発表時にコメントがあった命題などを整理する。

**定義 0.1** (full support). $\mathcal{X}$ を位相空間、$\mu$ を $\mathcal{X}$ 上の Borel 測度とする。

$$\operatorname{supp}\mu := \Bigg( \bigcup_{\substack{U \overset{\text{open}}{\subset} \mathcal{X} \\ \mu(U)=0}} U \Bigg)^c \tag{0.1}$$

と定める。$\mu$ が **full support** であるとは、$\operatorname{supp}\mu = \mathcal{X}$ であることをいう。

♤ **演習問題 0.1.** $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ とする。$\mathcal{X}$ 上の full support な確率測度全体の集合 $\mathcal{P}$ は例 3.1 で見たように指数型分布族であるが、$\mathcal{P}$ は $n-1$ 次元の実現を持つか？

**演習問題 0.1 の解答.** 答え: 持つ。

$$\begin{aligned} p(dk) &= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (\log p_i)\delta_{ik} + \left( \log\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)\right) \delta_{n-1,k} \right\} \gamma(dk) && (0.2) \\ &= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \log p_i - \log\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)\right) \delta_{ik} + \log\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)\right\} \gamma(dk) && (0.3) \end{aligned}$$

1 と表せるから、$T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{n-1},\ k \mapsto (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{n-1,k})$ を十分統計量、数え上げ測度 $\gamma$ を基底測度として $(\mathbb{R}^{n-1}, T, \gamma)$ は $n-1$ 次元の実現となる。 □

♤ **演習問題 0.2.** $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族とする。任意の $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ に対し $P_1 \sim P_2$ (互いに絶対連続) が成り立つことを示せ。

**演習問題 0.2 の解答.** 役割を入れ替えれば逆向きも示せるから、$P_1 \ll P_2$ のみ示せばよい。$E \subset \mathcal{X}$ を $P_2(E) = 0$ なる可測集合とし、$P_1(E) = 0$ を示す。$\mathcal{P}$ の実現 $(T, \mu)$ をひとつ選んで固定する。$P_2$ に対し定義 2.1 条件 (E3) の $\theta_2 \in \mathbb{R}^m$ をひとつ選ぶ。

$$\begin{aligned} 0 &= P_2(E) && (0.4) \\ &= \int_E \frac{dP_2}{d\mu}(x)\mu(dx) && (0.5) \\ &= \int_E e^{\langle \theta_2, T(x)\rangle - \psi(\theta_2)} \mu(dx) && (0.6) \end{aligned}$$

であるが、被積分関数は $\mu$ に関しほとんど至るところ正であることから、$\mu(E) = 0$ でなければならない[1)]。よって、$P_1 \ll \mu$ であることとあわせて $P_1(E) = 0$ が従う。 □

♤ **演習問題 0.3.** 正規分布族は 2 より小さい次元の実現を持つか？

**演習問題 0.3 の解答.** 条件 (as-a), (as-b) を確かめれば、2 が最小であることがわかる。(cf. `0606_資料.pdf`) □

1) ほとんど至るところ正の値をとる関数 $f > 0$ に対し $\mathcal{X} = f^{-1}((1, +\infty] \cup (1/2, 1] \cup \cdots \cup (1/n, 1/(n-1)] \cup \cdots)$ と表せることを使って示せる。

指数型分布族の定義の $\mathbb{R}^m$ を有限次元ベクトル空間 $V$ に置き換えてみる。発表時点では $\mathbb{R}^m$ で十分だと考えていたが、$\mathbb{R}^m$ の代わりに $V$ を使うことで、議論を簡潔にできるというメリットが指摘によりわかった。

**定義 0.2** (指数型分布族). $\mathcal{X}$ を可測空間、$\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ とする。$\mathcal{P}$ が $\mathcal{X}$ 上の**指数型分布族 (exponential family)** であるとは、次が成り立つことをいう: $\exists\,(V, T, \mu)$ s.t.

- **(E0)** $V$ は有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間である。
- **(E1)** $T\colon \mathcal{X} \to V$ は可測写像である。
- **(E2)** $\mu$ は $\mathcal{X}$ 上の $\sigma$-有限測度であり、$\forall\, p \in \mathcal{P}$ に対し $p \ll \mu$ をみたす。
- **(E3)** $\forall\, p \in \mathcal{P}$ に対し、$\exists\, \theta \in V^\vee$ s.t.

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x)\rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{0.7}$$

である。ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は自然なペアリング $V^\vee \times V \to \mathbb{R}$ である。

さらに次のように定める:

- $(V, T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の**実現 (representation)** という。
  - $m$ を $(V, T, \mu)$ の**次元 (dimension)** という。
  - $T$ を $(V, T, \mu)$ の**十分統計量 (sufficient statistic)** という。
  - $\mu$ を $(V, T, \mu)$ の**基底測度 (base measure)** という。
- 集合 $\Theta_{(V,T,\mu)}$

$$\Theta_{(V,T,\mu)} := \left\{ \theta \in V^\vee \;\middle|\; \int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy) < +\infty \right\} \tag{0.8}$$

