振り返りと導入

...

1 双対平坦構造とシンプレクティック構造

以下、M を多様体、(g, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造、$\mathcal{U} \overset{\text{open}}{\subset} M \times M$ を canonical ダイバージェンスの定義域、$D \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を canonical ダイバージェンスとする。

定義 1.1 (良いチャート). 次をみたす双対アファインチャート (U, θ, η) をここだけの用語で**良いチャート**と呼ぶ:

(1) $U \times U \subset \mathcal{U}$ である。

(2) U は g-凸である。

命題-定義 1.2 (双対平坦構造のシンプレクティック構造). $\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック形式とする。写像 $d_1 D \colon \mathcal{U} \to T^\vee M$ を第 1 成分に関する微分、すなわち $d_1 D := D(\frac{\partial}{\partial x^i} \|)\, dx^i$ で定め、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ を $\omega := (d_1 D)^*(\omega_0)$ で定める。このとき次が成り立つ:

(1) M の任意の局所座標 $x = (x_i)_i$ に対し、$x^* := x$ とおいて $\mathcal{U}$ の局所座標 $(x, x^*) = (x^1, \ldots, x^n, x^{*1}, \ldots, x^{*n})$ を定めると、ω の成分表示は

$$\omega = D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} \tag{1.1}$$

となる。

(2) ω は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。

ω を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) の**シンプレクティック構造** と呼ぶ。

証明 (1) 前回示した。

(2) $d_1 D$ がはめ込みであることを示せばよい。座標 (θ, θ^*) に関する座標表示の Jacobi 行列を考えると $\begin{bmatrix} I & O \\ O & -g \end{bmatrix}$ の形になることから、g の非退化性より $d_1 D$ がはめ込みであることが従う。 □

命題 1.3 (ω の基本性質). ω を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) のシンプレクティック構造、(U, θ, η) を良いチャートとすると、$\forall p, q \in U,\ (p, q) \in \mathcal{U}$ に対し次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \omega_{(p,q)} &= -g_{ij}(p)\, d\theta^i \wedge d\theta^{*j} && (1.2) \\ &= -d\eta_i \wedge d\theta^{*i} && (1.3) \\ &= -g_{ij}(p) g^{jk}(q)\, d\theta^i \wedge d\eta^*_k && (1.4) \\ &= -g^{ij}(q)\, d\eta_i \wedge d\eta^*_j && (1.5) \end{aligned}$$

注意 1.4. **任意の**双対アファインチャート (U, θ, η) に対しては $\omega = -d\eta_i \wedge d\theta^{*i}$ が成り立つとは限らない。

証明 [TODO] □

例 1.5 ($M = \mathbb{R}^n$ の場合)**.** $M := \mathbb{R}^n$ とし、g を Euclid 計量、$\nabla := \nabla^* := \nabla^g$ とすると、(g, ∇, ∇^*) は双対平坦構造となる。このとき、(g, ∇, ∇^*) の canonical ダイバージェンスは $D\colon M \times M \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto \frac{1}{2}\|p - q\|^2$ となり、(g, ∇, ∇^*) のシンプレクティック構造 ω は、同一視 $M \times M \cong T^\vee M$ のもとで $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック構造 ω_0 に対し $\omega = -\omega_0$ となる。

$$\begin{aligned} \omega &= D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} && (1.6)\\ &= -\delta^i_j\, dx^i \wedge dx^{*j} && (1.7)\\ &= -dx^i \wedge dx^{*i} && (1.8)\\ &= -\omega_0 && (1.9) \end{aligned}$$

命題-定義 1.6 (ダイバージェンスを使わない直接的な定義)**.** g-凸な任意の双対アファインチャート (U, θ, η) に対し、

$$d\eta_i \wedge d\theta^{*i} \tag{1.10}$$

は (U, θ, η) の選び方によらない。

証明 g-凸な双対アファインチャート $(U, \theta, \eta), (U', \theta', \eta')$ に対し、

$$d\eta_i \wedge d\theta^{*i} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \eta'_j}(p) \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta'^{*k}}(q)\, d\eta'_j \wedge d\theta'^{*k} \tag{1.11}$$

が成り立つ。U, U' の g-凸性より、p, q を結ぶ M 内の最短測地線は $U \cap U'$ に含まれる。したがって p, q は $U \cap U'$ の単一の連結成分 C に含まれる。C 上で $\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta'_j} = \frac{\partial \theta'^j}{\partial \theta^i}$ は定数だから、$\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta'_j}(p) \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta'^k}(q) = \delta^j_k$ が成り立つ。 □

2 シンプレクティック幾何における Legendre 変換

[TODO]

今後の予定

- Legendre 変換
- モーメント写像

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

1.1 双対ポテンシャル

定義 A.1 (双対ポテンシャル). (U,θ,η) を双対アファインチャートとする。関数 $\psi,\varphi\colon U\to\mathbb{R}$ の組 (ψ,φ) が (U,θ,η) の**双対ポテンシャル (dual potential)** であるとは、U 上で

$$d\psi=\eta_i d\theta^i,\quad d\varphi=\theta^i d\eta_i,\quad \psi+\varphi=\theta^i\eta_i \tag{A.1}$$

