振り返りと導入

前回は双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造と Legendre 変換について調べた。本稿では次のことを行う:

(1) Hamilton ベクトル場と Poisson 括弧を定義する。
(2) 運動量写像を定義し Noether の定理を示す。

1 Hamilton ベクトル場と Poisson 括弧

以下 (M, ω) を (一般の) シンプレクティック多様体とする。

定義 1.1 (Hamilton ベクトル場)**.** $f \in C^\infty(M)$ に対し、$X_f \in \mathfrak{X}(M)$ であって

$$\iota_{X_f}\omega = -df \tag{1.1}$$

を満たすもの (これはただひとつ存在する) を f の **Hamilton ベクトル場 (Hamiltonian vector field)** といい、f を X_f の **Hamilton 関数 (Hamiltonian function)** あるいは **Hamiltonian** という。X_f のフローを f の **Hamilton フロー** という。

命題 1.2 (Hamilton ベクトル場の基本性質)**.** $f \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ として次が成り立つ:

(1) $\omega(X_f, Y) = -Yf$
(2) ω は Hamilton フローに沿って不変、すなわち $L_{X_f}\omega = 0$ である。
(3) $\omega = dx^i \wedge d\xi_i$ なる M の局所座標 (これは **Darboux 座標**と呼ばれる) (x^i, ξ_i) に関する X_f の成分表示は

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \xi_i} \tag{1.2}$$

である。

証明. cf. 資料末尾の付録 □

定義 1.3 (Poisson 括弧)**.** 演算 $\{-,-\}\colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \quad (f, g \in C^\infty(M)) \tag{1.3}$$

で定め、これを **Poisson 括弧 (Poisson bracket)** と呼ぶ。

命題 1.4 (Poisson 括弧の基本性質)**.** $f, g, h \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ として次が成り立つ:

(1) $\{-,-\}$ は交代 $\mathbb{R}$-双線型写像であり、$\{f, g\} = X_f g = -X_g f$ をみたす。
(2) $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$
(3) (Jacobi の恒等式) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

したがって $(C^\infty(M), \{-,-\})$ は Lie 代数であり、写像 $C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $f \mapsto X_f$ は Lie 代数準同型である。

(4) (Leibniz 則) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$

証明. cf. 資料末尾の付録 □

定義 1.5 (Hamilton 系). $H \in C^\infty(M)$ に対し、組 (M, ω, H) を **Hamilton 系 (Hamiltonian system)** といい、H を (M, ω, H) の **Hamilton 関数** あるいは **Hamiltonian** という。$f \in C^\infty(M)$ が $L_{X_H} f = 0$ をみたすとき、f を (M, ω, H) の**保存量 (conserved quantity)** という。

命題 1.6 (保存量と Poisson 括弧). $f \in C^\infty(M)$ が (M, ω, H) の保存量であるための必要十分条件は $\{H, f\} = 0$ が成り立つことである。とくに H 自身は保存量である。

証明. 必要十分性は $\{H, f\} = X_H f$ であることより従う。また $\{-, -\}$ の交代性より $\{H, H\} = 0$ だから H は保存量である。 □

例 1.7 (canonical ダイバージェンスの Hamilton フロー). M を多様体、(g, ∇, ∇^*) を双対平坦構造、$D \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を canonical ダイバージェンス、ω を (g, ∇, ∇^*) に付随する $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック構造とする。M の g-凸な双対アファインチャート (U, θ, η) をひとつ選ぶと、(θ^*, η) は $\mathcal{U}$ の局所的な Darboux 座標となり、この座標に関する X_D の成分表示は

$$X_D = (\theta^{*i} - \theta^i)\frac{\partial}{\partial \theta^{*i}} + (\eta_i^* - \eta_i)\frac{\partial}{\partial \eta_i} \tag{1.4}$$

となる。

2 運動量写像と Noether の定理

以下 (M, ω) を (一般の) シンプレクティック多様体、G を Lie 群とし、G が M に右から C^∞ 作用しているとする。

定義 2.1 (シンプレクティック作用). G の作用**シンプレクティック作用 (symplectic action)** であるとは、各 $g \in G$ に対し右移動 $R_g \colon M \to M$ がシンプレクティック同相写像であることをいう。

定義 2.2 (運動量写像). G のシンプレクティック作用が **Hamilton 作用 (Hamiltonian action)** であるとは、次の 2 条件を満たす C^∞ 写像 $\mu \colon M \to \mathfrak{g}^\vee$ が存在することをいう:

- **(M1)** $X \in \mathfrak{g}$ に対し $\mu_X := \langle \mu, X \rangle \in C^\infty(M)$ は X の基本ベクトル場 X^* の Hamiltonian である。
- **(M2)** $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し $\{\mu_X, \mu_Y\} = \mu_{[X,Y]}$ が成り立つ。

