第 1 章　加群のテンソル積

1.1　可換環上の加群のテンソル積

テンソル積を定義する。まずは可換環上の加群に限って考える。

定義 1.1.1 (双線型写像). A を環、M, N, L を A-加群とする。写像 $f\colon M \times N \to L$ が **A-双線型写像 (A-bilinear map)** であるとは、各 $x_1, x_2 \in M,\ y_1, y_2 \in N,\ a_1, a_2 \in A$ に対し

$$f(x_1, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1f(x_1, y_1) + a_2f(x_1, y_2) \tag{1}$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2, y_1) = a_1f(x_1, y_1) + a_2f(x_2, y_1) \tag{2}$$

が成り立つことをいう。

定義 1.1.2 (圏論的テンソル積). R を可換環、M, N を R-加群とする。組 (Z, φ) が M, N の**圏論的テンソル積 (categorical tensor product)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- **(T1)**　Z は R-加群である。
- **(T2)**　φ は R-双線型写像 $M \times N \to Z$ である。
- **(T3)**　(普遍性) 次が成り立つ:

$$\forall\, L\colon\ R\text{-加群} \tag{3}$$

$$\forall\, f\colon M \times N \to L\colon\ R\text{-双線型写像} \tag{4}$$

$$\exists!\, \overline{f}\colon Z \to L\colon\ R\text{-加群準同型}\quad \text{s.t.} \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L \end{tikzcd} \tag{6}$$

注意 1.1.3. [TODO] 誘導された準同型の単射性の確認に関する注意を述べたい

定理 1.1.4 (圏論的テンソル積の一意性). R を可換環、M, N を R-加群、$(Z, \varphi), (Z', \varphi')$ を M, N の圏論的テンソル積とする。このとき、次の R-**Mod** の図式を可換にする R-加群準同型 i が一

意に存在する:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\
Z \arrow[rr, dashed, "i"'] & & Z'
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

証明. [TODO] □

可換環上の加群のテンソル積を具体的に構成する。

定義 1.1.5 (可換環上の加群のテンソル積の構成)**.** R を可換環、M, N を R-加群とする。

[TODO]

商加群

$$M \otimes_R N := [M \times N]/Bl \tag{8}$$

を M と N の R 上の**テンソル積 (tensor product)** といい、写像

$$\otimes \colon M \times N \to M \otimes_R N, \quad (m, n) \mapsto p(m, n) \tag{9}$$

を $M \otimes_R N$ の**標準射影**という。$(M \otimes_R N, \otimes)$ は M, N の圏論的テンソル積になっている (このあと示す)。

証明. [TODO] □

定理 1.1.6 (有限生成加群のテンソル積の生成系)**.** R を可換環、M, N を R-加群、$S \subset M,\ T \subset N$ を部分 R-加群、$M = \langle S \rangle,\ N = \langle T \rangle$ とする。このとき

$$S \otimes T := \{s \otimes t \in M \otimes_R N \mid s \in S, t \in T\} \tag{10}$$

とおくと $\langle S \otimes T \rangle = M \otimes_R N$ が成り立つ。とくに M, N が有限生成ならば $M \otimes_R N$ も有限生成である。

証明. テンソル積の定義より、$M \otimes_R N$ の元は

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes n_i \quad (m_i \in M,\ n_i \in N) \tag{11}$$

の形に書けるが、いま $M = \langle S \rangle$, $N = \langle T \rangle$ だから、これは

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} r_j s_j \right) \otimes \left(\sum_{j'=1}^{k'} r_{j'} t_{j'} \right) \quad (r_j, r_{j'} \in R,\ s_j \in S,\ t_{j'} \in T) \tag{12}$$

の形に書ける。右辺を整理して

$$\sum_{i,j,j'} r_j r_{j'} s_j \otimes t_{j'} \in \langle S \otimes T \rangle \tag{13}$$

を得る。 □

定理 1.1.7 (自由加群のテンソル積の基底). R を可換環、M, N を自由 R-加群、$\{v_i\}_{i \in I}$ を M の基底、$\{w_j\}_{j \in J}$ を N の基底とする。このとき

$$B \coloneqq \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\} \tag{14}$$

は $M \otimes_R N$ の R 上の基底である。

証明. $\langle B \rangle = M \otimes_R N$ となるのは上の定理よりわかる。あとは B が R 上 1 次独立であることをいえばよく、そのためには B を何らかの R-加群準同型で写した像が R 上 1 次独立であることをいえばよい。そこで R-加群準同型 $\Psi \colon M \otimes_R N \to R^{\otimes(I \times J)}$ を

$$\Psi\left(\left(\sum_{i \in I}^{\text{finite}} a_i v_i \right) \otimes \left(\sum_{j \in J}^{\text{finite}} b_j w_j \right) \right) \coloneqq (a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J} \tag{15}$$

で定める。ただし、右辺が有限項を除いて 0 であることは左辺が有限和であることから明らかで、また R-双線型性も明らか。すると

$$\Psi(v_i \otimes w_j) = (c_{pq})_{(p,q) \in I \times J}, \quad c_{pq} = \begin{cases} 1 & (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

より $\{\Psi(v_i \otimes w_j) \mid i \in I, j \in J\}$ は R 上 1 次独立である。よって B も R 上 1 次独立である。 □

系 1.1.8 (テンソル積の可換性). [TODO]

系 1.1.9 (テンソル積の結合性). [TODO]

定義 1.1.10 (代数のテンソル積)**.** R を可換環、A, B を R-代数とする。A, B は R-加群とみなせるから、テンソル積加群 $A \otimes_R B$ が考えられる。

[TODO] 乗法を定める

1.2 非可換環上の加群のテンソル積

テンソル積の概念を非可換環上の加群まで一般化しよう。

定義 1.2.1 (A-平衡 R-双線型写像)**.** R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群、L を R-加群とする。写像 $f\colon M \times N \to L$ が **A-平衡 R-双線型写像 (A-balanced R-bilinear map)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) f は R-双線型写像である。

(2) (平衡性) $m \in M, n \in N, a \in A$ に対し

$$f(ma, n) = f(m, an) \tag{1}$$

が成り立つ。

非可換環上の加群のテンソル積を具体的に構成する。

定義 1.2.2 (非可換環上の加群のテンソル積の構成)**.** [TODO]

上の構成は次の意味での普遍性をみたすが、実はもう少し広い意味での普遍性が成り立つことを後で示す。

定理 1.2.3 (非可換環上の加群のテンソル積の普遍性)**.** R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群とする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, L\colon\ R\text{-加群} \tag{2}$$

$$\forall\, f\colon M \times N \to L\colon\ A\text{-平衡 } R\text{-双線型写像} \tag{3}$$

$$\exists!\, \overline{f}\colon M \otimes_A N \to L\colon\ R\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \otimes_A N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L \end{tikzcd} \tag{5}$$

証明. [TODO] □

定義 1.2.4 (左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群、L を左 B-加群とする。写像 $f\colon M \times N \to L$ が**左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像 (left B-linear A-balanced $\mathbb{Z}$-bilinear map)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) f は A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像である。

(2) (左 B-線型性) $m \in M, n \in N, b \in B$ に対し

$$f(bm, n) = bf(m, n) \tag{6}$$

が成り立つ。

定義 1.2.5 (テンソル積への左作用)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群とする。このとき、$M \otimes_A N$ に左 B-加群の構造を

$$b(m \otimes n) := (bm) \otimes n \quad (b \in B) \tag{7}$$

で定めることができる。

証明. [TODO] □

定理 1.2.6 ($\mathbb{Z}$ の場合さえ考えればよいということ)**.** R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群とし、

- $M \otimes_A^1 N$: A を R-代数とみたときのテンソル積
- $M \otimes_A^2 N$: A を $\mathbb{Z}$-代数とみたときのテンソル積

とおく。このとき次が成り立つ:

$$\exists!\ \iota\colon M \otimes_A^1 N \to M \otimes_A^2 N\colon\ \mathbb{Z}\text{-加群の同型} \quad \text{s.t.} \tag{8}$$

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\otimes^1"'] \arrow[dr, "\otimes^2"] & \\ M \otimes_A^1 N \arrow[rr, dashed, "\cong", "\iota"'] & & M \otimes_A^2 N \end{tikzcd} \tag{9}$$

