

第 1 章 解析関数

1.1 Cauchy-Riemann 方程式

1.2 孤立特異点と留数

定義 1.2.1 (孤立特異点). [TODO]

定義 1.2.2 (留数).

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a;r)} f(\zeta) d\zeta \quad (1.2.1)$$

[TODO]

極における留数は、Laurent 展開を求めなくても計算できる。

命題 1.2.3 (極における留数).

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \neq a}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) \quad (1.2.2)$$

[TODO]

証明. [TODO]

□

1.3 演習問題

♠ 演習問題 1.1 (ChatGPT). 関数 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ の $z = i$ における留数を求めよ。

演習問題 1.1 の解答. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ と表せるから、 $z = i$ は f の 1 位の極である。したがって、極における留数の公式より

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \neq i}} (z-i)f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \neq i}} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i \quad (1.3.1)$$

である。

□