この写像 $\mu \colon M \to \mathfrak{g}^\vee$ を**運動量写像 (momentum map)** という。

注意 2.3. ちなみに「モーメント (moment)」と「運動量 (momentum)」は物理的に全く別の概念である。

例 2.4 (力学における運動量). $M := T^\vee\mathbb{R}^3$, $\omega = dx^i \wedge d\xi_i$ を $T^\vee\mathbb{R}^3$ に標準的なシンプレクティック構造を入れたものとする。$G := \mathbb{R}^3$ の M への作用を $G \times M \to M$, $(a, (x, \xi)) \mapsto (x + a, \xi)$ で定めると、これはシンプレクティック作用である。運動量写像 $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^\vee$ は次のように構成できる。すなわち、$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ の標準基底を e_1, e_2, e_3、その双対基底を e^1, e^2, e^3 とおき

$$\mu(x, \xi) = -\xi_i e^i \tag{2.1}$$

と定める。(M1) は $X = X^i e_i \in \mathfrak{g}$ に対し $-d\mu_X = d(X^i\xi_i) = X^i d\xi_i = \iota_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\omega = \iota_{X^*}\omega$ より従う。(M2) は $\{\mu_X, \mu_Y\} = X^*\mu_Y = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}(-Y^j\xi_j) = 0 = \mu_0 = \mu_{[X,Y]}$ より従う。別証明として後の命題 2.6 を用いることもできる。μ は力学における (線型) 運動量の符号を反転したものである。

定理 2.5 (Noether の定理). (M, ω, H) を Hamilton 系とする。また G の作用が Hamilton 作用であるとし、$\mu\colon M \to \mathfrak{g}^\vee$ を運動量写像とする。このとき、H が G-不変ならば、すべての $X \in \mathfrak{g}$ に対し $\mu_X \in C^\infty(M)$ は (M, ω, H) の保存量である。

証明. $\{H, \mu_X\} = 0$ を示せばよいが

$$\begin{aligned}
\{H, \mu_X\}(x) &= -\{\mu_X, H\}(x) && (2.2)\\
&= -X^*H(x) && (2.3)\\
&= -\frac{d}{dt}H(x \exp tX)\Big|_{t=0} && (2.4)\\
&= -\frac{d}{dt}H(x)\Big|_{t=0} \quad (\because H \text{ の } G\text{-不変性}) && (2.5)\\
&= 0 && (2.6)
\end{aligned}$$

より従う。 □

命題 2.6 (余接束上に誘導される Hamilton 作用). $T^\vee M$ 上に誘導される G の作用 $G \times T^\vee M \to T^\vee M$, $(g, (x, \xi)) \mapsto (R_g(x), d(R_g)_*\xi)$ は Hamilton 作用である。

証明. まず canonical 1-形式 $\theta \in \Omega^1(T^\vee M)$ が G-不変であることを示しておく。そのために $g \in G$ を固定し、$\widehat{R}_g$ を $T^\vee M$ 上の右移動として $(\widehat{R}_g)^*\theta = \theta$ を示す。

$$\begin{aligned}
\left\langle (\widehat{R}_g^*\theta)_{(x,\xi)}, v \right\rangle &= \left\langle \theta_{\widehat{R}_g(x,\xi)}, d(\widehat{R}_g)(v) \right\rangle && (2.7)\\
&= \left\langle d(R_g)_*\xi, d\pi \circ d(\widehat{R}_g)(v) \right\rangle && (2.8)\\
&= \left\langle d(R_g)_*\xi, d(R_g) \circ d\pi(v) \right\rangle && (2.9)\\
&= \left\langle d(R_g)^* d(R_g)_*\xi, d\pi(v) \right\rangle && (2.10)\\
&= \langle \xi, d\pi(v) \rangle && (2.11)\\
&= \left\langle \theta_{(x,\xi)}, v \right\rangle && (2.12)
\end{aligned}$$

よって $(R_g)^*\theta = \theta$ である。したがって θ は G-不変である。引き戻しと外微分の可換性より $\omega = -d\theta$ も G-不変である。

次に運動量写像を構成する。$\mathfrak{g}$ の基底 E_i $(i = 1, \ldots, \dim G)$ を 1 組選び、その双対基底を $E^i \in \mathfrak{g}^\vee$ とおき

$$\mu\colon T^\vee M \to \mathfrak{g}^\vee, \qquad (x, \xi) \mapsto -\left\langle \theta_{(x,\xi)}, (E_i)^* \right\rangle E^i \tag{2.13}$$