ただし $\otimes^1, \otimes^2$ は標準射影である。

証明. ι の逆写像にあたるものを考える。$\otimes^1$ は A-平衡 R-双線型写像だから、とくに A-平衡

$\mathbb{Z}$-双線型写像でもある。したがってテンソル積 $M \otimes_A^2 N$ の普遍性より

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\otimes^2"'] \arrow[dr, "\otimes^1"] & \\ M \otimes_A^2 N \arrow[rr, dashed, "\overline{\otimes^1}"'] & & M \otimes_A^1 N \end{tikzcd} \tag{10}$$

を可換にする $\mathbb{Z}$-加群準同型 $\overline{\otimes^1}$ がただひとつ存在する。

A の R-代数としての構造を定める環準同型を $\varphi\colon R \to Z(A)$ とおく。このとき、M に (R, A)-両側加群の構造を

$$rm := m\varphi(r) \quad (m \in M,\ r \in R) \tag{11}$$

で定義できる。これによりテンソル積 $M \otimes_A^2 N$ への R の左作用を定めて左 R-加群の構造を入れる [TODO] どういうこと？。

[TODO] □

定理 1.2.7 (テンソル積の普遍性 (最終形)). A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群とする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, L\colon\ \text{左 } B\text{-加群} \tag{12}$$

$$\forall\, f\colon M \times N \to L\colon\ \text{左 } B\text{-線型 } A\text{-平衡 } \mathbb{Z}\text{-双線型写像} \tag{13}$$

$$\exists!\, \overline{f}\colon M \otimes_A N \to L\colon\ B\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{14}$$

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \otimes_A N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L \end{tikzcd} \tag{15}$$

証明. [TODO] □

テンソル積は直和との間の分配律をみたす。

定理 1.2.8 (テンソル積の分配律). A, B を環、

(1) $\{M_i\}_{i \in I}$ を (B, A)-両側加群の族、N を A-加群、$\iota_i\colon M_i \hookrightarrow \bigoplus_{j \in I} M_j$ を標準包含とする。このとき

$$\bigoplus_{i \in I} (\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\colon \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_A N \tag{16}$$

は B-加群の同型となる。

(2) M を (B, A)-両側加群、$\{N_i\}_{i\in I}$ を A-加群の族、$\iota_i\colon N_i \hookrightarrow \bigoplus_{j\in I} N_j$ を標準包含とする。このとき

$$\bigoplus_{i\in I}(\mathrm{id}_M \otimes \iota_i)\colon \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_A N_i) \xrightarrow{\sim} M \otimes_A \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \tag{17}$$

は B-加群の同型となる。

証明. (1) についてのみ示す。(2) も同様にして示せる。左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像 $\Phi\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \times N \to \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$ を

$$\Phi((x_i)_{i\in I}, y) \coloneqq (x_i \otimes y)_{i\in I} \tag{18}$$

で定めることができる。よって、B-線型写像

$$\overline{\Phi}\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \to \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N), \quad (x_i)_{i\in I} \otimes y \mapsto (x_i \otimes y)_{i\in I} \tag{19}$$

が誘導される。$\overline{\Phi}$ が $\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)$ の逆写像であることを示す。右逆写像であることは

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\right) \circ \overline{\Phi}((x_i)_{i\in I} \otimes y) &= \left(\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\right)((x_i \otimes y)_{i\in I}) &(20)\\
&= \sum_{i\in I}^{\text{finite}} (\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)(x_i \otimes y) &(21)\\
&= \sum_{i\in I}^{\text{finite}} ((z_{i;j})_{j\in I} \otimes y) \quad \text{ただし} \quad z_{i;j} \coloneqq \begin{cases} x_i & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases} &(22)\\
&= \left(\sum_{i\in I}^{\text{finite}} (z_{i;j})_{j\in I}\right) \otimes y &(23)\\
&= (x_i)_{i\in I} \otimes y &(24)
\end{aligned}$$

より従う。左逆写像であることも同様にしてわかる。よって $\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)$ は B-加群の同型である。 □

第 2 章　加群の圏

この章では加群自体というより加群の圏について考える。

2.1　加群の圏と関手

加群の圏とそれにまつわる用語を導入する。

定義 2.1.1 (加群の圏). [TODO]

定義 2.1.2 (共変関手). A, B を環とする。$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**共変関手 (covariant functor)** であるとは、

- 写像 $T\colon \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ob}(B\text{-}\mathbf{Mod})$
- 写像 $T\colon \mathsf{Ar}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ar}(B\text{-}\mathbf{Mod})$

が定まっていて

(1)　各 $M, N \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し

$$T(\mathrm{Hom}_A(M, N)) \subset \mathrm{Hom}_B(T(M), T(N)) \tag{1}$$

(2)　$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)} \quad (M \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}))$

(3)　各 $M, N, L \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ に対し

$$T(g) \circ T(f) = T(g \circ f) \tag{2}$$

が成り立つことをいう。

定義 2.1.3 (反変関手). A, B を環とする。$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**反変関手 (contravariant functor)** であるとは、

- 写像 $T\colon \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ob}(B\text{-}\mathbf{Mod})$
- 写像 $T\colon \mathsf{Ar}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ar}(B\text{-}\mathbf{Mod})$

が定まっていて

(1) 各 $M, N \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し

$$T(\mathrm{Hom}_A(M,N)) \subset \mathrm{Hom}_B(T(N), T(M)) \tag{3}$$

(2) $T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)} \quad (M \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}))$

(3) 各 $M, N, L \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(N,L)$ に対し

$$T(f) \circ T(g) = T(g \circ f) \tag{4}$$

が成り立つことをいう。

定義 2.1.4 (押し出しと引き戻し)**.** R を可換環、A を R-代数、M, N, L を A-加群とする。

(1) $f \in \mathrm{Hom}_A(N,L)$ とする。R-代数準同型 $f_\sharp$ を

$$f_\sharp\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,L), \quad \varphi \mapsto f \circ \varphi \tag{5}$$

で定める。$f_\sharp$ を f による**押し出し (pushout)** という。

(2) $h \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ とする。R-代数準同型 $h^\sharp$ を

$$h^\sharp\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(L,N), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ h \tag{6}$$

で定める。$h^\sharp$ を h による**引き戻し (pullback)** という。

テンソル積や Hom をとる操作は共変/反変関手の一例である。

定理 2.1.5 (テンソル関手)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき、関手 $M \otimes_A \square$ を

$$\begin{array}{ccccccc} A\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & B\text{-}\mathbf{Mod} & \qquad & \mathrm{Hom}_A(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, M \otimes_A Y) \\ X & \longmapsto & M \otimes_A X & & f & \longmapsto & \mathrm{id}_M \otimes f \end{array} \tag{7}$$

で定めることができる。

証明. [TODO] □

??でみたように加群準同型全体の集合には加群の構造が入るのであった。このことを利用して次のような関手を定めることができる。

定理 2.1.6 (共変ホム関手)**.** R を可換環、A, B を R-代数、M を (A, B)-両側加群とする。このとき、関手 $\mathrm{Hom}_A(M, \square)$ を

$$
\begin{array}{rcl}
A\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & B\text{-}\mathbf{Mod} \\
X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_A(M, X)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, X), \mathrm{Hom}_A(M, Y)) \\
f & \longmapsto & f_\sharp
\end{array}
\tag{8}
$$

で定めることができる。

注意 2.1.7. M が単に左 A-加群の場合は、M を $(A, \mathbb{Z})$-両側加群とみなせば定理を適用できる。

証明. [TODO] □

定理 2.1.8 (反変ホム関手)**.** A, B を環、M を (A, B)-両側加群とする。このとき、反変関手 $\mathrm{Hom}_A(\square, M)$ を

$$
\begin{array}{rcl}
A\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & B\text{-}\mathbf{Mod} \\
X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_A(X, M)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(Y, M), \mathrm{Hom}_A(X, M)) \\
f & \longmapsto & f^\sharp
\end{array}
\tag{9}
$$

で定めることができる。

証明. [TODO] □

2.2 自然変換

定義 2.2.1 (自然変換)**.** [TODO]

