代数学

Yahata

概要

代数学とは…何？

第 1 部では群について述べる。第 2 部では環と加群について整理する。第 3 部では環と加群に関する種々の主題として線型代数、外積代数、代数幾何学、有限群の表現論に触れる。第 4 部では体について述べる。

目次

第 I 部

群

第 1 章　群

群について述べる。

1.1　群

定義 1.1.1 (モノイド). M を集合、$e \in M$、$\cdot\colon M \times M \to M$ を写像とし、各 $x, y \in M$ に対し $\cdot(x, y)$ を $x \cdot y$ や xy と書くことにする。組 $(M, \cdot, e)$ が**モノイド (monoid)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(M1) 結合律　各 $x, y, z \in M$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ が成り立つ。
(M2) 単位元　各 $x \in M$ に対して $x \cdot e = x = e \cdot x$ が成り立つ。

組 $(M, \cdot, e)$ のことを記号の濫用で単に $(M, \cdot)$ や M と書くことがある。さらに

- e を M の**単位元 (unit)** という。

定義 1.1.2 (群). モノイド $(G, \cdot, e)$ が**群 (group)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(G1) 逆元　各 $x \in G$ に対してある $y \in G$ が存在して $x \cdot y = e = y \cdot x$ が成り立つ。

さらに

- y を x の**逆元 (inverse)** といい、x^{-1} と書く。

定義 1.1.3 (アーベル群). 群 $(G, +, 0)$ が**アーベル群 (abelian group)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(A1) 可換性　各 $x, y \in G$ に対して $x + y = y + x$ が成り立つ。

定義 1.1.4 (群準同型). [TODO]

1.2　部分群

命題 1.2.1 (部分群の特徴付け). [TODO]

証明　[TODO] □

定義 1.2.2 (生成された部分群). G を群、$S \subset G$ とする。このとき、集合

$$\langle S \rangle \coloneqq \{ g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ g_i \in S,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \} \tag{1.2.1}$$

は定義から明らかに G の部分群となる。$\langle S \rangle$ を **S により生成された G の部分群 (subgroup of G generated by S)** といい、S を $\langle S \rangle$ の**生成系 (generating set)** という。

G が有限集合 S により生成されるとき、$G = \langle S \rangle$ は**有限生成 (finitely generated)** であるといい、さらに S が 1 点集合 $S = \{x\}$ のとき波括弧を省略して $\langle x \rangle$ と書き、$G = \langle x \rangle$ は a **巡回群 (cyclic group)** であるという。

命題 1.2.3 (生成された部分群の特徴付け)**.** G を群、$S \subset G$ とする。このとき

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{G' \subset G\colon \text{部分群} \\ G' \supset S}} G' \tag{1.2.2}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

1.3 群作用

群の作用について述べる。

定義 1.3.1 (作用)**.** G を群、X を集合とする。写像

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx \tag{1.3.1}$$

が与えられていて

(1) 各 $g_1, g_2 \in G,\ x \in X$ に対して $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ が成り立つ。
(2) 各 $x \in X$ に対して $e_G x = x$ が成り立つ。

をみたすとき、G は X に左から**作用 (act)** するという。G が左から作用している集合を**左 G-集合 (left G-set)** という。右からの作用も同様に定まる。

定義 1.3.2 (軌道)**.** G を群、X を左 G-集合とする。X 上の同値関係を

$$x \text{ と } y \text{ が同値} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G \quad \text{s.t.} \quad gx = y \tag{1.3.2}$$

で定めることができ、この同値関係に関する同値類を**軌道 (orbit)** という。

定義 1.3.3 (固定部分群)**.** G を群、X を左 G-集合とする。各 $x \in X$ に対し、G の部分群

$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \colon xg = x\} \tag{1.3.3}$$

を x の**固定部分群 (stabilizer)** という。

定義 1.3.4 (忠実作用)**.** G を群、X を左 G-集合とする。G の X への作用が**忠実 (faithful)** あるいは**効果的 (effective)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- すべての $x \in X$ を固定する $g \in G$ は単位元のみである。

定義から明らかに、作用が忠実であることは作用の定める表現 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が単射であることと同値である。

定義 1.3.5 (自由作用). G を群、X を左 G-集合とする。G の X への作用が**自由 (free)** あるいは**不動点なし (fixed-point-free)** であるとは、単位元以外の $g \in G$ はすべての $x \in X$ を動かすように作用すること、すなわち

$$\forall g \in G\ (g \neq 1 \Rightarrow (\forall x \in X\ (xg \neq x))) \tag{1.3.4}$$

が成り立つことをいう。これはすべての $x \in X$ に対し $\mathrm{Stab}_G(x)$ が自明群であることと同値である。

定義 1.3.6 (推移的作用). G を群、X を左 G-集合とする。各 $x \in X$ に対し $xG := \{xg \in X : g \in G\}$ と書く。G の X への作用が**推移的 (transitive)** であるとは、

$$X = xG \quad (\forall x \in X) \tag{1.3.5}$$

が成り立つことをいう。これは次と同値である：

- $\forall x_0 \in X$ を固定すると、$\forall y \in X$ に対し $\exists g \in G$ がとれて $y = x_0 g$ が成り立つ。

A. G-torsor

定義 1.3.7 (G-torsor). G を群、X を非空な左 G-集合とする。**shear map** と呼ばれる写像

$$G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x) \tag{1.3.6}$$

が全単射であるとき、X を ***G*-torsor** という。

命題 1.3.8 (G-torsor の特徴付け). G を群、X を左 G-集合とする。このとき、次は同値である:

(1) X は G-torsor である。
(2) G の X への作用は推移的かつ自由である。
(3) G の X への作用は推移的であり、さらに固定部分群が自明群であるような $x \in X$ が存在する。
(4) X と G は左 G-集合として同型である。

証明 [TODO] □

定理 1.3.9 (類等式). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 1.3.10 (Lagrange). [TODO]

証明 [TODO] □

1.4 商群

1.5 準同型定理

定理 1.5.1 (準同型定理). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 1.5.2 (部分群の対応原理). [TODO]

証明 [TODO] □

1.6 Sylow の定理

定理 1.6.1 (Sylow). [TODO]

証明 [TODO] □

1.7 群の表現

[TODO] 群の作用とはどう違う？

定義 1.7.1 (群の表現). G を群、C を圏とする。G は、射を群の元とし単一の対象 $*$ からなる圏とみなせる。C における G の**表現 (representation)** とは、圏 G から C への関手のことである。$T\colon G \to C$ を表現とするとき、各射 $T(g)$ は C の対象 $X := T(*)$ 上の自己同型射を与えるから、群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が定まる。この群準同型も**表現 (representation)** と呼ぶ。

注意 1.7.2. 群の作用は集合の圏における群の表現 (これを**置換表現 (permutation representation)** という) に他ならない。

例 1.7.3.

- 有限群の表現
- 位相群の表現
- Lie 群の表現
- [TODO]

1.8 自由群

1.9 自由積と融合積

1.10 アーベル化

定理 1.10.1 (アーベル化の普遍性)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

1.11 可解群

第 2 章　基本的な群

2.1　対称群

2.2　2 面体群

2.3　4 元数群

2.4　一般線型群

第 II 部

環と加群

第 3 章　環

環の基礎事項について述べる。

3.1　環

定義 3.1.1 (環). 組 $(A, +, \cdot, 0, 1)$ が**環 (ring)** であるとは、次が成り立つことをいう [1]:

(R1)　$(A, +, 0)$ がアーベル群

(R2)　$(A, \cdot, 1)$ がモノイド

(R3) 分配律　$\forall x, y, z \in A$ に対し次が成り立つ:

$$\begin{cases} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{cases} \tag{3.1.1}$$

さらに

- 0 を A の**零元 (zero element)** といい、0_A とも書く。
- 1 を A の**単位元 (unit element)** といい、1_A とも書く。

注意 3.1.2. 環の元が乗法に関する左逆元を持つとしても右逆元を持つとは限らない。

例 3.1.3 (可換環の例).

- (零環) 1 点集合 $\{0\}$ には環構造が一意に定まる。これを**零環 (zero ring)** という。環 A が零環であることと $0_A = 1_A$ であることとは同値である。
- (整数環) 有理整数環 $\mathbb{Z}$ や Gauss 整数環 $\mathbb{Z}[i]$ は可換環である。
- (関数環) 位相空間 X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体のなす環 $C(X)$ は点ごとの和と積を演算として可換環となる。

例 3.1.4 (非可換環の例).

- (全行列環) 環 A の全行列環 $M_n(A)$ は一般に非可換である。
- (自己準同型環) アーベル群 A (より一般に環上の加群) の自己準同型環 $\mathrm{End}(A)$ は点ごとの和と写像の合成を演算として環となる。これは一般に非可換である。

注意 3.1.5. 一般の環を A、可換環を R で書くことが多い。

例 3.1.6 (測度論との関連). [TODO] ring of sets などの話をしたい

1)　文献によっては環の定義に単位元の存在を仮定しない立場もある。

A. 反転環

反転環を定義する。

定義 3.1.7 (反転環)**.** $(A, +, \cdot)$ を環とする。集合 A^{OP} を $A^{\mathrm{OP}} := A$ とおき、アーベル群 $(A^{\mathrm{OP}}, +)$ に乗法 $\cdot'$ を

$$a \cdot' b := b \cdot a \quad (a, b \in A^{\mathrm{OP}}) \tag{3.1.2}$$

で定めると、$(A^{\mathrm{OP}}, +, \cdot')$ は環をなす。この環を A の**反転環 (opposite ring)** という。

例 3.1.8 (反転環の例)**.**

- R を可換環とすると、写像

$$M_n(R) \to M_n(R)^{\mathrm{OP}}, \quad X \mapsto {}^tX \tag{3.1.3}$$

は環同型となる。

B. 零因子と整域

零因子と、零因子を用いて定義される整域の概念を導入する。

定義 3.1.9 (零因子と整域)**.** A を環とする。$a \in A, a \neq 0$ が次をみたすとき、a は A の**零因子 (zero divisor)** であるという:

$$\exists x \in A, x \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad ax = 0 \text{ or } xa = 0 \tag{3.1.4}$$

また、A が次のすべてをみたすとき、A を**整域 (integral domain)** という:

(I1) A は零環でない。
(I2) A は可換環である。
(I3) 零因子を持たない。

例 3.1.10 (零因子と整域の例)**.**

- $\mathbb{Z}$ は整域である。
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は整域でない ((I1), (I2) をみたすが (I3) をみたさない)。零因子の例のひとつは

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0) \tag{3.1.5}$$

である。
- Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ は整域でない ((I1), (I3) をみたすが (I2) をみたさない)。

C. 可除環と体

可除環を定義する。

定義 3.1.11 (乗法群)**.** [TODO]

定義 3.1.12 (可除環). A を環とする。$A^\times = A \setminus \{0\}$ であるとき、A を**可除環 (division ring)** あるいは**斜体 (skew field)** という。可換な可除環を**体 (field)** という。

例 3.1.13 (可除環の例).

- 零環 $A = \{0\}$ は $A^\times = \{0\} \neq \varnothing = A \setminus \{0\}$ より可除環ではない。
- Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ は可除環である。しかし非可換なので体でも整域でもない。
- $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ は可除環である。さらに可換なので体でもある。

可除環に対する次の性質は基本的である。

命題 3.1.14. 可除環は零因子を持たない。

証明 可除環 A が零因子 $x \neq 0$ を持ったとすると、ある $y \in A - \{0\}$ が存在して $xy = 0$ が成り立つ。一方 A は可換環だからある $x' \in A$ が存在して $x'x = 1$ が成り立つ。よって $y = 1y = x'xy = x'0 = 0$ となり $y \neq 0$ に矛盾。したがって A は零因子を持たない。 □

D. 冪等元

定義 3.1.15 (冪等元). A を環とする。$e \in A$ が $e^2 = e$ を満たすとき、e を A の**冪等元 (idempotent)** という。A の中心に属する冪等元をとくに**中心冪等元 (central idempotent)** という。

命題 3.1.16 (中心冪等元により生成される環). A を環とする。$e \in A$ が A の中心冪等元であるとき、Ae は A の両側イデアルとなり、さらに e を単位元とする環となる。

証明 省略 □

定義 3.1.17 (環準同型). [TODO]

3.2 イデアルと商環

イデアルの概念を導入する。

定義 3.2.1 (可換環のイデアル). R を可換環とする。$I \subset R$ が R の**イデアル (ideal)** であるとは、

(I1) I は R の加法部分群

(I2) $a \in R,\ b \in I$ ならば $ab \in I$

をみたすことをいう。

一般の環においてはイデアルに左/右/両側の区別がある。

定義 3.2.2 (一般の環のイデアル). A を環とする。$I \subset R$ が R の**左イデアル (left ideal)** であるとは、上の (I1) と

(LI2) $a \in A,\ b \in I$ ならば $ab \in I$

をみたすことをいう。**右イデアル (right ideal)** も同様に定義される。A の左かつ右イデアルを**両側イデアル (two-sided ideal)** という。明らかに可換環のイデアルは左かつ右かつ両側イデアルである。

定義 3.2.3 (固有イデアル). A を環、$I \subset A$ を左/右/両側イデアルとする。I が**固有 (proper)** であるとは、$I \neq A$ であることをいう。

環準同型とイデアルの間には次の関係がある。

定理 3.2.4 (環準同型とイデアル). A, B を環、$f\colon A \to B$ を環準同型とする。

(1) J が B の両側イデアルならば、$f^{-1}(J)$ は A の両側イデアルである。
(2) f が全射で I が A の両側イデアルならば、$f(I)$ は B の両側イデアルである。
(3) $\operatorname{Ker} f$ は A の両側イデアルである。
(4) f が全射ならば、$\operatorname{Im} f$ は B の両側イデアルである。
(5) $\operatorname{Im} f$ は B の部分環である。

証明 (1), (2) [TODO]
(3), (4) (1), (2) の特別な場合である。
(5) [TODO] □

環を両側イデアルで割った商は環をなす。

定義 3.2.5 (商環). [TODO]

環の両側イデアルは商環の両側イデアルと次の定理のように対応する。[TODO] 束の同型？

定理 3.2.6 (両側イデアルの対応原理). A を環、$I \subset A$ を両側イデアルとする。

$$\mathcal{I}_I(A) := \{J : J \text{ は } I \text{ を含む } A \text{ の両側イデアル}\} \tag{3.2.1}$$
$$\mathcal{I}(A/I) := \{J : J \text{ は } A/I \text{ の両側イデアル}\} \tag{3.2.2}$$

とおくと、

$$\widetilde{p}\colon \mathcal{I}_I(A) \to \mathcal{I}(A/I), \quad J \mapsto p(J) \tag{3.2.3}$$

は包含関係を保つ全単射であり、$\widetilde{p}$ の逆写像 q は

$$q\colon \mathcal{I}(A/I) \to \mathcal{I}_I(A), \quad J' \mapsto p^{-1}(J') \tag{3.2.4}$$

で与えられる。

注意 3.2.7. 定理より、A/I の両側イデアルは I を含む A の両側イデアル J を用いて J/I の形に一意的に書けて、さらに A の両側イデアル J, J' に関し

$$J' \subset J \quad \Longleftrightarrow \quad J'/I \subset J/I \tag{3.2.5}$$

が成り立つことがわかる。さらに、包含関係を保つことと $JJ'/I = (J/I)(J'/I)$ より、素イデアルは素イデアルと、極大イデアルは極大イデアルとそれぞれ対応することもわかる。

証明 q が well-defined であることを示す。A/I の両側イデアル J' に対し $p^{-1}(J')$ が A の両側イデアルであることは定理 3.2.4 より成り立ち、また $I = p^{-1}(0) \subset p^{-1}(J')$ も成り立つ。よって q は well-defined である。

q が $\widetilde{p}$ の逆写像であることを示す。$J' \in \mathscr{I}(A/I)$ に対し $p(p^{-1}(J')) = J'$ であることは p の全射性より従う。$J \in \mathscr{I}_I(A)$ に対し $p^{-1}(p(J)) = J$ であることを示す。"$\supset$"は集合の一般論より成り立つ。逆に $x \in p^{-1}(p(J))$ とすると、ある $j \in J$ が存在して $p(x) = p(j)$ となる。よって $p(x-j) = 0$ だから $x - j \in p^{-1}(0) = I \subset J$ である。したがって $x = (x-j) + j \in J$ が成り立つから"$\subset$"もいえた。よって q は $\widetilde{p}$ の逆写像である。

$\widetilde{p}$ が包含を保つことは写像による部分集合の像と逆像が包含を保つことから従う。以上で定理の主張が示された。 □

イデアルの演算について述べる。

定義 3.2.8 (加法部分群の和と積)**.** A を環、$I, J \subset A$ を加法部分群とする。

$$I + J := \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\} \tag{3.2.6}$$

$$IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ a_i \in I,\ b_i \in J \right\} \tag{3.2.7}$$

と書く。

命題 3.2.9 (イデアルの和と積)**.** A を環とする。

(1) A の任意の左 (resp. 右, 両側) イデアル $I, J \subset A$ に対し、$I + J$ は A の左 (resp. 右, 両側) イデアルである。

(2) A の任意の両側イデアル $I, J \subset A$ に対し、$I + J$ は A の両側イデアルである。

証明 [TODO] □

命題 3.2.10. A を環、$I \subset J$ を A の両側イデアルとする。このとき、環の同型

$$\frac{A/I}{J/I} \cong \frac{A}{J} \tag{3.2.8}$$

が成り立つ。

証明 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & A/I \arrow[d, "q"] \\ A/J \arrow[r, dashed, "f"'] & \dfrac{A/I}{J/I} \end{tikzcd} \tag{3.2.9}$$

を可換にする環の同型が誘導されることを示せばよく、そのためには $J = \operatorname{Ker} q \circ \pi$ をいえばよい。$j \in J$ とすると $j + I \in J + I$ だから $q \circ \pi(j) = q(j + I) = 0$ である。よって $J \subset \operatorname{Ker} q \circ \pi$ である。逆に $q \circ \pi(a) = 0$ $(a \in A)$ とすると $\pi(a) \in J/I$ だから、両側イデアルの対応原理 (定理 3.2.6) より $a \in \pi^{-1}(J/I) = J$ である。したがって $J = \operatorname{Ker} q \circ \pi$ がいえた。準同型定理より上の図式を可換にする環の同型 f が誘導されて証明が完成した。 □

命題 3.2.11 (直積環のイデアル). A, B を環とする。$A \times B$ の任意の左 (resp. 右/両側) イデアル J は A, B のある左 (resp. 右/両側) イデアル J_A, J_B を用いて $J = J_A \times J_B$ の形に書ける。

証明 [TODO] □

部分集合により生成されるイデアルについて述べる。[TODO] Ax とかの記法は？

定義 3.2.12 (生成されたイデアル). R を可換環、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。

- $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し

$$(a_1, \ldots, a_n) := \{b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n : b_1, \ldots, b_n \in R\} \tag{3.2.10}$$

は R のイデアルである。これを $a_1, \ldots, a_n$ で**生成されたイデアル**という。

- イデアル $I \subset R$ が有限個の元により生成されたイデアルであるとき、I は**有限生成 (finitely generated)** であるという。とくに I が 1 個の元により生成されるとき、I を**単項イデアル (principal ideal)** という。

命題 3.2.13 (生成されたイデアルの特徴付け). [TODO]

証明 [TODO] □

3.3 中国剰余定理

中国剰余定理はイデアルの性質に関する定理であり、環論において最も重要かつ基本的な定理のひとつである。

定理 3.3.1 (中国剰余定理). A を環、$I_1, \ldots, I_n$ を A の両側イデアルとする。I_i らは**互いに素**、すなわち $I_i + I_j = A$ $(I \neq j)$ をみたすとする。このとき、準同型定理によって図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/I_1 \times \cdots \times A/I_n \\ A/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

の破線部に誘導される環準同型は環の同型を与える。

証明　次のように写像に名前をつける:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p=p_1\times\cdots\times p_n"] \arrow[d] & A/I_1\times\cdots\times A/I_n \\ A/(I_1\cap\cdots\cap I_n) \arrow[ur, dashed, "\overline{p}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.3.2}$$

$\mathrm{Ker}\,\overline{p} = I_1\cap\cdots\cap I_n$ より $\overline{p}$ の単射性は明らか。$\overline{p}$ の全射性を n に関する帰納法によって示す。$n = 2$ の場合を考える。

$$e_1 := (1,0) \in A/I_1 \times A/I_2 \tag{3.3.3}$$

$$e_2 := (0,1) \in A/I_1 \times A/I_2 \tag{3.3.4}$$

とおき、$e_1, e_2 \in \mathrm{Im}\,\overline{p}$ をいえばよい。I_1, I_2 は互いに素ゆえに $x + y = 1$ なる $x \in I_1,\ y \in I_2$ が存在する。このとき

$$p_1(x) = 0 \tag{3.3.5}$$

$$p_2(x) = p_2(1-y) = p_2(1) = 1 \tag{3.3.6}$$

よって

$$p(x) = (p_1(x), p_2(x)) = (0,1) = e_2 \in \mathrm{Im}\,\overline{p} \tag{3.3.7}$$

が成り立つ。同様に $e_1 \in \mathrm{Im}\,\overline{p}$ も成り立つ。[TODO] □

さらに環が可換の場合は次が成り立つ。

定理 3.3.2. R を可換環とし、$I_1, \ldots, I_n$ をイデアルとする。I_i らは互いに素、すなわち $I_i + I_j = A$ $(I \neq j)$ をみたすとする。このとき、

$$I_1\cap\cdots\cap I_n = I_1\cdots I_n \tag{3.3.8}$$

が成り立つ。

証明　cf. 問題 6.31 □

3.4　極大イデアル

極大イデアルを定義する。

定義 3.4.1 (極大イデアル)**.** A を環、$I \subset A$ を左イデアルとする。I が**極大左イデアル (maximal left ideal)** であるとは、I が A の固有左イデアルのうち包含関係に関し極大であることをいう。極大右イデアルおよび極大両側イデアルも同様に定義される。左/右/両側が文脈から明らかな場合は省略して**極大イデアル (maximal ideal)** ということがある。

定理 3.4.2 (Krull の定理)**.** $A \neq 0$ を環、$I \subset A$ を固有両側 (resp. 左, 右) イデアルとする。このとき、I を含む極大両側 (resp. 左, 右) イデアルが存在する。

証明 Zorn の補題を用いる。[TODO] □

極大イデアルによって定義される環のクラスのうち最も素朴なものが単純環である。単純環については第 10 章でより詳しく調べる。

定義 3.4.3 (単純環). (0) が極大両側イデアルとなる環を**単純環 (simple ring)** という。

例 3.4.4 (単純環の例).

- division ring は単純環である。
- 単純環の部分環は単純であるとは限らない。例えば、$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ は単純環でないし、$\mathbb{Z}[i, j, k] \subset \mathbb{H}$ も単純環でない。

[TODO] 森田同値の現れ？

定理 3.4.5 (単純環の全行列環は単純環). A が単純環のとき、$M_n(A)$ も単純環である。

証明 [TODO] □

極大イデアルは商環により特徴付けられる。

定理 3.4.6 (極大イデアルと商環). A を環とする。このとき、A の両側イデアル I に関し I が極大両側イデアルであることと、A/I が単純環であることとは同値である。

証明 両側イデアルの対応原理 (定理 3.2.6) より明らか。 □

極大両側イデアルは極大左/右イデアルとは限らないが、商環が可除となる場合には次のように特徴づけることができる。

定理 3.4.7 (極大イデアルと可除環). A を環とする。A の両側イデアル I に関して次は同値である:

(1) I は極大左イデアルである。
(2) I は極大右イデアルである。
(3) A/I は可除環である。

証明 (1) ⇒(3) A の両側イデアル I が極大左イデアルであるとする。A/I の零でない元は $a + I$ $(a \in A - I)$ と表せて、A の左イデアル $Aa + I$ は極大左イデアル I を真に含むから $Aa + I = A$ である。よって $(b + I)(a + I) = ba + I = 1 + I$ なるある $b \in A - I$ が存在する。A の左イデアル $Ab + I$ は極大左イデアル I を真に含むから $Ab + I = A$ である。よって $(c + I)(b + I) = cb + I = 1 + I$ なるある $c \in A - I$ が存在する。したがって $b + I \in (A/I)^\times$ であり、とくに $a + I$ は $b + I$ の逆元となるから $a + I \in (A/I)^\times$ が従う。いま $a + I$ は A/I の零でない任意の元であったから、A/I は可除環であることがいえた。

(3) ⇒(1)　A/I を可除環とする。$J \supset I$ を左イデアルとする。$I \subsetneq J$ よりある $j \in J - I$ が存在する。いま A/I は可除環だから $1 + I = (a + I)(j + I) = aj + I$ なるある $a \in A$ が存在する。よって $1 - aj = i$ なるある $i \in I \subset J$ が存在する。J が左イデアルゆえに $aj \in J$ であることとあわせて $1 = aj + i \in J$ が従う。よって $J = A$ となり、I が極大左イデアルであることがいえた。

(2) ⇔(3)　(1) ⇔(3) の議論と同様。□

系 3.4.8. 可換環 R と R のイデアル I について、I が極大イデアルであることと、R/I が体であることとは同値である。□

第 4 章　代数

可換環上の代数の基礎事項について述べる。

4.1　代数

代数とは、和と積とスカラー倍について閉じている代数系のことである。代数の定義にはいくつかのやり方があるが、ここでは特別な環としての定義を採用する。

定義 4.1.1 (代数)**.** A を環、R を可換環とする。

- 環 A と環準同型 $\varphi\colon R \to Z(A)$ の組 (A, φ) を ***R*-代数 (*R*-algebra)** あるいは ***R*-多元環 (*R*-algebra)** という [2)]。記号の濫用で A における $x \in R$ の像も x と書くことがある。
- $(A, \varphi), (B, \psi)$ を R-代数とする。環準同型 $f\colon A \to B$ が図式

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd} \tag{4.1.1}$$

を可換にするとき、f は ***R*-代数準同型 (*R*-algebra homomorphism)** であるという。
- $A \to B$ なる R-代数準同型全体の集合を $\mathrm{Hom}_R^{\mathrm{al}}(A, B)$ と書く。

例 4.1.2 (代数の例)**.**

- A を環とする。A は環準同型

$$\mathbb{Z} \to A, \quad n \mapsto \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}} \tag{4.1.2}$$

により $\mathbb{Z}$-代数となる。
- 可換環 R 上の n 次正方行列の全体 $M_n(R)$ は、環準同型 $R \to Z(M_n(R)), \lambda \mapsto \lambda I_n$ により R-代数となる。これは非可換な R-代数の例となっている。
- 環 $\mathbb{C}$ は、環準同型 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto x$ により $\mathbb{R}$-代数となる。
- 環 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ は、環準同型 $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}, z \mapsto (z, z)$ により $\mathbb{C}$-代数となる。
- 位相空間 X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体のなす環 $C(X)$ は、環準同型 $\mathbb{C} \to C(X)$,

$$\lambda \mapsto (x \mapsto \lambda) \tag{4.1.3}$$

により $\mathbb{C}$-代数となる。

2)　文献によっては代数にスカラー倍の結合性を仮定しない立場もある。翻って本稿における代数の定義では結合性が自動で導かれる。結合性を仮定するという立場を明確にするために**結合的代数 (associative algebra)** と呼ばれることもある。

定義 4.1.3 (R-部分代数). R を可換環、(A,φ) を R-代数とする。A の部分環 B が φ により R-代数となるとき、B を A の **R-部分代数 (R-subalgebra)** という。

体上の代数には体が埋め込まれているとみなせる。

命題 4.1.4 (代数への体の埋め込み). K を体とする。このとき、0 でない任意の K-代数 (A,φ) に対し φ は単射である。

証明 φ は環準同型 $K \to Z(A)$ だから、K が体であることより $\operatorname{Ker}\varphi = K$ または $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ である。$\operatorname{Ker}\varphi = K$ であったとすると $1_A = \varphi(1_K) = 0_A$ より $A = 0$ となり矛盾。したがって $\varphi = 0$、すなわち φ は単射である。 □

