f\}$ が成り立つ。
(Jacobi 恒等式)　任意の $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して、$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ が成り立つ。

Step 1: ℝ-双線型性　ℝ-双線型性を示す。まず Hamilton ベクトル場の定義より

$$\begin{aligned} \omega(H_{af+bg}, -) &= d(af + bg) && (1.13)\\ &= a\,df + b\,dg && (1.14)\\ &= a\omega(H_f, -) + b\omega(H_g, -) && (1.15)\\ &= \omega(aH_f + bH_g, -) && (1.16)\\ \therefore\quad H_{af+bg} &= aH_f + bH_g && (1.17)\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すれば、第 1 引数に関する線型性は

$$\begin{aligned} \{af + bg, h\} &= \omega(H_{af+bg}, H_h) && (1.18)\\ &= \omega(aH_f + bH_g, H_h) && (1.19)\\ &= a\omega(H_f, H_h) + b\omega(H_g, H_h) && (1.20)\\ &= a\{f, h\} + b\{g, h\} && (1.21)\end{aligned}$$

より従う。第 2 引数に関しても同様である。よって ℝ-双線型性が示された。
Step 2: 反対称性　ω の交代性より明らか。
Step 3: Jacobi 恒等式　任意の $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \omega(H_{\{f,g\}}, H_h) && (1.22)\\ &= -\omega([H_f, H_g], H_h) \quad (\text{補題 } 1.5) && (1.23)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega(H_h, [H_f, H_g]) && (1.24)\\
&= [H_f, H_g]h && (1.25)\\
&= H_f H_g h - H_g H_f h && (1.26)\\
&= H_f\{h, g\} - H_g\{h, f\} && (1.27)\\
&= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} && (1.28)\\
&= -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} \quad (\mathbb{R}\text{-双線型性および反対称性}) && (1.29)
\end{aligned}
$$

が成り立つから、Jacobi 恒等式が示された。 □