定義 2.2.2 (関手の同型)**.** A, B を環、$T, S\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。T, S が**同型 (isomorphic)** であるとは、

(1) 任意の A-加群 M に対し B-加群の同型 $\tau_M\colon T(M) \xrightarrow{\sim} S(M)$ が定まっている。

(2) 任意の A-加群 M, N と $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "T(\varphi)"] \arrow[d, "\tau_M"', "\sim"] & T(N) \arrow[d, "\tau_N", "\sim"'] \\ S(M) \arrow[r, "S(\varphi)"'] & S(N) \end{tikzcd} \tag{1}$$

が可換となる。

が成り立つことをいう。このとき $T \cong S$ と書く。[TODO] 随伴関手のとき □ に対象を代入するとそのまま同型を表しているように読める！

注意 2.2.3. 反変関手についても同様の定義ができる。

定義 2.2.4 (関手的)**.** A, B, C_1, C_2 を環、$T_i\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to C_i\text{-}\mathbf{Mod}$, $S_i\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to C_i\text{-}\mathbf{Mod}$ $(i = 1, 2)$ を共変関手とする。$M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ と $N \in B\text{-}\mathbf{Mod}$ でパラメータ付けられた $\mathbb{Z}$-加群同型の族

$$\tau_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), T_1(N)) \to \mathrm{Hom}_{C_2}(S_2(M), S_2(N)) \tag{2}$$

が M, N に関し**関手的**であるとは、

(1) 任意の A-加群 M, M'、B-加群 N および $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N)) \arrow[d, "\tau_{M,N}"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M'), S_1(N)) \arrow[l, "f^\sharp"'] \arrow[d, "\tau_{M',N}", "\sim"'] \\ \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N)) & \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M'), S_2(N)) \arrow[l, "f^\sharp"] \end{tikzcd} \tag{3}$$

が可換となる。[TODO] $f^\sharp$ は $T_1(f)$ や $T_2(f)$ を合成している？

(2) 任意の A-加群 M、B-加群 N, N' および $g \in \mathrm{Hom}_B(N, N')$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N)) \arrow[r, "g_\sharp"] \arrow[d, "\tau_{M,N}"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N')) \arrow[d, "\tau_{M,N'}", "\sim"'] \\ \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N)) \arrow[r, "g_\sharp"'] & \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N')) \end{tikzcd} \tag{4}$$

が可換となる。

が成り立つことをいう。

定理 2.2.5 (米田の補題の 1 つの型)**.** A, B を環、$T, S\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。このとき次は同値である:

(1) $T \cong S$

(2) 各 A-加群 M と B-加群 N に対し、M, N に関して関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\Psi_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_B(T(M), N) \to \mathrm{Hom}_B(S(M), N) \tag{5}$$

が存在する。

(3) 各 A-加群 M と B-加群 N に対し、M, N に関して関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\Phi_{N,M}\colon \mathrm{Hom}_B(N, T(M)) \to \mathrm{Hom}_B(N, S(M)) \tag{6}$$

が存在する。

証明. [TODO] □

定義 2.2.6 (随伴関手)**.** A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$, $S\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。T が S の**左随伴関手 (left adjoint functor)**、あるいは S が T の**右随伴関手 (right adjoint functor)** であるとは、各 A-加群 M、B-加群 N に対し、M, N に関し関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\varphi_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_B(T(M), N) \to \mathrm{Hom}_A(M, S(N)) \tag{7}$$

が存在することをいう。

定理 2.2.7 (随伴の一意性)**.** [TODO]

証明. [TODO] □

定理 2.2.8 (テンソル関手とホム関手の随伴性)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき関手 $M \otimes_A \square\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は $\mathrm{Hom}_B(M, \square)\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ の左随伴関手である。すなわち $M \otimes_A \square \dashv \mathrm{Hom}_B(M, \square)$ が成り立つ。

証明. $X \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, $Y \in B\text{-}\mathbf{Mod}$ に関し関手的な $\mathbb{Z}$-加群同型の族

$$\varphi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, Y) \to \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M, Y)) \tag{8}$$

を構成する。[TODO] □

2.3 係数制限と係数拡大

??で触れた係数制限と、その随伴的な操作である係数拡大について述べる。

定義 2.3.1 (係数制限)**.** A, B を環、$\varphi\colon B \to A$ を環準同型、M を A-加群とする。B-加群 $\mathrm{Res}^B_A M = M|_B$ を、M への B の作用を

$$B \times M \to B, \quad (b, m) \mapsto \varphi(b)m \tag{1}$$

で定めたものとし、これを M の B への**係数の制限 (restriction of scalars)** という。断らない限り φ として包含写像を用いる。$\mathrm{Res}^B_A\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手となる。

定義 2.3.2 (係数拡大)**.** A, B を環、$\varphi\colon B \to A$ を環準同型とする。A に次のように (A, B)-両側加群の構造を入れる:

$$axb \coloneqq ax\varphi(b) \quad (x \in A,\ a \in A,\ b \in B) \tag{2}$$

B-加群 M に対し、

$$\mathrm{Ind}^A_B M \coloneqq A \otimes_B M \tag{3}$$

を M の A への**係数の拡大 (extension of scalars)** という。$\mathrm{Ind}^A_B\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手となる。

定理 2.3.3 (係数制限と係数拡大の随伴性)**.** A, B を環、$\varphi\colon B \to A$ を環準同型とする。このとき、係数の拡大 Ind^A_B は係数の制限 Res^B_A の左随伴関手である。

証明. [TODO] □

系 2.3.4 (Induction By Stage)**.**

$$\mathrm{Ind}^A_C \cong \mathrm{Ind}^A_B \circ \mathrm{Ind}^B_C \tag{4}$$

[TODO]

証明. [TODO] □

定義 2.3.5 (Production)**.** A, B を環、$\varphi\colon B \to A$ を環準同型とし、A に

$$bxa \coloneqq \varphi(b)xa \tag{5}$$

により (B,A)-両側加群の構造を入れる。このとき、B-加群 M に対し

$$\mathrm{Pro}_B^A(M) := \mathrm{Hom}_B(A,M) \tag{6}$$

と定めると、共変関手 $\mathrm{Pro}_B^A \colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ が定まる。

命題 2.3.6. Pro_B^A は Res_A^B の右随伴関手である。

証明. [TODO] □

2.4 加法的関手と完全性

A を環とする。**??** でみたように、すべての A-加群 M,N に対し $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は $\mathbb{Z}$-加群となるのであった。このような性質は加群の圏には欠かせないものであり、加群の圏の間の関手を調べる際にはこの $\mathbb{Z}$-加群構造を保つものが特に重要といえる。そこで、この節では加法的関手とその完全性の概念を定義する。

定義 2.4.1 (加法的関手). A,B を環とする。共変関手 $T \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**加法的 (additive)** であるとは、

(1) $T(0) = 0$
(2) 各 $M,N \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し $T \colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_B(T(M),T(N))$ が $\mathbb{Z}$-加群の準同型となる。

が成り立つことをいう。

例 2.4.2 (加法的関手の例).