4.2 モノイド代数と群環

モノイド代数と群環を定義する。モノイド代数は後で定義する多項式環の一般化である。

定義 4.2.1 (モノイド代数). M をモノイド、$R \neq 0$ を可換環とする。集合 $R[M]$ を

$$R[M] := \left\{ \sum_{m\in M}^{\text{finite}} a_m \cdot m \;\middle|\; a_m \in R \right\} \tag{4.2.1}$$

とおく。ただし $\sum^{\text{finite}}$ は**形式的実質的有限和 (formal essential finite sum)** といい、有限個の m を除いて $a_m = 0$ となる和である。$R[M]$ に加法と乗法を

$$\left(\sum_{m\in M}^{\text{finite}} a_m \cdot m\right) + \left(\sum_{m\in M}^{\text{finite}} b_m \cdot m\right) := \sum_{m\in M}^{\text{finite}} (a_m + b_m) \cdot m \tag{4.2.2}$$

$$\left(\sum_{m\in M}^{\text{finite}} a_m \cdot m\right) \cdot \left(\sum_{m\in M}^{\text{finite}} b_m \cdot m\right) := \sum_{m\in M}^{\text{finite}} \left(\sum_{\substack{x,y\in M\\ xy=m}}^{\text{finite}} a_x b_y\right) \cdot m \tag{4.2.3}$$

で定めると、$\left(R[M], +, \cdot, \sum_{m\in M}^{\text{finite}} 0\cdot m, 1\cdot 1_M\right)$ は環となる (このあと示す)。さらに環準同型

$$R \longrightarrow R[M], \quad r \mapsto r \cdot 1_M \tag{4.2.4}$$

により R-代数の構造が入る (このあと示す)。R-代数 $R[M]$ を R 上の M の**モノイド代数 (monoid algebra)** という。

証明 [TODO] □

定義 4.2.2 (群代数). G を群、$R \neq 0$ を可換環とする。モノイド代数 $R[G]$ を R 上の G の**群代数 (group algebra)** あるいは**群環 (group ring)** という。

R, M から $R[M]$ への自然な埋め込みが次のように定まる。

命題 4.2.3 (モノイド代数への埋め込み). $R \neq 0$ を可換環、M をモノイドとする。このとき、写像

$$M \to R[M], \quad x \mapsto 1_R \cdot x \tag{4.2.5}$$
$$R \to R[M], \quad r \mapsto r \cdot 1_M \tag{4.2.6}$$
$$\tag{4.2.7}$$

はそれぞれ (乗法的) モノイド準同型、R-代数準同型となる。

証明　省略 □

命題 4.2.4 (モノイド代数の加群構造). $R \neq 0$ を可換環、M をモノイドとする。このとき、$R[M]$ は M を基底とする R 上の自由 R-加群である。

証明　[TODO] □

モノイド代数は次の普遍性を持つ。

定理 4.2.5 (モノイド代数の普遍性). $R \neq 0$ を可換環、M をモノイドとする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, A\colon\ R\text{-代数} \tag{4.2.8}$$
$$\forall\, \varphi\colon M \to A\colon\ (\text{乗法的})\ \text{モノイド準同型} \tag{4.2.9}$$
$$\exists!\, \overline{\varphi}\colon R[M] \to A\colon\ R\text{-代数準同型} \quad \text{s.t.} \tag{4.2.10}$$

$$\begin{tikzcd} R[M] \arrow[r, dashed, "\varphi"] & A \\ M \arrow[u] \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2.11}$$

証明　φ がモノイド準同型であることより $\overline{\varphi}$ は

$$\overline{\varphi}\left(\sum_{m\in M}^{\text{finite}} a_m \cdot m\right) = \sum_{m\in M}^{\text{finite}} a_m \cdot \varphi(m) \quad (a_m \in R) \tag{4.2.12}$$

をみたさなければならないが、上の命題より M は $R[M]$ の R-加群としての基底だから、このような R-加群準同型 $\overline{\varphi}$ は一意に存在する。あとは $\overline{\varphi}$ が R-代数準同型であることを示せばよい。[TODO] cf. [Pie82, p.5] □

系 4.2.6 (群代数の普遍性). $R \neq 0$ を可換環、G, G' を群、$\varphi\colon G \to G'$ を群準同型とする。このとき、R-代数準同型 $h\colon R[G] \to R[G']$ であって次をみたすものが一意に存在する：

$$h(x) = \varphi(x) \quad (\forall x \in G) \tag{4.2.13}$$
$$h(a) = a \quad (\forall a \in R) \tag{4.2.14}$$

□

4.3 多項式環

多項式環を定義する。多項式環は可換環の重要な例のひとつである。

定義 4.3.1 (多項式環). R を可換環、$X_1, \ldots, X_n$ を形式的記号とする。形式的に

$$X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n} \quad ((k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}) \tag{4.3.1}$$

というものを考え、これを**単項式 (monomial)** と呼ぶ。ここで集合

$$M_n := \{X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n} : (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\} \tag{4.3.2}$$

を定め、普通の方法で積を入れて可換モノイドにする。モノイド代数 $R[M_n]$ を $R[X_1, \ldots, X_n]$ と書き、**R-係数 n 変数多項式環 (polynomial ring)** と呼ぶ。

定義 4.3.2 (多項式関数). [TODO]

命題 4.3.3 (多項式の表示の一意性). R を可換環とする。$R[X_1, \ldots, X_n]$ の元の

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0}^{\text{finite}} a_{k_1, \ldots, k_n} X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n} \tag{4.3.3}$$

の形での表示は一意である。

証明 [TODO] 形式的実質的有限和を写像 $M \to R$ とみれば一意性は明らか？ □

定理 4.3.4 (除法定理). R を可換環とする。このとき、任意の $f \in R[X]$ および最高次係数が単元であるような任意の $g \in R[X]$ に対し

$$\exists! \, q, r \in R[X] \quad \text{s.t.} \quad f = gq + r, \ \deg r < \deg g \tag{4.3.4}$$

が成り立つ。

証明 $m := \deg f$, $n := \deg g \geq 0$ とおく。題意の $q, r \in R[X]$ の存在を m に関する帰納法で示す。$m < n$ ならば $q(X) = 0, r(X) = f(X)$ とおけばよい。$m \geq n$ とし、f, g の最高次係数をそれぞれ a_m, b_n とおく。ここで

$$h(X) := f(X) - g(X) a_m b_n^{-1} X^{m-n} \tag{4.3.5}$$

とおくと $\deg h < \deg f$ であるから、帰納法の仮定より

$$\exists q_1, r_1 \in R[X] \quad \text{s.t.} \quad h = gq_1 + r_1, \ \deg r_1 < \deg g \tag{4.3.6}$$

が成り立つ。そこで

$$q(X) := q_1(X) + a_m b_n^{-1} X^{m-n}, \quad r(X) := r_1(X) \tag{4.3.7}$$

とおけばよい。つぎに一意性を示す。$q^*, r^* \in R[X]$ が

$$f = gq^* + r^*, \ \deg r^* < \deg g \tag{4.3.8}$$

をみたすとする。$f = gq + r$ と差をとって

$$(q^* - q)g = r^* - r \tag{4.3.9}$$

が成り立つ。よって、もし $q^* - q \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} \deg((q^* - q)g) &= \deg(q^* - q) + \deg g \quad (\because\ g \text{ の最高次係数は可逆元}) \qquad (4.3.10)\\ &\geq \deg g \qquad (4.3.11) \end{aligned}$$

が成り立つが、これは

$$\begin{aligned} \deg(r^* - r) &\leq \max\{\deg r^*, \deg r\} \qquad (4.3.12)\\ &< \deg g \qquad (4.3.13) \end{aligned}$$

に矛盾する。よって $q^* = q$、したがって $r^* = r$ である。これで一意性がいえた。 □

注意 4.3.5 (除法定理が成り立たない例)**.** 最高次係数が可逆元でない例を考える。$R = \mathbb{Z}$ のとき、$X, 2X \in \mathbb{Z}[X]$ に対し

$$X = 2X \cdot q(X) + r(X), \ \deg r < \deg(2X) = 1 \tag{4.3.14}$$

なる $q, r \in \mathbb{Z}[X]$ は存在しない。

[TODO]「割り切る」の概念が未定義

系 4.3.6 (剰余定理)**.** R を可換環とし、$\alpha \in R$ とする。このとき

$$\exists!\ q \in R[X] \quad \text{s.t.} \quad f(X) = (X - \alpha)q(X) + f(\alpha) \tag{4.3.15}$$

が成り立つ。とくに

$$X - \alpha \text{ が } f \text{ を割り切る} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\alpha) = 0 \tag{4.3.16}$$

が成り立つ。

証明 省略 □

1 変数多項式環においては、次の意味で代入が定義できる。

定理 4.3.7 (1 変数多項式環の普遍性)**.** R を可換環、A を R-代数とする。このとき、任意の $a \in A$ に対し R-代数準同型 $\mathrm{ev}_a \colon R[X] \to A$ であって

$$\mathrm{ev}_a(X) = a \tag{4.3.17}$$

をみたすものがただひとつ存在する。

証明 [TODO] □

多変数多項式環でも代入を定義できるが、多変数の場合は可換性が必要である。

定理 4.3.8 (多変数多項式環の普遍性). R を可換環、A を可換 R-代数とする。このとき、任意の $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し R-代数準同型 $\mathrm{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)}\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to A$ であって

$$\mathrm{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)}(X_i) = a_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.3.18}$$

をみたすものがただひとつ存在する。

証明 [TODO] cf. [雪江 p.16] □

定理 4.3.9 (多項式環の特徴付け). [TODO]

証明 [TODO] □

系 4.3.10 (多変数多項式環の自然な同型).

$$\mathrm{ev}_{(X_1,\ldots,X_n)}\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n] \tag{4.3.19}$$

は R-代数の同型である。[TODO]

定義 4.3.11 (次数). [TODO]

多項式環からその係数環への評価準同型は簡単な形の Ker を持っている。

命題 4.3.12 (多項式環の評価準同型の核). R を可換環、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ とする。このとき、評価準同型 $\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to R$ の核は

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}) = (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n) \tag{4.3.20}$$

の形である。

証明 "$\supset$"は明らかに成り立つ。"$\subset$"を n についての帰納法で示す。$n = 1$ のときは剰余定理 (定理 4.3.4) からただちに従う。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし、$n-1$ で成立を仮定して n での成立を示す。そこで $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)})$ とする。系 4.3.10 より $R[X_1, \ldots, X_n] \cong (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$ だから

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{k} f_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i \tag{4.3.21}$$

$$(f_i \in R[X_1, \ldots, X_{n-1}],\ f_k \neq 0_{R[X_1,\ldots,X_{n-1}]}) \tag{4.3.22}$$

の形に一意に表せる。ここで各 $0 \leq i \leq k$ に対し

$$h_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) := f_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) - f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \tag{4.3.23}$$

とおくと、定め方から $h_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = 0$ だから、帰納法の仮定より

$$h_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}) \tag{4.3.24}$$

$$
\begin{aligned}
&= (X_1 - \alpha_1, \dots, X_{n-1} - \alpha_{n-1}) && (4.3.25)\\
&\subset (X_1 - \alpha_1, \dots, X_{n-1} - \alpha_{n-1}, X_n - \alpha_n) && (4.3.26)
\end{aligned}
$$

となる。また、$\sum_{i=0}^{k} f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\alpha_n^i = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ と剰余定理 (定理 4.3.4) から $\sum_{i=0}^{k} f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})X_n^i \in (X_n - \alpha_n)$ が成り立つ。よって

$$
\begin{aligned}
f(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=0}^{k} \bigl(h_i(X_1, \dots, X_{n-1}) + f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\bigr) X_n^i && (4.3.27)\\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{k} h_i(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^i}_{\in (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})X_n^i}_{\in (X_n - \alpha_n)} && (4.3.28)\\
&\in (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) && (4.3.29)
\end{aligned}
$$

となり、n での成立がいえた。帰納法より命題の主張が示せた。 □

4.4 自由代数

自由代数を定義する。

定義 4.4.1 (自由 R-代数).
S を集合、$R \neq 0$ を可換環とする。S の元 $s_1, \dots, s_n$ を形式的に $s_1 \dots s_n$ と並べた**語 (word)** の全体を

$$
W(S) := \{S \text{ の元からなる語}\} \cup \{\varnothing\} \tag{4.4.1}
$$

と定める。$\varnothing$ を 1 と書き、乗法を

$$
\begin{aligned}
(s_1 \dots s_n)(s'_1 \dots s'_m) &= s_1 \dots s_n s'_1 \dots s'_m && (4.4.2)\\
1(s_1 \dots s_n) = (s_1 \dots s_n)1 &= s_1 \dots s_n && (4.4.3)
\end{aligned}
$$

で定めてモノイド構造を入れる。モノイド代数 $R[W(S)]$ を S により生成される**自由 R-代数 (free R-algebra)** という。

命題 4.4.2 (自由代数の普遍性). [TODO]

証明 [TODO] □

4.5 生成された部分代数

部分集合によって部分代数を生成することができる。

定義 4.5.1 (部分集合により生成された部分代数). $R \neq 0$ を可換環、A を R-代数、$S \subset A$ とする。このとき、標準包含 $\iota \colon S \hookrightarrow A$ により誘導される R-代数準同型 $\bar{\iota} \colon R[W(S)] \to A$ の像 $\operatorname{Im} \bar{\iota}$ を $R\langle S \rangle$ と書き、**S で生成された A の R-部分代数 (R-subalgebra generated by S)** という。とくに S が有限集合ならば、A は R-代数として**有限生**

成 (finitely generated) であるという。

生成された代数は自由代数と同様の普遍性を持つわけではないことに注意すべきである。

注意 4.5.2. $\mathbb{Z}$ 上 $S := \{1/2\}$ により生成された $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}$-部分代数 $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ を考える。$\mathbb{Z}$ 上 S により生成された $\mathbb{Z}$-部分代数が自由代数の場合と同様の "普遍性" を持ったとすると、写像 $f\colon S \to \mathbb{Z}[X],\ f(1/2) := X$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\langle S\rangle \arrow[r, dashed, "g"] & \mathbb{Z}[X] \\ S \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{4.5.1}$$

を可換にする $\mathbb{Z}$-代数準同型 g が一意に存在する。図式の可換性より $g(1/2) = X$ だから $g(1) = g(2 \cdot 1/2) = 2g(1/2) = 2X$ であるが、一方 g は環準同型だから $g(1) = 1 \neq 2X$ であり矛盾を得る。

例 4.5.3 (多項式環は有限生成代数). $R \neq 0$ を可換環とする。R-係数多項式環 $R[X_1, \dots, X_n]$ は有限集合 $\{X_1, \dots, X_n\} \subset R[X_1, \dots, X_n]$ により生成される R-代数だから、R-代数として有限生成である。

生成された部分代数は次のように特徴付けられる。これは生成されたイデアルの特徴付け (命題 3.2.13) の類似である。

命題 4.5.4 (生成された部分代数の特徴付け). $R \neq 0$ を可換環、A を R-代数、$S \subset A$ とする。このとき

$$R\langle S\rangle = \bigcap_{\substack{B \subset A\,:\, R\text{-部分代数} \\ B \supset S}} B \tag{4.5.2}$$

が成り立つ。

証明　$R\langle S\rangle$ は S を含む A の R-部分代数ゆえに右辺の項として現れるから "$\supset$" が成り立つ。

"$\subset$" を示す。そこで $B \subset A$ を S を含む A の R-部分代数とする。また $\Phi\colon S \to R[W(S)]$ を標準射、

$$\iota^A_S\colon S \to A, \quad \iota^B_S\colon S \to B, \quad \iota^A_B\colon B \to A \tag{4.5.3}$$

をそれぞれ標準包含とする。すると R 上 S により生成された自由代数の普遍性より図式

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\iota^A_S"] \arrow[d, "\Phi"'] & A \\ R[W(S)] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\iota}^A_S"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, hook, "\iota^B_S"] & \\ R[W(S)] \arrow[r, dashed, "\tilde{\iota}^B_S"'] & B \end{tikzcd} \tag{4.5.4}$$

を可換にする R-代数準同型 $\tilde{\iota}^A_S,\ \tilde{\iota}^B_S$ が一意に存在する。ここで各 $s \in S$ に対し $\iota^A_B \circ \tilde{\iota}^B_S \circ \Phi(s) = \iota^A_B \circ \iota^B_S(s) = \iota^A_S(s) = \tilde{\iota}^A_S \circ \Phi(s)$ が成り立つから、一意性より $\iota^A_B \circ \tilde{\iota}^B_S = \tilde{\iota}^A_S$ である。したがって $R\langle S\rangle = \operatorname{Im} \tilde{\iota}^A_S = \operatorname{Im} \iota^A_B \circ \tilde{\iota}^B_S = \iota^A_B \circ \tilde{\iota}^B_S(R[W(S)]) \subset \iota^A_B(B) = B$ である。よって "$\subset$" が示せた。 □

有限生成可換 R-代数は次のように特徴付けることができる。

命題 4.5.5 (有限生成可換 R-代数の特徴付け)**.** $R \neq 0$ を可換環、A を可換 R-代数、$S \subset A$ とする。このとき、次は同値である:

(1) A は有限生成 R-代数である。

(2) ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と全射 R-代数準同型 $f\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to A$ が存在する。

証明 [TODO] □

第 5 章　可換環

可換環についてより詳しく調べる。

5.1　素イデアル

素イデアルを定義する。この章では非可換環の素イデアルを扱うことはないが、議論のまとまりのために素イデアルの定義は非可換環の場合も含めて与えておく。

定義 5.1.1 (素イデアル)**.** A を環、P を A の固有両側イデアルとする。

(1)　P が A の**素イデアル (prime ideal)** であるとは、A の任意の固有両側イデアル I, J であって $IJ \subset P$ をみたすものに対して $I \subset P$ または $J \subset P$ が成り立つことをいう。

(2)　P が A の**完全素イデアル (completely prime ideal)** であるとは、任意の $x, y \in A$ であって $xy \in P$ をみたすものに対して $x \in P$ または $y \in P$ が成り立つことをいう。

定義 5.1.2 (素イデアル全体の集合)**.** R を可換環とする。R の素イデアル全体の集合を

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p}\ \text{は素イデアル}\} \tag{5.1.1}$$

と書く。

可換環における素イデアルの特徴付けを与える。

命題 5.1.3 (素イデアルの特徴付け)**.** R を可換環とする。R の固有イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ に関し次は同値である:

(1)　$\mathfrak{p}$ は R の素イデアルである。

(2)　$\mathfrak{p}$ は R の完全素イデアルである。

(3)　$R/\mathfrak{p}$ は整域である。

証明　(2) ⇒(1)　cf. 問題 6.36

[TODO]　□

例 5.1.4 (素イデアルの例)**.**

- 素イデアルは極大イデアルとは限らない。実際、$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(0)$ は整域だが体でないので、(0) は $\mathbb{Z}$ の素イデアルだが極大イデアルではない。しかし、可換アルティン環においては素イデアルは極大イデアルとなる (問題 10.4)。

根基と準素イデアルを定義する。これらの概念は冪零元と深い関わりを持つ。

定義 5.1.5 (根基). R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid r^n \in I\ (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})\} \tag{5.1.2}$$

は R の固有イデアルとなり (このあと示す)、$\sqrt{I}$ を I の**根基 (radical)** という。とくに (0) の根基 $\sqrt{(0)}$ を R の**冪零根基 (nilradical)** という。

証明 cf. 問題 6.29 □

命題 5.1.6 (根基の特徴付け). R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき、$I = \sqrt{I}$ となることは R/I の 0 でない冪零元が存在しないための必要十分条件である。

証明 cf. 問題 6.50 □

定義 5.1.7 (準素イデアル). R を可換環とする。R の固有イデアル I が**準素イデアル (primary ideal)** であるとは、$x, y \in R$ に関し

$$(xy \in I \wedge x \notin I) \quad \Longrightarrow \quad y \in \sqrt{I} \tag{5.1.3}$$

が成り立つことをいう。

命題 5.1.8 (準素イデアルの特徴付け). R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき、I が準素イデアルであることは R/I の零因子がすべて冪零元になるための必要十分条件である。

証明 cf. 問題 6.51 □

命題 5.1.9 (準素イデアルの根基). R を可換環、I を R の準素イデアルとする。このとき $\sqrt{I}$ は I を含む最小の素イデアルである。

証明 cf. 問題 6.53 □

5.2 素元と既約元

倍元と約元の概念を定義する。

定義 5.2.1 (倍元と約元). R を可換環、$a, b \in R$ とする。a が b の**倍元 (multiple)**、あるいは b が a の**約元 (divisor)** であるとは、ある $r \in R$ が存在して $a = rb$ が成り立つことをいい、このことを $b \mid a$ と書いて表す。$b \mid a$ であるとき ***b* は *a* を割り切る (*b* divides *a*)**、あるいは ***a* は *b* で割り切れる (*a* is divisible by *b*)** という。

定義 5.2.2 (同伴元). R を可換環、$a \in R$ とする。$b \in R$ が $a|b$ かつ $b|a$ をみたすとき、a は b の**同伴元 (associate)** であるという。明らかにこのとき b は a の同伴元である。

定理 5.2.3 (整域における同伴元の特徴付け)**.** R を整域とする。$a, b \in R$ に関し、a, b が互いに同伴元であるための必要十分条件は、ある $u \in R^\times$ が存在して $a = ub$ が成り立つことである。

証明 十分性は明らか。

[TODO] □

最大公約元の概念を定義する。

定義 5.2.4 (最大公約元)**.** R を可換環、$a_1, \ldots, a_n \in R$, $g \in R$ とする。g が $a_1, \ldots, a_n$ の**最大公約元 (greatest common divisor)** であるとは、g が次をみたすことをいう:

(1) g は $a_1, \ldots, a_n$ を割り切る。
(2) $a_1, \ldots, a_n$ を割り切る任意の $g' \in R$ に対し g' は g を割り切る。

素元と既約元を定義する。既約元は非自明な分解を持たない元のことである。

定義 5.2.5 (素元と既約元)**.** R を可換環とする。

- $a \in R - \{0\}$ が**素元 (prime element)** であるとは、$(a) \in \mathrm{Spec}(R)$ であることをいう。
- $a \in R - \{0\}$ が**既約元 (irreducible element)** であるとは、
  (1) $a \notin R^\times$
  (2) $\forall a, b \in R$ に対し、
  $$a = bc \quad \Longrightarrow \quad (b \in R^\times \vee c \in R^\times) \tag{5.2.1}$$
  をみたすことをいう。

例 5.2.6 (既約元は素元とは限らない)**.** cf. 問題 6.39 [TODO] $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において $6 = 2 \cdot 3 = (q + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ を考える。

ただし、後でみるように UFD では既約元が素元となる。

例 5.2.7 (素元は既約元とは限らない)**.** K を体とし、可換環 $K \times K$ を考える。$(K \times K)/((1, 0)) \cong K$ ゆえに $(1, 0)$ は素元である。一方、$(1, 0) = (1, 0)(1, 0)$ と可逆でない 2 元の積に書けることから $(1, 0)$ は既約元ではない。

整域においては素元は既約元でもある。既約元の判定はしばしば難しく、素元の判定は比較的簡単なことがあるため、この定理は既約元の判定の足がかりとなる。

定理 5.2.8 (整域では素元は既約元)**.** R を整域とする。R の素元は既約元である。

証明 $x \in R - \{0\}$ を素元とする。$x = ab$, $a, b \in R$ とすると x が素元ゆえに (x) が素イデアルであることから $a \in (x)$ または $b \in (x)$ である。$a \in (x)$ の場合を考える。$a = rx$ $(r \in R)$ と表せるからよって $x = rxb = rbx$ である。いま R は整域だから $1 = rb$ が成り立つ。したがって $b \in R^\times$ である。同様に $b \in (x)$ ならば $a \in R^\times$ である。したがって x は R の既約元である。 □

5.3 UFD

UFD を定義する。UFD は既約元分解が次の意味で一意的に存在する整域である。

定義 5.3.1 (UFD). 整域 R が**一意分解整域 (unique factorization domain)**、あるいは略して **UFD** であるとは、R が次をみたすことをいう:

(1) (既約元分解の存在) 0 でも単元でもない $r \in R$ は既約元の積 $r = p_1 \dots p_m$ の形に表せる。各 p_i を r の**素因子 (prime factor)** という。

(2) (既約元分解の一意性) 既約元 $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n \in R$ が $p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_n$ をみたすならば、$m = n$ が成り立ち、かつある置換 $\sigma \in S_n$ が存在して p_i と $q_{\sigma(i)}$ は互いに同伴元となる。

異なる概念として定義された素元と既約元だが、整域においては素元は既約元となるのであった。さらに UFD ではこの逆も成り立つ。したがって UFD では既約元分解は素元分解と考えても同じことである。

命題 5.3.2 (UFD の既約元は素元). UFD の既約元は素元である。したがって UFD の零でない元が既約元であることと素元であることは同値である。

証明[3]**.** R を UFD、$p \in R - \{0\}$ を既約元とする。(p) が素イデアルとなることを示せばよい。$ab \in (p)$ とすると $ab = rp$ $(r \in R)$ と表せる。p は既約元だから、左辺の既約元分解には p の同伴元が含まれる。したがって既約元分解の一意性より、a, b の少なくとも一方の既約元分解に p の同伴元が含まれる。よって $a \in (p)$ または $b \in (p)$ が成り立つ。したがって (p) は素イデアルである。よって p は R の素元である。 □

UFD は最大公約元を持つ。

命題 5.3.3 (UFD は最大公約元を持つ). R を UFD とする。任意の $a_1, \dots, a_n \in R$ に対し $a_1, \dots, a_n$ の最大公約元が存在する。

証明 [TODO] cf. [Rot15, p.107] □

上の命題により次の定義が可能となる。

定義 5.3.4 (互いに素). R を UFD、$a_1, \dots, a_n \in R$ とする。$a_1, \dots, a_n$ が**互いに素 (relatively prime)** であるとは、$a_1, \dots, a_n$ の最大公約元が単元のみであることをいう。

命題 5.3.5 (互いに素な元と互いに素なイデアル).

$$(a) + (b) = R \tag{5.3.1}$$

[TODO]

3) PID における別証明は問題 6.40 を参照。

証明 [TODO] 素イデアルが極大イデアルになることや同伴元と単項イデアルの関係を使って示すべき？ □

体上の多項式環は UFD である。

定理 5.3.6. 体上の多項式環は UFD である。

証明 [Rot15, p.111] □

5.4 PID

PID について述べる。PID の概念は**??**で述べる単因子論の基礎となる。

定義 5.4.1 (PID). 任意のイデアルが単項イデアルとなる整域を**単項イデアル整域 (principal ideal domain)** 、あるいは略して **PID** という。

単項イデアルの生成元は次の意味で一意である。

定理 5.4.2 (単項イデアルの生成元の一意性). R を整域とする。$a, b \in R$ に対し次は同値である:

(1) $(a) = (b)$

(2) $\exists r \in A^\times \quad \text{s.t.} \quad ra = b$

証明 [TODO] □

定理 5.4.3 (PID の 0 でない素イデアルは極大イデアル). PID の 0 でない素イデアルは極大イデアルである。

証明 $(x) \neq 0$ を素イデアルとし、$(y) \supsetneq (x)$ をイデアルとする。$x \in (y)$ だから $x = yz$ と書ける。よって $yz \in (x)$ である。したがって $y \in (x) \vee z \in (x)$ だが、いま $(y) \supsetneq (x)$ だから $y \notin (x)$、したがって $z \in (x)$ である。よって $z = wx$ と書ける。したがって $x = yz = ywx$ である。よって $1 = yw$ ゆえに y は単元だから $(y) = (1)$ である。 □

命題 5.4.4. PID において、既約元の生成する単項イデアルは極大イデアルである。

証明 [TODO] □

定理 5.4.5. R を PID とする。

(1) R は UFD である。

(2) $a \in R - R^\times$ に対し $\bigcap_{n \geq 1} (a^n) = 0$ が成り立つ。

証明 (1) [TODO]

(2) $a=0$ の場合は明らかに成り立つ。$a \neq 0$ とすると、R が UFD であることより a は単元と $k_a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 個の既約元の積に分解できる。$x \in \bigcap_{n\geq 1}(a^n)$ とする。$x \in R^\times$ であったとすると $x \in (a)$ より a も単元となり矛盾。したがって $x \notin R^\times$ である。$x \neq 0$ と仮定し矛盾を導く。$x \notin R^\times$, $x \neq 0$ より x は単元と $k_x \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 個の既約元の積に分解できる。$x \in \bigcap_{n\geq 1}(a^n)$ よりすべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $x \in (a^n)$ だから $x = r_n a^n$ $(r_n \in R)$ と表せるが、両辺の既約元分解に現れる既約元の個数は左辺にちょうど k_x 個、右辺に nk_a 個以上だから、十分大きな n に対しては等しくなりえず、矛盾が従う。よって $x=0$ であり、(2) の主張が示された。 □

5.5 Euclid 整域

Euclid 整域について述べる。

定義 5.5.1 (Euclid 整域). R を整域とする。R が **Euclid 整域 (Euclidean domain)** であるとは、次をみたす写像 $\delta\colon R \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ が存在することをいう:

- $\delta(R - \{0\}) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- $\delta(0) = -\infty$
- (割り算原理) $\forall a \in R$ と $\forall h \in R - \{0\}$ に対し

$$\exists q, r \in R \quad \text{s.t.} \quad a = hq + r \quad \text{and} \quad \delta(r) < \delta(h) \tag{5.5.1}$$

Euclid 整域は PID である。

定理 5.5.2. Euclid 整域は PID である。

証明 [TODO] □

体上の 1 変数多項式環は Euclid 整域となる。

定理 5.5.3. 体上の 1 変数多項式環は Euclid 整域である。

証明 cf. 問題 6.20 □

5.6 局所環

極大イデアルによって定義される可換環のクラスのうち最も重要なもののひとつが局所環である。

定義 5.6.1 (局所環). 極大イデアルをただひとつ持つ可換環を**局所環 (local ring)** という。

例 5.6.2 (単純環と局所環の例).

