振り返りと導入

前回は KL ダイバージェンスの双対平坦多様体への一般化を考え始めた。本稿では次のことを行う:

- 双対平坦構造の canonical ダイバージェンスを定義する。
- 双対平坦構造からシンプレクティック構造が定まることをみる。

1 双対平坦構造の canonical ダイバージェンス

以下 M を多様体とする。

定義 1.1 (canonical ダイバージェンスの定義域). (g, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造とし、

$$\mathcal{W} := \left\{ (p, q) \in M \times M \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{(i) } p, q \text{ を結ぶ } \nabla\text{-測地線のうち最短なものがただひとつ存在する。} \\ \text{(ii) その像を覆う単連結 } \nabla\text{-アファインチャートが存在する。} \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{U} := \mathrm{Int}_{M\times M}\, \mathcal{W} \tag{1.2}$$

とおく。$\mathcal{U}$ を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) の **canonical ダイバージェンスの定義域** と呼ぶ。

命題 1.2. $\mathcal{U}$ は $M \times M$ における Δ_M の開近傍である。

証明 資料末尾の付録を参照。 □

命題-定義 1.3 (canonical ダイバージェンス). $(p, q) \in \mathcal{U}$ を固定し、(i) の ∇-測地線を $\gamma\colon I \to M$ とおく。γ の像を覆う任意の単連結 ∇-アファインチャート (U, θ) と U 上の g の任意の ∇-ポテンシャル $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ に対し、$\eta_i := \partial_i \psi \in C^\infty(U)$, $\eta := (\eta_i)_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, $\varphi := \langle \theta, \eta \rangle - \psi \in C^\infty(U)$ とおくと、

$$\psi(q) + \varphi(p) - \langle \theta(q), \eta(p) \rangle \tag{1.3}$$

の値は $(U, \theta), \psi$ の取り方によらない。この値を $D(p\|q)$ と記す。以上により定まる関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) の **canonical ダイバージェンス** と呼ぶ。

注意 1.4. η は U 上の座標とは保証されていないことに注意。

補題 1.5. 条件 (ii) をみたす任意の (U, θ) に対し、次をみたす ∇-ポテンシャル $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ がただひとつ存在する:

(a) $\psi(p) = 0$
(b) $(\nabla\psi)_p = 0$

このような ψ を ψ_p とおくと、U 上の g の任意の ∇-ポテンシャル ψ に対し

$$\psi_p(q) = \psi(q) + \varphi(p) - \langle \theta(q), \eta(p) \rangle \qquad (q \in U) \tag{1.4}$$

が成り立つ。

証明 (一意性): 2 つの ∇-ポテンシャル ψ, ψ' に対し $\nabla^2\psi = g = \nabla^2\psi'$ であることより従う。(存在): U は単連結だから Poincaré の補題より U 上の ∇-ポテンシャル ψ が存在する。このとき $\widetilde{\psi}(q) := \psi(q) - \partial_i\psi(p)\theta^i(q) - \psi(p)$ もまた U 上の ∇-ポテンシャルであり、条件 (a), (b) をみたす。したがって存在が示せた。 □

命題-定義 1.3 の証明 補題より $D^{\theta',\psi}(p\|q) = \psi_p(q) = D^{\theta',\psi'}(p\|q)$ が成り立つ。また、$U \cap U'$ のうち γ の像を含む連結成分上では 2 つの座標 θ, θ' はアファイン変換で移り合うから、$D^{\theta,\psi}(p\|q) = D^{\theta',\psi}(p\|q)$ が成り立つ。よって $D^{\theta,\psi} = D^{\theta',\psi'}$ が成り立つ。 □

命題 1.6 (canonical ダイバージェンスの性質)**.** $(p,q) \in \mathcal{U}$ に対し次が成り立つ:

(1) $D(p\|q) \geq 0$

(2) $D(p\|q) = 0 \iff p = q$

証明 ψ の ∇-凸性より従う。 □

定義 1.7 (D へのベクトル場の作用の記法)**.** $X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_m \in \mathfrak{X}(M)$, $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$D(X_1, \ldots, X_l\|Y_1, \ldots, Y_m) := (X_1, 0)\ldots(X_l, 0)(0, Y_1)\ldots(0, Y_m)D \in C^\infty(\mathcal{U}) \tag{1.5}$$

と定める。ただし $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M \times M)$ はベクトル場の直和を表す。

命題 1.8 (canonical ダイバージェンスから双対平坦構造の復元)**.** $p \in M$、$x = (x_\alpha)_\alpha$ を p のまわりの座標として