- A,B を環、M を (B,A)-両側加群とする。このとき、テンソル関手 $M \otimes_A \square \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は加法的である。
- R を可換環、A,B を R-代数、M を (A,B)-両側加群とする。このとき、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(M,\square) \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は加法的である。

加法的関手は有限直和を保つ。

定理 2.4.3 (加法的関手は有限直和を保つ). A,B を環、$T \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を加法的関手とす

る。任意の A-加群 M_1, M_2 と直和の標準射影 $\iota_i \colon M_i \hookrightarrow M_1 \oplus M_2$ $(i = 1, 2)$ に対し

$$T(\iota_1) \oplus T(\iota_2) \colon T(M_1) \oplus T(M_2) \to T(M_1 \oplus M_2) \tag{1}$$

は B-加群の同型を与える。逆写像は、$p_i \colon M_1 \oplus M_2 \to M_i$ $(i = 1, 2)$ を直積の標準射影として

$$T(p_1) \times T(p_2) \colon T(M_1 \oplus M_2) \to T(M_1) \oplus T(M_2) \tag{2}$$

で与えられる。

証明. [TODO] □

定理 2.4.4 (加法的関手は分裂短完全列を保つ)**.** A, B を環、

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{3}$$

を A-**Mod** の分裂短完全系列とする。関手 $T \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が加法的ならば、T はこの系列を分裂短完全系列に写す。

証明. [TODO] □

左完全関手を定義する。

定義 2.4.5 (左完全関手 [1])**.** A, B を環とする。加法的共変関手 $T \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**左完全 (left exact)** であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \qquad \text{(exact)} \tag{4}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(U) \xrightarrow{T(i)} T(V) \xrightarrow{T(p)} T(W) \tag{5}$$

が完全系列となることをいう。

加法的反変関手 $T \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が左完全であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{6}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(W) \xrightarrow{T(p)} T(V) \xrightarrow{T(i)} T(U) \tag{7}$$

が完全系列となることをいう。

共変/反変ホム関手は左完全である。

定理 2.4.6 (共変ホム関手の左完全性). A, B を環、X を (A, B)-両側加群とする。このとき、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(X, \square)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は左完全である。

証明. [TODO] **Ab** でなく B-**Mod** に修正したい

A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \qquad (\text{exact}) \tag{8}$$

に対し、**Ab** の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(X, V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(X, W) \tag{9}$$

が完全系列となることを示す。

<u>$\mathrm{Ker}\, i_* = 0$ であること</u>　i の単射性から明らか。

<u>$\mathrm{Im}\, i_* \subset \mathrm{Ker}\, p_*$ であること</u>　$\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\, p$ より明らか。

<u>$\mathrm{Ker}\, p_* \subset \mathrm{Im}\, i_*$ であること</u>　$g \in \mathrm{Ker}\, p_*$ とすると、

$$g(x) \in \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, i \quad (\forall x \in X) \tag{10}$$

が成り立つ。よって

$$g(x) = i(u_x) \quad (\exists u_x \in U) \tag{11}$$

が成り立ち、i の単射性より u_x は x に対し一意に定まる。よって写像 $f\colon X \to U,\ x \mapsto u_x$ は well-defined である。さらに、直接計算により $f \in \mathrm{Hom}_A(X, U)$ であることもわかる。よって $g = i_* f \in \mathrm{Im}\, i_*$ である。 □

定理 2.4.7 (反変ホム関手の左完全性). A, B を環、X を (A, B^{OP})-両側加群とする。このとき、反変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(\square, X)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は左完全である。[TODO] 終域あってる？

証明. [TODO] □

右完全関手を定義する。

定義 2.4.8 (右完全関手). A, B を環とする。加法的共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**右完全**

1) T で写した系列の左端に射 $0 \to \bullet$ が現れることから「左」完全と呼ばれる。

(right exact) であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0 \tag{12}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$T(B') \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(B'') \longrightarrow 0 \tag{13}$$

が完全系列となることをいう。

テンソル関手は右完全である。すなわち全射を保つ。

定理 2.4.9 (テンソル関手の右完全性)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき、テンソル関手 $M \otimes_A \square$ は右完全である。

証明. [TODO] **Ab** でなく B-**Mod** に修正したい

A-**Mod** の任意の完全系列

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0 \tag{14}$$

に対し、**Ab** の列

$$M \otimes_A B' \xrightarrow{1\otimes i} M \otimes_A B \xrightarrow{1\otimes p} M \otimes_A B'' \longrightarrow 0 \tag{15}$$

が完全系列となることを示す。

$\underline{\mathrm{Im}(1 \otimes i) \subset \mathrm{Ker}(1 \otimes p)\ であること}$

$$(1 \otimes p) \circ (1 \otimes i) = 1 \otimes (p \circ i) = 1 \otimes 0 = 0 \tag{16}$$

より明らか。

$\underline{\mathrm{Ker}(1 \otimes p) \subset \mathrm{Im}(1 \otimes i)\ であること}$ $E \coloneqq \mathrm{Im}(1 \otimes i)$ とおく。上で示した $E \subset \mathrm{Ker}(1 \otimes p)$ より、図式

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A B \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "1\otimes p"'] & & (M \otimes_A B)/E \arrow[dl, dashed, "\widehat{p}"] \\ & M \otimes_A B'' & \end{tikzcd} \tag{17}$$

を可換にする準同型 $\widehat{p}$ が誘導される。ここで、もし $\widehat{p}$ が同型であることを示せたならば、

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(1 \otimes p) &= \mathrm{Ker}(\widehat{p} \circ \pi) && (18) \\ &= \mathrm{Ker}\,\pi \quad (\because\ \widehat{p}\ \text{は同型}) && (19) \\ &= E && (20) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{Im}(1 \otimes i) \tag{21}$$

より示したいことが従う。そこで、$\widehat{p}$ の逆写像 $M \otimes_A B'' \to (M \otimes_A B)/E$ を構成する。写像 $f\colon M \times B'' \to (M \otimes_A B)/E$ を次のように定める。すなわち、各 $(a, b'') \in M \times B''$ に対し、p の全射性より $p(b) = b''$ なる $b \in B$ がとれるから、$f(a, b'') := a \otimes b + E$ と定める。well-defined 性と A-双線型性は直接計算によりわかる。よって準同型 $\widehat{f}\colon M \otimes_A B'' \to (M \otimes_A B)/E$ が誘導され、$\widehat{f}$ は $\widehat{p}$ の逆写像となる。したがって $\widehat{p}$ が同型であることがいえた。

$1 \otimes p$ が全射であること: p の全射性より明らか。 □

一方、テンソル関手は単射を保つとは限らない。

例 2.4.10 (テンソル関手が単射を保たない例)**.** $\mathbb{Z}$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{22}$$

を考える。テンソル関手 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \square\colon \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ の右完全性より

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{23}$$

は完全系列である。この列の左端は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ である。一方、各 $a \otimes q \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$ に対し

$$a \otimes q = 2a \otimes (q/2) \tag{24}$$

$$= 0 \otimes (q/2) \tag{25}$$

$$= 0 \tag{26}$$

である。よって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0$ である。したがって $1 \otimes i$ は単射ではありえず、関手 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \square$ は完全関手でないことがわかる。

左右の完全性を兼ね備えたものが完全関手である。

定義 2.4.11 (完全関手)**.** A, B を環とする。加法的共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**完全 (exact)** であるとは、$A\text{-}\mathbf{Mod}$ の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{27}$$

に対し、$B\text{-}\mathbf{Mod}$ の列

$$0 \longrightarrow T(U) \xrightarrow{T(i)} T(V) \xrightarrow{T(p)} T(W) \longrightarrow 0 \tag{28}$$

が完全系列となることをいう。

加法的反変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が完全であるとは、$A\text{-}\mathbf{Mod}$ の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{29}$$

に対し、$B\text{-}\mathbf{Mod}$ の列

$$0 \longrightarrow T(W) \xrightarrow{T(p)} T(V) \xrightarrow{T(i)} T(U) \longrightarrow 0 \tag{30}$$

が完全系列となることをいう。

定理 2.4.12 (完全関手は完全系列を完全系列に写す). [TODO]

証明. [TODO] □

系 2.4.13. 加法的関手が左完全かつ右完全であることと、完全であることとは同値である。

証明. [TODO] □

2.5 射影加群

共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(P, \square)$ を完全にするのが射影加群である。

定義 2.5.1 (射影加群). A を環とし、P を A-加群とする。P が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、P を**射影加群 (projective module)** という。

(1) (リフトの存在) 任意の A-加群準同型 $f\colon P \to M''$ と全射 A-加群準同型 $g\colon M \to M''$ に対し、A-加群準同型 $h\colon P \to M$ であって

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{(exact)} \tag{1}$$

を可換にするものが存在する。

(2) $A\text{-}\mathbf{Mod}$ のすべての完全列 $0 \to M' \to M'' \to P \to 0$ が分裂する。

(3) P はある自由 A-加群の直和因子である。すなわち、ある A-加群 M が存在して $P \oplus M$ は自由となる。

(4) 函手 $\mathrm{Hom}_A(P, \square)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全である。

同値性の証明. (1) ⇒ (4)　P が (1) をみたすとし、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{2}$$

に対し、**Ab** の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(P, V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(P, W) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