- 可換な単純環は (0) を唯一の極大イデアルとする局所環である。

- 体は単純環かつ局所環である。

局所環 R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は具体的に表せる。すなわち $\mathfrak{m}$ は R の非単元全体の集合である。

定理 5.6.3 (局所環の乗法群による特徴付け)**.** R を可換環とする。次は同値である:

(1) R は局所環である。
(2) $R - R^\times$ は R の極大イデアルである。

証明 (2) ⇒(1) は明らかだから (1) ⇒(2) を示す。$\mathfrak{m}$ を R の唯一の極大イデアルとする。$R^\times \cap \mathfrak{m} = \varnothing$ であることは $\mathfrak{m}$ が固有イデアルであることから明らか。$x \in R - R^\times$ とすると (x) は固有イデアルだから定理 3.4.2 より (x) を含む極大イデアルが存在するが、いま R は局所環だからそれは $\mathfrak{m}$ である。したがって $x \in \mathfrak{m}$ が成り立つ。 □

系 5.6.4. 可換な単純環は体である。 □

5.7 局所化と商体

局所化について述べる。

定義 5.7.1 (局所化)**.** R を可換環とする。

- R の乗法に関する部分モノイドを R の**積閉集合 (multiplicative set)** という。
- $S \subset R$ を R の積閉集合とする。$R \times S$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff \exists\, s \in S \text{ s.t. } (r_1 s_2 - r_2 s_1)s = 0 \tag{5.7.1}$$

で定める (ことができる)。この同値関係による商集合を $S^{-1}R := (R \times S)/\sim$ とおき、(r, s) の属する類を $\dfrac{r}{s}$ と書く。$S^{-1}R$ には自然な加法と乗法が入り、$\dfrac{0}{1}$ を零元、$\dfrac{1}{1}$ を単位元として環となる。$S^{-1}R$ を R の S による**局所化 (localization)** という。

注意 5.7.2 (局所化は局所環とは限らない)**.** 局所化は局所環とは限らない。

局所化は次の普遍性を持つ。

定理 5.7.3 (局所化の普遍性)**.** R を可換環、$S \subset R$ を R の積閉集合、標準射 $R \to S^{-1}R$ を f とおく。このとき、S の元を可換環 B の単元に写すような任意の環準同型 $g\colon R \to B$ に対し、ある環準同型 $h\colon S^{-1}R \to B$ であって

$$\begin{tikzcd} S^{-1}R \arrow[rr, dashed, "h"] & & B \\ & R \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{5.7.2}$$

を可換にするものが一意に存在する。

証明 [TODO] □

局所化は次の性質を持つ。局所化によって S の元は分数の分母のところに置けて単元になるというイメージである。

命題 5.7.4 (局所化の性質). (1) $s \in S$ に対し $f(s)$ は $S^{-1}R$ の単元である。
(2) $f(r) = 0$ ならばある $s \in S$ が存在して $rs = 0$ である。
(3) $S^{-1}R$ の任意の元はある $r \in R$ と $s \in S$ により $f(r)f(s)^{-1}$ の形に表せる。

[TODO]

証明 [TODO] □

定義 5.7.5 (saturation). [TODO]

定義 5.7.6 (extension). [TODO]

命題 5.7.7 (局所化のイデアル). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 5.7.8 (局所化の素イデアルの対応原理). [TODO]

証明 [TODO] □

第 6 章　基本的な環

6.1　整数

[TODO] 初等整数論を展開する

定理 6.1.1 (Euclid の互除法). [TODO]

証明　[TODO] □

6.2　有理数

補題 6.2.1 (有理数の表示). 任意の $q \in \mathbb{Q}$ は $q = k/l,\ k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ \gcd(k, l) = 1$ の形に一意的に表せる。

証明　[TODO] □

6.3　全行列環

6.4　多項式環

6.5　形式的冪級数環

定義 6.5.1. [TODO] $R[[X]]$

命題 6.5.2. K を体とする。$K[[X]]$ のイデアルは

$$(0), (X^d)\ (d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{6.5.1}$$

で尽くされる。とくに $K[[X]]$ は局所環かつ PID である。

証明　cf. 問題 6.30 □

6.6　Weyl 代数

定義 6.6.1 (Weyl 代数). 商 $\mathbb{C}$-代数

$$\mathbb{C}[x; \partial] := \mathbb{C}[W(\{\widetilde{x}, \widetilde{\partial}\})] \ /\ (\widetilde{\partial}\widetilde{x} - \widetilde{x}\widetilde{\partial} - 1) \tag{6.6.1}$$

を **Weyl 代数 (Weyl algebra)** という。$\widetilde{x}, \widetilde{\partial}$ の像をそれぞれ x, ∂ と書く。より一般に

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n;\ \partial_1, \ldots, \partial_n] := \mathbb{C}[W(\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{\partial}_1, \ldots, \widetilde{\partial}_n\})] \ /\ I \tag{6.6.2}$$

も Weyl 代数と呼ぶ。ただし、I は次の元たちから生成されるイデアルである:

$$\begin{cases} \widetilde{\partial}_i \widetilde{x}_j - \widetilde{x}_j \widetilde{\partial}_i - \delta_{ij} \\ \widetilde{x}_i \widetilde{\partial}_j - \widetilde{\partial}_j \widetilde{x}_i \\ \widetilde{\partial}_i \widetilde{\partial}_j - \widetilde{\partial}_j \widetilde{\partial}_i \end{cases} \tag{6.6.3}$$

定義 6.6.2 (標準基底と標準形)**.** cf. 問題 6.47 [TODO]

命題 6.6.3 (次数)**.** [TODO]

命題 6.6.4. Weyl 代数 $\mathbb{C}[x : \partial]$ は単純環である。

証明 cf. 問題 6.48 □

6.7 演習問題

A. Problem set 1

♤ **演習問題 6.1** (代数学 II 1.1)**.** End($\mathbb{Z}$) を求めよ。

♤ **演習問題 6.2** (代数学 II 1.2)**.** μ_2 を 2 次巡回群とする。群環 $\mathbb{C}[\mu_2]$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$-algebra として同型であることを示せ。

♤ **演習問題 6.3** (代数学 II 1.3)**.** A, B を零環でない環、$f\colon A \to B$ を単射とする。さらに任意の $x, y \in A$ に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y) \tag{6.7.1}$$

が成り立つとする。このとき f は環準同型となるか？

♤ **演習問題 6.4** (代数学 II 1.4)**.** 可換環の 2 つの冪零元の和は冪零元になることを示せ。また非可換環の場合は同じことが成り立つか？

♤ **演習問題 6.5** (代数学 II 1.5)**.** A を環、$u \in A^\times$ とし、$n \in A$ を冪零元として $un = nu$ であるとする。このとき $u + n \in A^\times$ を示せ。

♤ **演習問題 6.6** (代数学 II 1.6)**.** S を index set とし、$\{A_i\}_{i\in S}$ を環の族とする。$(B, \{q_i\colon B \to A_i\}_{i\in S})$ が $\{A_i\}_{i\in S}$ の圏論的直積であるとは、$\{q_i\colon B \to A_i\}_{i\in S}$ は環準同型の族であって任意の環準同型の族 $\{f_i\colon C \to A_i\}_{i\in S}$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "f_i"'] & & B \arrow[dl, "q_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \tag{6.7.2}$$

を可換にするような環準同型 $F\colon C \to B$ が一意に存在することをいう。

(a) 直積環 $(\prod_{i\in S} A_i, \{p_i\colon \prod_{i\in S} A_i \to A_i\}_{i\in S})$ は $\{A_i\}_{i\in S}$ の圏論的直積であることを示せ。ここで p_i は標準射影である。

(b) 任意の $\{A_i\}_{i\in S}$ の圏論的直積 $(B, \{q_i\colon B \to A_i\}_{i\in S})$ に対して、

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in S} A_i \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p_i"'] & & B \arrow[dl, "q_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd} \tag{6.7.3}$$

を可換にするような環の同型写像 $\Psi\colon \prod_{i\in S} A_i \to B$ が一意に存在することを示せ。

♤ **演習問題 6.7** (代数学 II 1.7)**.** R を環とする。全行列環 $M_n(R)$ の中心 $Z(M_n(R))$ を求めよ。

♤ **演習問題 6.8** (代数学 II 1.8). $(A,+,\cdot,0)$ が **nonunital ring** であるとは、

- $(A,+,0)$ がアーベル群かつ
- $(A,\cdot)$ が半群で
- 分配法則をみたすもの

とする。$f\colon A\to B$ が nonunital ring の準同型であるとは、

- 任意の $x,y\in A$ に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)$ かつ $f(xy)=f(x)f(y)$ が成り立つこと

とする。さて、任意の nonunital ring A に対して、環 A_1 と nonunital ring の準同型 $\iota\colon A\to A_1$ であって次の条件を満たすものが存在することを示せ:

(条件) 任意の環 B と nonunital ring の準同型 $f\colon A\to B$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A_1 \arrow[dl, dashed, "f_1"] \\ B & \end{tikzcd} \tag{6.7.4}$$

を可換にするような環準同型 $f_1\colon A_1\to B$ が一意に存在する。

♤ **演習問題 6.9** (代数学 II 1.9). $C(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数全体のなす $\mathbb{C}$-alg とする。$C(\mathbb{R})$ の零因子を求めよ。

♤ **演習問題 6.10** (代数学 II 1.10). A を $1<\dim_{\mathbb{C}}A<\infty$ なる $\mathbb{C}$-alg とする。このとき A は零因子を持つことを示せ。

♤ **演習問題 6.11** (代数学 II 1.11). A を環とする。ある零環でない環 B,C が存在して $A\cong B\times C$ となるための必要十分条件は $0,1\neq e$ なる冪等元 $e\in Z(A)$ が存在することであることを示せ。

♤ **演習問題 6.12** (代数学 II 1.12 Hamilton's Quaternions). $M_2(\mathbb{C})$ を実ベクトル空間と考え、

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix} \tag{6.7.5}$$

で生成される 4 次元実部分空間を $\mathbb{H}$ とおく。$\mathbb{H}$ は $M_2(\mathbb{C})$ の部分環となり、さらに division algebra となることを示せ。

♤ **演習問題 6.13** (代数学 II 1.13). $\{x\in\mathbb{H}\mid x^2=-1\}$ は無限集合であることを示せ。

♤ **演習問題 6.14** (代数学 II 1.14). 非可換 3 次元 $\mathbb{C}$-alg は 0 でない冪零元をもつことを示せ。

0) 有限次元線型空間の自己準同型 f に対し、適当な基底による行列表現 B の特性多項式 $\det(XI_n-B)$ を f の**特性多項式 (characteristic polynomial)** という。

♤ **演習問題 6.15** (代数学 II 1.15)**.** $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$-alg としての自己同型写像をすべて求めよ。

♤ **演習問題 6.16** (代数学 II 1.16)**.** 任意の巡回群を考えその演算を加法とみなす。すると環の構造を与える乗法が一意に定まることを示せ。

♤ **演習問題 6.17** (代数学 II 1.17)**.** 2 次元 $\mathbb{C}$-alg を同型を除いて分類せよ。

♤ **演習問題 6.18** (代数学 II 1.18)**.** $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}$ の部分環になることを示せ。また次を示し $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ が無限群であることを示せ:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}, n^2 - 2m^2 = \pm 1\} \tag{6.7.6}$$

B. Problem set 2

♤ **演習問題 6.19** (代数学 II 2.19)**.** 次数が k である n 変数単項式の個数を $d_n(k)$ とおく。

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} d_n(k) t^k \quad (|t| < 1) \tag{6.7.7}$$

を示せ。また $d_n(k)$ を求めよ。

♤ **演習問題 6.20** (代数学 II 2.20)**.** 体 K 上の 1 変数多項式環 $K[X]$ は Euclid 整域であることを示せ。

♤ **演習問題 6.21** (代数学 II 2.21)**.** K を体、$f \in K[X], f \neq 0$ で f の次数を n とする。このとき $\{a \in K \colon f(a) = 0\}$ の濃度は n 以下であることを示せ。

注意 6.7.1. この問題の主張は K が整域ならば成り立つが、K が division algebra の場合は成り立たない (問題 6.13)。一般的に、可換性を要する命題の証明では、その過程で根の個数の不等式を利用することがよくある。

♤ **演習問題 6.22** (代数学 II 2.22)**.** K を体とする。乗法群 $K^\times$ の任意の有限部分群は巡回群になることを示せ。

♤ **演習問題 6.23** (代数学 II 2.23)**.** Gauss 整数環 $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \colon m, n \in \mathbb{Z}\}$ は Euclid 整域であることを示せ。

♤ **演習問題 6.24** (代数学 II 2.24)**.** K を無限個の元を持つ体とする。このとき $\mathrm{Map}(K^n, K)$ で K^n から K への写像全体のなす集合とする。K 上の n 変数多項式環 $K[X_1, \ldots, X_n]$ から $\mathrm{Map}(K^n, K)$ への写像 F を $K[X_1, \ldots, X_n]$ の元を対応する多項式関数に写すことで与える。このとき F は単射であることを示せ。

♤ **演習問題 6.25** (代数学 II 2.25)**.** K を有限個の元からなる体とする。問題 6.24 のような写像 $F\colon K[X_1,\dots,X_n]\to \mathrm{Map}(K^n,K)$ を考えると F は全射であることを示せ。

♤ **演習問題 6.26** (代数学 II 2.26)**.** 加法群が巡回群になるような環を同型を除いてすべて決定せよ。

♤ **演習問題 6.27** (代数学 II 2.27)**.** 1 つの元で $\mathbb{C}$ 上生成される $\mathbb{C}$-代数で零因子を持たないものを同型を除いてすべて決定せよ。

♤ **演習問題 6.28** (代数学 II 2.28)**.** $\mathbb{C}[X]^\times\cong\mathbb{C}^\times$ および $(\mathbb{C}[X]/(X^{n+1}))^\times\cong\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^n$ を示せ。ただし $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ を加法群とみたものの n 個のコピーの直積である。

♤ **演習問題 6.29** (代数学 II 2.29)**.** R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき

$$\sqrt{I}:=\{a\in R\colon a^n\in I\ (\exists n\in\mathbb{Z}_{\geq 1})\}\tag{6.7.8}$$

とおくと、$\sqrt{I}$ は R の固有イデアルとなることを示せ。

♤ **演習問題 6.30** (代数学 II 2.30)**.** 体 K 上の 1 変数形式的べき級数環 $K[[X]]$ のイデアルをすべて求め $K[[X]]$ が局所環かつ PID であることを示せ。

♤ **演習問題 6.31** (代数学 II 2.31)**.** **(中国剰余定理 (Chinese Remainder Theorem))** R を可換環とし、$I_1,\dots,I_n$ をその固有イデアルとする。さらに $i\neq j$ なる $1\leq i,j\leq n$ に対し $I_i+I_j=R$ をみたすとする。このとき、

$$I_1\cap\cdots\cap I_n=I_1\cdots I_n\tag{6.7.9}$$

となることを示せ。

♤ **演習問題 6.32** (代数学 II 2.32)**.** **(Frobenius 準同型)** R を可換環、p を素数とする。さらに $\iota\colon\mathbb{Z}\to R$ を一意的にきまる環準同型とし $\mathrm{Ker}(\iota)=(p)$ であると仮定する。このとき写像 $F\colon R\to R$ を $F(x)=x^p$ で定めるとこれは環準同型になることを示せ。

♤ **演習問題 6.33** (代数学 II 2.33)**.** $\mathbb{Z}$ を加法群とみたときの群環 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ のイデアルおよび素イデアルをすべて求めよ。

♤ **演習問題 6.34** (代数学 II 2.34)**.** p を素数とするとき $\mathbb{Z}/(p^{k+1})$ の乗法群を求めよ。

♤ **演習問題 6.35** (代数学 II 2.35)**.** 極大両側イデアルは素イデアルになることを示せ。

♤ **演習問題 6.36** (代数学 II 2.36)**.** 完全素イデアルは素イデアルになることを示せ。また、逆は成り立つか？

♤ **演習問題 6.37** (代数学 II 期末問題候補). R を可換環、A を R-alg とし、$S \subset A$ とする。

$$\mathcal{S}_S := \{B \subset A \colon B \text{ は } R\text{-subalg かつ } S \subset B\} \tag{6.7.10}$$

とおくとき

$$R\langle S\rangle = \bigcap_{B \in \mathcal{S}_S} B \tag{6.7.11}$$

となることを示せ。

C. Problem set 3

♤ **演習問題 6.38** (代数学 II 3.37). [TODO]

♤ **演習問題 6.39** (代数学 II 3.38). k を正整数、X, Y を不定元として $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^{2k+1})$ とおく。$x \in A$ を標準射影による X の像としたとき、x は既約元であるが素元ではないことを示せ。

♤ **演習問題 6.40** (代数学 II 3.39). PID において既約元は素元になることを示せ。

♤ **演習問題 6.41** (代数学 II 3.40). A を可換 $\mathbb{C}$-代数で $d = \dim_{\mathbb{C}} A$ としたとき $0 < d < \infty$ であるとする。このとき A は高々 d 個しか極大イデアルを持たないことを示せ。

♤ **演習問題 6.42** (代数学 II 3.41). A を可換 $\mathbb{C}$-代数で $d = \dim_{\mathbb{C}} A$ としたとき $0 < d < \infty$ であるとする。A が 0 でない冪零元を持たないならば、A は d 個の複素数体の直積と同型になることを示せ。

定義 6.7.2 (derivation). K を体、A を K-代数とする。K-線型写像 $D \colon A \to A$ が A 上の **derivation** であるとは、任意の $a, b \in A$ に対して

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{6.7.12}$$

が成り立つことをいう。

♤ **演習問題 6.43** (代数学 II 3.43). 複素数体上の n 変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ 上の derivation をすべて求めよ。

定義 6.7.3 (G-gradation). G を加法群、K を体、A を K-代数とする。A の **G-gradation** とは、G を添字集合とする A の K-部分ベクトル空間の族による A の K-ベクトル空間としての直和分解

$$A = \bigoplus_{g \in G} A(g) \tag{6.7.13}$$

であって、任意の $x, y \in G$, $a \in A(x)$, $b \in A(y)$ に対して $ab \in A(x + y)$ をみたすものをいう。

♤ **演習問題 6.44** (代数学 II 3.44). K を体、A を K-代数とする。K を加法群とみなしたときの A の K-gradation

$$A = \bigoplus_{z \in K} A(z) \tag{6.7.14}$$

が与えられていたとする。このとき K-線型写像 $D\colon A \to A$ を $z \in K,\ a \in A(z)$ に対して $D(a) = za$ となるように定める。このとき D は derivation になることを示せ。

♤ **演習問題 6.45** (代数学 II 3.46). 単純環の中心は体になることを示せ。

注意 6.7.4. 単純環の部分環が単純であるとは限らないことに注意せよ (例 3.4.4)。

♤ **演習問題 6.46** (代数学 II 3.47). 有限体の元の個数はある素数の冪になることを示せ。

証明 cf. 定理 16.2.2 □

♤ **演習問題 6.47** (代数学 II 3.49). Weyl 代数 $\mathbb{C}[x:\partial]$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての基底 $\{x^i\partial^j \mid i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をもつことを示せ。

証明 [TODO] □

♤ **演習問題 6.48** (代数学 II 3.50). Weyl 代数 $\mathbb{C}[x:\partial]$ は単純環であることを示せ。

証明 [TODO] □

D. Problem set 5

♤ **演習問題 6.49** (代数学 II 5.64). R を可換環、n を正整数、$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする。このとき $R/\mathfrak{m}^n$ は局所環であることを示せ。

♤ **演習問題 6.50** (代数学 II 5.65). R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき $I = \sqrt{I}$ となることは R/I の 0 でない冪零元が存在しないための必要十分条件であることを示せ。

♤ **演習問題 6.51** (代数学 II 5.66). R を可換環、I を R の固有イデアルとする。このとき I が準素イデアルであることは R/I の零因子がすべて冪零元になるための必要十分条件であることを示せ。

♤ **演習問題 6.52** (代数学 II 5.67). R を可換環、$\mathfrak{p}$ を R の素イデアル、n を正整数とする。このとき $\mathfrak{p}^n$ は準素イデアルであることを示せ。また、任意の準素イデアルはこのような形に書けるか？正しければ証明を、誤りならば反例を与えよ。

E. Problem set 6

> ♤ **演習問題 6.53** (代数学 II 6.78). R を可換環、I を R の準素イデアルとすると $\sqrt{I}$ は I を含む最小の素イデアルであることを示せ。

F. Problem set 12

> ♤ **演習問題 6.54** (代数学 II 12.151). $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XYZ - 1)$ は PID でないことを示せ。

第 7 章　加群

群が集合の置換群としての表現を持つように、環はアーベル群の自己準同型環としての表現を持っている。したがってそのような表現を通して環の性質を調べることができそうである。加群とは、このような表現によって環が作用しているアーベル群のことである。また別の見方では、加群とは加法とスカラー倍を備えた代数系のことであり、アーベル群やベクトル空間の一般化である。

7.1　加群

定義 7.1.1 (加群). A を環とする。集合 M が**左 A-加群 (left A-module)** あるいは A **上の左加群**であるとは、次が成り立つことをいう:

(M1)　V はアーベル群である。

(M2)　**スカラー倍 (scalar multiplication)** と呼ばれる写像 $R \times V \to V,\ (r, v) \mapsto rv$ が定義されている。

(M3)　$a, b \in R,\ x \in M$ に対し

$$1x = x, \quad (ab)x = a(bx) \tag{7.1.1}$$

が成り立つ。

(M4)　$a, b \in R,\ x, y \in M$ に対し

$$(a + b)x = ax + bx \tag{7.1.2}$$

$$a(x + y) = ax + ay \tag{7.1.3}$$

が成り立つ。

右 A-加群 (right A-module) も同様に定義される。本稿では左 A-加群を単に **A-加群 (A-module)** や加群と呼ぶことにする。

定義 7.1.2 (両側加群). A, B を環とする。集合 M が **(A, B)-両側加群 ((A, B)-bimodule)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(BM1)　M は左 A-加群かつ右 B-加群である。

(BM2)　$a \in A,\ b \in B,\ x \in M$ に対し

$$(ax)b = a(xb) \tag{7.1.4}$$

が成り立つ。

例 7.1.3 (加群の例). A を環とする。

- 任意のアーベル群は $\mathbb{Z}$-加群である。
- A の左イデアル、とくに A 自身は左からの積で A-加群となる。このように環 A 自身を左 A-加群とみなしたものを ${}_AA$ と書き、**左正則加群 (left regular module)** と呼ぶ。同様に環 A 自身を右からの積で右 A-

加群とみなしたものを A_A と書き、**右正則加群 (left regular module)** と呼ぶ。

- 自明群 0 は任意の環上の加群である。

既存の加群の係数を制限することで新たな加群を構成することができる。これを**係数の制限 (restriction of scalars)** といい、詳しくは 12.3 節 で調べる。

例 7.1.4 (係数の制限)**.** A, B を環、M を B-加群、$\phi\colon A \to B$ を環準同型とする。このとき $ax := \phi(a)x$ でスカラー倍を定めることで M に A-加群の構造が入る。

- $A \subset B$ が部分環なら、標準包含により B は A-加群となる。
- R が可換環なら、標準包含により $R[X_1, \ldots, X_n]$ は A-加群である。
- R を可換環とし、$H \subset G$ を部分群とすると、**??**より $R[H]$ は $R[G]$ の部分環である。よって $R[G]$ は $R[H]$-加群である。
- $V := \mathbb{F}_2^3$ は $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間（とくに加群）である。$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{F}_2$ への自然な環準同型により V は $\mathbb{Z}$-加群となる。また、$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ から $\mathbb{F}_2$ への自然な環準同型により V は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-加群にもなる。
- $\mathbb{C}[x, y]/(x, y^2)$ は $\mathbb{C}$-加群だから、evaluation homomorphism $\mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}$ により $\mathbb{C}[x, y]$-加群にもなる。

定義 7.1.5 (加群の準同型)**.** A を環、V_1, V_2 を A-加群とする。写像 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ が **A-加群準同型 (A-module homomorphism)** であるとは、

(1) φ は群準同型

(2) $\varphi(av) = a\varphi(v) \quad (a \in R, v \in V_1)$

が成り立つことをいう。

例 7.1.6 (加群準同型の例)**.** $A := \mathbb{C}[x, y], I := (x, y) \subset A$ とする。写像 $\phi\colon A^2 \to I,$

$$[f_1, f_2] \mapsto f_1 x + f_2 y \tag{7.1.5}$$

を考える。ϕ は定義から明らかに全射であり、I を A-加群とみれば ϕ は A-加群準同型である。$\mathrm{Ker}(\phi)$ を求める。$[f_1, f_2] \in \mathrm{Ker}(\phi)$ ならば $f_1 x + f_2 y = 0$ である。よって $f_1 x = -f_2 y$ となるが、A は UFD で x, y は互いに素だから、素元分解の一意性より $f_1 = y g_1, f_2 = x g_2$ $(g_1, g_2 \in A)$ と表せる。よって $g_1 xy = -g_2 xy$ であり、A は整域だから $g_1 = -g_2$、したがって $[f_1, f_2] = g_1 \cdot [y, -x]$ である。よって $\mathrm{Ker}(\phi) \subset A \cdot [y, -x]$ である。逆の包含も明らか。したがって $\mathrm{Ker}(\phi) = A \cdot [y, -x]$ である。

7.2 部分加群

定義 7.2.1 (部分加群)**.** A を環とし、M を A-加群とする。部分集合 $N \subset M$ が M の和とスカラー倍により加群となるとき、N を M の**部分 A-加群 (A-submodule)** という。N が M の部分加群であることは次と同値である：

(1) N は M の加法部分群であり、

(2) $a \in A, n \in N \Rightarrow an \in N$ が成り立つ。

定義 7.2.2 (イデアル上の線型結合からなる部分加群). A を環、M を A-加群、$I \subset A$ を左イデアルとする。M の元の I-線型結合全体の集合を

$$IM := \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_i \in I,\ v_i \in M\} \tag{7.2.1}$$

とおく。IM は M の部分 A-加群となる。

例 7.2.3 (部分加群の例).

