

第 1 章 集合

集合論の基礎について述べる。

1.1 集合の操作

[TODO] 圏論的な扱い？

定義 1.1.1 (識別和と非交和). [TODO]

1.2 順序

定義 1.2.1 (半順序). [TODO]

定義 1.2.2 (全順序). [TODO]

定義 1.2.3 (上界と下界). [TODO]

定義 1.2.4 (上限と下限). [TODO]

有向集合を定義する。有向集合の概念は、位相空間論におけるネットの定義や代数学における帰納極限などの定義に用いられる。

定義 1.2.5 (有向集合). 集合 X と X 上の 2 項関係 \leq の組 (X, \leq) が**有向集合 (directed set)** であるとは、次が成り立つことをいう：

- (D1) (反射律)
- (D2) (推移律)
- (D3) (共通上界の存在)

[TODO]

定義 1.2.6 (帰納的半順序集合). 半順序集合 X が**帰納的半順序集合** であるとは、 X の任意の全順序部分集合が X 内に上界を持つことをいう。

定理 1.2.7 (Zorn の補題). 非空な帰納的半順序集合は極大元を持つ。

証明. [TODO]

□

1.3 束

束を定義する。束には2通りの同値な定義が存在する。まずは順序集合論的な定義を与える。

定義 1.3.1 (束 (順序集合論的な定義)). 半順序集合 (L, \leq) であって任意の $a, b \in L$ が最小上界 $a \vee b$ と最大下界 $a \wedge b$ を持つものを**束 (lattice)** という。

定義 1.3.2 (束 (代数的な定義)). [\[TODO\]](#)