が成り立つことをいう。

命題 A.2 (双対ポテンシャルの基本性質). (U,θ,η) を双対アファインチャート、(ψ,φ) を (U,θ,η) の双対ポテンシャルとする。このとき次が成り立つ:

(1) U 上で ψ は g の ∇-ポテンシャルであり、φ は g の ∇^*-ポテンシャルである。
(2) $(\psi,\varphi),(\psi',\varphi')$ を (U,θ,η) の双対ポテンシャルとすると、U の連結成分ごとに $\psi'-\psi$ および $\varphi'-\varphi$ は定数である。

証明 (1) (θ,η) が双対アファイン座標であることから

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial\eta_i}{\partial\theta^j}\,d\theta^i d\theta^j=g_{ij}\,d\theta^i d\theta^j=g,\quad \nabla^{*2}\varphi=\frac{\partial\theta^i}{\partial\eta_j}\,d\eta_i d\eta_j=g^{ij}\,d\eta_i d\eta_j=g \tag{A.2}$$

を得る。

(2) $\psi'-\psi$ について示す。ψ,ψ' が g の ∇-ポテンシャルであることより U 上で $\nabla^2(\psi'-\psi)=0$ である。したがって U の各連結成分 C に対し、組 $(a_C,b_C)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ であって $\psi'(r)-\psi(r)=\langle a_C,\theta(r)\rangle+b_C\ (\forall r\in C)$ なるものがただ 1 組存在する。さらに ψ,ψ' が双対ポテンシャルであることより C 上で $d(\psi'-\psi)=0$ だから $a_C=0$ が成り立つ。よって C 上で $\psi'-\psi=b_C$ が成り立つ。$\varphi'-\varphi$ についても同様。 □

1.2 canonical ダイバージェンスの定義域

定義 A.3 (∇-凸集合). 部分集合 $S\subset M$ が **∇-凸 (∇-convex)** であるとは、任意の $p,q\in S$ に対し、p から q への S 内の ∇-測地線がただひとつ存在することをいう。

定義 A.4 (g-凸集合). 部分集合 $S\subset M$ が **g-凸 (g-convex)** であるとは、任意の $p,q\in S$ に対し、p から q への M 内の ∇^g-測地線で最短なものがただひとつ存在し、かつそれが S 内に含まれることをいう。

定義 A.5 (canonical ダイバージェンスの定義域).

$$\mathcal{U}:=\left\{(p,q)\in M\times M\ \middle|\ \begin{array}{c}p,q\text{ を含む }g\text{-凸開集合を含む、}\\ \nabla\text{-凸または }\nabla^*\text{-凸な双対アファインチャート }(U,\theta,\eta)\text{ が存在する}\end{array}\right\} \tag{A.3}$$

命題 A.6. 次は同値である:

(1) U は ∇-凸であり、U 上の双対アファイン座標が存在する。

(2) U は ∇-凸であり、U 上の ∇-アファイン座標が存在する。

証明 (1) ⇒ (2) 明らか。

(2) ⇒ (1) ∇-凸性より $\eta := (\eta_i)_i,\ \eta_i := \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta^i}$ は U 上の座標となる。このとき (θ,η) は U 上の双対アファイン座標となる。さらに $\varphi := \theta^i\eta_i - \psi$ とおけば (ψ,φ) は (U,θ,η) の双対ポテンシャルとなる。 □

注意 A.7.

- p, q を含む g-凸開集合が存在したとしても、p, q のまわりの良いチャートが存在するとは限らない。たとえば、正規分布族を考え、自然パラメータ空間 (これは上半空間となる) から $\{0\}\times(0,2)$ を除いた空間を考えると、2 点 $p = (2,1), q = (-2,1)$ を含む g-凸開集合が存在するが、2 点を結ぶ ∇-測地線も ∇^*-測地線も存在しないため、2 点を含む ∇-凸または ∇^*-凸な双対アファインチャートは存在しない。

補題 A.8 (g-凸開近傍の存在)**.** 各 $p \in M$ に対し、ある $R > 0$ が存在して、任意の $r \in (0,R)$ に対し $B_r(p) \subset M$ は g-凸である。

証明 [TODO] cf. Riemann 多様体の教科書 □

補題 A.9 ($\mathcal{U}$ の多様体構造)**.** $\mathcal{U}$ は Δ_M を含む $M\times M$ の開集合である。したがって $\mathcal{U}$ には $M\times M$ の開部分多様体の構造が入る。

証明 開集合となることは定義から明らか。また、各 $p_0 \in M$ に対し、p_0 のまわりの双対アファインチャート (U,θ,η) が存在するから、p_0 の ∇-凸開近傍 U' を $U' \subset U$ となるようにとれば、補題より U' は p_0 の g-凸開近傍を含む。したがって $U'\times U'$ は $M\times M$ における p_0 の近傍であり、$\mathcal{U}$ に含まれる。よって $\mathcal{U}$ は Δ_M を含む。 □