- 正則左 R-加群の部分 R-加群は R の左イデアルに他ならない。右/双加群が右/両側イデアルに対応することも同様である。

7.3 生成された加群

[TODO] Rv とかの記法は？それは環のイデアル？

定義 7.3.1 (部分集合により生成された加群). A を環、M を A-加群とする。

- 部分集合 $S \subset M$ に対し、S を含む M の最小の部分加群を S により**生成された部分加群 (generated submodule)** と呼び、$\langle S \rangle$ や AS と書く。
- S が 1 元集合 $S = \{v\}$ の場合、$\langle S \rangle$ を v により A 上生成された**巡回加群 (cyclic submodule)** と呼び、波括弧を省略して $\langle v \rangle$ や Av とも書く。

有限集合で生成される加群は特に重要であるが、ここでは定義と簡単な例を述べるにとどめ、詳しく調べるのは第 9 章にまわす。

定義 7.3.2 (有限生成加群). A を環、M を A-加群とする。M が有限集合で生成されるとき、M は A-加群として**有限生成 (finitely generated)** であるという。

例 7.3.3 (有限生成加群とそうでない加群の例).

- A を環とする。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し A^n は A 上の有限生成加群である。生成元は $(0, \ldots, \overset{j}{\smile}{1}, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$ である。
- A を可換環とし、$B := A[X]$ とすると、B は A-加群として有限生成ではない。しかし A-代数としては x により生成されるから有限生成である。
- 9.2 節 で述べるネーター性は有限生成性を強化した性質である。

$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Z}$ 上有限生成でないことは簡単な反例を作るときに役立つかもしれない。

補題 7.3.4. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成でない。

証明　$\mathbb{Q}$ が有限個の元 $q_1, \ldots, q_n$ により $\mathbb{Z}$ 上生成されたとする。$q_i = k_i/l_i,\ k_i \in \mathbb{Z},\ l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ \gcd(k_i, l_i) = 1$ と表す。$l_1, \ldots, l_n$ の素因数分解に現れない素数 p をひとつ選ぶ。$1/p = \sum_{i=1}^{n} n_i k_i / l_i$ と表せる。よって $l_1 \ldots l_n = p \sum_{i=1}^{n} n_i k_i \prod_{j \neq i} l_j$ が成り立つ。p の選び方より左辺は p で割り切れないが、右辺は p で割り切れるから矛盾。よって $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成でない。 □

7.4 商加群

定義 7.4.1 (商加群). [TODO]

7.5 準同型定理

命題 7.5.1 (加群準同型の像と核). A を環、$f\colon M \to N$ を A-加群準同型とする。このとき $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ はそれぞれ M, N の A-部分加群である。

証明　[TODO] □

定理 7.5.2 (準同型定理). [TODO]

証明　[TODO] □

例 7.5.3 (準同型定理の例). 例 7.1.6 の具体例を考える。$A = \mathbb{C}[x]$ とし、$M = A^2$ とする。$N = A \cdot [1, x]$ とすると N は M の部分 A-加群である。$\phi\colon M \to A, [a, b] \mapsto b - ax$ は A-加群準同型である。$\phi([0, b]) = b$ なので、ϕ は全射である。さらに $\operatorname{Ker}(\phi) = A \cdot [1, x] = N$ より $M/N \cong A$ である。

$$\begin{tikzcd} & A \\ M \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, two heads] & M/N \arrow[u, dashed] \end{tikzcd} \tag{7.5.1}$$

定理 7.5.4 (第 2 同型定理, 菱形同型定理). A を環、M を A-加群、$H, K \subset M$ を A-部分加群とする。このとき $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} & H + K \arrow[dr, dash] & \\ H \arrow[ur, dash, dashed] \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, dash, dashed] \\ & H \cap K & \end{tikzcd} \tag{7.5.2}$$

証明　準同型 $H \to (H + K)/K,\ h \mapsto h + K$ に準同型定理を用いればよい。 □

定理 7.5.5 (第 3 同型定理)**.** A を環、$K \subset L \subset M$ を A-部分加群の列とする。このとき

$$\frac{M/K}{L/K} \cong \frac{M}{L} \tag{7.5.3}$$

が成り立つ。

証明 準同型 $M/K \to M/L,\ m + K \to m + L$ に準同型定理を用いればよい。cf. 問題 7.6 □

加群に対しても環の両側イデアルの対応原理 (定理 3.2.6) と類似の主張が成り立つ。[TODO] 束の同型？この定理は、商加群のイデアル全体の集合にある種の下界を与える。したがって、たとえば第 9 章で述べるイデアルの降鎖条件の確認に使うことができ、アルティン環の例を考えるためにも役立つ。

定理 7.5.6 (部分加群の対応原理)**.** A を環、M を A-加群、$N \subset M$ を A-部分加群とする。

$$\mathcal{I}_N(M) := \{K \colon K \text{ は } N \text{ を含む } M \text{ の } A\text{-部分加群}\} \tag{7.5.4}$$

$$\mathcal{I}(M/N) := \{K \colon K \text{ は } M/N \text{ の } A\text{-部分加群}\} \tag{7.5.5}$$

とおくと、

$$\widetilde{p} \colon \mathcal{I}_N(M) \to \mathcal{I}(M/N), \quad K \mapsto p(K) \tag{7.5.6}$$

は包含関係を保つ全単射であり、$\widetilde{p}$ の逆写像 q は

$$q \colon \mathcal{I}(M/N) \to \mathcal{I}_N(M), \quad K' \mapsto p^{-1}(K') \tag{7.5.7}$$

で与えられる。

証明 [TODO] □

7.6 自己準同型環

加群準同型全体の集合には次のように加群の構造が入る。

定義 7.6.1 (加群準同型全体の集合)**.**

(Hom の $\mathbb{Z}$-加群構造) A を環、V_1, V_2 を A-加群とする。集合

$$\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2) := \{\varphi \colon V_1 \to V_2 \mid \varphi \text{ は } A\text{-加群準同型}\} \tag{7.6.1}$$

に対し、加法、零元を

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v) \tag{7.6.2}$$

$$(\varphi + 0)(v) = \varphi(v) = (0 + \varphi)(v) \tag{7.6.3}$$

として $\mathbb{Z}$-加群の構造が入る。

(環上の加群) A, B を環、V_1 を A-加群、V_2 を B-加群とする。$\mathbb{Z}$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V_1, V_2)$ に対し、スカラー倍を

$$(a\varphi)(m) := \varphi(am) \tag{7.6.4}$$

として A-加群の構造が入る。

(環上の両側加群) A, B を環、V_1 を (B, A)-両側加群、V_2 を B-加群とする。B-加群 $\mathrm{Hom}_B(V_1, V_2)$ に対し、スカラー倍を

$$(a\varphi)(m) := \varphi(ma) \tag{7.6.5}$$

として A-加群の構造が入る。

(代数上の加群) R を可換環、A を R-代数とする。$\mathbb{Z}$-加群 $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$ に対し、スカラー倍を

$$(r\varphi)(v) := r\varphi(v) \tag{7.6.6}$$

として R-加群の構造が入る [4)]。

とくに自己準同型全体の加群には次のように環や代数の構造が入る。

定義 7.6.2 (自己準同型環)**.**

(環上の加群) A を環、V を A-加群とする。A-加群 $\mathrm{Hom}_A(V, V)$ を $\mathrm{End}_A(V)$ と書き、$\mathrm{End}_A(V)$ に対し、乗法、単位元を

$$(\varphi \cdot \psi)(v) := (\varphi \circ \psi)(v) \tag{7.6.7}$$

$$(\mathrm{id}_V \cdot \varphi)(v) = \varphi(v) = (\varphi \cdot \mathrm{id}_V)(v) \tag{7.6.8}$$

として環の構造が入る。$\mathrm{End}_A(V)$ を V の**自己準同型環 (endmorphism ring)** という。

(代数上の加群) R を可換環、A を R-代数、V を A-加群とする。環 $\mathrm{End}_A(V)$ に対し、環準同型

$$R \to Z(\mathrm{End}_A(V)), \quad r \mapsto (v \mapsto rv) \tag{7.6.9}$$

により R-代数の構造が入る。

加群の自己準同型をひとつ固定すると、次の例のように係数環を多項式環上まで拡張できる。この構成は**??**で重要となる。

例 7.6.3 (多項式環上の加群)**.** R を可換環、M を R-加群、$\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ とする。このとき、M は写像

$$R[X] \times M \to M, \quad (f, v) \mapsto f(\varphi)(v) \tag{7.6.10}$$

をスカラー乗法として $R[X]$-加群となる。M が R 上有限生成ならば、明らかに $R[X]$ 上でも有限生成である。

7.7 直積と直和

加群の直積と直和を定義する。まず圏論的直積を考える。

定義 7.7.1 (圏論的直積)**.** A を環、S を集合、$\{V_i\}_{i \in S}$ を A-加群の族とする。A-加群 W と A-加群準同型の族

---

4) A が可換環でないときは、$\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$ に A-加群の構造が入るとは限らない。実際、$a, b \in A$, $ab \neq ba$ をとり $a\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_A(V_1, V_1)$ を仮定すると、$x \in V_1 \setminus \{0\}$ に対し $bax = (a\mathrm{id})(bx) = abx$ より $ab = ba$ となり矛盾する。

$\{q_i\colon W \to V_i\}_{i\in S}$ の対 $(W, \{q_i\}_i)$ が**圏論的直積 (categorical direct product)** であるとは、

$$\forall\, \{f_i\colon U \to V_i\}_{i\in S}\colon\ A\text{-加群準同型の族} \tag{7.7.1}$$

$$\exists!\, F\colon U \to W\colon\ A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{7.7.2}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, dashed, "F"] \arrow[dr, "f_i"'] & & W \arrow[dl, "q_i"] \\ & V_i & \end{tikzcd} \tag{7.7.3}$$

が成り立つことをいう [5)]。

圏論的直積の具体的な構成を与えよう。

定義 7.7.2 (直積)**.** A を環、S を集合、$\{V_i\}_{i\in S}$ を A-加群の族とする。直積集合 $\prod_{i\in S} V_i$ に加法とスカラー倍を

$$(v_i)_i + (w_i)_i := (v_i + w_i)_i \tag{7.7.4}$$

$$a \cdot (v_i)_i := (a \cdot v_i)_i \tag{7.7.5}$$

で定め、零元を $(0)_i$ として A-加群の構造を入れたものを加群の**直積 (direct product)** という。直積加群は標準射影の族

$$p_k\colon \prod_{i\in S} V_i \to V_k, \quad (v_i)_i \mapsto v_k \tag{7.7.6}$$

とあわせて考える。

命題 7.7.3 (直積は圏論的直積)**.** A を環、S を集合、$\{V_i\}_{i\in S}$ を A-加群の族とする。このとき、直積加群 $\prod_{i\in S} V_i$ とその標準射影の族 $\{p_i\}_i$ の対は圏論的直積である。

証明 $F(u) := (f_i(u))_i$ と定めればよい。 □

つぎに圏論的直和を考える。

定義 7.7.4 (圏論的直和)**.** A を環、S を集合、$\{V_i\}_{i\in S}$ を A-加群の族とする。A-加群 W と A-加群準同型の族 $\{\iota_i\colon V_i \to W\}_{i\in S}$ の対 $(W, \{\iota_i\}_i)$ が**圏論的直和 (categorical direct sum)** であるとは、

$$\forall\, \{f_i\colon V_i \to U\}_{i\in S}\colon\ A\text{-加群準同型の族} \tag{7.7.7}$$

$$\exists!\, F\colon W \to U\colon\ A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{7.7.8}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, dashed, "F"] & & U \\ & V_i \arrow[ul, "\iota_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd} \tag{7.7.9}$$

が成り立つことをいう [6)]。

5) つまり、直積写像が一意に存在するということである。

圏論的直和の具体的な構成を与える。

定義 7.7.5 (外部直和)**.** A を環、S を集合、$\{V_i\}_{i\in S}$ を A-加群の族とする。$\prod_{i\in S} V_i$ の部分 A-加群

$$\bigoplus_{i\in S} V_i := \left\{(v_i)_i \in \prod_{i\in S} V_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in S \text{ を除いて } v_i = 0\right\} \tag{7.7.10}$$

を加群の**外部直和 (external direct sum)** という。外部直和は標準射の族

$$\iota_k \colon V_k \to \bigoplus_{i\in S} V_i, \quad v \mapsto (v_i)_i \quad \text{with} \quad v_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ v & i = k \end{cases} \tag{7.7.11}$$

とあわせて考える。

注意 7.7.6. S が有限集合ならば、定義から明らかに直積 $\prod_{i\in S} V_i$ と (外部) 直和 $\bigoplus_{i\in S} V_i$ は一致する。

定義 7.7.7 (内部直和)**.** [TODO]

圏論的直和の特徴付けを与える。この特徴付けは 12.4 節 で加法的関手を調べる際に役立つ。

命題 7.7.8 (直和の特徴付け)**.** A を環、Λ を集合、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A-加群の族、$\{j_\lambda \colon M_\lambda \to M\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A-加群準同型の族とする。このとき、次は同値である:

(1) $(M, \{j_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ は圏論的直和である。

(2) ある A-加群準同型の族 $\{q_\lambda \colon M \to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して次をみたす:

  (a) 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $q_\mu \circ j_\lambda = \delta_{\lambda\mu}\mathrm{id}_{M_\lambda}$ である。

  (b) 各 $x \in M$ に対し、有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて $q_\lambda(x) = 0$ である。

  (c) 各 $x \in M$ に対し $\sum_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda \circ q_\lambda(x) = x$ である。

証明 (1) ⇒(2) [TODO]

(2) ⇒(1)

$$f(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \circ q_\lambda(x) \tag{7.7.12}$$

[TODO] □

有限直和の場合は明らかに (2b) の条件は不要である。

系 7.7.9 (有限直和の特徴付け)**.** A を環、$M_1, \dots, M_n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$ を A-加群、$j_k \colon M_k \to M$ $(k = 1, \dots, n)$ を A-加群準同型とする。このとき、次は同値である:

(1) $(M, (j_1, \dots, j_n))$ は圏論的直和である。

6) つまり、直和写像が一意に存在するということである。

(2) ある A-加群準同型 $q_k\colon M \to M_k$ $(k = 1, \dots, n)$ が存在して次をみたす:

(a) 各 $1 \le k, l \le n$ に対し $q_l \circ j_k = \delta_{kl}\mathrm{id}_{M_k}$ である。

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} j_k \circ q_k = \mathrm{id}_M$ である。

□

2 つの直和の場合はさらに簡単になり、$q_l \circ j_k = 0$ $(l \neq k)$ の条件を除くことができる。

系 7.7.10. A を環、M_1, M_2 を A-加群、$j_k\colon M_k \to M$ $(k = 1, 2)$ を A-加群準同型とする。このとき、次は同値である:

(1) $(M, (j_1, j_2))$ は圏論的直和である。

(2) ある A-加群準同型 $q_k\colon M \to M_k$ $(k = 1, 2)$ が存在して次をみたす:

(a) $q_1 \circ j_1 = \mathrm{id}_{M_1}$, $q_2 \circ j_2 = \mathrm{id}_{M_2}$ である。

(b) $j_1 \circ q_1 + j_2 \circ q_2 = \mathrm{id}_M$ である。

注意 7.7.11. 3 個以上の直和の場合は $q_l \circ j_k = 0$ $(l \neq k)$ の条件を除くことはできない。実際、$M = M_1 = M_2 = M_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ として $j_k\colon M_k \to M$, $x \mapsto x$ の場合を考えると、$q_k\colon M \to M_k$, $x \mapsto x$ は $q_k \circ j_k = \mathrm{id}_{M_k}$, $j_1 \circ q_1 + j_2 \circ q_2 + j_3 \circ q_3 = \mathrm{id}_M$ をみたすが、明らかに $M \ncong M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ である。

証明 条件 (2) から $q_1 \circ j_2 = 0$, $q_2 \circ j_1 = 0$ が従うことをいえばよい。

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1 \circ (j_1 \circ q_1 + j_2 \circ q_2) \quad (\text{条件 (2b)}) && (7.7.13)\\ &= q_1 \circ j_1 \circ q_1 + q_1 \circ j_2 \circ q_2 && (7.7.14)\\ &= q_1 + q_1 \circ j_2 \circ q_2 \quad (\text{条件 (2a)}) && (7.7.15) \end{aligned}$$

より $q_1 \circ j_2 \circ q_2 = 0 = 0 \circ q_2$ であるが、いま $q_2 \circ j_2$ が恒等写像ゆえに q_2 は全射だから両辺の q_2 を打ち消して $q_1 \circ j_2 = 0$ を得る。同様に $q_2 \circ j_1 = 0$ も得られる。 □

7.8 完全系列

直和の概念は系列の分裂という概念につながる。

定義 7.8.1 (完全系列). A を環とする。A-**Mod** の系列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \tag{7.8.1}$$

が $\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-2)$ をみたすとき、この系列は**完全 (exact)** であるという。

また、

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0 \tag{7.8.2}$$

の形の完全系列を**短完全系列 (short exact sequence)** という。

例 7.8.2 (短完全系列の例). M を加群、$N \subset M$ を部分加群とする。$\pi\colon M \to M/N$ を自然な準同型とすると、列

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0 \tag{7.8.3}$$

は短完全系列である。

定義 7.8.3 (分裂). A を環とする。A-加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{7.8.4}$$

が**分裂 (split)** するとは、次の同値な条件のどれかひとつ (よって全て) が成り立つことをいう:

(1) $p \circ g = \mathrm{id}_N$ なる A-加群準同型 $g\colon N \to M$ が存在する。g を **right splitting** という。
(2) $f \circ i = \mathrm{id}_L$ なる A-加群準同型 $f\colon M \to L$ が存在する。f を **left splitting** という。
(3) M の A-部分加群 M' が存在して $M = \operatorname{Im} i \oplus M'$ が成り立つ。

注意 7.8.4. left splitting の定義域は $\operatorname{Im} i$ でなく M 全体であることに注意。同様に right splitting の定義域は $\operatorname{Im} p$ でなく N 全体であることに注意。

証明 [TODO] □

例 7.8.5 (分裂しない短完全系列の例). $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を自然な準同型とすると、列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{7.8.5}$$

は短完全系列である。この短完全系列は分裂しない。

命題 7.8.6 (分裂すれば直和で書ける). A を環とする。A-加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{7.8.6}$$

が分裂するならば外部直和との同型 $M \cong L \oplus N$ が成り立つ。より詳しく、この短完全系列の right splitting j に対し内部直和 $M = \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} j$ が成り立つ。

証明 j を right splitting として $M = \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} j$ を示す。$m \in M$ とすると $m - jp(m) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$ だから $m = m - jp(m) + jp(m) \in \operatorname{Im} i + \operatorname{Im} j$ である。つぎに $\operatorname{Im} i \cap \operatorname{Im} j = 0$ を示す。$x \in \operatorname{Im} i \cap \operatorname{Im} j$ が 0 であることを示せばよいが、これは次の図式の diagram chasing により明らか:

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{7.8.7}$$

よって $M = \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} j \cong L \oplus N$ がいえた。ただし、i, j が単射ゆえに $L \cong \operatorname{Im} i,\ N \cong \operatorname{Im} j$ であることを用いた。 □

例 7.8.7 (直和で書けても分裂するとは限らない)**.** 上の命題の逆は一般には成り立たない。[TODO]

7.9 自由加群

加群に対しても、ベクトル空間の場合と同様に基底の概念が定義できる。

定義 7.9.1 (線型独立)**.** A を環、M を A-加群とする。$B \subset M$ が A 上**線型独立 (linearly independent)** であるとは、B の任意の元 $v_1, \ldots, v_k \in B$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ と A の任意の元 $a_1, \ldots, a_k \in A$ に対し「$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 \implies a_1 = \cdots = a_k = 0$」が成り立つことをいう。

定義 7.9.2 (自由加群)**.** A を環、M を A-加群とする。

- 部分集合 $B \subset M$ が線型独立かつ $\langle B \rangle = M$ をみたすとき、B を M の**基底 (basis)** という。
- M が $M = \{0\}$ であるかまたは基底を持つとき、M は**自由 (free)** であるという。

例 7.9.3 (自由加群の例)**.**

- $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は基底をもたない (よって自由加群でない)。実際、任意の有限部分集合 $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に対し $ma_1 + \cdots + ma_k = 0$ である。

自由加群は係数環の直和で書けるという特徴付けを持つ。

命題 7.9.4 (自由加群の特徴付け)**.** A を環、V を A-加群とする。V が自由加群であることと、ある集合 S が存在して A-加群の同型 $V \cong A^{\oplus S}$ が成り立つこととは同値である。

証明 [TODO] □

命題 7.9.5 (自由加群の有限直和)**.** A を環とする。自由 A-加群の有限個の直和も自由 A-加群である。

証明 [TODO] □

定理 7.9.6 (自由加群の普遍性)**.** A を環とし、V を自由 A-加群、$B \subset V$ を基底とする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, W\colon\ A\text{-加群} \tag{7.9.1}$$

$$\forall\, \varphi\colon B \to W\colon\ \text{写像} \tag{7.9.2}$$

$$\exists!\, \widetilde{\varphi}\colon V \to W\colon\ A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{7.9.3}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{7.9.4}$$

証明

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{b\in B}^{\text{finite}} a_b b\right) := \sum_{b\in B}^{\text{finite}} a_b \varphi(b) \tag{7.9.5}$$

と定めればよい。 □

定理 7.9.7 (体上の加群の性質)**.** K を体とする。

(1) 任意の K-加群は自由加群である。
(2) 集合 S_1, S_2 に関し

$$_K K^{\oplus S_1} \cong {}_K K^{\oplus S_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sharp S_1 = \sharp S_2 \tag{7.9.6}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 7.9.8 (可換環上の加群の性質)**.** R を可換環とする。集合 S_1, S_2 に関し

$$_R R^{\oplus S_1} \cong {}_R R^{\oplus S_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sharp S_1 = \sharp S_2 \tag{7.9.7}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

7.10 可換環上の自由加群

ベクトル空間における次元と類似の概念として、可換環上の自由加群のランクが定義できる。とくに体 K 上の自由加群とは K-ベクトル空間に他ならない。さらにこのとき M の K 上のランクとは K-ベクトル空間としての次元 $\dim_K M$ に他ならない。

定義 7.10.1 (自由加群のランク)**.** [TODO] ねじれがある場合は？R を可換環、M を R 上の自由加群とする。このとき、M の基底はすべて同じ濃度を持ち、M の任意の生成系の濃度は基底の濃度以上である（このあと示す)。そこで、M の K 上の**ランク (rank)** $\mathrm{rk}(M)$ を

- $M \neq \{0\}$ なら基底の濃度
- $M = \{0\}$ なら 0

と定める。ランクが有限の自由加群は**有限ランク自由加群 (free module of finite rank)** あるいは形容詞で **free of finite rank** であるという。

証明 [TODO] □

系 7.10.2. R を可換環、A を R-代数とする。A が R-加群として有限ランクの自由加群であるとき、集合 S_1, S_2 に関し

$$ {}_R R^{\oplus S_1} \cong {}_R R^{\oplus S_2} \quad \Longrightarrow \quad \sharp S_1 = \sharp S_2 \tag{7.10.1}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

有限ランク自由加群と有限生成加群の間には次の関係がある。

定理 7.10.3 (有限ランク自由加群と有限生成加群の関係)**.** R を可換環とする。このとき、R-加群 M に関し次は同値である:

(1) ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して全射 R-加群準同型 $R^n \to M$ が存在する。すなわち、M はある有限ランク自由加群の商加群である。

(2) M は R-加群として有限生成である。

証明 (1) ⇒(2) 題意の全射を f とおくと、M は明らかに R 上

$$\{f(1,0,\dots,0), f(0,1,\dots,0),\dots, f(0,0,\dots,1)\} \tag{7.10.2}$$

により生成される。

(2) ⇒(1) M を生成する有限部分集合 $S = \{s_1,\dots,s_n\} \subset M$ をひとつ選べば、写像 $(r_1,\dots,r_n) \mapsto r_1s_1 + \cdots + r_ns_n$ が求める全射となる。 □

7.11 帰納極限と射影極限

定義 7.11.1 (帰納極限)**.**

- 半順序集合 $(I,\leq)$ が**有向的 (directed)** であるとは、任意の $x, y \in I$ に対してある $z \in I$ が存在して $x \leq z$ かつ $y \leq z$ が成り立つことをいう。
- A を環とし、$(I,\leq)$ を有向的半順序集合とする。A-加群の**帰納系 (inductive system)** あるいは**有向系 (direct system)** とは、組 $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ であって次をみたすものをいう:
  (1) M_i $(i \in I)$ は A-加群である。
  (2) $i \leq j$ なる $i, j \in I$ に対して $\varphi_{ij}\colon M_i \to M_j$ は A-加群の準同型である。
  (3) $i \leq j \leq k$ に対し $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{ik}"'] & M_j \arrow[r, "\varphi_{jk}"] & M_k \end{tikzcd} \tag{7.11.1}$$

  (4) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ $(i \in I)$ である。
- A を環、$(I,\leq)$ を有向的半順序集合とし、$(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ を A-加群の有向系とする。組 $(L, \{\phi_i\}_{i\in I})$ が $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ の**帰納極限 (inductive limit)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) L は A-加群である。

(2) $\phi_i\colon M_i \to L\ (i \in I)$ は A-加群準同型である。

(3) $i \le j$ なる $\forall i, j \in I$ に対して $\phi_j \circ \varphi_{ij} = \phi_i$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\phi_j"] \\ & L & \end{tikzcd} \tag{7.11.2}$$

(4) (帰納極限の普遍性) 次の条件をみたす:

$$\forall\, N\colon\ A\text{-加群} \tag{7.11.3}$$

$$\forall\, \{\xi_i\colon M_i \to N\}_{i\in I}\colon\ A\text{-加群準同型の族} \tag{7.11.4}$$

$$\quad \text{with}\quad i \le j \text{ なる } i, j \in I \text{ に対し } \xi_j \circ \varphi_{ij} = \xi_i \tag{7.11.5}$$

$$\exists!\, \eta\colon L \to N\colon\ A\text{-加群準同型}\quad \text{s.t.} \tag{7.11.6}$$

$$\forall\, i \in I \quad \text{に対し} \tag{7.11.7}$$

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\xi_i"] & \\ L \arrow[rr, dashed, "\eta"'] & & N \end{tikzcd} \tag{7.11.8}$$

- 上の定義で「A-加群」の部分を「R-代数」に置き換えることで、R-代数の有向系およびその帰納極限も同様に定義される。

注意 7.11.2. 帰納極限の具体的な構成は問題 12.2 を参照せよ。

定義 7.11.3 (射影極限)**.**

- A を環とし、$(I, \le)$ を有向的半順序集合とする。A-加群の**射影系 (projective system)** あるいは**逆向系 (inverse system)** とは、組 $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\ge j})$ であって次をみたすものをいう:

(1) $M_i\ (i \in I)$ は A-加群である。

(2) $i \ge j$ なる $i, j \in I$ に対して $\varphi_{ij}\colon M_i \to M_j$ は A-加群の準同型である。

(3) $i \ge j \ge k$ に対し $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_{ik}"'] & M_j \arrow[r, "\varphi_{jk}"] & M_k \end{tikzcd} \tag{7.11.9}$$

(4) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}\ (i \in I)$ である。

- A を環、$(I, \le)$ を有向的半順序集合とし、$(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\ge j})$ を A-加群の射影系とする。組 $(L, \{\phi_i\}_{i\in I})$ が $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\ge j})$ の**射影極限 (projective limit)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) L は A-加群である。

(2) $\phi_i\colon L \to M_i\ (i \in I)$ は A-加群準同型である。

(3) $i \geq j$ なる $\forall i, j \in I$ に対して $\phi_j = \varphi_{ij} \circ \phi_i$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[ld, "\phi_i"'] \arrow[rd, "\phi_j"] & \\ M_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & M_j \end{tikzcd} \tag{7.11.10}$$

(4) (射影極限の普遍性) 次の条件をみたす:

$$\forall\, N\colon\ A\text{-加群} \tag{7.11.11}$$

$$\forall\, \{\xi_i\colon N \to M_i\}_{i\in I}\colon\ A\text{-加群準同型の族} \tag{7.11.12}$$

$$\text{with}\quad i \geq j \text{ なる } i, j \in I \text{ に対し } \xi_j = \varphi_{ij} \circ \xi_i \tag{7.11.13}$$

$$\exists!\, \eta\colon N \to L\colon\ A\text{-加群準同型}\quad \text{s.t.} \tag{7.11.14}$$

$$\forall\, i \in I \quad \text{に対し} \tag{7.11.15}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, dashed, "\eta"] \arrow[rd, "\xi_i"'] & & L \arrow[ld, "\phi_i"] \\ & M_i & \end{tikzcd} \tag{7.11.16}$$