(1) $g_p(X_p, Y_p) = D(\|XY)(p,p) = -D(X\|Y)(p,p) = D(XY\|)(p,p)$

(2) $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(p) = -D(\partial_\gamma\|\partial_\alpha\partial_\beta)(p,p)$

(3) $D(p\|-)\colon \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{U}_p$ 上の g の ∇-ポテンシャルである。

(4) $D(-\|p)\colon \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{U}_p$ 上の g の ∇^*-ポテンシャルである。

証明 (1) 直接計算より。

(2) 直接計算より。ただし ∇ が平坦ゆえ $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ であることに注意。

(3) D の定義から

$$d(D(p\|-))_q = d\psi_q - \eta_i(p)d\theta^i_q = (\eta_i(q) - \eta_i(p))d\theta^i_q \tag{1.6}$$

より

$$\nabla^2(D(p\|-)) = \partial_j(\eta_i)\, d\theta^j d\theta^i = g \tag{1.7}$$

を得る。

(4) (3) と同様。 □

2 双対平坦構造とシンプレクティック構造

定義 2.1 (シンプレクティックベクトル空間). $2n$ 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 V と V 上の非退化交代形式 $\omega\colon V\times V \to \mathbb{R}$ の組 (V,ω) を**シンプレクティックベクトル空間 (symplectic vector space)** という。

定義 2.2 (シンプレクティック形式). M を $2n$ 次元多様体とする。$\omega \in \Omega^2(M)$ が M 上の**シンプレクティック形式 (symplectic form)** であるとは、ω が閉形式かつ各点 $x \in M$ で (T_xM, ω_x) がシンプレクティックベクトル空間であることをいう。

例 2.3 (標準シンプレクティック形式). $\mathbb{R}^{2n}$ の標準的な座標 $(x^1,\dots,x^n,y_1,\dots,y_n)$ に対し $\omega_0 := dx^i \wedge dy_i \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック構造である。ω_0 を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の**標準シンプレクティック形式 (standard symplectic form)** という。

例 2.4 (余接束の自然シンプレクティック形式). M を n 次元多様体とする。余接束 $\pi\colon T^\vee M \to M$ 上の 1-形式 $\theta \in \Omega^1(T^\vee M)$ を

$$\theta_{(q,p)}(v) := p(d\pi_{(q,p)}(v)) \tag{2.1}$$

で定め、これを**トートロジカル 1-形式 (tautological 1-form)** と呼ぶ。このとき $\omega_0 := -d\theta \in \Omega^2(T^\vee M)$ は $T^\vee M$ 上のシンプレクティック構造となり、これを $T^\vee M$ 上の**自然シンプレクティック形式 (canonical symplectic form)** と呼ぶ。

命題 2.5 (自然シンプレクティック形式の成分表示). M を n 次元多様体、$x = (x^i)_i$ を M の局所座標とする。x により定まる $T^\vee M$ の局所座標を $(x^1,\dots,x^n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ とおくと、これに関する自然シンプレクティック形式 ω_0 の成分表示は

$$\omega_0 = dx^i \wedge d\xi_i \tag{2.2}$$

となる。

証明 $\pi(q,p) = q$ ゆえ $d\pi^*(dx^i) = dx^i$ であることに注意すると、トートロジカル 1-形式の成分表示

$$\theta_{(q,p)} = d\pi^*_{(q,p)}(\xi_i dx^i) = \xi_i dx^i \tag{2.3}$$

より命題の等式が従う。 □

命題 2.6 (双対平坦構造のシンプレクティック構造). M を多様体、(g,∇,∇^*) を M 上の双対平坦構造、$D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を canonical ダイバージェンス、$\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック構造とする。写像 $d_1D\colon \mathcal{U} \to T^\vee M$ を第 1 成分に関する微分、すなわち $d_1D := D(\frac{\partial}{\partial x^i}\|)\, dx^i$ で定め、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ を $\omega := (d_1D)^*(\omega_0)$ で定める。このとき次が成り立つ:

(1) M の任意の局所座標 $x = (x_i)_i$ に対し、$x^* := x$ とおいて $\mathcal{U}$ の局所座標 $(x,x^*) = (x^1,\dots,x^n,x^{*1},\dots,x^{*n})$

を定めると、ω の成分表示は

$$\omega = D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} \tag{2.4}$$

となる。

(2) ω は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。

証明 (1) x により定まる $T^\vee M$ の局所座標を $(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\omega &= (d_1 D)^*(\omega_0) && (2.5)\\
&= (d_1 D)^*(dx^i \wedge d\xi_i) && (2.6)\\
&= d(x^i \circ d_1 D) \wedge d(\xi_i \circ d_1 D) && (2.7)\\
&= dx^i \wedge \left(D(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \|)\, dx^j + D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^{*j} \right) && (2.8)\\
&= D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} && (2.9)
\end{aligned}$$

