1 A

♤ **演習問題 0.1** (第 1 問). 3 次の実正方行列全体を $M_3(\mathbb{R})$ と表し、これを自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす。実数 a, b, c に対して

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

とおく。以下の問に答えよ。

(1) A と可換な行列全体からなる $M_3(\mathbb{R})$ の部分集合 W は、$M_3(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間をなすことを示せ。

(2) W の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ。

演習問題 0.1 の解答. [TODO] □

♤ **演習問題 0.2** (第 2 問). $g(x, y) = y^4 - y^6 - 3(x^2 + x^4)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0\}$ を求めよ。

(2) 曲線 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S \mid g(x, y) = 0, y > 0\}$ 上で $f(x, y) = x^2 + y^2$ が極値をとる点をすべて求め、その値が極大であるか極小であるかを判定せよ。

演習問題 0.2 の解答. [TODO] 概形を書くと $(0, 1)$ しかなさそう？ □

2 B

♤ **演習問題 0.3** (第 8 問). $M_2(\mathbb{R})$ を 2 次の実正方行列全体とする。対応

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z, w)$$

により $M_2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ と同一視し、これによって $M_2(\mathbb{R})$ 上に座標 x, y, z, w と標準的なリーマン計量 $\langle , \rangle$ を与える。2 次の実対称行列全体を H とし、写像 $F \colon M_2(\mathbb{R}) \to H$ を $F(A) = {}^t\!AA$ により定める。ただし ${}^t\!A$ は A の転置行列である。このとき以下の問に答えよ。

(1) 写像 F の $A \in M_2(\mathbb{R})$ における微分 $(dF)_A$ を求め、F の正則点全体の集合を決定せよ。

(2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ における $M_2(\mathbb{R})$ の接ベクトル X_A を

$$X_A = \left. \frac{d}{dt}(R_t A) \right|_{t=0} \in T_A M_2(\mathbb{R})$$

ただし $R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ と定める。さらに、開部分多様体 $P = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ 上の 1 次微分形式 θ を、すべての $A \in M_2(\mathbb{R})$ について次の条件 (a),(b) が満たされるように定める:

(a) $\theta(X_A) = 1$

(b) $\langle X_A, V \rangle = 0$ ならば $\theta(V) = 0$ である。

ここに、V は A における $M_2(\mathbb{R})$ の接ベクトルであり、$\langle , \rangle$ は上で定めたリーマン計量である。このとき、微分形式 θ を座標 x, y, z, w を用いて表せ。

(3) 写像 $F\colon M_2(\mathbb{R}) \to H$ を P へ制限して得られる写像を $\pi\colon P \to B$ とする。ただし、$B = F(P)$ である。このとき、(2) で定めた微分形式 θ の外微分 $d\theta$ は、像 B 上のある微分形式 ω の π による引き戻し $\pi^*\omega$ に等しいことを証明せよ。

演習問題 0.3 の解答. (1) $(dF)_A$ をチャートに関する行列表示で表す。A の属する $M_2(\mathbb{R})$ のチャートとして

$$\varphi\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \mapsto (x, y, z, w) \tag{2.1}$$

を考え、$F(A)$ の属する H のチャートとして

$$\psi\colon H \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto (a, b, c) \tag{2.2}$$

を考える。これらのチャートに関する F の座標表示 $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\widehat{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, w) \mapsto (x^2 + y^2, xz + yw, z^2 + w^2)$ である。したがって $(dF)_A$ は、チャート φ, ψ に関する行列表示が $\widehat{F}$ の Jacobi 行列

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ z & w & x & y \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

となるような $\mathbb{R}$-線型写像 $T_A M_2(\mathbb{R}) \to T_{F(A)} H$ である。

次に F の正則点全体の集合を決定する。$A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ に関し、点 A が F の正則点であるための必要十分条件は、$(J\widehat{F})_{(x,y,z,w)}$ がフルランクとなることである。ここで、$(J\widehat{F})_{(x,y,z,w)}$ がフルランクでないための必要十分条件、すなわち $(J\widehat{F})_{(x,y,z,w)}$ の 3 個の行ベクトルが $\mathbb{R}$ 上 1 次従属となるための必要十分条件は

$$\exists\, s, t \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad (x, y) = s(z, w),\ (z, w) = t(x, y) \tag{2.4}$$

である。これは $\det A = 0$ と同値である。したがって、F の正則点全体の集合は $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ である。

(2) まず各 $A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ に対し

$$X_A = \frac{d}{dt}(R_t A)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} R_t\bigg|_{t=0} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -y & -w \\ x & z \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

である。θ の成分表示を求める。そこで計量 $\langle , \rangle$ に関する $T_A M_2(\mathbb{R})$ の直交分解 $T_A M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} X_A \oplus (\mathbb{R} X_A)^\perp$ を考え、$\mathbb{R} X_A$ の基底 X_A と $(\mathbb{R} X_A)^\perp$ の基底 b_i $(i = 1, \ldots, 3)$ をあわせた $T_A M_2(\mathbb{R})$ の基底 X_A, b_i $(i = 1, \ldots, 3)$ をひとつ選ぶ。すると条件 (a), (b) より

$$\langle X_A, \cdot \rangle\colon X_A \mapsto \|X_A\|^2, \quad b_i \mapsto 0 \quad (i = 1, \ldots, 3) \tag{2.6}$$

$$\theta_A\colon X_A \mapsto 1, \qquad b_i \mapsto 0 \quad (i = 1, \ldots, 3) \tag{2.7}$$

が成り立つから $\theta_A = \langle X_A, \cdot \rangle / \|X_A\|^2$ である。したがって、θ を座標 x, y, z, w を用いて表すと

$$\theta = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} (-y\,dx + x\,dy - w\,dz + z\,dw) \tag{2.8}$$

となる。

(3) [TODO] よくわからない □