- 上の定義で「A-加群」の部分を「R-代数」に置き換えることで、R-代数の射影系およびその射影極限も同様に定義される。

7.12 演習問題

A. Problem set 4

♤ **演習問題 7.1** (代数学 II 4.51). A を環としたとき $\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{OP}}$ を示せ。

♤ **演習問題 7.2** (代数学 II 4.56). ${}_AA \cong {}_AA \oplus {}_AA$ なる環 $A \neq 0$ の例を挙げよ。

♤ **演習問題 7.3** (代数学 II 4.57). K を体、A を K-代数、V を既約 A-加群であって $\dim_K(V) < \infty$ なるものとする。このとき、$\dim_K(V) < n$ ならば $V^{\oplus n}$ は巡回 A-加群とならないことを示せ。

♤ **演習問題 7.4** (代数学 II 4.58). A を環、V, W を互いに同型でない既約 A-加群とする。このとき $V \oplus W$ は巡回 A-加群であることを示せ。

注意 7.12.1. 「互いに同型でない」という条件は必須である。実際、$V = W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は既約 $\mathbb{Z}$-加群であるが、$V \oplus W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は巡回 $\mathbb{Z}$-加群でない。

♤ **演習問題 7.5** (代数学 II 4.59). D を division algebra, D^n を n 次元縦ベクトルの空間としこれを D^n の左からの積で D-加群とみなす。このとき $\mathrm{End}_D(D^n) \cong M_n(D)^{\mathrm{OP}}$ を示せ。

B. Problem set 5

♤ **演習問題 7.6** (代数学 II 5.63). A を環、M を A-加群とし、N を M の部分 A-加群、L を N の部分 A-加群とする。このとき N/L は M/L の部分 A-加群とみなせて、

$$M/N \cong (M/L)/(N/L) \tag{7.12.1}$$

が成り立つことを示せ。

第 8 章　既約加群

既約加群について述べる。

8.1　既約加群

加群の既約の概念を定義する。

定義 8.1.1 (既約加群)**.** A を環とする。A-加群 M が**単純 (simple)** あるいは**既約 (irreducible)** であるとは、$M \neq 0$ であって 0 と M 以外の部分加群を持たないことをいう [7)]。

既約加群は次のように特徴付けられる。

定理 8.1.2 (既約加群の特徴付け)**.** A を環、U を A-加群とする。このとき次は同値である:

(1)　U は既約である。

(2)　任意の $v \in U$, $v \neq 0$ は U を A 上生成する。

証明　(1) ⇒(2)　$U = 0$ のときは明らかだから、$U \neq 0$ のときを考える。$v \in U - \{0\}$ とする。$\langle v \rangle \neq 0$ だから、U が既約であることより $\langle v \rangle = U$ である。よって U は A 上 v で生成される巡回加群である。

(2) ⇒(1)　[TODO] □

既約加群は次の意味で完全列を分裂させる。

定理 8.1.3. A を環、U を既約 A-加群とする。このとき A-**Mod** の任意の完全列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0 \tag{8.1.1}$$

は分裂する。

証明　U が既約であることより $\operatorname{Ker} g$ は 0 または U である。$\operatorname{Ker} g = 0$ の場合、g は単射だから完全列より全単射となる。したがって g は right splitting となり所与の完全列は分裂する。$\operatorname{Ker} g = U$ の場合、$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g = U$ より f は全射だから完全列より全単射となる。したがって f は left splitting となり所与の完全列は分裂する。 □

系 8.1.4. 既約加群の準同型像は 0 または既約である。

証明　A を環、Y を A-加群、U を既約 A-加群、$f : U \to Y$ を A-加群準同型とする。$\operatorname{Im} f \neq 0$ と仮定して $\operatorname{Im} f$

7)　表現論では「既約」、環論では「単純」ということが多いらしい。本稿では主に前者を用いる。

が既約であることを示せばよい。ここで、定理より完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \hookrightarrow U \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \tag{8.1.2}$$

は分裂するから $U \cong \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ である。いま $\operatorname{Im} f \neq 0$ だから、U が既約であることより $\operatorname{Ker} f = 0$ でなければならない。したがって $U \cong \operatorname{Im} f$ となり $\operatorname{Im} f$ は既約となる。 □

8.2 ねじれと annihilator

Annihilator の概念を定義する。Annihilator は群論でいう元の位数 (order) や群の冪数 (exponent) の加群論における一般化である。

定義 8.2.1 (ねじれ)**.** A を環、M を A-加群とする。

- $v \in M - \{0\}$ がある $r \in A - \{0\}$ に対し $rv = 0$ をみたすとき、v は M の**ねじれ元 (tortion element)** であるという。
- M がねじれ元を持たないとき、M は**ねじれなし (tortion-free)** であるという。
- M のすべての元がねじれ元であるとき、M は**ねじれ加群 (tortion module)** であるという。
- M のすべてのねじれ元と 0 からなる集合を M_{tor} と書く。

一般に M_{tor} は M の部分加群であるとは限らないが、M が整域上の加群ならば M_{tor} は部分加群となる。

命題 8.2.2 (ねじれ部分加群)**.** R を可換環、M を R-加群とする。M_{tor} は M の部分加群であり、M/M_{tor} はねじれなしである。

証明 [TODO] □

定義 8.2.3 (Annihilator)**.** $A \neq 0$ を環、V を A-加群とする。

- 各 $x \in V$ に対し
$$\operatorname{ann}_A(x) := \{a \in A \mid ax = 0\} \tag{8.2.1}$$
を x の A における **annihilator** という。これは A の左イデアルである。
-
$$\begin{aligned} \operatorname{Ann}_A(V) &:= \{a \in A \mid \forall x \in V \text{ に対し } ax = 0\} && (8.2.2) \\ &= \bigcap_{x \in V} \operatorname{ann}_A(x) && (8.2.3) \end{aligned}$$
を V の **annihilator** という。これは A の両側イデアルである。
- $\operatorname{Ann}_A(V) = 0$ のとき、V は**忠実 (faithful)** であるという。

既約加群の annihilator と係数環の極大左イデアルは次のように対応する。

定理 8.2.4 (既約加群の annihilator と極大左イデアルの対応). $A \neq 0$ を環とする。

(1) $I \subset A$ を極大左イデアルとすると、${}_A A/I$ は既約 A-加群である。

(2) V を既約 A-加群、$v \in V - \{0\}$ とする。このとき $\mathrm{ann}_A(v)$ は A の極大左イデアルである。

(3) R を可換環とする。次の全単射が成り立つ:

$$\{\text{既約 } R\text{-加群の同型類}\} \leftrightarrow \mathrm{Max}(R) \tag{8.2.4}$$

$$R/\mathfrak{m} \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{m} \tag{8.2.5}$$

$$V \mapsto \mathrm{Ann}_R(V) \tag{8.2.6}$$

注意 8.2.5. この定理によれば、環 A の左イデアル I に関し、商加群 ${}_A A/I$ が既約であることと I が極大左イデアルであることは同値である。

証明 (1) 部分加群の対応原理 (定理 7.5.6) より明らか。

(2) $\mathrm{ann}_A(v)$ の定義より、A-加群準同型 $\varphi\colon {}_A A \to V,\ a \mapsto av$ は $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{ann}_A(v)$ をみたす。したがって

$$\begin{tikzcd} {}_A A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & V \\ A/\mathrm{ann}_A(v) \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{8.2.7}$$

を可換にする A-加群の同型 $\overline{\varphi}$ が誘導される。$A/\mathrm{ann}_A(v) \cong V$ は既約ゆえに非自明な部分加群を持たないから、部分加群の対応原理 (定理 7.5.6) より $\mathrm{ann}_A(v)$ は A の極大左イデアルである。

(3) [TODO] □

8.3 Schur の補題

Schur の補題とその系について述べる。

定義 8.3.1 (代数的閉体). K を体とする。K が**代数的閉体 (algebraically closed field; ACF)** であるとは、任意の $f \in K[X],\ n = \deg f \geq 1$ が

$$f(X) = a(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n) \quad (a \neq 0,\ \alpha_i \in K) \tag{8.3.1}$$

と表せることをいう。

命題 4.1.4 より、体上の代数には体が埋め込まれているとみなせるのであった。このとき次が成り立つ。

補題 8.3.2 (Dixmier の補題). K を代数的閉体、D を $\dim_K D < \sharp K$ なる可除 K-代数とする。このとき $D = K$ が成り立つ [8)]。

証明 $K \subset D$ であることはよい。$K \subsetneq D$ であったと仮定して矛盾を導く。仮定よりある $\gamma \in D - K$ が存在する。このとき、評価準同型 $\mathrm{ev}_\gamma\colon K[X] \to D$ は単射である。

8) 厳密には、D が環準同型 φ により K-代数になっているとして K-代数の同型 $(D, \varphi) \cong (K, \mathrm{id}_K)$ が成り立つということである。

∵ ev_γ が単射でないと仮定し矛盾を導く。仮定よりある $0 \neq f \in \operatorname{Ker} \mathrm{ev}_\gamma$ が存在する。明らかに $f \notin K$ だから $n := \deg f \geq 1$ である。そこで K が代数的閉体であることより

$$f(X) = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \quad (a \neq 0,\ \alpha_i \in K) \tag{8.3.2}$$

と表せる。よって $0 = f(\gamma) = a(\gamma - \alpha_1) \cdots (\gamma - \alpha_n)$ が成り立つ。$\gamma \notin K$ ゆえに各 $\gamma - \alpha_i$ は 0 でなく、また a も 0 でないから、とくに a は D の零因子である。これは D が可除ゆえに零因子を持たないことに反する。背理法より ev_γ は単射である。 //

各 $\alpha \in K$ に対し、$\gamma \in D - K$ ゆえに $\gamma - \alpha \neq 0$ だから、D が可除であることより逆元 $(\gamma - \alpha)^{-1} \in D$ が存在する。そこで $B := \{(\gamma - \alpha)^{-1} \in D \mid \alpha \in K\}$ とおくと、B は K 上 1 次独立である。

∵ 背理法のために、B が K 上 1 次独立でないとする。すなわち、相異なるある $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ とある $a_1, \ldots, a_n \in K^\times$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\gamma - \alpha_i)^{-1} = 0 \tag{8.3.3}$$

が成り立つと仮定する。いま D は可除ゆえに零因子を持たないから $n \geq 2$ である。よって

$$a_1(\gamma - \alpha_1)^{-1} + \sum_{i=2}^{n} a_i (\gamma - \alpha_i)^{-1} = 0 \tag{8.3.4}$$

である。両辺に $(\gamma - \alpha_1) \cdots (\gamma - \alpha_n)$ をかけて

$$a_1(\gamma - \alpha_2) \cdots (\gamma - \alpha_n) + \sum_{i=2}^{n} a_i \prod_{k \neq i} (\gamma - \alpha_k) = 0 \tag{8.3.5}$$

を得る。このとき $\mathrm{ev}_\gamma \colon K[X] \to D$ が単射であることより、$K[X]$ において

$$a_1(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n) + \sum_{i=2}^{n} a_i \prod_{k \neq i} (X - \alpha_k) = 0_{K[X]} \tag{8.3.6}$$

が成り立つ。そこで X に α_1 を代入して $a_1(\alpha_1 - \alpha_2) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n) = 0_K$ を得る。各 α_i は相異なるから各 $\alpha_1 - \alpha_i$ は 0_K でなく、また a_1 も 0_K でないから、とくに a_1 は K の零因子である。これは K が体ゆえに零因子を持たないことに反する。背理法より B は K 上 1 次独立である。 //

よって $\sharp K \leq \sharp B \leq \sharp \dim_K D < \sharp K$ となり矛盾が従う。背理法より $K = D$ である。 □

次に述べる Schur の補題は加群準同型全体のなす加群の構造に関する主張であり、既約加群の性質からほとんど直ちに導かれるものであるが、いくつかの有用な系が従う。

定理 8.3.3 (Schur の補題). A を環、U_1, U_2 を既約 A-加群とする。このとき、$\operatorname{Hom}_A(U_1, U_2)$ の 0 でない元はすべて A-加群の同型 $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ を与える。とくに $\operatorname{Hom}_A(U_1, U_2) \neq 0 \iff U_1 \cong U_2$ である。

証明 $0 \neq f \in \operatorname{Hom}_A(U_1, U_2)$ とする。U_1, U_2 は既約 A-加群だから $\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f$ は自明な部分加群であるが、いま $f \neq 0$ より $\operatorname{Ker} f \neq U_1,\ \operatorname{Im} f \neq 0$ だから $\operatorname{Ker} f = 0,\ \operatorname{Im} f = U_2$ である。よって f は全単射、したがって A-加群の同型である。 □

系 8.3.4. 既約加群 U の準同型像は 0 でなければ U と同型である。

証明 Schur の補題と系 8.1.4 より従う。 □

系 8.3.5. A を環、U を既約 A-加群とする。このとき、次が成り立つ:

(1) $D := \mathrm{End}_A(U)$ は可除環である。

(2) 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し環の同型

$$\mathrm{End}_A(U^{\oplus n}) \cong M_n(D) \tag{8.3.7}$$

が成り立つ [TODO] A が可換環なら A-代数としての同型？。

証明 (1) 定理 8.3.3 より明らか。

(2)

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_A(U^{\oplus n}) &= \mathrm{Hom}_A(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n, U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) && (8.3.8) \\ &= \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_A(U_j, U_i) && (8.3.9) \\ &= \bigoplus_{i,j} D_{ij} && (8.3.10) \end{aligned}$$

[TODO] □

例 8.3.6. 上の系について、A が体 K の場合を考えてみよう。K は非自明なイデアルを持たないから、K 自身を K-加群とみなすと既約である。ここで $f \in \mathrm{End}_K(K)$ を $f(1) \in K$ に写す写像によって K-代数としての同型 $\mathrm{End}_K(K) \cong K$ が成り立つことに注意すれば、上の系は $\mathrm{End}_K(K^n) \cong M_n(K)$ が成り立つことを主張している。このことは、有限次元ベクトル空間 K^n の自己準同型が K 上の行列と対応するというよく知られた線型代数学の結果に他ならない。

系 8.3.7 (Schur-Dixmier の補題). K を代数的閉体、A を $\dim_K A < \sharp K$ なる K-代数とする。このとき、任意の既約 A-加群 U に対し

$$\mathrm{End}_A(U) = K \tag{8.3.11}$$

が成り立つ。

注意 8.3.8. $K = \mathbb{C}$, $\dim_K A = \aleph_0$ の場合などがよくある。

証明 $D := \mathrm{End}_A(U)$ とおく。A は K-代数だから D も K-代数であり、系 8.3.5 より D は可除 K-代数となる。よって $\dim_K D < \sharp K$ を示せば Dixmier の補題 (補題 8.3.2) より $\mathrm{End}_A(U) = D = K$ が従う。U は既約 A-加群だから、定理 8.2.4 より A のある極大イデアルによる商と A-加群として同型である。したがって $\dim_K U \leq \dim_K A < \sharp K$ である。一方、$x \in U - \{0\}$ をひとつ選んで $F\colon D \to U$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ とおけば F は K-線型写像である。さらに F は単射である。実際、$\varphi \in D$, $F(\varphi) = \varphi(x) = 0$ とすると、もし $\varphi \neq 0$ なら Schur の補

題 (定理 8.3.3) より φ は同型だから $x = 0$ となり $x \neq 0$ に矛盾する。よって $\varphi = 0$、したがって F は単射である。よって $\dim_K D \leq \dim_K U$ だから $\dim_K D < \sharp K$ が成り立つ。これが示したいことであった。 □

8.4 直既約加群

直既約加群の概念を定義する。

定義 8.4.1 (直既約). A を環とする。A-加群 M が**直既約 (indecomposable)** であるとは、$M \neq 0$ であって 0 と M 以外の直和成分を持たないことをいう。

注意 8.4.2. 直既約加群の概念はその名の通り既約加群の定義とよく似ている。既約加群は非自明な部分加群を持たないからもちろん非自明な直和成分を持たず、したがって直既約である。逆に直既約加群は非自明な部分加群を持ちうるから、既約加群であるとは限らない。

定理 8.4.3. R を PID、$x \in R^{\times}$ を素元とする。このとき任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $R/(x^n)$ は局所環であり、また R-加群としては直既約となる。

証明 $A := R/(x^n)$ とおく。x の A における像を $\bar{x}$ と書く。このとき $(\bar{x})$ は A の極大イデアルである。$\mathfrak{m}$ を A の任意の極大イデアルとすると $0 = \bar{x}^n \in \mathfrak{m}$ ゆえに $\bar{x} \in \mathfrak{m}$ である。したがって $(\bar{x}) = \mathfrak{m}$ だから A は局所環である。

A が R-加群として直既約であることを示す。$A = M_1 \oplus M_2$ と 0 でない R-部分加群の直和に分解できたとすると、ある $e_i \in M_i$ $(i = 1, 2)$ が存在して $1 = e_1 + e_2$ が成り立つ。このとき $e_1 e_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$ だから e_1, e_2 は単元ではなく、したがって $e_1, e_2 \in (\bar{x})$ となる。よって $1 = e_1 + e_2 \in (\bar{x})$ となり $(\bar{x})$ が A の極大イデアルであることに矛盾する。したがって A は直既約である。 □

第 9 章　有限生成性

この章では加群と環の有限生成性について述べる。まず Jacobson 根基の概念を導入し、それを用いて有限生成加群に関する最も重要な定理のひとつである Nakayama の補題を示す。次に加群の有限生成性を強化した概念であるネーター加群とアルティン加群を導入し、さらに強い概念として組成列を持つ加群を導入する。最後に加群から環の話題へ移ってネーター環を定義する。

9.1　Jacobson 根基と Nakayama の補題

この節では、有限生成加群に関する最も重要な定理のひとつである Nakayama の補題について述べる。

0 でない有限生成加群は既約な商加群をもつ。

命題 9.1.1 (既約商加群の存在)**.** A を環、V を有限生成 A-加群とする。このとき、任意の A-部分加群 $V' \subsetneq V$ に対し、$V' \subset W \subsetneq V$ なるある A-部分加群 W であって V/W が既約となるものが存在する。

証明　[TODO] Zorn の補題を使う　□

Jacobson 根基を定義する。環 A の Jacobson 根基の元は、あらゆる既約 A-加群に 0 として作用するものである。

定義 9.1.2. A を環とする。

(1)　A の両側イデアル I が**左原始イデアル (left primitive ideal)** であるとは、ある既約 A-加群 U が存在して $I = \mathrm{Ann}_A(U)$ が成り立つことをいう。

(2)　A の左原始イデアルの全体を

$$\mathrm{Prim}(A) := \{A \text{ の左原始イデアル}\} \tag{9.1.1}$$

と書く。

(3)　A の左原始イデアル全部の共通部分を

$$J(A) := \bigcap_{I \in \mathrm{Prim}(A)} I \tag{9.1.2}$$

と書き、これを A の **Jacobson 根基 (Jacobson radical)** という。

Jacobson 根基は次のように特徴付けることができる。

定理 9.1.3 (Jacobson 根基の特徴付け)**.** A を環とする。$x \in A$ に関し次は同値である:

(1)　$x \in J(A)$

(2)　任意の既約 A-加群 U に対し $xU = 0$ となる。

(3)　任意の極大左イデアル $I \subset A$ に対し $x(A/I) = 0$ となる。

(4) $x \in \displaystyle\bigcap_{I:\,A\text{ の極大左イデアル}} I$

(5) 任意の $a \in A$ に対し $1 - ax$ が左逆元を持つ。

[TODO]

証明 (1) ⇔(2) 定義より明らか。

(1) ⇒(2) [TODO]

(4) ⇒(5) $x \in \displaystyle\bigcap_{I:\,A\text{ の極大左イデアル}} I$ とする。$a \in A$ とすると $1 = ax + (1 - ax)$ である。$1 - ax$ がある極大左イデアル I に属したとすると、x したがって ax も I に属するから $1 \in I$ となり I が極大左イデアルであることに矛盾する。よって $1 - ax$ はいかなる極大左イデアルにも属さず、したがって $A(1 - ax) = A$ である。よって $1 - ax$ は左逆元を持つ。 □

Jacobson 根基は右イデアルを用いて特徴付けることもできる。

命題 9.1.4 (Jacobson 根基の右イデアルによる特徴付け). [TODO]

証明 [TODO] □

補題 9.1.5. A を環、V を A-加群、$V' \subsetneq V$ を部分 A-加群とする。V/V' が既約 A-加群ならば

$$J(A)V \subset V' \tag{9.1.3}$$

が成り立つ。

証明 V/V' は既約 A-加群だから Jacobson 根基の定義より $J(A)(V/V') = 0$ であり、したがって $J(A)V \subset V'$ である。 □

Nakayama の補題を示す。

定理 9.1.6 (Nakayama の補題). A を環、V を有限生成 A-加群、$V' \subset V$ を部分 A-加群とする。このとき $V' + J(A)V = V$ ならば $V' = V$ である。

[TODO] 局所環の場合、有限次元ベクトル空間に帰着させるための橋渡しとなる？ cf. [Reid]

[TODO] Cayley-Hamilton から示すこともできる？ cf. 問題 10.9

証明 $V' \subsetneq V$ と仮定して矛盾を導く。V は有限生成 A-加群だから、$V' \subsetneq V$ の仮定と命題 9.1.1 より $V' \subset W \subsetneq V$ なるある A-部分加群 W が存在して V/W は既約となる。したがって上の補題より $J(A)V \subset W$ が成り立つ。よって $V = V' + J(A)V \subset W \subsetneq V$ となり矛盾が従う。 □

系 9.1.7. A を環、V を有限生成 A-加群とする。このとき $J(A)V = V$ ならば $V = 0$ である。 □

系 9.1.8. A を環、V を有限生成 A-加群、$v_1, \dots, v_n$ を $V/J(A)V$ の $A/J(A)$ 上の生成元、$p\colon V \to V/J(A)V$ を標準射影とする。このとき、$p(\widetilde{v}_i) = v_i$ なる任意の $\widetilde{v}_i$ に対し V は A 上 $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_n$ により生成される。

証明 [TODO] □

系 9.1.9. A を可換局所環 [TODO]

証明 [TODO] □

9.2 ネーター加群とアルティン加群

ネーター加群とアルティン加群を定義する。

定義 9.2.1 (昇鎖条件と降鎖条件)**.** A を環、V を A-加群とする。

- V の A-部分加群の増大列
$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \tag{9.2.1}$$
あるいは減少列
$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \tag{9.2.2}$$
が**停留的 (starionary)** であるとは、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して
$$V_N = V_{N+1} = \cdots \tag{9.2.3}$$
をみたすことをいう。
- V の任意の A-部分加群の増大列が停留的であるとき、V は**昇鎖条件 (ascending chain condition; ACC)** をみたすという。
- V の任意の A-部分加群の増大列が停留的であるとき、V は**降鎖条件 (descending chain condition; DCC)** をみたすという。

ネーター加群は、有限生成加群の有限生成性を強化したものとみなせる。

[TODO] 有限余生成はコンパクト性の FIP による特徴付けと似ている？

定義 9.2.2 (ネーター加群とアルティン加群)**.** A を環、V を A-加群とする。V が**ネーター加群 (noetherian module)** であるとは、V が次の互いに同値な条件のうち少なくとも 1 つ (よってすべて) をみたすことをいう (同値性はこのあと示す):

(N1) V は昇鎖条件をみたす。
(N2) V の任意の A-部分加群は有限生成である。
(N3) V の A-部分加群からなる任意の集合は空でない限り極大元を持つ。

V が**アルティン加群 (artinian module)** であるとは、V が次の互いに同値な条件のうち少なくとも 1 つ (よってすべて) をみたすことをいう (同値性はこのあと示す):

(A1) V は降鎖条件をみたす。

(A3) V の A-部分加群からなる任意の集合は空でない限り極小元を持つ。

同値性の証明. アルティン性の同値性の証明はネーター性の場合と同様だから、ネーター性の同値性のみ示す。

(1) ⇒(2)

$$0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \subsetneq W \tag{9.2.4}$$

[TODO]

(2) ⇒(1) [TODO] □

例 9.2.3 (ネーター環とアルティン環の例).

- A を環とする。既約 A-加群は、定義から明らかにネーターかつアルティンである。
- K を体、A を K-代数とする。A-加群 V が K 上有限次元ならば、V はネーターかつアルティンである。

例 9.2.4 (ネーター/アルティン加群と有限生成加群の関係).