が完全系列となることを示す。定理 2.4.6 より $\mathrm{Hom}_A(P, \square)$ の左完全性はわかっているから、あとは

$$\mathrm{Hom}_A(P, V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(P, W) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

が完全系列であること、すなわち p_* の全射性をいえばよい。そのためには A-**Mod** の任意の射 $h \colon P \to W$ に対し

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\ V \arrow[r, "p"'] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5}$$

を可換にする射 g が存在することをいえばよいが、p が全射であることと P が (1) をみたすことからこのような g は存在する。よって (4) がいえた。

(4) ⇒ (1)　$\mathrm{Hom}_A(P, \square)$ は完全であるとする。準同型 $f \colon P \to M''$ と全射準同型 $g \colon M \to M''$ が任意に与えられたとする。このとき、列

$$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{6}$$

は完全系列である。したがって、$\mathrm{Hom}_A(P, \square)$ の完全性より

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, M'') \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{7}$$

は完全系列、すなわち g_* は全射である。よって、図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \quad \text{(exact)} \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \end{tikzcd} \tag{8}$$

を可換にする $h \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ が存在する。よって (1) がいえた。

[TODO] cf. [Lang] p.137 □

自由加群は、定義から明らかな射影加群の例のひとつである。

命題 2.5.2. 自由加群は射影加群である。

証明. 射影加群の定義の条件 (3) より従う。 □

例 2.5.3 (自由でない射影加群の例). $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群として自由だから、直和因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は射影 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群である。一方、$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群として自由ではない。実際、もし自由加群ならばその濃度は 6 のべきか無限となるはずである。同様に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ も自由でない。

直和により射影加群の例を増やすことができる。

命題 2.5.4 (射影的な直和加群). A を環とする。$\{M_i\}_{i\in I}$ を A-加群の族とするとき、直和 $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ が射影的であることと各 M_i が射影的であることとは同値である。

証明. [TODO] □

2.6 入射加群

反変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(\square, Q)$ を完全にするのが入射加群である。

定義 2.6.1 (入射加群). A を環とし、Q を A-加群とする。Q が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、Q を**入射加群 (injective module)** という。

(1) 任意の A-加群 M とその A-部分加群 M'、および A-加群準同型 $f\colon M' \to Q$ に対し、A-加群準同型 $h\colon M \to Q$ であって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd} \tag{1}$$

を可換にするものが存在する。

(2) 函手 $\mathrm{Hom}_A(\square, Q)\colon A\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{OP}} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全である。

(3) すべての完全列 $0 \to Q \to M \to M'' \to 0$ が分裂する。

証明. cf. [**?** , p.782] □

定理 2.6.2. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は入射 $\mathbb{Z}$-加群である。

証明. $\varphi\colon X \to Y$ を単射な $\mathbb{Z}$-加群準同型、$h\colon X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, tail, "\varphi"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd} \qquad \text{(exact)} \tag{2}$$

を可換にする $\mathbb{Z}$-加群準同型 ψ の存在を示す。ここで

$$Q := \{(Z, \xi) \mid Z \text{ は } \mathbb{Z}\text{-加群}, \ X \subset Z \subset Y, \ \xi\colon Z \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ は } \mathbb{Z}\text{-加群準同型}, \ \xi = h \ \text{ on } \ X\} \tag{3}$$

とおく。Q 上の関係 $\leq$ を

$$(Z, \xi) \leq (Z', \xi') \quad \Longleftrightarrow \quad Z \subset Z' \quad \text{かつ} \quad \xi = \xi' \ \text{ on } \ Z \tag{4}$$

で定めると、$\leq$ は Q 上の半順序となり、Q は帰納的半順序集合となる。Zorn の補題より Q は極大元 (W, ψ) をもつ。[TODO] $W \subsetneq Y$ として矛盾を導く □

定理 2.6.3 (完全関手の随伴). A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を関手とする。このとき次が成り立つ:

(1) T がある完全関手の左随伴ならば、T は射影加群を射影加群に写す。
(2) T がある完全関手の右随伴ならば、T は入射加群を入射加群に写す。

証明. (1) を示す。(2) も同様である。T は完全関手 $S\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ の左随伴であるとし、M を射影 A-加群とする。各 B-加群 X に対し、随伴性より $\mathrm{Hom}_B(T(M), X) \cong \mathrm{Hom}_A(M, S(X))$ だから、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_B(T(M), \square)$ は $X \mapsto \mathrm{Hom}_B(T(M), X) \cong \mathrm{Hom}_A(M, S(X))$ と写す。右辺は完全関手の合成 $\mathrm{Hom}_A(M, S(\square))$ だから完全である。したがって $\mathrm{Hom}_B(T(M), \square)$ は完全である。よって $T(M)$ は射影加群である。 □

定義 2.6.4 (可除加群). R を可換環、M を R-加群とする。M が**可除 (divisible)** であるとは、R の 0 でも零因子でもない任意の元 $a \in R$ に対し、a 倍写像 $M \ni m \mapsto am \in M$ が全射になることをいう。

命題 2.6.5. 可換環上の入射加群は可除加群である。

証明. 問題 2.5 を参照。 □

2.7 平坦加群

テンソル関手を完全にするのが平坦加群である。ここでは平坦加群の定義として右側加群のものを与えるが、明らかに左側加群についても同様に定義される。

定義 2.7.1 (平坦加群). A を環、F を右 A-加群とする。F が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、F を**平坦加群 (flat module)** という:

(1) A-**Mod** の任意の完全系列

$$E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \qquad \text{(exact)} \tag{1}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \tag{2}$$

は完全となる。

(2) A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{3}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \longrightarrow 0 \tag{4}$$

は完全となる。

(3) (単射を保つこと) A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \qquad \text{(exact)} \tag{5}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \tag{6}$$

は完全となる。

証明. [TODO] □

平坦でない加群の例のひとつは、例 2.4.10 で紹介した ($\mathbb{Z}$-加群としての) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

いくつかの基本的な平坦加群のクラスを挙げる。

補題 2.7.2. A を環とする。

(1) 任意の A-加群 N に対し、A-加群準同型 $\mu\colon A\otimes_A N \to N$ であって

$$\mu(a\otimes n) = an \quad \mu^{-1}(n) = 1_A \otimes n \tag{7}$$

なるものが存在する。

(2) 任意の右 A-加群 M に対し、右 A-加群準同型 $\eta\colon M\otimes_A A \to M$ であって

$$\eta(m\otimes a) = ma, \quad \eta^{-1}(m) = m\otimes 1_A \tag{8}$$

なるものが存在する。

証明. [TODO] □

定理 2.7.3 (基本的な平坦加群)**.** A を環とする。

(1) A_A (resp. ${}_AA$) は平坦な右 (resp. 左) A-加群である。

(2) $\{F_i\}_{i\in I}$ を右 (resp. 左) A-加群の族とするとき、直和 $F := \oplus F_i$ が平坦な右 (resp. 左) A-加群であることと各 F_i が平坦な右 (resp. 左) A-加群であることとは同値である。

(3) 射影加群は平坦な左 A-加群である。

証明. (1) 右 A-加群の場合のみ示す。$f\colon X \to Y$ を単射 A-加群準同型とする。上の補題より、図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & A\otimes_A X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes f"'] & A\otimes_A Y \arrow[u, "\mu'"'] \end{tikzcd} \tag{9}$$

を可換にする A-加群の同型 μ, μ' が存在する (図式の可換性は $a\otimes x$ の形の元の行き先を追跡すればよい)。f の単射性より $\mathrm{id}_A\otimes f$ は単射である。したがって A_A は平坦である。

(2) [TODO]

(3) [TODO] (1), (2) を使う □

平坦加群の条件 (2) の逆も成り立つものは忠実平坦と呼ばれる。

定義 2.7.4 (忠実平坦加群)**.** A を環、F を右 A-加群とする。F が**忠実平坦加群 (faithfully flat module)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- A-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \tag{10}$$

および $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \longrightarrow 0 \tag{11}$$

に関し、系列 (10) が完全であることと系列 (11) が完全であることとは同値である。

忠実平坦加群の例のひとつは自由加群である。

命題 2.7.5 (自由加群は忠実平坦). 0 でない自由加群は忠実平坦である。0 でない射影加群は忠実平坦とは限らない。

証明. cf. 問題 2.7 □

平坦性を用いて入射加群のひとつの例が得られる。

命題 2.7.6. A を環、M を平坦右 A-加群とする。M を $(\mathbb{Z}, A)$-両側加群とみて、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は入射 A-加群である。