1.3 canonical ダイバージェンス

命題-定義 A.10 (canonical ダイバージェンス)**.** 関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を次のように定める: $(p,q) \in \mathcal{U}$ を固定し、p, q を含む g-凸開集合を含む ∇-凸または ∇^*-凸な双対アファインチャート (U,θ,η) をひとつ選び、その双対ポテンシャル (ψ,φ) を 1 組選ぶ。このとき、点 (p,q) における

$$\psi(q) + \varphi(p) - \langle\theta(q), \eta(p)\rangle \tag{A.4}$$

の値は (U,θ,η) や (ψ,φ) の選び方によらない。この値を $D(p\|q)$ と記す。以上により定まる関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を双対平坦構造 (g,∇,∇^*) の **canonical ダイバージェンス** と呼ぶ。

証明 $(p,q)\in\mathcal{U}$ とし、$(U,\theta,\eta),(U',\theta',\eta')$ をそれぞれ条件をみたす双対アファインチャート、$(\psi,\varphi),(\psi',\varphi')$ をそれぞれの双対ポテンシャルとする。$(p,q)\in\mathcal{U}$ ゆえ p,q を含む g-凸集合が存在するから、p から q への M 内の ∇^g-測地線 γ がただひとつ存在する。ここで U,U' は p,q を含む g-凸開集合を含んでいたから、$U\cap U'$ は γ の像を含む。このとき $U\cap U'$ の連結成分 C であって γ の像を含むものがただ 1 つ存在する。

C の連結性より $\psi'(q)-\psi(q)=(C\text{ 上の定数})=\psi'(p)-\psi(p)$ が成り立つ。よって

$$\psi'(q)+\varphi'(p)-\langle\theta'(q),\eta'(p)\rangle=\psi'(q)-\psi'(p)-\langle\theta'(q)-\theta'(p),\eta'(p)\rangle \tag{A.5}$$
$$=\psi(q)-\psi(p)-\langle\theta'(q)-\theta'(p),\eta'(p)\rangle \tag{A.6}$$

が成り立つ。あとは $\langle\theta'(q)-\theta'(p),\eta'(p)\rangle=\langle\theta(q)-\theta(p),\eta(p)\rangle$ を示せばよい。

C の連結性より、組 $(A=(A_i^j)_{i,j},b)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$ であって $\theta'(r)=A\theta(r)+b$ $(\forall r\in C)$ をみたすものがただ 1 組存在する。よって任意の $r\in C$ に対し

$$\eta_i(r)=\frac{\partial\psi}{\partial\theta^i}(r)\qquad(\because d\psi=\eta_i d\theta^i) \tag{A.7}$$
$$=\frac{\partial\psi'}{\partial\theta^i}(r)\qquad(\because \psi'-\psi\text{ は }C\text{ 上定数}) \tag{A.8}$$
$$=\frac{\partial\theta'^j}{\partial\theta^i}(r)\frac{\partial\psi'}{\partial\theta'^j}(r) \tag{A.9}$$
$$=A_i^j\eta'_j(r)\qquad(\because d\psi'=\eta'_j d\theta'^j) \tag{A.10}$$
$$\therefore\ \eta(r)=A\eta'(r) \tag{A.11}$$

が成り立つ。さらに任意の $r\in C$ に対し

$$\theta'^i(r)=\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'_i}(r)\qquad(\because d\varphi'=\theta'^i d\eta'_i) \tag{A.12}$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'_i}(r)\qquad(\because \varphi'-\varphi\text{ は }C\text{ 上定数}) \tag{A.13}$$
$$=\frac{\partial\eta_j}{\partial\eta'_i}(r)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_j}(r) \tag{A.14}$$
$$=A_j^i\theta^j(r)\qquad(\because d\varphi=\theta^j d\eta_j,\ \eta=A\eta') \tag{A.15}$$
$$\therefore\ \theta'(r)=A\theta(r) \tag{A.16}$$

が成り立つ。したがって

$$\langle\theta'(q)-\theta'(p),\eta'(p)\rangle=\left\langle A(\theta(q)-\theta(p)),A^{-1}\eta(p)\right\rangle=\langle\theta(q)-\theta(p),\eta(p)\rangle \tag{A.17}$$

が示された。 □

命題 A.11 (canonical ダイバージェンスの性質). (g,∇^*,∇) の canonical ダイバージェンスを D^* として

(1) D は C^∞ 関数である。
(2) $D(p\|q)\geq 0$
(3) $D(p\|q)=0\iff p=q$
(4) $D(p\|q)=D^*(q\|p)$

証明 (1) 局所的な C^∞ 性を示せばよい。$(p,q) \in \mathcal{U}$ とし、(U,θ,η) を条件をみたす双対アファインチャートとすれば、(p,q) の近傍 $U \times U$ 上で D は C^∞ である。

(2), (3) ψ の ∇-凸性あるいは φ の ∇^*-凸性より従う。

(4) 定義より明らか。 □