第 1 章　統計的多様体

1　双対構造

定義 1.1 (双対構造). M を多様体とする。M 上の Riemann 計量 g とアファイン接続 ∇, ∇^* の組 (g, ∇, ∇^*) が M 上の**双対構造 (dualistic structure)** であるとは、すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \tag{1.1}$$

が成り立つことをいう。このとき、∇, ∇^* はそれぞれ g に関する ∇^*, ∇ の**双対接続 (dual connection)** であるという。

　さらに ∇, ∇^* がいずれも M 上平坦であるとき、(g, ∇, ∇^*) は**双対平坦 (dually flat)** であるという。双対平坦な双対構造を**双対平坦構造 (dually flat structure)** という。

命題 1.2 (双対接続の存在と一意性). M を多様体、g を M 上の Riemann 計量、∇ を M 上のアファイン接続とする。このとき、g に関する ∇ の双対接続がただひとつ存在する。

証明　一意性は g の非退化性より明らか。以下、存在を示す。まず、$X, Z \in \mathfrak{X}(TM)$ を固定すると写像 $\mathfrak{X}(TM) \to C^\infty(M)$, $Y \mapsto X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z)$ は $C^\infty(M)$-線型だから $\Omega^1(M)$ に属する。これを g で添字を上げて得られるベクトル場を $\nabla^*_X Z$ と記すことにすれば、$\nabla^*_X Z$ は目的の式をみたす。ここまでで、目的の式をみたす写像 $\nabla^* \colon \Gamma(TM) \to \mathrm{Map}(\Gamma(TM), \Gamma(TM))$ が得られた。∇^* の像が $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(TM), \Gamma(TM)) = \Gamma(T^\vee M \otimes TM)$ に属することは、各 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $\nabla^* Z$ の $C^\infty(M)$-線型性を確かめればよく、すぐにわかる。あとは ∇^* の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則を確かめればよいが、これらも ∇^* の定め方から明らか。よって存在が示された。 □

定義 1.3 (双対アファイン座標). (g, ∇, ∇^*) を M 上の双対構造とする。∇-アファイン座標 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ と ∇^*-アファイン座標 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ の組 (θ, η) が (g, ∇, ∇^*) に関する**双対アファイン座標 (dual affine coordinate)** であるとは、

$$g(\partial_i, \partial^j) = \delta_i^j \qquad (\forall i, j) \tag{1.2}$$

が成り立つことをいう。ただし $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial \theta^i}$, $\partial^i := \dfrac{\partial}{\partial \eta_i}$ である。$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の双対アファイン座標 (θ, η) の組 (U, θ, η) を**双対アファインチャート (dual affine chart)** という。

定義 1.4 (双対ポテンシャル). (U, θ, η) を双対アファインチャートとする。関数 $\psi, \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ の組 (ψ, φ) が (U, θ, η) の**双対ポテンシャル (dual potential)** であるとは、U 上で

$$d\psi = \eta_i d\theta^i, \quad d\varphi = \theta^i d\eta_i, \quad \psi + \varphi = \theta^i \eta_i \tag{1.3}$$

が成り立つことをいう。

命題 1.5 (双対ポテンシャルの基本性質)**.** (U,θ,η) を双対アファインチャート、(ψ,φ) を (U,θ,η) の双対ポテンシャルとする。このとき次が成り立つ:

(1) U 上で ψ は g の ∇-ポテンシャルであり、φ は g の ∇^*-ポテンシャルである。

(2) $(\psi,\varphi),(\psi',\varphi')$ を (U,θ,η) の双対ポテンシャルとすると、U の連結成分ごとに $\psi'-\psi$ および $\varphi'-\varphi$ は定数である。

証明 (1) (θ,η) が双対アファイン座標であることから

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial\eta_i}{\partial\theta^j}\,d\theta^i d\theta^j = g_{ij}\,d\theta^i d\theta^j = g, \quad \nabla^{*2}\varphi = \frac{\partial\theta^i}{\partial\eta_j}\,d\eta_i d\eta_j = g^{ij}\,d\eta_i d\eta_j = g \tag{1.4}$$

を得る。

(2) $\psi'-\psi$ について示す。ψ,ψ' が g の ∇-ポテンシャルであることより U 上で $\nabla^2(\psi'-\psi)=0$ である。したがって U の各連結成分 C に対し、組 $(a_C,b_C)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ であって $\psi'(r)-\psi(r)=\langle a_C,\theta(r)\rangle+b_C\ (\forall r\in C)$ なるものがただ 1 組存在する。さらに ψ,ψ' が双対ポテンシャルであることより C 上で $d(\psi'-\psi)=0$ だから $a_C=0$ が成り立つ。よって C 上で $\psi'-\psi=b_C$ が成り立つ。$\varphi'-\varphi$ についても同様。 □

定義 1.6 (統計的多様体)**.** [TODO]