を得る。

(2) [TODO] 要証明 □

今後の予定

- 双対平坦構造のシンプレクティック構造と双対アファイン座標

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

1.1 定義 1.1 の条件 (i), (ii) について

M を多様体、g を M 上の Riemann 計量、∇ を M 上のアファイン接続とする。

定義 A.1 (simple chain (ここだけの用語)). X を位相空間とする。X の開集合の有限列 $(U_i)_{i=1}^N$ が **simple chain** であるとは、$U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i-j| \leq 1$ が成り立つことをいう。さらにすべての $U_i \cap U_{i+1}$ が連結のとき **very simple chain** という。

補題 A.2. ∇-アファインチャートの列 $(U_i)_{i=1}^N$ が very simple chain ならば、$\bigcup_{i=1}^N U_i$ を定義域とする ∇-アファイン座標が存在する。

証明 $U_1 \cap U_2$ は連結であり、2 つの座標はアファイン変換で移り合うから、それに応じて U_2 上の座標を調整すれば $U_1 \cup U_2$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。以下同様にして $U_1 \cup \cdots \cup U_N$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。 □

命題 A.3. $\gamma : I \to M$ が単射な ∇-測地線ならば、$\gamma(I)$ を覆う単連結な ∇-アファインチャートが存在する。

証明 [TODO] 要確認 $\gamma(I)$ の各点のまわりの ∇-アファインチャートを集めて $\gamma(I)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ を作る。Lebesgue 数の補題より、実数列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ が存在して各 $S_i := \gamma([t_{i-1}, t_i])$ はある $U_i \in \mathcal{U}$ に含まれる。γ の単射性より、ある $\varepsilon > 0$ であって $(U(S_i, \varepsilon))_{i=1}^N$ が very simple chain かつ $U(S_i, \varepsilon) \subset U_i$ となるものが存在する (ただし $U(S_i, \varepsilon)$ は Riemann 距離に関する ε-近傍)。そこで $U := \bigcup_{i=1}^N U(S_i, \varepsilon)$ とおくと、補題より U 上の ∇-アファイン座標 θ が存在する。$\theta(\gamma(I))$ が $\theta(U)$ 内の線分であることに注意すると、$\theta(\gamma(I))$ の十分小さい近傍 V をとれば、$\theta^{-1}(V)$ は $\gamma(I)$ を覆う単連結な ∇-アファインチャートとなる。 □

1.2 命題 1.2 の証明

証明 $p \in M$ を固定し、(p,p) の $M \times M$ におけるある開近傍が $\mathcal{W}$ に含まれることを示せばよい。そのような開近傍を次のように構成する。

まず ∇ の平坦性より p のまわりの ∇-アファインチャート (U, θ) が存在する。p の M における (計量 g から定まる距離に関する) $3r$-近傍が U に含まれるように $r > 0$ をとり、p の M における r-近傍を U' とおく。さらに $\theta(p)$ の $\mathbb{R}^n$ における ε-近傍 V_ε が $\theta(U')$ に含まれるように $\varepsilon > 0$ をとる。$U_\varepsilon := \theta^{-1}(V_\varepsilon)$ とおくと (p,p) の $U_\varepsilon \times U_\varepsilon$ は $M \times M$ における開近傍である。

以下 $U_\varepsilon \times U_\varepsilon \subset \mathcal{W}$ を示す。すなわち、$(a,b) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon$ として $(a,b) \in \mathcal{W}$ を示す。U_ε は ∇-凸ゆえ、a, b を結ぶ U_ε 内の ∇-測地線 γ が存在する。このとき γ はとくに U 内の ∇-測地線でもあるが、U は ∇-アファインチャートだから γ は a, b を結ぶ U 内の唯一の ∇-測地線である。U' の定め方から、a, b を結ぶ (M 内の) 任意の ∇-測地線は γ より真に長いか γ 自身である [TODO] 怪しい。したがって、a, b を結ぶ (M 内の) ∇-測地線のうち最短なものはただひとつ存在し、それは γ である。よって (a,b) は条件 (i) をみたす。さらに U_ε は γ の像を覆う単連結 ∇-アファインチャートだから、(a,b) は条件 (ii) をみたす。したがって $(a,b) \in \mathcal{W}$ である。 □