と定めると、これは C^∞ である。(M1) について、$X = X^i E_i \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\begin{aligned} \mu_X &:= \langle \mu, X \rangle && (2.14)\\ &= \left\langle \mu, X^i E_i \right\rangle && (2.15)\\ &= X^i \langle \mu, E_i \rangle && (2.16)\\ &= -X^i \left\langle \theta, E_i^* \right\rangle && (2.17)\\ &= -\langle \theta, X^* \rangle && (2.18)\\ &= -\iota_{X^*}\theta && (2.19) \end{aligned}$$

したがって

$$-d\mu_X = d \circ \iota_{X^*}\theta = L_{X^*}\theta - \iota_{X^*} \circ d\theta = 0 + \iota_{X^*}\omega = \iota_{X^*}\omega \tag{2.20}$$

となるから、μ_X は X^* の Hamiltonian である。よって (M1) が成り立つ。(M2) について、(2.19) の関係式 $\mu_X = -\iota_{X^*}\theta$ も用いれば

$$\{\mu_X, \mu_Y\} = X^*\mu_Y = -X^*\iota_{Y^*}\theta = -L_{X^*}\iota_{Y^*}\theta \tag{2.21}$$

一方

$$\mu_{[X,Y]} = -\iota_{[X,Y]^*}\theta = -\iota_{[X^*,Y^*]}\theta = -L_{X^*}\iota_{Y^*}\theta \tag{2.22}$$

よって $\{\mu_X, \mu_Y\} = \mu_{[X,Y]}$ を得る。したがって (M2) が成り立つ。以上より μ は運動量写像である。 □

今後の予定

- シンプレクティック商?

参考文献

[今 13] 宏 今野, **微分幾何学**, 大学数学の世界, no. 1, 東京大学出版会, 2013.

[植 15] 一石 植田, **数物系のためのシンプレクティック幾何学入門**, 臨時別冊・数理科学, サイエンス社, 2015.

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

命題 1.2 の証明. (1) Hamilton ベクトル場の定義より明らか。

(2)

$$L_{X_f}\omega = (d \circ \iota_{X_f} + \iota_{X_f} \circ d)\omega \quad (\because \text{Cartan の公式}) \tag{A.1}$$
$$= 0 + 0 \quad (\because \iota_{X_f}\omega = -df,\ d\omega = 0) \tag{A.2}$$
$$= 0 \tag{A.3}$$

(3) $\omega = dx^i \wedge d\xi_i$ と表せるから

$$-df = \omega(X_f, Y) = dx^i(X_f)d\xi_i(Y) - d\xi_i(X_f)dx^i(Y) \tag{A.4}$$

係数を比較して $dx^i(X_f) = -\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i},\ d\xi_i(X_f) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ を得る。 □

命題 1.4 の証明. (1) $\{-,-\}$ の交代性は ω の交代性より従う。Hamilton ベクトル場の性質より $\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) = -X_g f$ であり、交代性より $\{f,g\} = X_f g$ も従う。ベクトル場の関数への作用の $\mathbb{R}$-線型性より $\{-,-\}$ は $\mathbb{R}$-双線型である。

(2) $\omega([X_f, X_g], Y) = \omega(X_{\{f,g\}}, Y)$ $(\forall Y \in \mathfrak{X}(M))$ を示せば ω の非退化性より (2) が従う。微分形式の Lie 微分の公式より

$$X_f(\omega(X_g, Y)) = (L_{X_f}\omega)(X_g, Y) + \omega(L_{X_f}X_g, Y) + \omega(X_g, L_{X_f}Y) \tag{A.5}$$
$$\therefore \quad -X_f Y g = 0 + \omega([X_f, X_g], Y) + \omega(X_g, [X_f, Y]) \tag{A.6}$$

整理して

$$\omega([X_f, X_g], Y) = -X_f Y g - \omega(X_g, [X_f, Y]) \tag{A.7}$$
$$= -X_f Y g + [X_f, Y]g \tag{A.8}$$
$$= -Y X_f g \tag{A.9}$$
$$= -Y\{f,g\} \quad (\because (1)) \tag{A.10}$$
$$= \omega(X_{\{f,g\}}, Y) \tag{A.11}$$

を得る。したがって $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ である。

(3) (1), (2) を用いて

$$\{f, \{g,h\}\} = -X_{\{g,h\}}f \quad (\because (1)) \tag{A.12}$$
$$= -[X_g, X_h]f \quad (\because (2)) \tag{A.13}$$
$$= -(X_g X_h f - X_h X_g f) \tag{A.14}$$
$$= -(\{g,\{h,f\}\} - \{h,\{g,f\}\}) \quad (\because (1)) \tag{A.15}$$
$$= -(\{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}) \quad (\because (1)) \tag{A.16}$$

より従う。

(4) ベクトル場の関数への作用が Leibniz 則を満たすことより従う。 □