- ネーター加群はアルティン加群であるとは限らない。実際、$_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ は明らかにネーター加群であるが、$2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ は停留的でないから $_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ はアルティン加群でない。
- アルティン加群はネーター加群であるとは限らない (cf. 問題 10.1)。
- アルティン加群は有限生成加群であるとは限らない。[TODO] 例？
- 有限生成加群はネーター加群であるとは限らない。実際、無限変数多項式環 $R := \mathbb{Q}[X_0, X_1, \dots]$ の左正則加群 $_RR$ は R 上 1 により生成される有限生成加群だが、R-部分加群 $\langle X_0, X_1, \dots \rangle$ は R 上有限生成でないから $_RR$ はネーター加群でない。

次の定理により、ネーター性/アルティン性は完全系列を介して "伝播" することがわかる。とくにネーター性/アルティン性は部分加群や商加群に遺伝する。

定理 9.2.5 (完全系列と有限性). A を環とする。A-**Mod** の完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \tag{9.2.5}$$

に対し次は同値である:

(1) Y はネーター (resp. アルティン) である。

(2) X, Z はネーター (resp. アルティン) である。

証明 [TODO] □

0 でないアルティン加群は既約な部分加群をもつ。

定理 9.2.6 (既約部分加群の存在). A を環とする。0 でないアルティン A-加群は既約部分加群をもつ。

証明 V を 0 でないアルティン A-加群とすると、V のアルティン性より V の 0 でない A-部分加群全体の集合は極小元 V_0 をもつ。このとき $V_0 \neq 0$ と極小性より V_0 は既約である。 □

9.3 組成列

組成列について述べる。まずフィルトレーションの概念を定義する。

定義 9.3.1 (フィルトレーション). A を環、V を A-加群とする。A-部分加群の減少列

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n = 0 \tag{9.3.1}$$

を V の**フィルトレーション (filtration)** といい、n をフィルトレーションの**長さ (length)** という。

定義 9.3.2. A を環とする。

- A-加群 V が**有限の長さを持つ (of finite length)** とは、V の長さ $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のフィルトレーション $\{V_i\}_{i=0}^{n}$ であって、各 V_i/V_{i+1} $(0 \leq i \leq n-1)$ が既約であるようなものが存在することをいう。このとき、$\{V_i\}_i$ を V の**組成列** といい、各 V_i/V_{i+1} を $\{V_i\}$ の**既約成分**という。
- n を $\{V_i\}$ の**長さ (length)** という。
- 各既約 A-加群 U に対して、$U \cong V_i/V_{i+1}$ となる $0 \leq i \leq n$ の個数を U の $\{V_i\}$ における**重複度** という。
- V のすべての組成列の長さの最小値を $l(V)$ で表す。ただし $l(0) = 0$ と定める。
- ふたつの組成列 $\{V_i\}$ と $\{V'_i\}$ が**同値**であるとは、長さが一致し、任意の既約 A-加群の重複度が一致することをいう。

有限の長さを持つ加群は非常に強い有限性を持っている。

定理 9.3.3. A を環とする。A-加群 V に関し次は同値である:

(1) V は有限の長さを持つ。
(2) V はネーターかつアルティンである。

証明 (1) ⇒(2) $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n = 0$ を V の長さ n の組成列とする。系列

$$0 \longrightarrow V_n \longrightarrow V_{n-1} \longrightarrow V_{n-1}/V_n \longrightarrow 0 \tag{9.3.2}$$

は完全列であり、$V_n = 0$ および既約 A-加群 V_{n-1}/V_n はネーターかつアルティンだから、定理 9.2.5 より V_{n-1} はネーターかつアルティンである。帰納的に $V_0 = V$ がネーターかつアルティンであることがわかる。

(2) ⇒(1)

[TODO] □

系 9.3.4. A を環とする。A-**Mod** の完全列

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0 \tag{9.3.3}$$

に対し次は同値である:

(1) V_2 は有限の長さを持つ。

(2) V_1, V_3 は有限の長さを持つ。

証明 定理 9.2.5 より明らか。 □

組成列は本質的に一意的である。これにより加群の次元のようなものを一義的に定義することができ、これはベクトル空間の次元のように振る舞う。

[TODO] どういうこと？

定理 9.3.5 (Jordan-Hölder の定理). A を環とする。A-加群 V が有限の長さを持つとき、V の任意の組成列は互いに同値となる。

証明 [TODO] □

9.4 ネーター環

ネーター環を定義する。

定義 9.4.1 (ネーター環). A を環とする。${}_A A$ がネーター加群のとき A を**左ネーター環 (left noetherian ring)** という。右も同様に定義する。A が可換環のときは単に**ネーター環 (noetherian ring)** という。

環のネーター性がその上の加群のネーター性をもたらすことを確認しよう。左ネーター環上の有限生成加群はネーター加群となる。

定理 9.4.2. A を左ネーター環とすると、任意の有限生成 A-加群はネーター加群である。

証明 まず $A^{\oplus n}$ がネーター加群であることを n に関する帰納法によって示す。$A = A^{\oplus n}/A^{\oplus(n-1)}$ ゆえに完全列

$$0 \longrightarrow A^{\oplus(n-1)} \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{9.4.1}$$

を得る。いま A は左ネーター環ゆえにネーター加群で、また帰納法の仮定より $A^{\oplus(n-1)}$ もネーター加群なので、定理 9.2.5 より $A^{\oplus n}$ もネーター加群である。

つぎに V を有限生成 A-加群とする。$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ と表せて、$v_1, \ldots, v_n$ により定まる全射 $p\colon A^{\oplus n} \to V$ により完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \longrightarrow A^{\oplus n} \xrightarrow{\ p\ } V \longrightarrow 0 \tag{9.4.2}$$

を得る。$A^{\oplus n}$ はネーター加群なので定理 9.2.5 より V もネーター加群である。 □

驚くべきことに、ネーター環がさらに可換であれば、その上の有限生成な加群のみならず有限生成な代数までもネーター性をもつ。

定理 9.4.3 (Hilbert の基底定理[9]). R を可換ネーター環とすると、R 上有限生成な可換 R-代数 A はネーター環である。

証明　$R[X_1, \ldots, X_n]$ がネーター環であることを示せばよく、さらに系 4.3.10 より $R[X]$ がネーター環であることを示せばよい。$I \subset R[X]$ を任意のイデアルとし、I が R-加群として有限生成であることを示す。[TODO]

□

注意 9.4.4. 可換ネーター環の部分環はネーター環であるとは限らない (cf. 問題 10.3)。

命題 9.4.5. PID はネーター環である。

証明　[TODO] 生成元の既約元分解を考える　□

9)　Hilbert の時代には生成系のことを基底 (basis) と呼んでいたためこのような名前になっている [Rei95]。

第 10 章　半単純加群と半単純環

[TODO] アルティン単純環は半単純加群/環とどういう関係？

この章では半単純加群について述べた後、アルティン単純環と半単純環の構造について詳しく調べる。この章の目標は、代数学における最も重要な定理のひとつである Wedderburn-Artin の構造定理を示すことである。

10.1　半単純加群

半単純加群の概念を定義する。

定義 10.1.1 (半単純加群)**.** A を環、V を A-加群とする。V が**半単純 (semisimple)** あるいは**完全可約 (completely reducible)** であるとは、V の既約部分 A-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ が存在して $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ が成り立つことをいう。

例 10.1.2 (半単純加群の例)**.**

- K を体とする。有限次元 K-ベクトル空間は K の有限個の直和に同型だから、K 上の半単純加群である。

加群が半単純であることを定義に沿って示すには直和分解の存在を示さなければならないが、実はもう少し簡単な条件を確認すればよい。すなわち、加群が既約部分加群による "被覆" を持つとき、その "部分被覆" によって直和分解ができる。

定理 10.1.3. A を環、V を A-加群、$\{V_i\}_{i\in I}$ を V の既約部分 A-加群の族とする。このとき、$V = \sum_{i\in I} V_i$ が成り立つならば、ある $J \subset I$ が存在して $V = \bigoplus_{i\in J} V_i$ が成り立つ。とくに V は半単純である。

証明　$\mathcal{S} := \left\{ J \subset I \,\middle|\, \sum_{j\in J} V_j = \bigoplus_{j\in J} V_j \right\}$ とおく。いま $V = \sum_{i\in I} V_i$ ゆえに $I \neq \varnothing$ だから I の 1 点からなる部分集合が存在して、それは明らかに $\mathcal{S}$ に属する。よって $\mathcal{S} \neq \varnothing$ である。$\mathcal{S}$ が帰納的半順序集合であることを示す。そこで $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ を任意の全順序部分集合とする。ここで $J_0 := \bigcup_{J\in\mathcal{I}} J$ とおくと J_0 は $\mathcal{S}$ における $\mathcal{I}$ の上界である。

$\because$ [TODO] //

したがって Zorn の補題より $\mathcal{S}$ は極大元 J_1 を持つ。そこで $V' := \bigoplus_{j\in J_1} V_j$ とおく。ここで $V' \subsetneq V$ であったとすると、$V = \sum_{i\in I} V_i$ の仮定とあわせて、ある $k \in I - J_1$ が存在して $V_k \not\subset V'$ が成り立つ。いま V_k は既約ゆえに $V_k \cap V' = 0$ だから $\sum_{j\in J_1\cup\{k\}} V_j = \left(\bigoplus_{j\in J_1} V_j\right) \oplus V_k$ が成り立つ。よって $J_1 \cup \{k\} \in \mathcal{S}$ となり、J_1 の極大性に矛盾する。したがって $V' = V$ である。 □

半単純加群の商加群は半単純である。

系 10.1.4 (半単純加群の商は半単純). A を環、V を半単純 A-加群、$W \subset V$ を A-部分加群とする。このとき V/W は半単純 A-加群である。詳しくいえば、$p\colon V \to V/W$ を標準射影とするとき、V の既約部分加群への直和分解 $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対し、ある $J \subset I$ が存在して $V/W = \bigoplus_{i\in J} p(V_i)$ が既約部分加群への直和分解となる。

証明 V の直和分解を p で写して $V/W = p\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) = \sum_{i\in I} p(V_i)$ が成り立つ。このとき、V_i が既約であることから $p(V_i)$ は 0 または既約である。そこで I から $p(V_i) = 0$ なる i をすべて除いたものを I' とおけば、$V/W = \sum_{i\in I'} p(V_i)$ と既約部分加群の和で表せる。したがって上の定理よりある $J \subset I' \subset I$ が存在して $V/W = \bigoplus_{j\in J} p(V_j)$ と既約部分加群への直和分解が成り立つ。よって V/W は半単純である。 □

Socle とは、加群の既約部分加群すべての和である。実は最大の半単純部分加群にもなっている。

系 10.1.5. A を環、V を A-加群とする。このとき

$$\mathrm{soc}(V) := \sum_{V_0\subset V\colon \text{既約 } A\text{-部分加群}} V_0 \tag{10.1.1}$$

とおくと、$\mathrm{soc}(V)$ は V の最大の半単純部分加群である。

証明 [TODO] □

半単純加群の部分加群は半単純となり、さらに直和因子となる。

定理 10.1.6. A を環、V を半単純 A-加群、W を V の A-部分加群とする。このとき次が成り立つ:

(1) W は半単純である。
(2) ある V の A-部分加群 W' が存在して $V = W \oplus W'$ となる。

証明 まず (2) を示す。$p\colon V \to V/W$ を標準射影とし、短完全列

$$0 \longrightarrow W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0 \tag{10.1.2}$$

を考える。系 10.1.4 よりある $J \subset I$ が存在して $V/W = \bigoplus_{i\in J} p(V_i)$ が既約部分加群への直和分解となる。ここで Schur の補題 (定理 8.3.3) より各 $p|_{V_i}\colon V_i \to p(V_i)$ は同型となるから、A-加群準同型

$$s\colon V/W = \bigoplus_{i\in J} p(V_i) \xrightarrow{\prod_{i\in J}(p|_{V_i})^{-1}} \bigoplus_{i\in J} V_i \hookrightarrow V \tag{10.1.3}$$

が上の短完全列の right splitting を与える。よって $V = W \oplus s(V/W)$ が成り立ち、(2) が従う。

つぎに (1) を示す。$J' := I - J$ とおくと $V = \left(\bigoplus_{i\in J'} V_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in J} V_i\right) = \left(\bigoplus_{i\in J'} V_i\right) \oplus s(V/W)$ となるから、標準射

影に対して準同型定理を適用して $W \cong V/s(V/W) \cong \bigoplus_{i\in J'} V_i$ が成り立つ。いま各 V_i は既約だから W は半単純である。 □

系 10.1.7. A を環、V を半単純ネーター (またはアルティン) A-加群とする。このとき V の有限個の既約 A-部分加群 $V_1, \ldots, V_n$ が存在して $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ が成り立つ。

証明 [TODO] 系なのか？V は半単純だから、既約部分加群への直和分解 $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ が存在する。そこで I が有限集合であることをいえばよい。背理法のために I が無限集合であると仮定する。すると可算無限部分集合 $J = \{i_0, i_1, \ldots\} \subset I$ が存在する。いま各 V_i は既約ゆえに $V_i \neq 0$ だから、

- V がネーターの場合は部分加群の増大列

$$V_{i_0} \subsetneq V_{i_0} \oplus V_{i_1} \subsetneq \cdots \tag{10.1.4}$$

  が停留的でないため矛盾が従い、
- V がアルティンの場合は部分加群の減少列

$$\bigoplus_{i\in J} V_i \supsetneq \bigoplus_{i\in J-\{i_0\}} V_i \supsetneq \bigoplus_{i\in J-\{i_0,i_1\}} V_i \supsetneq \cdots \tag{10.1.5}$$

  が停留的でないため矛盾が従う。

したがって I は有限集合である。 □

半単純加群を短完全列の分裂によって特徴付けることができる。

定理 10.1.8 (半単純加群の特徴付け)**.** A を環とする。A-加群 M に関し、次は同値である:

(1) M は半単純加群である。

(2) A-**Mod** の任意の完全列

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow M \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{10.1.6}$$

は分裂する。

証明 (1) ⇒(2) 定理 10.1.6 より従う。

(2) ⇒(1) [TODO] □

10.2 アルティン環

この節では、次節で述べるアルティン単純環の準備としてアルティン環を定義する。アルティン環は見かけ上はネーター環と対になる概念であるが、後で命題 10.2.4 で述べるように、可換環においてはアルティン環はネーター環でもある。また、ある意味ではアルティン環は体の次に簡単な種類の環である。[TODO] どういう意味？

定義 10.2.1 (アルティン環). A を環とする。${}_AA$ がアルティン加群のとき A を**左アルティン環 (left artinian ring)** という。右も同様に定義する。A が可換環のときは単に**アルティン環 (artinian ring)** という。

可換なアルティン環はいくつかの著しい性質を持つ。

命題 10.2.2. 可換アルティン環の素イデアルは極大イデアルである。

証明 cf. 問題 10.4 □

命題 10.2.3. 可換アルティン環は極大イデアルを高々有限個しか持たない。

証明 cf. 問題 10.5 □

命題 10.2.4. 可換アルティン環はネーター環である。

10.3 アルティン単純環

アルティン単純環、すなわち単純なアルティン環について調べる。

命題 10.3.1. A を環とする。$\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{OP}}$ が成り立つ。

証明 cf. 問題 7.1 □

命題 10.3.2. A を左アルティン単純環とする。

(1) 既約 A-加群 U が同型を除いて一意に存在する。

(2) $D := \mathrm{End}_A(U)$ とおく。ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $A \cong M_n(D^{\mathrm{OP}})$ が成り立つ。

証明 A は左アルティン環だから、A の 0 でない左イデアルのなかで極小なもの $U \subset A$ が存在する。このとき $U \neq 0$ と極小性より U は A-加群として既約である。U の一意性の証明は最後にまわす。ここで任意の $a \in A$ に対し $Ua \subset A$ だから、U の既約性と系 8.3.4 より $Ua = 0$ または $Ua \cong U$ である。さて、$\sum_{a \in A} Ua$ は A の 0 でない両側イデアルだから、A が単純環であることとあわせて $\sum_{a \in A} Ua = A$ が成り立つ。したがって、定理 10.1.3 と系 10.1.7 よりある $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して $A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ua_i$, $Ua_i \cong U$ が成り立つ。よって $\mathrm{End}_A({}_AA) \cong M_n(D)$ となり、命題 10.3.1 より $A \cong (A^{\mathrm{OP}})^{\mathrm{OP}} \cong \mathrm{End}_A({}_AA)^{\mathrm{OP}} \cong M_n(D)^{\mathrm{OP}} \cong M_n(D^{\mathrm{OP}})$ が成り立つ。これで (2) がいえた。

最後に U の一意性を示す。$A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ua_i$, $Ua_i \cong U$ より、${}_AA$ は既約成分がすべて U に同型な組成列を持つ。一方、V を既約 A-加群とすると定理 8.2.4 より A のある極大左イデアル I が存在して A-加群の同型 $V \cong A/I$ が成り立つ。このことと A の左アルティン性より、極大 A-部分加群を順次とることで得られる

列 ${}_AA \supsetneq I \supsetneq \cdots$ は V と同型な既約成分をもつ ${}_AA$ の組成列となる。したがって、Jordan-Hölder の定理 (定理 9.3.5) より $U \cong V$ が成り立つ。これで U の一意性がいえて (1) が示せた。 □

系 10.3.3. K を代数的閉体、A を K 上有限次元な単純 K-代数とする。このとき、ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $A \cong M_n(K)$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

系 10.3.4. 左アルティン単純環は左/右ネーター、右アルティンになる。

証明 [TODO] □

定理 10.3.5. D を可除環とする。

(1) ${}_DD,\ D_D$ は既約である。

(2) [TODO]

$$\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{op}}}(D^m, D^n) \cong M_{n,m}(D) \tag{10.3.1}$$

(3) $m \neq n$ ならば $D^m \not\cong D^n$ である。

証明 [TODO] □

定義 10.3.6 (右ベクトル空間の次元)**.** D を可除環とする。右 D-ベクトル空間が有限生成ならば次元が well-defined に定まる。[TODO]

定理 10.3.7. D を可除環、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。$A \in M_n(D)$ に関し次は同値である:

(1) A は可逆である。

(2) A はいくつかの基本行列の積である。

(3) 右 1 次独立なある $v_1, \ldots, v_n \in D^n$ が存在して $A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

系 10.3.8. 任意の $0 \neq v \in D^n$ に対し、$Ae_1 = v$ となる $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ が存在する。

系 10.3.9. D^n は既約 $M_n(D)$-加群である。

[TODO] ベクトル空間の自己同型写像が行列と対応することと関係ある？

補題 10.3.10. D を可除環、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。このとき $\mathrm{End}_{M_n(D)}(D^n) \cong D^{\mathrm{OP}}$ が成り立つ。

証明 D^n の標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ とおく。$B \subset M_n(D)$ を

$$B := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{bmatrix} \in M_n(D) \right\} \tag{10.3.2}$$

で定めると、B は $M_n(D)$ の部分環となり、$Be_1 = \{e_1\}$ が成り立つ。さて、$\varphi \in \mathrm{End}_{M_n(D)}(D^n)$, $v \in D^n - \{0\}$ とする。すると系 10.3.8 よりある $g \in \mathrm{GL}_n(D)$ が存在して $ge_1 = v$ が成り立つ。ここで、すべての $A \in B$ に対し $\varphi(e_1) = \varphi(Ae_1) = A\varphi(e_1)$ が成り立つから、B の元の形から明らかに、ある $d \in D$ が一意に存在して $\varphi(e_1) = e_1 d$ が成り立つ。したがって $\varphi(v) = \varphi(ge_1) = g\varphi(e_1) = ge_1 d = vd$ となる。以上より写像 $\mathrm{End}_{M_n(D)}(D^n) \to D^{\mathrm{OP}}$, $\varphi \mapsto d$ が得られた。[TODO] □

定理 10.3.11. D_1, D_2 を可除環とする。このとき $M_m(D_1) \cong M_n(D_2)$ ならば $D_1 \cong D_2$ かつ $m = n$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

10.4 半単純環

定理 10.4.1. A を左アルティン環、$\{I_j\}_{j \in J}$ を A の左イデアルの族とする。このとき J の有限部分集合 J_0 が存在して

$$\bigcap_{j \in J} I_j = \bigcap_{j \in J_0} I_j \tag{10.4.1}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

定義 10.4.2 (半単純環). A を環とする。${}_A A$ が半単純加群であるとき、A を**半単純環 (semisimple ring)** という。

注意 10.4.3. 単純環は半単純環であるとは限らない。

定理 10.4.4. A を半単純環とする。

(1) ${}_A A$ は有限個の既約部分加群の直和になる。したがって A は左ネーターかつ左アルティンである。
(2) A 上の既約加群は同型を除いて有限個であり、これらと同型な ${}_A A$ の部分加群が存在する。

証明 [TODO] □

[TODO] Socle とはちょっと違う？

定義 10.4.5. A を半単純環、U を既約 A-加群とする。

$$A_U := \sum_{\substack{U_0 \subset_A A:\ A\text{-部分加群} \\ U_0 \cong U}} U_0 \tag{10.4.2}$$

とおく。

補題 10.4.6. V を A_U の既約部分加群とすると $V \cong U$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 10.4.7 (Wedderburn)**.** A を半単純環、$U_1, \dots, U_l$ を A の既約加群の同型類の完全代表系とする。

(1) A_{U_i} は A の両側イデアルである。
(2) ある $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $A_{U_i} \cong U_i^{\oplus n_i}$ が成り立つ。
(3) $A = A_{U_1} \oplus \cdots \oplus A_{U_l}$
(4) $A_{U_i} A_{U_j} = 0\ (i \neq j)$

証明 [TODO] □

Wedderburn-Artin の定理を述べる。これは代数学における最も重要な定理のひとつである [AF92, p.153]。

定理 10.4.8 (Wedderburn-Artin)**.** 環 A に関し次は同値である:

(1) A は半単純環である。
(2) A^{OP} は半単純環である。
(3) 任意の A-加群は半単純である。
(4) ある可除代数 $D_1, \dots, D_l$ と $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して環の同型 $A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_l}(D_l)$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 10.4.9. A を環とする。

(1) A が左アルティン環ならば、$A/J(A)$ は半単純環である。
(2) A が単純環ならば $J(A) = 0$ である。

証明 [TODO] □

10.5　演習問題

A.　Problem set 5

♤ **演習問題 10.1** (代数学 II 5.68)**.** アルティン加群であるがネーター加群でないような例を挙げよ。

♤ **演習問題 10.2** (代数学 II 5.71)**.** 可換環 R 上の 1 変数多項式環 $R[X]$ がネーター環ならば、R はネーター環か？

♤ **演習問題 10.3** (代数学 II 5.74)**.** 可換ネーター環の部分環は常にネーターか？正しければ証明を、誤りなら反例を与えよ。

♤ **演習問題 10.4** (代数学 II 5.75)**.** 可換アルティン環において素イデアルは極大イデアルになることを示せ。

♤ **演習問題 10.5** (代数学 II 5.76)**.** 可換アルティン環は極大イデアルを高々有限個しか持たないことを示せ。

B.　Problem set 6

♤ **演習問題 10.6** (代数学 II 6.79)**.** A, B を左ネーター環とするとき直積環 $A \times B$ も左ネーター環になることを示せ。

♤ **演習問題 10.7** (代数学 II 6.82)**.** A を左アルティン環とすると、ある正整数 n が存在して $J(A)^n = 0$ となることを示せ。

♤ **演習問題 10.8** (代数学 II 6.84)**.** 可換アルティン環はネーター環になることを示せ。

♤ **演習問題 10.9** (代数学 II 6.86)**.** (行列式の技巧[10])　R を可換環とする。n を正整数として M を n 個の元 $v_1, \ldots, v_n$ で生成される R-加群とする。$\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ とし、各 $1 \leq i, j \in n$ に対して $a_{i,j} \in R$ を

$$\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \tag{10.5.1}$$

をみたすようにとる。X を不定元、$\delta_{i,j}$ を Kronecker のデルタとして行列 $L = (\delta_{i,j}X - a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R[X])$ を考える。そこで $d(X) = \det L \in R[X]$ とすると任意の $v \in M$ に対して $d(\varphi)v = 0$ となることを示せ。

♤ **演習問題 10.10** (代数学 II 6.87)**.** R を可換環、$I \subset R$ をイデアル、M を有限生成 R-加群とする。$IM = M$ が成り立つならばある $x \in I$ であって $1 + x \in \mathrm{Ann}_R(M)$ をみたすものが存在することを示せ。

10)　cf. [松 00]

♤ **演習問題 10.11** (代数学 II 6.88). R を可換環、M を有限生成 R-加群とする。$f \in \mathrm{End}_R(M)$ が全射ならば M の自己同型になることを示せ。

♤ **演習問題 10.12** (代数学 II 6.89). 極大両側イデアルは左原始イデアルになることを示せ。

第 11 章　加群のテンソル積

11.1　可換環上の加群のテンソル積

テンソル積を定義する。まずは可換環上の加群に限って考える。

定義 11.1.1 (双線型写像)**.** A を環、M, N, L を A-加群とする。写像 $f: M \times N \to L$ が **A-双線型写像 (A-bilinear map)** であるとは、各 $x_1, x_2 \in M,\ y_1, y_2 \in N,\ a_1, a_2 \in A$ に対し

$$f(x_1, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1 f(x_1, y_1) + a_2 f(x_1, y_2) \tag{11.1.1}$$

$$f(a_1x_1 + a_2x_2, y_1) = a_1 f(x_1, y_1) + a_2 f(x_2, y_1) \tag{11.1.2}$$

が成り立つことをいう。

定義 11.1.2 (圏論的テンソル積)**.** R を可換環、M, N を R-加群とする。組 (Z, φ) が M, N の**圏論的テンソル積 (categorical tensor product)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- **(T1)**　Z は R-加群である。
- **(T2)**　φ は R-双線型写像 $M \times N \to Z$ である。
- **(T3)**　(普遍性) 次が成り立つ:

$$\forall\, L\colon\ R\text{-加群} \tag{11.1.3}$$

$$\forall\, f\colon M \times N \to L\colon\ R\text{-双線型写像} \tag{11.1.4}$$

$$\exists!\, \overline{f}\colon Z \to L\colon\ R\text{-加群準同型}\quad \text{s.t.} \tag{11.1.5}$$

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L \end{tikzcd} \tag{11.1.6}$$

注意 11.1.3. [TODO] 誘導された準同型の単射性の確認に関する注意を述べたい

定理 11.1.4 (圏論的テンソル積の一意性)**.** R を可換環、M, N を R-加群、$(Z, \varphi), (Z', \varphi')$ を M, N の圏論的テンソル積とする。このとき、次の R-**Mod** の図式を可換にする R-加群準同型 i が一意に存在する:

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ Z \arrow[rr, dashed, "i"'] & & Z' \end{tikzcd} \tag{11.1.7}$$

証明　[TODO]　□

可換環上の加群のテンソル積を具体的に構成する。

定義 11.1.5 (可換環上の加群のテンソル積の構成). R を可換環、M, N を R-加群とする。

[TODO]

商加群

$$M \otimes_R N := [M \times N]/Bl \tag{11.1.8}$$

を M と N の R 上の**テンソル積 (tensor product)** といい、写像

$$\otimes\colon M \times N \to M \otimes_R N, \quad (m, n) \mapsto p(m, n) \tag{11.1.9}$$

を $M \otimes_R N$ の**標準射影**という。$(M \otimes_R N, \otimes)$ は M, N の圏論的テンソル積になっている (このあと示す)。

証明 [TODO] □

定理 11.1.6 (有限生成加群のテンソル積の生成系). R を可換環、M, N を R-加群、$S \subset M$, $T \subset N$ を部分 R-加群、$M = \langle S \rangle$, $N = \langle T \rangle$ とする。このとき

$$S \otimes T := \{s \otimes t \in M \otimes_R N \mid s \in S, t \in T\} \tag{11.1.10}$$

とおくと $\langle S \otimes T \rangle = M \otimes_R N$ が成り立つ。とくに M, N が有限生成ならば $M \otimes_R N$ も有限生成である。

証明 テンソル積の定義より、$M \otimes_R N$ の元は

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes n_i \quad (m_i \in M,\ n_i \in N) \tag{11.1.11}$$

の形に書けるが、いま $M = \langle S \rangle$, $N = \langle T \rangle$ だから、これは

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} r_j s_j \right) \otimes \left(\sum_{j'=1}^{k'} r_{j'} t_{j'} \right) \quad (r_j, r_{j'} \in R,\ s_j \in S,\ t_{j'} \in T) \tag{11.1.12}$$

の形に書ける。右辺を整理して

$$\sum_{i,j,j'} r_j r_{j'} s_j \otimes t_{j'} \in \langle S \otimes T \rangle \tag{11.1.13}$$

を得る。 □

定理 11.1.7 (自由加群のテンソル積の基底). R を可換環、M, N を自由 R-加群、$\{v_i\}_{i \in I}$ を M の基底、$\{w_j\}_{j \in J}$ を N の基底とする。このとき

$$B := \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\} \tag{11.1.14}$$

は $M \otimes_R N$ の R 上の基底である。

証明 $\langle B \rangle = M \otimes_R N$ となるのは上の定理よりわかる。あとは B が R 上 1 次独立であることをいえばよく、そのためには B を何らかの R-加群準同型で写した像が R 上 1 次独立であることをいえばよい。そこで R-加群準同型 $\Psi\colon M \otimes_R N \to R^{\otimes(I \times J)}$ を

$$\Psi\left(\left(\sum_{i \in I}^{\text{finite}} a_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j \in J}^{\text{finite}} b_j w_j\right)\right) := (a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J} \tag{11.1.15}$$

で定める。ただし、右辺が有限項を除いて 0 であることは左辺が有限和であることから明らかで、また R-双線型性も明らか。すると

$$\Psi(v_i \otimes w_j) = (c_{pq})_{(p,q) \in I \times J}, \quad c_{pq} = \begin{cases} 1 & (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11.1.16}$$

より $\{\Psi(v_i \otimes w_j) \mid i \in I, j \in J\}$ は R 上 1 次独立である。よって B も R 上 1 次独立である。 □

系 11.1.8 (テンソル積の可換性). [TODO]

系 11.1.9 (テンソル積の結合性). [TODO]

定義 11.1.10 (代数のテンソル積). R を可換環、A, B を R-代数とする。A, B は R-加群とみなせるから、テンソル積加群 $A \otimes_R B$ が考えられる。

[TODO] 乗法を定める

11.2 非可換環上の加群のテンソル積

テンソル積の概念を非可換環上の加群まで一般化しよう。

定義 11.2.1 (A-平衡 R-双線型写像). R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群、L を R-加群とする。写像 $f\colon M \times N \to L$ が **A-平衡 R-双線型写像 (A-balanced R-bilinear map)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) f は R-双線型写像である。

(2) (平衡性) $m \in M, n \in N, a \in A$ に対し

$$f(ma, n) = f(m, an) \tag{11.2.1}$$

が成り立つ。

非可換環上の加群のテンソル積を具体的に構成する。

定義 11.2.2 (非可換環上の加群のテンソル積の構成). [TODO]

上の構成は次の意味での普遍性をみたすが、実はもう少し広い意味での普遍性が成り立つことを後で示す。

定理 11.2.3 (非可換環上の加群のテンソル積の普遍性)**.** R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群とする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, L\colon\ R\text{-加群} \tag{11.2.2}$$

$$\forall\, f\colon M\times N \to L\colon\ A\text{-平衡 } R\text{-双線型写像} \tag{11.2.3}$$

$$\exists!\, \overline{f}\colon M\otimes_A N \to L\colon\ R\text{-加群準同型}\quad \text{s.t.} \tag{11.2.4}$$

$$\begin{tikzcd} & M\times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M\otimes_A N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L \end{tikzcd} \tag{11.2.5}$$