証明. M が平坦であることより $M \otimes_A \square$ は完全関手だから、定理 2.6.3 より $M \otimes_A \square$ の右随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \square)$ は入射性を保つ。定理 2.6.2 より $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は入射 $\mathbb{Z}$-加群であるから、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は入射 A-加群である。 □

定理 2.7.7 (入射加群への埋め込み). A を環、M を A-加群とする。このとき、ある入射 A-加群 I と単射 A-加群準同型 $\varphi\colon M \to I$ が存在する。

証明. [TODO] □

命題 2.7.8 (局所化と平坦性). R を可換環とする。

(1) $S \subset R$ を R の積閉集合とするとき、$S^{-1}R$ は R-加群として平坦である。
(2) [TODO]

証明. [TODO] □

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の商体だから、上で示した局所化の平坦性より $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦であることがわかる。一方、この事実は別の方法で示すこともできる。

命題 2.7.9. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦である。

証明. [TODO] これであってる？まず、$\mathbb{Q}$ の任意の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群は自由 $\mathbb{Z}$-加群である。

∵ S を $\mathbb{Q}$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群とする。$S = \varnothing$ の場合は明らかだから $S \neq \varnothing$ とする。S は有限生成だから

$$S = \langle\{q_1, \dots, q_n\}\rangle, \quad q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q} \tag{12}$$

と表せる。ここで、必要ならば $q_1, \dots, q_n$ の添字の小さい方から順に $\mathbb{Z}$ 上の 1 次独立性を保つ元のみを選び出して、$q_1, \dots, q_n$ は $\mathbb{Z}$ 上 1 次独立であるとしてよい。このとき $\mathbb{Z}$-加群準同型

$$f\colon \mathbb{Z}^n \to S, \quad (m_1, \dots, m_n) \mapsto m_1 q_1 + \cdots + m_n q_n \tag{13}$$

に対し準同型定理を用いて同型 $\mathbb{Z}^n \cong S$ を得る。 //

M, N を $\mathbb{Z}$-加群とし、$f\colon M \to N$ を単射 $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。$\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \otimes f\colon \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ が単射であることを示す。$\xi \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ が $(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \otimes f)(\xi) = 0$ をみたすとし、$\xi = 0$ を示す。ξ は

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} q_j \otimes v_j \quad (q_j \in \mathbb{Q},\ v_j \in M) \tag{14}$$

の形に表せる。そこで $\mathbb{Q}$ のイデアル、すなわち $\mathbb{Z}$-部分加群 I を $I := \langle\{q_1, \dots, q_j\}\rangle$ とおき、標準射影 $I \to \mathbb{Q}$ を j とおく。このとき

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \otimes f"] & \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N \\ I \otimes_{\mathbb{Z}} M \arrow[u, "j \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[r, "\mathrm{id}_I \otimes f"'] & I \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[u, "j \otimes \mathrm{id}_N"'] \end{tikzcd} \tag{15}$$

は可換となる [TODO] なぜ？。冒頭で示したように I は自由 $\mathbb{Z}$-加群、したがって平坦だから $\mathrm{id}_I \otimes f$ は単射である。[TODO] □

平坦加群の応用のひとつが、線型代数学で学んだ Rank-Nullity Theorem の加群バージョンである。

定理 2.7.10 (有限ランク自由 $\mathbb{Z}$-加群の Rank-Nullity Theorem)**.** M, N を有限ランク自由 $\mathbb{Z}$-加群、$f: M \to N$ を $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。このとき

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f + \operatorname{rk} \operatorname{Im} f \tag{16}$$

が成り立つ。

証明. 命題 2.7.8 あるいは命題 2.7.9 より、$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$-加群として平坦である。したがって $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \square \colon \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全関手である。いま

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{17}$$

は完全系列だから

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} f \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \tag{18}$$

も完全系列となる。よって線型代数学の Rank-Nullity Theorem より

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} f) + \operatorname{rk}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} f) \tag{19}$$

が成り立つ。いま定理 1.1.7 より

$$\operatorname{rk} M = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \tag{20}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} f) \tag{21}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} f) \tag{22}$$

だから

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f + \operatorname{rk} \operatorname{Im} f \tag{23}$$

を得る。 □

2.8 演習問題

A. Problem set 7

♤ **演習問題 2.1** (代数学 II 7.93). A を環とし、$x, y \in A$ が $xy = 1$ をみたすとする。このとき常に $x, y \in A^\times$ となるか？正しければ証明を、誤りならば反例を与えよ。

解答. [TODO] https://math.stackexchange.com/questions/1702297/is-there-a-ring-which-satisfies-xy-1-and-yx-neq-1 □

♤ **演習問題 2.2** (代数学 II 7.95). A を環、R を可換環、$(I, \leq)$ を有向的半順序集合、$(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ を A-加群 (R-代数) の有向系とする。$x \in M_i$, $y \in M_j$ に対しある $k \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i, j \leq k \\ \varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y) \end{cases} \tag{1}$$

をみたすとき $x \sim y$ と書くことにすれば、これは disjoint union $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ 上の同値関係を定める。このとき

$$\varinjlim_{i\in I} M_i := \bigsqcup_{i\in I} M_i \Big/ \sim \tag{2}$$

とおくと A-加群 (R-代数) の構造が自然に入り、$\iota_i \colon M_i \to \varinjlim_{i\in I} M_i$ を包含写像 $M_i \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I} M_i$ から誘導された写像とすると A-加群 (R-代数) の準同型になり、組 $(\varinjlim_{i\in I} M_i, \{\iota_i\}_{i\in I})$ は $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ の帰納極限になることを示せ。

解答. I は少なくともひとつの元をもつとしてよい。

∵ もし $I = \varnothing$ なら $\varinjlim_{i\in I} M_i = \varnothing$ となってしまい A-加群の構造が入らない。 //

$\varinjlim_{i\in I} M_i$ に A-加群の構造が入ることを確かめる。$\bigsqcup_{i\in I} M_i$ の元を (i, x) の形に書くことにすれば、$\varinjlim_{i\in I} M_i$ の元は $[(i, x)]$ の形に書ける。まず各 $[(i, x)], [(j, y)] \in \varinjlim_{i\in I} M_i$ に対し和を次のように定義する:

$$[(i, x)] + [(j, y)] := [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))] \tag{3}$$

ただし $k \in I$ は、$k \geq i, j$ なる k をひとつ選ぶとする (このような k は I が有向系であることにより確かに存在する)。この和は well-defined に定まり、可換性および結合律をみたす。

∵　可換性および結合律は各 M_i の加法の可換性および結合律より明らかだから、well-defined 性のみ示す。

$$\begin{cases} (i,x) \sim (i',x') \\ (j,y) \sim (j',y') \end{cases} \tag{4}$$

とする。$k \geq i,j$ なる $k \in I$ と $k' \geq i',j'$ なる $k' \in I$ をひとつずつ選び、

$$(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) \sim (k', \varphi_{i'k'}(x') + \varphi_{j'k'}(y')) \tag{5}$$

が成り立つことを示せばよい。まず ((4)) よりある $s,t \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i,i' \leq s \\ \varphi_{is}(x) = \varphi_{i's}(x') \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} j,j' \leq t \\ \varphi_{jt}(y) = \varphi_{j't}(y') \end{cases} \tag{6}$$

が成り立つ。さらに I が有向系であることを用いて次の図の下から順に $k,k',m \in I$ を選んでいく:

$$\begin{tikzcd}
 & & & m & & & \\
 & \cdot \arrow[urr] & & & & \cdot \arrow[ull] & \\
s \arrow[ur] & & k \arrow[ul] & & k' \arrow[ur] & & t \arrow[ul] \\
i \arrow[u] \arrow[urr] & & i' \arrow[ull] \arrow[urr] & & j \arrow[ull] \arrow[urr] & & j' \arrow[ull] \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{7}$$