を $(V, T, \mu)$ の**自然パラメータ空間 (natural parameter space)** という。

- 関数 $\psi\colon \Theta_{(V,T,\mu)} \to \mathbb{R}$,

$$\psi(\theta) := \log \int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy) \tag{0.9}$$

を $(V, T, \mu)$ の**対数分配関数 (log-partition function)** という。

上の定義に基づいて次の定理を書き直してみる (ただし発表時の修正を踏襲し、「極小実現」の語は「$\theta$ が一意の実現」に置き換えてある)。証明の主な変更点としては、$\mathbb{R}^m$ を $V$ に置き換えたことによってノルムが使えなくなるため、かわりに annihilated を使うようになっている。証明は [Yos, Lemma 21] を参考にした。

**定理 0.3** (「$\theta$ が一意の実現」の存在). $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族とする。このとき、$\mathcal{P}$ の「$\theta$ が一意の実現」が存在する。

**証明** $(V, T, \mu)$ は $\mathcal{P}$ の実現のうちで次元が最小のものであるとする。$(V, T, \mu)$ の次元 ($m$ とおく) が 0 ならば $V^\vee$ は 1 点集合だから証明は終わる。

以下 $m \geq 1$ の場合を考え、$(V, T, \mu)$ が「$\theta$ が一意の実現」であることを示す。背理法のために $(V, T, \mu)$ が「$\theta$ が一意の実現」でないこと、すなわちある $p_0 \in \mathcal{P}$ および $\theta_0, \theta_0' \in V^\vee$, $\theta_0 \neq \theta_0'$ が存在して

$$\exp\left(\langle \theta_0, T(x)\rangle - \psi(\theta_0)\right) = \frac{dp_0}{d\mu}(x) = \exp\left(\langle \theta_0', T(x)\rangle - \psi(\theta_0')\right) \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{0.10}$$

が成り立つことを仮定する。証明の方針としては、次元 $m-1$ の実現 $(V', T', \mu)$ を具体的に構成することにより、$(V, T, \mu)$ の次元 $m$ が最小であることとの矛盾を導く。

さて、式 (0.10) を整理して

$$\langle \theta_0 - \theta_0', T(x) \rangle = \psi(\theta_0) - \psi(\theta_0') \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{0.11}$$

を得る。表記の簡略化のために $\theta_1 \coloneqq \theta_0 - \theta_0' \in V^\vee$, $r \coloneqq \psi(\theta_0) - \psi(\theta_0') \in \mathbb{R}$ とおけば

$$\langle \theta_1, T(x) \rangle = r \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{0.12}$$

を得る。ここで $V' \coloneqq (\mathbb{R}\theta)^\top = \{v \in V \mid \langle \theta, v \rangle = 0\}$ とおき、次の claim を示す。

**Claim** ある可測写像 $T' \colon \mathcal{X} \to V'$ および $v_0 \in V$ が存在して $T(x) = T'(x) + v_0$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つ。

∵ いま背理法の仮定より $\theta_1 \neq 0$ であるから、$\theta_1$ を延長した $V^\vee$ の基底 $\theta_1, \ldots, \theta_m$ が存在する。このとき、$\theta_1, \ldots, \theta_m$ を双対基底に持つ $V$ の基底 $v_1, \ldots, v_m$ が存在する。この基底 $v_1, \ldots, v_m$ に関する $T$ の成分表示を $T(x) = \sum_{i=1}^m T^i(x) v_i$, $T^i \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ とおくと、(0.12) より $T^1(x) = \langle \theta_1, T(x) \rangle = r$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つ。そこで $v_0 \coloneqq r v_1 \in V$ とおくと $\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つから、可測写像 $T' \colon \mathcal{X} \to V'$ を

$$T'(x) \coloneqq \begin{cases} T(x) - v_0 & (\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{0.13}$$

と定めることができる。この $T, v_0$ が求めるものである。 //

$(V', T', \mu)$ が $\mathcal{P}$ の実現であることを示す。定義 0.2 の条件 (E0)-(E2) は明らかに成立しているから、あとは条件 (E3) を確認すればよい。そこで $p \in \mathcal{P}$ とする。いま $(V, T, \mu)$ が $\mathcal{P}$ の実現であることより、ある $\theta \in V^\vee$ が存在して

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y) \rangle \, \mu(dy)} \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{0.14}$$

が成り立つ。$T', v_0$ を用いて式変形すると、$\mu$-a.e.$x$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\mu}(x) &= \frac{\exp(\langle \theta, T(x) \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T(x) \rangle) \, \mu(dy)} \qquad (0.15) \\ &= \frac{\exp(\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle) \, \mu(dy)} \qquad (0.16) \\ &= \frac{\exp(\langle \theta, T'(x) \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T'(x) \rangle) \, \mu(dy)} \qquad (0.17) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって $(V', T', \mu)$ は条件 (E3) も満たし、$\mathcal{P}$ の実現であることがいえた。$(V', T', \mu)$ は次元 $m-1$ だから $(V, T, \mu)$ の次元 $m$ の最小性に矛盾する。背理法より $(V, T, \mu)$ は $\mathcal{P}$ の「$\theta$ が一意の実現」である。

□

## 1 参考文献

[Yos] Taro Yoshino, **bn1970.pdf**, Dropbox.