証明 [TODO] □

定義 11.2.4 (左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群、L を左 B-加群とする。写像 $f\colon M\times N \to L$ が**左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像 (left B-linear A-balanced $\mathbb{Z}$-bilinear map)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) f は A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像である。

(2) (左 B-線型性) $m\in M, n\in N, b\in B$ に対し

$$f(bm, n) = bf(m, n) \tag{11.2.6}$$

が成り立つ。

定義 11.2.5 (テンソル積への左作用)**.** A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群とする。このとき、$M\otimes_A N$ に左 B-加群の構造を

$$b(m\otimes n) := (bm)\otimes n \quad (b\in B) \tag{11.2.7}$$

で定めることができる。

証明 [TODO] □

定理 11.2.6 ($\mathbb{Z}$ の場合さえ考えればよいということ)**.** R を可換環、A を R-代数、M を右 A-加群、N を左 A-加群とし、

- $M\otimes_A^1 N$: A を R-代数とみたときのテンソル積
- $M\otimes_A^2 N$: A を $\mathbb{Z}$-代数とみたときのテンソル積

とおく。このとき次が成り立つ:

$$\exists!\, \iota\colon M\otimes_A^1 N \to M\otimes_A^2 N\colon\ \mathbb{Z}\text{-加群の同型}\quad \text{s.t.} \tag{11.2.8}$$

$$
\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\otimes^1"'] \arrow[dr, "\otimes^2"] & \\
M \otimes^1_A N \arrow[rr, dashed, "\cong", "\iota"'] & & M \otimes^2_A N
\end{tikzcd}
\tag{11.2.9}
$$

ただし $\otimes^1, \otimes^2$ は標準射影である。

証明 ι の逆写像にあたるものを考える。$\otimes^1$ は A-平衡 R-双線型写像だから、とくに A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像でもある。したがってテンソル積 $M \otimes^2_A N$ の普遍性より

$$
\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\otimes^2"'] \arrow[dr, "\otimes^1"] & \\
M \otimes^2_A N \arrow[rr, dashed, "\overline{\otimes^1}"'] & & M \otimes^1_A N
\end{tikzcd}
\tag{11.2.10}
$$

を可換にする $\mathbb{Z}$-加群準同型 $\overline{\otimes^1}$ がただひとつ存在する。

A の R-代数としての構造を定める環準同型を $\varphi\colon R \to Z(A)$ とおく。このとき、M に (R, A)-両側加群の構造を

$$
rm := m\varphi(r) \quad (m \in M,\ r \in R) \tag{11.2.11}
$$

で定義できる。これによりテンソル積 $M \otimes^2_A N$ への R の左作用を定めて左 R-加群の構造を入れる [TODO] どういうこと？。

[TODO] □

定理 11.2.7 (テンソル積の普遍性 (最終形)). A, B を環、M を (B, A)-両側加群、N を左 A-加群とする。このとき次が成り立つ:

$$
\forall\, L\colon\ 左\ B\text{-加群} \tag{11.2.12}
$$
$$
\forall\, f\colon M \times N \to L\colon\ 左\ B\text{-線型}\ A\text{-平衡}\ \mathbb{Z}\text{-双線型写像} \tag{11.2.13}
$$
$$
\exists!\, \overline{f}\colon M \otimes_A N \to L\colon\ B\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \tag{11.2.14}
$$
$$
\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
M \otimes_A N \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"'] & & L
\end{tikzcd}
\tag{11.2.15}
$$

証明 [TODO] □

テンソル積は直和との間の分配律をみたす。

定理 11.2.8 (テンソル積の分配律). A, B を環、

(1) $\{M_i\}_{i\in I}$ を (B,A)-両側加群の族、N を A-加群、$\iota_i\colon M_i \hookrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j$ を標準包含とする。このとき

$$\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\colon \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \tag{11.2.16}$$

は B-加群の同型となる。

(2) M を (B,A)-両側加群、$\{N_i\}_{i\in I}$ を A-加群の族、$\iota_i\colon N_i \hookrightarrow \bigoplus_{j\in I} N_j$ を標準包含とする。このとき

$$\bigoplus_{i\in I}(\mathrm{id}_M \otimes \iota_i)\colon \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_A N_i) \xrightarrow{\sim} M \otimes_A \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \tag{11.2.17}$$

は B-加群の同型となる。

証明 (1) についてのみ示す。(2) も同様にして示せる。左 B-線型 A-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像 $\Phi\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \times N \to \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$ を

$$\Phi((x_i)_{i\in I}, y) \coloneqq (x_i \otimes y)_{i\in I} \tag{11.2.18}$$

で定めることができる。よって、B-線型写像

$$\overline{\Phi}\colon \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \to \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N), \quad (x_i)_{i\in I} \otimes y \mapsto (x_i \otimes y)_{i\in I} \tag{11.2.19}$$

が誘導される。$\overline{\Phi}$ が $\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)$ の逆写像であることを示す。右逆写像であることは

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\right) \circ \overline{\Phi}((x_i)_{i\in I} \otimes y) &= \left(\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)\right)((x_i \otimes y)_{i\in I}) && (11.2.20)\\
&= \sum_{i\in I}^{\text{finite}} (\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)(x_i \otimes y) && (11.2.21)\\
&= \sum_{i\in I}^{\text{finite}} ((z_{i;j})_{j\in I} \otimes y) \quad \text{ただし} \quad z_{i;j} \coloneqq \begin{cases} x_i & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases} && (11.2.22)\\
&= \left(\sum_{i\in I}^{\text{finite}} (z_{i;j})_{j\in I}\right) \otimes y && (11.2.23)\\
&= (x_i)_{i\in I} \otimes y && (11.2.24)
\end{aligned}$$

より従う。左逆写像であることも同様にしてわかる。よって $\bigoplus_{i\in I}(\iota_i \otimes \mathrm{id}_N)$ は B-加群の同型である。 □

第 12 章　加群の圏

この章では加群自体というより加群の圏について考える。

12.1　加群の圏と関手

加群の圏とそれにまつわる用語を導入する。

定義 12.1.1 (加群の圏). [TODO]

定義 12.1.2 (共変関手). A, B を環とする。$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**共変関手 (covariant functor)** であるとは、

- 写像 $T\colon \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ob}(B\text{-}\mathbf{Mod})$
- 写像 $T\colon \mathsf{Ar}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ar}(B\text{-}\mathbf{Mod})$

が定まっていて

(1)　各 $M, N \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し

$$T(\mathrm{Hom}_A(M, N)) \subset \mathrm{Hom}_B(T(M), T(N)) \tag{12.1.1}$$

(2)　$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)} \quad (M \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}))$

(3)　各 $M, N, L \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ に対し

$$T(g) \circ T(f) = T(g \circ f) \tag{12.1.2}$$

が成り立つことをいう。

定義 12.1.3 (反変関手). A, B を環とする。$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**反変関手 (contravariant functor)** であるとは、

- 写像 $T\colon \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ob}(B\text{-}\mathbf{Mod})$
- 写像 $T\colon \mathsf{Ar}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathsf{Ar}(B\text{-}\mathbf{Mod})$

が定まっていて

(1)　各 $M, N \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し

$$T(\mathrm{Hom}_A(M, N)) \subset \mathrm{Hom}_B(T(N), T(M)) \tag{12.1.3}$$

(2)　$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T(M)} \quad (M \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}))$

(3)　各 $M, N, L \in \mathsf{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ に対し

$$T(f) \circ T(g) = T(g \circ f) \tag{12.1.4}$$

が成り立つことをいう。

定義 12.1.4 (押し出しと引き戻し). R を可換環、A を R-代数、M, N, L を A-加群とする。

(1) $f \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ とする。R-代数準同型 $f_\sharp$ を

$$f_\sharp \colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, L), \quad \varphi \mapsto f \circ \varphi \tag{12.1.5}$$

で定める。$f_\sharp$ を f による**押し出し (pushout)** という。

(2) $h \in \mathrm{Hom}_A(L, M)$ とする。R-代数準同型 $h^\sharp$ を

$$h^\sharp \colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(L, N), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ h \tag{12.1.6}$$

で定める。$h^\sharp$ を h による**引き戻し (pullback)** という。

テンソル積や Hom をとる操作は共変/反変関手の一例である。

定理 12.1.5 (テンソル関手). A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき、関手 $M \otimes_A \square$ を

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & B\text{-}\mathbf{Mod} \\ X & \longmapsto & M \otimes_A X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, M \otimes_A Y) \\ f & \longmapsto & \mathrm{id}_M \otimes f \end{array} \tag{12.1.7}$$

で定めることができる。

証明 [TODO] □

定義 7.6.1 でみたように加群準同型全体の集合には加群の構造が入るのであった。このことを利用して次のような関手を定めることができる。

定理 12.1.6 (共変ホム関手). R を可換環、A, B を R-代数、M を (A, B)-両側加群とする。このとき、関手 $\mathrm{Hom}_A(M, \square)$ を

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & B\text{-}\mathbf{Mod} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_A(M, X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, X), \mathrm{Hom}_A(M, Y)) \\ f & \longmapsto & f_\sharp \end{array} \tag{12.1.8}$$

で定めることができる。

注意 12.1.7. M が単に左 A-加群の場合は、M を $(A, \mathbb{Z})$-両側加群とみなせば定理を適用できる。

証明 [TODO] □

定理 12.1.8 (反変ホム関手). A, B を環、M を (A, B)-両側加群とする。このとき、反変関手 $\mathrm{Hom}_A(\square, M)$ を

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod} & & \mathrm{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(Y, M), \mathrm{Hom}_A(X, M)) \\ X \longmapsto \mathrm{Hom}_A(X, M) & & f \longmapsto f^\sharp \end{array} \tag{12.1.9}$$

で定めることができる。

証明 [TODO] □

12.2 自然変換

定義 12.2.1 (自然変換). [TODO]

定義 12.2.2 (関手の同型). A, B を環、$T, S\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。T, S が**同型 (isomorphic)** であるとは、

(1) 任意の A-加群 M に対し B-加群の同型 $\tau_M\colon T(M) \xrightarrow{\sim} S(M)$ が定まっている。

(2) 任意の A-加群 M, N と $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "T(\varphi)"] \arrow[d, "\tau_M"', "\sim"] & T(N) \arrow[d, "\tau_N", "\sim"'] \\ S(M) \arrow[r, "S(\varphi)"'] & S(N) \end{tikzcd} \tag{12.2.1}$$

が可換となる。

が成り立つことをいう。このとき $T \cong S$ と書く。[TODO] 随伴関手のとき □ に対象を代入するとそのまま同型を表しているように読める！

注意 12.2.3. 反変関手についても同様の定義ができる。

定義 12.2.4 (関手的). A, B, C_1, C_2 を環、$T_i\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to C_i\text{-}\mathbf{Mod}$, $S_i\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to C_i\text{-}\mathbf{Mod}$ $(i = 1, 2)$ を共変関手とする。$M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ と $N \in B\text{-}\mathbf{Mod}$ でパラメータ付けられた $\mathbb{Z}$-加群同型の族

$$\tau_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), T_1(N)) \to \mathrm{Hom}_{C_2}(S_2(M), S_2(N)) \tag{12.2.2}$$

が M, N に関し**関手的**であるとは、

(1) 任意の A-加群 M, M'、B-加群 N および $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N)) \arrow[d, "\tau_{M,N}"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M'), S_1(N)) \arrow[l, "f^\sharp"'] \arrow[d, "\tau_{M',N}", "\sim"'] \\ \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N)) & \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M'), S_2(N)) \arrow[l, "f^\sharp"] \end{tikzcd} \tag{12.2.3}$$

が可換となる。[TODO] $f^\sharp$ は $T_1(f)$ や $T_2(f)$ を合成している？

(2) 任意の A-加群 M、B-加群 N, N' および $g \in \mathrm{Hom}_B(N, N')$ に対し図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N)) \arrow[r, "g_\sharp"] \arrow[d, "\tau_{M,N}"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{C_1}(T_1(M), S_1(N')) \arrow[d, "\tau_{M,N'}", "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N)) \arrow[r, "g_\sharp"'] & \mathrm{Hom}_{C_2}(T_2(M), S_2(N'))
\end{tikzcd} \tag{12.2.4}$$

が可換となる。

が成り立つことをいう。

定理 12.2.5 (米田の補題の 1 つの型). A, B を環、$T, S\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。このとき次は同値である:

(1) $T \cong S$

(2) 各 A-加群 M と B-加群 N に対し、M, N に関して関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\Psi_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_B(T(M), N) \to \mathrm{Hom}_B(S(M), N) \tag{12.2.5}$$

が存在する。

(3) 各 A-加群 M と B-加群 N に対し、M, N に関して関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\Phi_{N,M}\colon \mathrm{Hom}_B(N, T(M)) \to \mathrm{Hom}_B(N, S(M)) \tag{12.2.6}$$

が存在する。

証明 [TODO] □

定義 12.2.6 (随伴関手). A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$, $S\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ を共変関手とする。T が S の**左随伴関手 (left adjoint functor)**、あるいは S が T の**右随伴関手 (right adjoint functor)** であるとは、各 A-加群 M、B-加群 N に対し、M, N に関し関手的な $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$\varphi_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_B(T(M), N) \to \mathrm{Hom}_A(M, S(N)) \tag{12.2.7}$$

が存在することをいう。

定理 12.2.7 (随伴の一意性). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 12.2.8 (テンソル関手とホム関手の随伴性). A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき関手 $M \otimes_A \square\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は $\mathrm{Hom}_B(M, \square)\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ の左随伴関手である。すなわち $M \otimes_A \square \dashv \mathrm{Hom}_B(M, \square)$ が成り立つ。

証明 $X \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, $Y \in B\text{-}\mathbf{Mod}$ に関し関手的な $\mathbb{Z}$-加群同型の族

$$\varphi_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, Y) \to \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M, Y)) \tag{12.2.8}$$

を構成する。[TODO] □

12.3 係数制限と係数拡大

例 7.1.4 で触れた係数制限と、その随伴的な操作である係数拡大について述べる。

定義 12.3.1 (係数制限). A, B を環、$\varphi \colon B \to A$ を環準同型、M を A-加群とする。B-加群 $\mathrm{Res}^B_A M = M|_B$ を、M への B の作用を

$$B \times M \to B, \quad (b, m) \mapsto \varphi(b)m \tag{12.3.1}$$

で定めたものとし、これを M の B への**係数の制限 (restriction of scalars)** という。断らない限り φ として包含写像を用いる。$\mathrm{Res}^B_A \colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手となる。

定義 12.3.2 (係数拡大). A, B を環、$\varphi \colon B \to A$ を環準同型とする。A に次のように (A, B)-両側加群の構造を入れる:

$$axb := ax\varphi(b) \quad (x \in A,\ a \in A,\ b \in B) \tag{12.3.2}$$

B-加群 M に対し、

$$\mathrm{Ind}^A_B M := A \otimes_B M \tag{12.3.3}$$

を M の A への**係数の拡大 (extension of scalars)** という。$\mathrm{Ind}^A_B \colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手となる。

定理 12.3.3 (係数制限と係数拡大の随伴性). A, B を環、$\varphi \colon B \to A$ を環準同型とする。このとき、係数の拡大 Ind^A_B は係数の制限 Res^B_A の左随伴関手である。

証明 [TODO] □

系 12.3.4 (Induction By Stage).

$$\mathrm{Ind}^A_C \cong \mathrm{Ind}^A_B \circ \mathrm{Ind}^B_C \tag{12.3.4}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

定義 12.3.5 (Production). A, B を環、$\varphi \colon B \to A$ を環準同型とし、A に

$$bxa := \varphi(b)xa \tag{12.3.5}$$

により (B,A)-両側加群の構造を入れる。このとき、B-加群 M に対し

$$\mathrm{Pro}_B^A(M) := \mathrm{Hom}_B(A,M) \tag{12.3.6}$$

と定めると、共変関手 $\mathrm{Pro}_B^A\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ が定まる。

命題 12.3.6. Pro_B^A は Res_A^B の右随伴関手である。

証明 [TODO] □

12.4 加法的関手と完全性

A を環とする。定義 7.6.1 でみたように、すべての A-加群 M,N に対し $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は $\mathbb{Z}$-加群となるのであった。このような性質は加群の圏には欠かせないものであり、加群の圏の間の関手を調べる際にはこの $\mathbb{Z}$-加群構造を保つものが特に重要といえる。そこで、この節では加法的関手とその完全性の概念を定義する。

定義 12.4.1 (加法的関手). A,B を環とする。共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**加法的 (additive)** であるとは、

(1) $T(0) = 0$
(2) 各 $M,N \in \mathrm{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ に対し $T\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_B(T(M),T(N))$ が $\mathbb{Z}$-加群の準同型となる。

が成り立つことをいう。

例 12.4.2 (加法的関手の例).

- A,B を環、M を (B,A)-両側加群とする。このとき、テンソル関手 $M \otimes_A \square\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は加法的である。
- R を可換環、A,B を R-代数、M を (A,B)-両側加群とする。このとき、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(M,\square)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は加法的である。

加法的関手は有限直和を保つ。

定理 12.4.3 (加法的関手は有限直和を保つ). A,B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を加法的関手とする。任意の A-加群 M_1,M_2 と直和の標準射影 $\iota_i\colon M_i \hookrightarrow M_1 \oplus M_2$ $(i=1,2)$ に対し

$$T(\iota_1) \oplus T(\iota_2)\colon T(M_1) \oplus T(M_2) \longrightarrow T(M_1 \oplus M_2) \tag{12.4.1}$$

は B-加群の同型を与える。逆写像は、$p_i\colon M_1 \oplus M_2 \to M_i$ $(i=1,2)$ を直積の標準射影として

$$T(p_1) \times T(p_2)\colon T(M_1 \oplus M_2) \longrightarrow T(M_1) \oplus T(M_2) \tag{12.4.2}$$

で与えられる。

証明 [TODO] □

定理 12.4.4 (加法的関手は分裂短完全列を保つ). A, B を環、

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.3}$$

を A-**Mod** の分裂短完全系列とする。関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が加法的ならば、T はこの系列を分裂短完全系列に写す。

証明 [TODO] □

左完全関手を定義する。

定義 12.4.5 (左完全関手 [11]). A, B を環とする。加法的共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**左完全 (left exact)** であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.4}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(U) \xrightarrow{T(i)} T(V) \xrightarrow{T(p)} T(W) \tag{12.4.5}$$

が完全系列となることをいう。

加法的反変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が左完全であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.6}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(W) \xrightarrow{T(p)} T(V) \xrightarrow{T(i)} T(U) \tag{12.4.7}$$

が完全系列となることをいう。

共変/反変ホム関手は左完全である。

定理 12.4.6 (共変ホム関手の左完全性). A, B を環、X を (A, B)-両側加群とする。このとき、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(X, \square)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は左完全である。

証明 [TODO] **Ab** でなく B-**Mod** に修正したい

A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.8}$$

に対し、**Ab** の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(X, V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(X, W) \tag{12.4.9}$$

が完全系列となることを示す。

<u>$\mathrm{Ker}\, i_* = 0$ であること</u>　i の単射性から明らか。

<u>$\mathrm{Im}\, i_* \subset \mathrm{Ker}\, p_*$ であること</u>　$\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\, p$ より明らか。

11) T で写した系列の左端に射 $0 \to \bullet$ が現れることから「左」完全と呼ばれる。

<u>$\operatorname{Ker} p_* \subset \operatorname{Im} i_*$ であること</u>　$g \in \operatorname{Ker} p_*$ とすると、

$$g(x) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i \quad (\forall x \in X) \tag{12.4.10}$$

が成り立つ。よって

$$g(x) = i(u_x) \quad (\exists u_x \in U) \tag{12.4.11}$$

が成り立ち、i の単射性より u_x は x に対し一意に定まる。よって写像 $f\colon X \to U,\ x \mapsto u_x$ は well-defined である。さらに、直接計算により $f \in \operatorname{Hom}_A(X, U)$ であることもわかる。よって $g = i_* f \in \operatorname{Im} i_*$ である。 □

定理 12.4.7 (反変ホム関手の左完全性). A, B を環、X を (A, B^{OP})-両側加群とする。このとき、反変ホム関手 $\operatorname{Hom}_A(\square, X)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ は左完全である。[TODO] 終域あってる？

証明　[TODO] □

右完全関手を定義する。

定義 12.4.8 (右完全関手). A, B を環とする。加法的共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**右完全 (right exact)** であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$B' \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } B'' \longrightarrow 0 \tag{12.4.12}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$T(B') \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(B'') \longrightarrow 0 \tag{12.4.13}$$

が完全系列となることをいう。

テンソル関手は右完全である。すなわち全射を保つ。

定理 12.4.9 (テンソル関手の右完全性). A, B を環、M を (B, A)-両側加群とする。このとき、テンソル関手 $M \otimes_A \square$ は右完全である。

証明　[TODO] **Ab** でなく B-**Mod** に修正したい

A-**Mod** の任意の完全系列

$$B' \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } B'' \longrightarrow 0 \tag{12.4.14}$$

に対し、**Ab** の列

$$M \otimes_A B' \xrightarrow{1 \otimes i} M \otimes_A B \xrightarrow{1 \otimes p} M \otimes_A B'' \longrightarrow 0 \tag{12.4.15}$$

が完全系列となることを示す。

<u>$\operatorname{Im}(1 \otimes i) \subset \operatorname{Ker}(1 \otimes p)$ であること</u>

$$(1 \otimes p) \circ (1 \otimes i) = 1 \otimes (p \circ i) = 1 \otimes 0 = 0 \tag{12.4.16}$$

より明らか。

<u>$\mathrm{Ker}(1\otimes p)\subset \mathrm{Im}(1\otimes i)$ であること</u>　$E := \mathrm{Im}(1\otimes i)$ とおく。上で示した $E\subset \mathrm{Ker}(1\otimes p)$ より、図式

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A B \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "1\otimes p"'] & & (M\otimes_A B)/E \arrow[dl, dashed, "\widehat{p}"] \\ & M\otimes_A B'' & \end{tikzcd} \tag{12.4.17}$$

を可換にする準同型 $\widehat{p}$ が誘導される。ここで、もし $\widehat{p}$ が同型であることを示せたならば、

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(1\otimes p) &= \mathrm{Ker}(\widehat{p}\circ\pi) && (12.4.18)\\ &= \mathrm{Ker}\,\pi \quad (\because\ \widehat{p}\text{ は同型}) && (12.4.19)\\ &= E && (12.4.20)\\ &= \mathrm{Im}(1\otimes i) && (12.4.21)\end{aligned}$$

より示したいことが従う。そこで、$\widehat{p}$ の逆写像 $M\otimes_A B''\to(M\otimes_A B)/E$ を構成する。写像 $f\colon M\times B''\to(M\otimes_A B)/E$ を次のように定める。すなわち、各 $(a,b'')\in M\times B''$ に対し、p の全射性より $p(b)=b''$ なる $b\in B$ がとれるから、$f(a,b'') := a\otimes b+E$ と定める。well-defined 性と A-双線型性は直接計算によりわかる。よって準同型 $\widehat{f}\colon M\otimes_A B''\to(M\otimes_A B)/E$ が誘導され、$\widehat{f}$ は $\widehat{p}$ の逆写像となる。したがって $\widehat{p}$ が同型であることがいえた。

<u>$1\otimes p$ が全射であること:</u> p の全射性より明らか。 □

一方、テンソル関手は単射を保つとは限らない。

例 12.4.10 (テンソル関手が単射を保たない例)**.** $\mathbb{Z}$-加群の完全系列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\ i\ }\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0 \tag{12.4.22}$$

を考える。テンソル関手 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\square\colon \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\to\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ の右完全性より

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\xrightarrow{1\otimes i}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0 \tag{12.4.23}$$

は完全系列である。この列の左端は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ である。一方、各 $a\otimes q\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}$ に対し

$$\begin{aligned} a\otimes q &= 2a\otimes(q/2) && (12.4.24)\\ &= 0\otimes(q/2) && (12.4.25)\\ &= 0 && (12.4.26)\end{aligned}$$

である。よって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}=0$ である。したがって $1\otimes i$ は単射ではありえず、関手 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\square$ は完全関手でないことがわかる。

左右の完全性を兼ね備えたものが完全関手である。

定義 12.4.11 (完全関手)**.** A, B を環とする。加法的共変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod}\to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が**完全 (exact)** であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0\longrightarrow U\xrightarrow{\ i\ }V\xrightarrow{\ p\ }W\longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.27}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(U) \xrightarrow{T(i)} T(V) \xrightarrow{T(p)} T(W) \longrightarrow 0 \tag{12.4.28}$$

が完全系列となることをいう。

加法的反変関手 $T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ が完全であるとは、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.4.29}$$

に対し、B-**Mod** の列

$$0 \longrightarrow T(W) \xrightarrow{T(p)} T(V) \xrightarrow{T(i)} T(U) \longrightarrow 0 \tag{12.4.30}$$

が完全系列となることをいう。

定理 12.4.12 (完全関手は完全系列を完全系列に写す). [TODO]

証明 [TODO] □

系 12.4.13. 加法的関手が左完全かつ右完全であることと、完全であることとは同値である。

証明 [TODO] □

12.5 射影加群

共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(P, \square)$ を完全にするのが射影加群である。

定義 12.5.1 (射影加群). A を環とし、P を A-加群とする。P が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、P を**射影加群 (projective module)** という。

(1) (リフトの存在) 任意の A-加群準同型 $f\colon P \to M''$ と全射 A-加群準同型 $g\colon M \to M''$ に対し、A-加群準同型 $h\colon P \to M$ であって

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{(exact)} \tag{12.5.1}$$

を可換にするものが存在する。

(2) A-**Mod** のすべての完全列 $0 \to M' \to M'' \to P \to 0$ が分裂する。

(3) P はある自由 A-加群の直和因子である。すなわち、ある A-加群 M が存在して $P \oplus M$ は自由となる。

(4) 函手 $\mathrm{Hom}_A(P, \square)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全である。

同値性の証明. (1) ⇒ (4) P が (1) をみたすとし、A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.5.2}$$

に対し、**Ab** の列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,U) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_A(P,V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(P,W) \longrightarrow 0 \tag{12.5.3}$$

が完全系列となることを示す。定理 12.4.6 より $\mathrm{Hom}_A(P,\square)$ の左完全性はわかっているから、あとは

$$\mathrm{Hom}_A(P,V) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_A(P,W) \longrightarrow 0 \tag{12.5.4}$$

が完全系列であること、すなわち p_* の全射性をいえばよい。そのためには A-**Mod** の任意の射 $h\colon P \to W$ に対し

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ V \arrow[r, "p"'] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{12.5.5}$$

を可換にする射 g が存在することをいえばよいが、p が全射であることと P が (1) をみたすことからこのような g は存在する。よって (4) がいえた。

(4) ⇒ (1)　$\mathrm{Hom}_A(P,\square)$ は完全であるとする。準同型 $f\colon P \to M''$ と全射準同型 $g\colon M \to M''$ が任意に与えられたとする。このとき、列

$$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.5.6}$$

は完全系列である。したがって、$\mathrm{Hom}_A(P,\square)$ の完全性より

$$\mathrm{Hom}_A(P,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P,M'') \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.5.7}$$

は完全系列、すなわち g_* は全射である。よって、図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \quad \text{(exact)} \\ & P \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{12.5.8}$$

を可換にする $h \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$ が存在する。よって (1) がいえた。

[TODO] cf. [Lang] p.137 □

自由加群は、定義から明らかな射影加群の例のひとつである。

命題 12.5.2. 自由加群は射影加群である。

証明　射影加群の定義の条件 (3) より従う。 □

例 12.5.3 (自由でない射影加群の例). $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群として自由だから、直和因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は射影 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群である。一方、$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-加群として自由ではない。実際、もし自由加群ならばその濃度は 6 のべきか無限となるはずである。同様に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ も自由でない。

直和により射影加群の例を増やすことができる。

命題 12.5.4 (射影的な直和加群). A を環とする。$\{M_i\}_{i\in I}$ を A-加群の族とするとき、直和 $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ が射影的であることと各 M_i が射影的であることとは同値である。