すると

$$\begin{aligned}
\varphi_{km}(\varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) &= \varphi_{km}(\varphi_{ik}(x)) + \varphi_{km}(\varphi_{jk}(y)) \quad (\text{準同型}) \tag{8}\\
&= \varphi_{im}(x) + \varphi_{jm}(y) \quad (\text{有向系の定義}) \tag{9}\\
&= \varphi_{sm}(\varphi_{is}(x)) + \varphi_{tm}(\varphi_{jt}(y)) \quad (\text{有向系の定義}) \tag{10}\\
&= \varphi_{sm}(\varphi_{i's}(x')) + \varphi_{tm}(\varphi_{j't}(y')) \quad (s,t\ \text{のとり方}) \tag{11}\\
&= \varphi_{i'm}(x') + \varphi_{j'm}(y') \quad (\text{有向系の定義}) \tag{12}\\
&= \varphi_{k'm}(\varphi_{i'k'}(x')) + \varphi_{k'm}(\varphi_{j'k'}(y')) \quad (\text{有向系の定義}) \tag{13}\\
&= \varphi_{km}(\varphi_{ik}(x') + \varphi_{jk}(y')) \quad (\text{準同型}) \tag{14}
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) \sim (k', \varphi_{i'k'}(x') + \varphi_{j'k'}(y')) \tag{15}$$

が示せた。 //

いま I は元をもつとしていたからある $i_0 \in I$ がとれる。このとき $[(i_0, 0)]$ はすべての $[(i, x)] \in \varinjlim M_i$ に対し

$$[(i_0, 0)] + [(i, x)] = [(i, x)] \tag{16}$$

をみたす。

$\because$ $k \geq i_0, i$ なる $k \in I$ をひとつ選ぶ。

$$[(i_0, 0)] + [(i, x)] = [(k, \varphi_{i_0 k}(0) + \varphi_{ik}(x))] \quad (\text{和の定義}) \tag{17}$$

$$= [(k, \varphi_{ik}(x))] \quad (\text{準同型}) \tag{18}$$

$$= [(i, x)] \tag{19}$$

となる。ただし最後の等号が成り立つのは、いま $i, k \leq k$ であり、また $\varphi_{kk} = \mathrm{id}_{M_k}$ より

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{kk}(\varphi_{ik}(x)) \tag{20}$$

したがって $(i, x) \sim (k, \varphi_{ik}(x))$ だからである。 //

加法逆元は

$$-[(i, x)] \coloneqq [(i, -x)] \tag{21}$$

により定まる。したがって $\varinjlim M_i$ はアーベル群となる。つぎに各 $[(i, x)] \in \varinjlim_{i \in I} M_i$, $a \in A$ に対しスカラー倍を次のように定義する:

$$a[(i, x)] \coloneqq [(i, ax)] \tag{22}$$

このスカラー倍は well-defined に定まり、$1 \in A$ は自明に作用し、結合律および分配律が成り立つ。

$\because$ $1 \in A$ が自明に作用することと結合律および分配律が成り立つことは各 M_i のスカラー乗法に対するそれらの性質より明らかだから、well-defined 性のみ示す。
$(i, x) \sim (i', x')$ とするとある $s \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i, i' \leq s \\ \varphi_{is}(x) = \varphi_{i's}(x') \end{cases} \tag{23}$$

が成り立つ。$\varphi_{is}, \varphi_{i's}$ が A-加群準同型であることより

$$\varphi_{is}(ax) = \varphi_{i's}(ax') \tag{24}$$

が成り立つ。したがって $(i, ax) \sim (i', ax')$ である。 //

したがって $\varinjlim M_i$ は A-加群となる。つぎに各 $\iota_i\colon M_i \to \varinjlim M_i$ が A-代数準同型となることを示す。ι_i の定義より

$$\iota_i(x) = [(i, x)] \quad (x \in M_i) \tag{25}$$

であることに注意すれば、$\varinjlim M_i$ への加法とスカラー乗法の定め方から明らかに ι_i は A-代数準同型である。最後に $(\varinjlim M_i, \{\iota_i\}_{i\in I})$ が $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\le j})$ の帰納極限となることを示す。そこで A-加群と A-加群準同型の族の組 $(N, \{\xi_i\colon M_i \to N\}_{i\in I})$ であって $\xi_i = \xi_j \circ \varphi_{ij}$ をみたすものが与えられたとする。図式

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim M_k \arrow[dd, dashed, "\eta"] \\ M_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & \\ & N \end{tikzcd} \tag{26}$$

を可換にする A-加群準同型 $\eta\colon \varinjlim M_k \to N$ を構成する。そこで写像 $\eta\colon \varinjlim M_k \to N$ を

$$\eta([(i, x)]) := \xi_i(x) \tag{27}$$

と定める。[TODO] □

♤ **演習問題 2.3** (代数学 7.96). $\mathbb{R}$ における 0 の開近傍全体のなす集合を $\mathcal{N}$ とおく。$U, V \in \mathcal{N}$ に対し $U \le V :\Leftrightarrow U \supset V$ と定めると、これは $\mathcal{N}$ 上の有向的半順序を与える。各 $U, V \in \mathcal{N}$, $U \le V$ に対し $r_{UV}\colon C^\infty(U) \to C^\infty(V)$ を制限写像とすると $(\{C^\infty(U)\}_{U\in\mathcal{N}}, \{r_{UV}\}_{U\le V})$ は $\mathbb{C}$-代数の有向系となる。ここで

$$C_0^\infty := \varinjlim_{U\in\mathcal{N}} C^\infty(U) \tag{28}$$

とおく。C_0^∞ は局所環となることを示し、極大イデアルと異なる素イデアルを持つことを示せ。

解答. 帰納極限の構成から明らかに C_0^∞ は可換 $\mathbb{C}$-代数である。C_0^∞ の元は 0 の十分近くで一致する関数を同一視した類になっている。

$$I := \{[(U, f)] \in C_0^\infty \mid f(0) = 0\} \tag{29}$$

とおくと、I は C_0^∞ の極大イデアルである。

$\because$ [TODO] //

$f(0) \ne 0$ なる元 $[(U, f)]$ を含むイデアルは C_0^∞ に一致するから、C_0^∞ の任意の極大イデアル I'

はそのような元は含まない。よって I の定義から $I' \subset I$ であり、I' が極大イデアルであることから $I' = I$ である。したがって C_0^∞ の極大イデアルは I のみである。よって C_0^∞ は局所環である。つぎに

$$J := \{[(\mathbb{R}, 0)]\} \tag{30}$$

とおけば J は C_0^∞ の零イデアルであるが、これは素イデアルでもある。

∵ [TODO] (??) //

I はたとえば $[(\mathbb{R}, x^2)]$ を含むから零イデアルではないことに注意すれば、J が求める素イデアル、すなわち I と異なる素イデアルである。 □

B. Problem set 8

♤ **演習問題 2.4** (代数学 II 8.108)**.** A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を加法的共変関手とする。A-加群の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{31}$$

に対し、

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{32}$$

は完全となるとする。このとき T は右完全関手であることを示せ。

証明. [TODO] 加法的であることはいつ使う？A-加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{33}$$

が任意に与えられたとし、

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \tag{34}$$

が完全系列であることを示す。準同型定理より図式

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & M_2 \\ M_1/\operatorname{Ker}\alpha \arrow[ur, dashed, "\bar{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \tag{35}$$

を可換にする単射な A-加群準同型 $\bar{\alpha}$ が誘導される。このとき $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\bar{\alpha}$ も成り立つから

$$0 \longrightarrow M_1/\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\bar{\alpha}} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{36}$$

は完全系列である。そこで問題の仮定より

$$T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \xrightarrow{T(\overline{\alpha})} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{37}$$

は完全系列である。T は共変だから、(35) より図式

$$\begin{tikzcd} T(M_1) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "T(\pi)"'] & T(M_2) \\ T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \arrow[ur, "T(\overline{\alpha})"'] & \end{tikzcd} \tag{38}$$

は可換である。いま (37) が完全系列であることより $\operatorname{Im} T(\overline{\alpha}) = \operatorname{Ker} T(\beta)$ だから、あとは $\operatorname{Im} T(\alpha) = \operatorname{Im} T(\overline{\alpha})$ を示せばよい。そのためには $T(\pi)$ の全射性をいえばよいが、

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\pi} M_1/\operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{39}$$

が完全系列であることと問題の仮定より

$$T(\operatorname{Ker}\alpha) \longrightarrow T(M_1) \xrightarrow{T(\pi)} T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{40}$$

は完全系列だから、とくに $T(\pi)$ は全射である。したがって $\operatorname{Im} T(\alpha) = \operatorname{Im} T(\overline{\alpha}) = \operatorname{Ker} T(\beta)$ である。よって

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \tag{41}$$

は完全系列である。 □

C. Problem set 9

♤ **演習問題 2.5** (代数学 II 9.114). R を可換環、M を R-加群とする。このとき M が入射的ならば可除になることを示せ。

証明. $a \in M,\ a \neq 0$ を零因子でないものとする。R-加群準同型 $a\times\colon M \to M,\ x \mapsto ax$ は単射となるから、いま M が入射的であることから図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "a\times"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{42}$$

を可換にする R-加群準同型 f が存在する。各 $y \in M$ に対し $y = f(ay) = af(y)$ が成り立つから $a\times$ は全射である。したがって M は可除である。 □

♤ **演習問題 2.6** (代数学 II 9.117). A を環とする。左 A-加群 M が**平坦 (flat)** であるとは共変関手 $\square \otimes_A M\colon \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ が完全関手になることとする。このとき、左 A-加群 M が平坦であることの必要十分条件は M を右 A^{OP}-加群とみなしたときに M が平坦であることであることを示せ。

証明. X を右 A-加群とし、$a.x \coloneqq xa$ により左 A^{OP}-加群ともみなす。このとき写像 $M \times X \to X \otimes_A M,\ (m,x) \mapsto x \otimes m$ は左 $\mathbb{Z}$-線型 A^{OP}-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像であるから、$\mathbb{Z}$-線型写像 $M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X \to X \otimes_A M$ が誘導される。この逆写像は $X \times M \to M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X,\ (x,m) \mapsto m \otimes x$ により誘導される。したがって $X \otimes_A M \cong M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X$ であるから、$\mathbf{Mod}\text{-}A$ の完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \tag{43}$$

(これは $A^{\mathrm{OP}}\text{-}\mathbf{Mod}$ の完全列でもある) に対し

$$0 \longrightarrow M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X \longrightarrow M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} Y \tag{44}$$

が $\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ の完全列であることと

$$0 \longrightarrow X \otimes_A M \longrightarrow Y \otimes_A M \tag{45}$$

が $\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ の完全列であることは同値である。よって問題の主張が示せた。 □

♤ **演習問題 2.7** (代数学 II 9.119). 0 でない自由加群は忠実平坦であることを示せ。また 0 でない射影加群はどうか？

証明. A を環とし、M を 0 でない自由右 A-加群とする。このときとくに A は零環でない。M が忠実平坦であることを示す (M が左 A-加群の場合も同様である)。M は自由ゆえに平坦だから、M が忠実平坦であることをいうには、$f\colon X \to Y$ を任意の A-加群準同型として、$\mathbb{Z}$-加群準同型 $\mathrm{id}_M \otimes f\colon M \otimes_A X \to M \otimes_A Y$ が単射であるとき f が単射であることを示せばよい。いま M は自由右 A-加群だから、M の基底をひとつ固定すれば右 A-加群の同型 $\mu\colon M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} A_A$ が存在する。このとき図式

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes f"] \arrow[d, "\mu"'] & M \otimes_A Y \arrow[d, "\mu"] \\ \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{id}_{\bigoplus A} \otimes f"'] & \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A Y \end{tikzcd} \tag{46}$$

は可換だから、$\mathrm{id}_M \otimes f$ の単射性より $\mathrm{id}_{\bigoplus A} \otimes f$ の単射性が従う。ここで任意の A-加群 Z に対し

$$\begin{array}{ccccc} \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A Z & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I}(A \otimes_A Z) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I} Z \\ (a_i)_{i\in I} \otimes z & \longmapsto & (a_i \otimes z)_{i\in I} & \longmapsto & (a_i z)_{i\in I} \end{array} \tag{47}$$

は A-加群の同型である (定理 1.2.8, 補題 2.7.2)。よって

$$\begin{tikzcd} \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bigoplus A}\otimes f"'] & \bigoplus_{i\in I}(A \otimes_A X) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I} X \arrow[d, dashed, "g"] \\ \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A Y \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I}(A \otimes_A Y) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I} Y \end{tikzcd} \tag{48}$$

の右端に誘導される A-加群準同型 $g((a_i x)_{i\in I}) = (a_i f(x))_{i\in I}$ は単射である。f が単射であることを示す。いま $\bigoplus_{i\in I} A \cong M \neq 0$ だからある $i_0 \in I$ が存在する。$x \in X$ とし、$f(x) = 0_Y$ と仮定すると $g((\delta_{i_0 i} x)_{i\in I}) = (\delta_{i_0 i} f(x))_{i\in I} = 0_{\bigoplus Y}$ である。ただし $\delta_{i_0 i}$ は

$$\delta_{i_0 i} \coloneqq \begin{cases} 1_A & (i = i_0) \\ 0_A & (i \neq i_0) \end{cases} \tag{49}$$

と定義した。g の単射性より $(\delta_{i_0 i} x)_{i\in I} = 0_{\bigoplus X}$ だから $x = \delta_{i_0 i_0} x = 0_X$ である。よって f は単射である。したがって M は忠実平坦である。

一方、0 でない射影加群が忠実平坦とは限らない例を挙げる。$R \coloneqq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とし、R の元を $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\bar{n}$ と書くことにする。R のイデアル M, N を

$$M \coloneqq (\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}, \qquad N \coloneqq (\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \tag{50}$$

で定める。R を R-加群、M, N を R の R-部分加群とみなすと $R = M + N$, $M \cap N = 0$ より $R = M \oplus N$ が成り立つ。R は自由 R-加群だから、とくに M は (0 でない) 射影 R-加群である。そこで M が忠実平坦でないことを示せばよい。標準射影 $R \to M$ を p とおく。直和分解 $R = M \oplus N$ に沿って $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$, $\bar{2} = \bar{0} + \bar{2}$ と表せるから $p(\bar{0}) = \bar{0} = p(\bar{2})$ であり、したがって p は単射でない。一方 $\mathrm{id}_M \otimes p \colon M \otimes_R R \to M \otimes_R M$ は単射であることを示す。R-加群準同型

$f\colon M \to M \otimes_R M,\ m \mapsto m \otimes \bar{3}$ を考える。R-加群の同型 $\mu\colon M \xrightarrow{\sim} M \otimes_R R,\ m \mapsto m \otimes \bar{1}$ は図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\mu"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M \otimes_R R \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes p"'] & M \otimes_R M \end{tikzcd} \tag{51}$$

を可換にするから、$\mathrm{id}_M \otimes p$ が単射であることをいうには f が単射であることをいえばよい。ここで f の右逆写像は、環 R における積を R のイデアル M に制限した演算から誘導される $g\colon M \otimes_R M \to M,\ m \otimes m' \mapsto mm'$ により与えられる。実際、各 $m \in M$ に対し $m \overset{f}{\mapsto} m \otimes \bar{3} \overset{g}{\mapsto} m\bar{3}$ だから $m = \bar{0}$ なら $m\bar{3} = \bar{0}$、$m = \bar{3}$ なら $m\bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$ となり、g はたしかに f の右逆写像である。したがって f、ひいては $\mathrm{id}_M \otimes p$ の単射性がいえた。よって M は R-加群として忠実平坦でない。 □

♤ **演習問題 2.8** (代数学 II 9.121)**.** R を可換環、M, N を平坦 R-加群とする。このとき $M \otimes_R N$ は平坦であることを示せ。

解答. R-**Mod** の完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \tag{52}$$

に対し、N の平坦性より

$$0 \longrightarrow N \otimes_R X \longrightarrow N \otimes_R Y \tag{53}$$

は R-**Mod** の完全列だから、M の平坦性より

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N \otimes_R X \longrightarrow M \otimes_R N \otimes_R Y \tag{54}$$

は R-**Mod** の完全列である。したがって $M \otimes_R N$ は平坦である。 □