証明 [TODO] □

12.6 入射加群

反変ホム関手 $\mathrm{Hom}_A(\square, Q)$ を完全にするのが入射加群である。

定義 12.6.1 (入射加群). A を環とし、Q を A-加群とする。Q が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、Q を**入射加群 (injective module)** という。

(1) 任意の A-加群 M とその A-部分加群 M'、および A-加群準同型 $f\colon M' \to Q$ に対し、A-加群準同型 $h\colon M \to Q$ であって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd} \tag{12.6.1}$$

を可換にするものが存在する。

(2) 函手 $\mathrm{Hom}_A(\square, Q)\colon A\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{OP}} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全である。

(3) すべての完全列 $0 \to Q \to M \to M'' \to 0$ が分裂する。

証明 cf. [Lan02, p.782] □

定理 12.6.2. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は入射 $\mathbb{Z}$-加群である。

証明 $\varphi\colon X \to Y$ を単射な $\mathbb{Z}$-加群準同型、$h\colon X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, tail, "\varphi"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd} \quad \text{(exact)} \tag{12.6.2}$$

を可換にする $\mathbb{Z}$-加群準同型 ψ の存在を示す。ここで

$$\mathcal{Q} := \{(Z, \xi) \mid Z \text{ は } \mathbb{Z}\text{-加群}, \ X \subset Z \subset Y, \ \xi\colon Z \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ は } \mathbb{Z}\text{-加群準同型}, \ \xi = h \ \text{ on } \ X\} \tag{12.6.3}$$

とおく。$\mathcal{Q}$ 上の関係 $\leq$ を

$$(Z, \xi) \leq (Z', \xi') \quad \Longleftrightarrow \quad Z \subset Z' \quad \text{かつ} \quad \xi = \xi' \ \text{ on } \ Z \tag{12.6.4}$$

で定めると、$\leq$ は $\mathcal{Q}$ 上の半順序となり、$\mathcal{Q}$ は帰納的半順序集合となる。Zorn の補題より $\mathcal{Q}$ は極大元 (W, ψ) をもつ。[TODO] $W \subsetneq Y$ として矛盾を導く □

定理 12.6.3 (完全関手の随伴)**.** A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を関手とする。このとき次が成り立つ:

(1) T がある完全関手の左随伴ならば、T は射影加群を射影加群に写す。
(2) T がある完全関手の右随伴ならば、T は入射加群を入射加群に写す。

証明 (1) を示す。(2) も同様である。T は完全関手 $S\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ の左随伴であるとし、M を射影 A-加群とする。各 B-加群 X に対し、随伴性より $\mathrm{Hom}_B(T(M), X) \cong \mathrm{Hom}_A(M, S(X))$ だから、共変ホム関手 $\mathrm{Hom}_B(T(M), \square)$ は $X \mapsto \mathrm{Hom}_B(T(M), X) \cong \mathrm{Hom}_A(M, S(X))$ と写す。右辺は完全関手の合成 $\mathrm{Hom}_A(M, S(\square))$ だから完全である。したがって $\mathrm{Hom}_B(T(M), \square)$ は完全である。よって $T(M)$ は射影加群である。 □

定義 12.6.4 (可除加群)**.** R を可換環、M を R-加群とする。M が**可除 (divisible)** であるとは、R の 0 でも零因子でもない任意の元 $a \in R$ に対し、a 倍写像 $M \ni m \mapsto am \in M$ が全射になることをいう。

命題 12.6.5. 可換環上の入射加群は可除加群である。

証明 問題 12.5 を参照。 □

12.7 平坦加群

テンソル関手を完全にするのが平坦加群である。ここでは平坦加群の定義として右側加群のものを与えるが、明らかに左側加群についても同様に定義される。

定義 12.7.1 (平坦加群)**.** A を環、F を右 A-加群とする。F が次の同値な条件のうちのひとつ（したがってすべて）をみたすとき、F を**平坦加群 (flat module)** という:

(1) A-**Mod** の任意の完全系列

$$E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \qquad \text{(exact)} \tag{12.7.1}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \tag{12.7.2}$$

は完全となる。

(2) A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.7.3}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \longrightarrow 0 \tag{12.7.4}$$

は完全となる。

(3) (単射を保つこと) A-**Mod** の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \qquad \text{(exact)} \tag{12.7.5}$$

に対し $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列

$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \tag{12.7.6}$$

は完全となる。

証明 [TODO] □

平坦でない加群の例のひとつは、例 12.4.10 で紹介した ($\mathbb{Z}$-加群としての) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。
いくつかの基本的な平坦加群のクラスを挙げる。

補題 12.7.2. A を環とする。

(1) 任意の A-加群 N に対し、A-加群準同型 $\mu\colon A \otimes_A N \to N$ であって

$$\mu(a \otimes n) = an \quad \mu^{-1}(n) = 1_A \otimes n \tag{12.7.7}$$

なるものが存在する。

(2) 任意の右 A-加群 M に対し、右 A-加群準同型 $\eta\colon M \otimes_A A \to M$ であって

$$\eta(m \otimes a) = ma, \quad \eta^{-1}(m) = m \otimes 1_A \tag{12.7.8}$$

なるものが存在する。

証明 [TODO] □

定理 12.7.3 (基本的な平坦加群). A を環とする。

(1) A_A (resp. ${}_AA$) は平坦な右 (resp. 左) A-加群である。

(2) $\{F_i\}_{i\in I}$ を右 (resp. 左) A-加群の族とするとき、直和 $F := \oplus F_i$ が平坦な右 (resp. 左) A-加群であることと各 F_i が平坦な右 (resp. 左) A-加群であることとは同値である。

(3) 射影加群は平坦な左 A-加群である。

証明 (1) 右 A-加群の場合のみ示す。$f\colon X \to Y$ を単射 A-加群準同型とする。上の補題より、図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & A \otimes_A X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes f"'] & A \otimes_A Y \arrow[u, "\mu'"'] \end{tikzcd} \tag{12.7.9}$$

を可換にする A-加群の同型 μ, μ' が存在する (図式の可換性は $a \otimes x$ の形の元の行き先を追跡すればよい)。f の単射性より $\mathrm{id}_A \otimes f$ は単射である。したがって A_A は平坦である。

(2) [TODO]

(3) [TODO] (1), (2) を使う □

平坦加群の条件 (2) の逆も成り立つものは忠実平坦と呼ばれる。

定義 12.7.4 (忠実平坦加群)**.** A を環、F を右 A-加群とする。F が**忠実平坦加群 (faithfully flat module)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- A-**Mod** の系列
$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \tag{12.7.10}$$
および $\mathbb{Z}$-**Mod** の系列
$$0 \longrightarrow F \otimes_A E' \longrightarrow F \otimes_A E \longrightarrow F \otimes_A E'' \longrightarrow 0 \tag{12.7.11}$$
に関し、系列 (12.7.10) が完全であることと系列 (12.7.11) が完全であることとは同値である。

忠実平坦加群の例のひとつは自由加群である。

命題 12.7.5 (自由加群は忠実平坦)**.** 0 でない自由加群は忠実平坦である。0 でない射影加群は忠実平坦とは限らない。

証明 cf. 問題 12.7 $\square$

平坦性を用いて入射加群のひとつの例が得られる。

命題 12.7.6. A を環、M を平坦右 A-加群とする。M を $(\mathbb{Z}, A)$-両側加群とみて、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は入射 A-加群である。

証明 M が平坦であることより $M \otimes_A \square$ は完全関手だから、定理 12.6.3 より $M \otimes_A \square$ の右随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \square)$ は入射性を保つ。定理 12.6.2 より $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は入射 $\mathbb{Z}$-加群であるから、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は入射 A-加群である。 $\square$

定理 12.7.7 (入射加群への埋め込み)**.** A を環、M を A-加群とする。このとき、ある入射 A-加群 I と単射 A-加群準同型 $\varphi\colon M \to I$ が存在する。

証明 [TODO] $\square$

命題 12.7.8 (局所化と平坦性)**.** R を可換環とする。

(1) $S \subset R$ を R の積閉集合とするとき、$S^{-1}R$ は R-加群として平坦である。
(2) [TODO]

証明 [TODO] $\square$

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の商体だから、上で示した局所化の平坦性より $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦であることがわかる。一方、この事実は別の方法で示すこともできる。

命題 12.7.9. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦である。

証明 [TODO] これであってる？まず、$\mathbb{Q}$ の任意の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群は自由 $\mathbb{Z}$-加群である。

$\because$ S を $\mathbb{Q}$ の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群とする。$S=\varnothing$ の場合は明らかだから $S\neq\varnothing$ とする。S は有限生成だから

$$S=\langle\{q_1,\dots,q_n\}\rangle,\quad q_1,\dots,q_n\in\mathbb{Q} \tag{12.7.12}$$

と表せる。ここで、必要ならば $q_1,\dots,q_n$ の添字の小さい方から順に $\mathbb{Z}$ 上の 1 次独立性を保つ元のみを選び出して、$q_1,\dots,q_n$ は $\mathbb{Z}$ 上 1 次独立であるとしてよい。このとき $\mathbb{Z}$-加群準同型

$$f\colon\mathbb{Z}^n\to S,\quad (m_1,\dots,m_n)\mapsto m_1q_1+\cdots+m_nq_n \tag{12.7.13}$$

に対し準同型定理を用いて同型 $\mathbb{Z}^n\cong S$ を得る。 //

M,N を $\mathbb{Z}$-加群とし、$f\colon M\to N$ を単射 $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。$\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\otimes f\colon\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}M\to\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}N$ が単射であることを示す。$\xi\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}M$ が $(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\otimes f)(\xi)=0$ をみたすとし、$\xi=0$ を示す。ξ は

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}q_j\otimes v_j\quad(q_j\in\mathbb{Q},\ v_j\in M) \tag{12.7.14}$$

の形に表せる。そこで $\mathbb{Q}$ のイデアル、すなわち $\mathbb{Z}$-部分加群 I を $I:=\langle\{q_1,\dots,q_j\}\rangle$ とおき、標準射影 $I\to\mathbb{Q}$ を j とおく。このとき

$$\begin{CD}
\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}M @>{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\otimes f}>> \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}N\\
@A{j\otimes\mathrm{id}_M}AA @AA{j\otimes\mathrm{id}_N}A\\
I\otimes_{\mathbb{Z}}M @>>{\mathrm{id}_I\otimes f}> I\otimes_{\mathbb{Z}}N
\end{CD} \tag{12.7.15}$$

は可換となる [TODO] なぜ？。冒頭で示したように I は自由 $\mathbb{Z}$-加群、したがって平坦だから $\mathrm{id}_I\otimes f$ は単射である。[TODO] □

平坦加群の応用のひとつが、線型代数学で学んだ Rank-Nullity Theorem の加群バージョンである。

定理 12.7.10 (有限ランク自由 $\mathbb{Z}$-加群の Rank-Nullity Theorem)**.** M,N を有限ランク自由 $\mathbb{Z}$-加群、$f\colon M\to N$ を $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。このとき

$$\operatorname{rk}M=\operatorname{rk}\operatorname{Ker}f+\operatorname{rk}\operatorname{Im}f \tag{12.7.16}$$

が成り立つ。

証明 命題 12.7.8 あるいは命題 12.7.9 より、$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$-加群として平坦である。したがって $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\square\colon\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\to\mathbb{Q}\text{-}\mathbf{Mod}$ は完全関手である。いま

$$0\longrightarrow\operatorname{Ker}f\longrightarrow M\xrightarrow{f}\operatorname{Im}f\longrightarrow 0\qquad(\text{exact}) \tag{12.7.17}$$

は完全系列だから

$$0\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\operatorname{Ker}f\longrightarrow\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}M\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\otimes f}\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\operatorname{Im}f\longrightarrow 0 \tag{12.7.18}$$

も完全系列となる。よって線型代数学の Rank-Nullity Theorem より

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} f) + \operatorname{rk}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} f) \tag{12.7.19}$$

が成り立つ。いま定理 11.1.7 より

$$\operatorname{rk} M = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \tag{12.7.20}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} f) \tag{12.7.21}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im} f) \tag{12.7.22}$$

だから

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f + \operatorname{rk} \operatorname{Im} f \tag{12.7.23}$$

を得る。 □

12.8 演習問題

A. Problem set 7

♤ **演習問題 12.1** (代数学 II 7.93). A を環とし、$x, y \in A$ が $xy = 1$ をみたすとする。このとき常に $x, y \in A^\times$ となるか？正しければ証明を、誤りならば反例を与えよ。

♤ **演習問題 12.2** (代数学 II 7.95). A を環、R を可換環、$(I, \leq)$ を有向的半順序集合、$(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ を A-加群 (R-代数) の有向系とする。$x \in M_i$, $y \in M_j$ に対しある $k \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i, j \leq k \\ \varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y) \end{cases} \tag{12.8.1}$$

をみたすとき $x \sim y$ と書くことにすれば、これは disjoint union $\bigsqcup_{i\in I} M_i$ 上の同値関係を定める。このとき

$$\varinjlim_{i\in I} M_i := \bigsqcup_{i\in I} M_i \Big/ \sim \tag{12.8.2}$$

とおくと A-加群 (R-代数) の構造が自然に入り、$\iota_i\colon M_i \to \varinjlim_{i\in I} M_i$ を包含写像 $M_i \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I} M_i$ から誘導された写像とすると A-加群 (R-代数) の準同型になり、組 $(\varinjlim_{i\in I} M_i, \{\iota_i\}_{i\in I})$ は $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ の帰納極限になることを示せ。

♤ **演習問題 12.3** (代数学 7.96). $\mathbb{R}$ における 0 の開近傍全体のなす集合を $\mathcal{N}$ とおく。$U, V \in \mathcal{N}$ に対し $U \leq V :\Leftrightarrow U \supset V$ と定めると、これは $\mathcal{N}$ 上の有向的半順序を与える。各 $U, V \in \mathcal{N}$, $U \leq V$ に対し $r_{UV}\colon C^\infty(U) \to C^\infty(V)$ を制限写像とすると $(\{C^\infty(U)\}_{U\in\mathcal{N}}, \{r_{UV}\}_{U\leq V})$ は $\mathbb{C}$-代数の有向系となる。ここで

$$C_0^\infty := \varinjlim_{U\in\mathcal{N}} C^\infty(U) \tag{12.8.3}$$

とおく。C_0^∞ は局所環となることを示し、極大イデアルと異なる素イデアルを持つことを示せ。

B. Problem set 8

♤ **演習問題 12.4** (代数学 II 8.108). A, B を環、$T\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$ を加法的共変関手とする。A-加群の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.4}$$

に対し、

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.5}$$

は完全となるとする。このとき T は右完全関手であることを示せ。

証明 [TODO] 加法的であることはいつ使う？A-加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.6}$$

が任意に与えられたとし、

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \tag{12.8.7}$$

が完全系列であることを示す。準同型定理より図式

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & M_2 \\ M_1/\operatorname{Ker}\alpha \arrow[ur, dashed, "\bar{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \tag{12.8.8}$$

を可換にする単射な A-加群準同型 $\bar{\alpha}$ が誘導される。このとき $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\bar{\alpha}$ も成り立つから

$$0 \longrightarrow M_1/\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\bar{\alpha}} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.9}$$

は完全系列である。そこで問題の仮定より

$$T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \xrightarrow{T(\bar{\alpha})} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.10}$$

は完全系列である。T は共変だから、(12.8.8) より図式

$$\begin{tikzcd} T(M_1) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "T(\pi)"'] & T(M_2) \\ T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \arrow[ur, "T(\bar{\alpha})"'] & \end{tikzcd} \tag{12.8.11}$$

は可換である。いま (12.8.10) が完全系列であることより $\operatorname{Im}T(\bar{\alpha}) = \operatorname{Ker}T(\beta)$ だから、あとは $\operatorname{Im}T(\alpha) = \operatorname{Im}T(\bar{\alpha})$ を示せばよい。そのためには $T(\pi)$ の全射性をいえばよいが、

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\pi} M_1/\operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.12}$$

が完全系列であることと問題の仮定より

$$T(\operatorname{Ker}\alpha) \longrightarrow T(M_1) \xrightarrow{T(\pi)} T(M_1/\operatorname{Ker}\alpha) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{12.8.13}$$

は完全系列だから、とくに $T(\pi)$ は全射である。したがって $\operatorname{Im}T(\alpha) = \operatorname{Im}T(\bar{\alpha}) = \operatorname{Ker}T(\beta)$ である。よって

$$T(M_1) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M_2) \xrightarrow{T(\beta)} T(M_3) \longrightarrow 0 \tag{12.8.14}$$

は完全系列である。 □

C. Problem set 9

♤ **演習問題 12.5** (代数学 II 9.114)**.** R を可換環、M を R-加群とする。このとき M が入射的ならば可除になることを示せ。

証明　$a \in M,\ a \neq 0$ を零因子でないものとする。R-加群準同型 $a\times\colon M \to M,\ x \mapsto ax$ は単射となるから、いま M が入射的であることから図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "a\times"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{12.8.15}$$

を可換にする R-加群準同型 f が存在する。各 $y \in M$ に対し $y = f(ay) = af(y)$ が成り立つから $a\times$ は全射である。したがって M は可除である。 □

♤ **演習問題 12.6** (代数学 II 9.117). A を環とする。左 A-加群 M が**平坦 (flat)** であるとは共変関手 $\square \otimes_A M\colon \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ が完全関手になることとする。このとき、左 A-加群 M が平坦であることの必要十分条件は M を右 A^{OP}-加群とみなしたときに M が平坦であることであることを示せ。

証明　X を右 A-加群とし、$a.x \coloneqq xa$ により左 A^{OP}-加群ともみなす。このとき写像 $M\times X \to X\otimes_A M,\ (m,x) \mapsto x \otimes m$ は左 $\mathbb{Z}$-線型 A^{OP}-平衡 $\mathbb{Z}$-双線型写像であるから、$\mathbb{Z}$-線型写像 $M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X \to X \otimes_A M$ が誘導される。この逆写像は $X \times M \to M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X,\ (x,m) \mapsto m \otimes x$ により誘導される。したがって $X \otimes_A M \cong M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X$ であるから、$\mathbf{Mod}\text{-}A$ の完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \tag{12.8.16}$$

(これは A^{OP}-$\mathbf{Mod}$ の完全列でもある) に対し

$$0 \longrightarrow M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} X \longrightarrow M \otimes_{A^{\mathrm{OP}}} Y \tag{12.8.17}$$

が $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ の完全列であることと

$$0 \longrightarrow X \otimes_A M \longrightarrow Y \otimes_A M \tag{12.8.18}$$

が $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ の完全列であることは同値である。よって問題の主張が示せた。 □

♤ **演習問題 12.7** (代数学 II 9.119). 0 でない自由加群は忠実平坦であることを示せ。また 0 でない射影加群はどうか？

証明　A を環とし、M を 0 でない自由右 A-加群とする。このときとくに A は零環でない。M が忠実平坦であることを示す (M が左 A-加群の場合も同様である)。M は自由ゆえに平坦だから、M が忠実平坦であることをいうには、$f\colon X \to Y$ を任意の A-加群準同型として、$\mathbb{Z}$-加群準同型 $\mathrm{id}_M \otimes f\colon M \otimes_A X \to M \otimes_A Y$ が単射であるとき f が単射であることを示せばよい。いま M は自由右 A-加群だから、M の基底をひとつ固定すれば右 A-加群の同型 $\mu\colon M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} A_A$ が存在する。このとき図式

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{id}_M\otimes f"] \arrow[d, "\mu"'] & M \otimes_A Y \arrow[d, "\mu"] \\ \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{id}_{\bigoplus A}\otimes f"'] & \left(\bigoplus_{i\in I} A\right) \otimes_A Y \end{tikzcd} \tag{12.8.19}$$

は可換だから、$\mathrm{id}_M\otimes f$ の単射性より $\mathrm{id}_{\bigoplus A}\otimes f$ の単射性が従う。ここで任意の A-加群 Z に対し

$$\begin{array}{ccccc} \left(\bigoplus_{i\in I} A\right)\otimes_A Z & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I}(A\otimes_A Z) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I} Z \\ (a_i)_{i\in I}\oplus z & \longmapsto & (a_i\otimes z)_{i\in I} & \longmapsto & (a_i z)_{i\in I} \end{array} \tag{12.8.20}$$

は A-加群の同型である (定理 11.2.8, 補題 12.7.2)。よって

$$\begin{tikzcd} \left(\bigoplus_{i\in I} A\right)\otimes_A X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bigoplus A}\otimes f"'] & \bigoplus_{i\in I}(A\otimes_A X) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I} X \arrow[d, dashed, "g"] \\ \left(\bigoplus_{i\in I} A\right)\otimes_A Y \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I}(A\otimes_A Y) \arrow[r, "\sim"] & \bigoplus_{i\in I} Y \end{tikzcd} \tag{12.8.21}$$

の右端に誘導される A-加群準同型 $g((a_i x)_{i\in I}) = (a_i f(x))_{i\in I}$ は単射である。f が単射であることを示す。いま $\bigoplus_{i\in I} A \cong M \neq 0$ だからある $i_0 \in I$ が存在する。$x \in X$ とし、$f(x) = 0_Y$ と仮定すると $g((\delta_{i_0 i}x)_{i\in I}) = (\delta_{i_0 i} f(x))_{i\in I} = 0_{\bigoplus Y}$ である。ただし $\delta_{i_0 i}$ は

$$\delta_{i_0 i} := \begin{cases} 1_A & (i = i_0) \\ 0_A & (i \neq i_0) \end{cases} \tag{12.8.22}$$

と定義した。g の単射性より $(\delta_{i_0 i}x)_{i\in I} = 0_{\bigoplus X}$ だから $x = \delta_{i_0 i_0}x = 0_X$ である。よって f は単射である。したがって M は忠実平坦である。

一方、0 でない射影加群が忠実平坦とは限らない例を挙げる。$R := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とし、R の元を $n\in\mathbb{Z}$ に対し $\bar{n}$ と書くことにする。R のイデアル M, N を

$$M := (\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}, \qquad N := (\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \tag{12.8.23}$$

で定める。R を R-加群、M, N を R の R-部分加群とみなすと $R = M + N$, $M \cap N = 0$ より $R = M \oplus N$ が成り立つ。R は自由 R-加群だから、とくに M は (0 でない) 射影 R-加群である。そこで M が忠実平坦でないことを示せばよい。標準射影 $R \to M$ を p とおく。直和分解 $R = M\oplus N$ に沿って $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$, $\bar{2} = \bar{0} + \bar{2}$ と表せるから $p(\bar{0}) = \bar{0} = p(\bar{2})$ であり、したがって p は単射でない。一方 $\mathrm{id}_M \otimes p\colon M\otimes_R R \to M\otimes_R M$ は単射であることを示す。R-加群準同型 $f\colon M \to M\otimes_R M$, $m \mapsto m\otimes\bar{3}$ を考える。R-加群の同型 $\mu\colon M \xrightarrow{\sim} M\otimes_R R$, $m\mapsto m\otimes\bar{1}$ は図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\mu"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M\otimes_R R \arrow[r, "\mathrm{id}_M\otimes p"'] & M\otimes_R M \end{tikzcd} \tag{12.8.24}$$

を可換にするから、$\mathrm{id}_M\otimes p$ が単射であることをいうには f が単射であることをいえばよい。ここで f の右逆写像は、環 R における積を R のイデアル M に制限した演算から誘導される $g\colon M\otimes_R M \to M$, $m\otimes m' \mapsto mm'$ により与えられる。実際、各 $m \in M$ に対し $m \overset{f}{\mapsto} m\otimes\bar{3} \overset{g}{\mapsto} m\bar{3}$ だから $m = \bar{0}$ なら $m\bar{3} = \bar{0}$、$m = \bar{3}$ なら $m\bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$ となり、g はたしかに f の右逆写像である。したがって f、ひいては $\mathrm{id}_M\otimes p$ の単射性がいえた。よって M は R-加群として忠実平坦でない。 □

♤ **演習問題 12.8** (代数学 II 9.121). R を可換環、M, N を平坦 R-加群とする。このとき $M \otimes_R N$ は平坦であることを示せ。

第 III 部

種々の主題

第 13 章　外積代数

13.1　テンソル代数

定義 13.1.1 (テンソル代数). K を体、V を K-ベクトル空間とし、K 上のテンソル積の記号 $\otimes_K$ を $\otimes$ で書くことにする。さらに

$$T^n(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{ 個}}, \quad T^0(V) := K \tag{13.1.1}$$

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V) \tag{13.1.2}$$

とおき、$T(V)$ 上の K-双線型写像 $\cdot$ を

$$T^n(V) \times T^m(V) \to T^{n+m}(V), \quad (x, y) \mapsto x \cdot y := x \otimes y \tag{13.1.3}$$

で定めると、$(T(V), 1_K, 0_K, +, \cdot)$ は K-代数となる。これを V 上の**テンソル代数 (tensor algebra)** という。

定理 13.1.2 (テンソル代数の普遍性). K を体、V を K-ベクトル空間、ι を標準包含 $V = T^1(V) \hookrightarrow T(V)$ とする。このとき、任意の K-代数 A と K-線型写像 $f\colon V \to A$ に対し、図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\ T(V) \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{13.1.4}$$

を可換にする K-代数準同型 $F\colon T(V) \to A$ が一意に存在する。

証明　[TODO] □

定理 13.1.3 (基底). [TODO]

証明　[TODO] □

13.2　外積代数

定義 13.2.1 (外積代数). [TODO]

第 14 章　代数幾何学

14.1　零点定理

零点定理の弱形の特別な形 [TODO] ？はこれまでの知識で示すことができる。

定理 14.1.1 (Hilbert の零点定理 (弱形)). K を非可算濃度をもつ代数的閉体とする。このとき、$K[X_1,\ldots,X_n]$ の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し組 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in K^n$ が一意に存在して $\mathfrak{m}=(X_1-\alpha_1,\ldots,X_n-\alpha_n)$ をみたす。

証明　$\dim_K K[X_1,\ldots,K_n]=\aleph_0$ だから、可除 K-代数 $K[X_1,\ldots,K_n]/\mathfrak{m}$ は K 上高々可算次元である。よって Dixmier の補題 (補題 8.3.2) により環の同型 $f\colon K[X_1,\ldots,K_n]/\mathfrak{m}\to K$ が存在する。標準射影 $K[X_1,\ldots,K_n]\to K[X_1,\ldots,K_n]/\mathfrak{m}$ を π とおき、$\alpha_i:=f(\pi(X_i))\in K$ とおく。すると $f\circ\pi\colon K[X_1,\ldots,K_n]\to K$ は各 X_i を α_i に写す K-代数準同型だから、多項式環の普遍性 (定理 4.3.8) より可換図式

$$\begin{tikzcd} K[X_1,\ldots,K_n] \arrow[r, "\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}"] \arrow[d] & K \\ K[X_1,\ldots,K_n]/\mathfrak{m} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{14.1.1}$$

を得る。したがって $\mathfrak{m}=\operatorname{Ker}\mathrm{ev}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ であり、命題 4.3.12 より $\mathfrak{m}=(X_1-\alpha_1,\ldots,X_n-\alpha_n)$ を得る。 □

定理 14.1.2. $A\subset B\subset C$ を可換環、A はネーター、C は A-代数として有限生成かつ B-加群として有限生成とする。このとき B は A-代数として有限生成である。

証明　Hilbert の基底定理を用いる。[TODO] □

定理 14.1.3. K を体、E を体かつ有限生成 K-代数とする。このとき $\dim_K E<\infty$ である。

証明　[TODO] □

[TODO] 何が違う？

系 14.1.4 (Hilbert の零点定理 (弱形)). K を代数的閉体とする。このとき、$K[X_1,\ldots,X_n]$ の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し組 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in K^n$ が存在して [TODO] 一意性は？

$$\begin{array}{ccc} K[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\sim} & K \\ X_i & \longmapsto & \alpha_i \end{array} \tag{14.1.2}$$

をみたす。

証明 [TODO] □

14.2 アファイン多様体と Hilbert Nullstellensatz

[TODO] 既約加群のところで述べたやつとは違う？

定義 14.2.1 (アファイン多様体). K を代数的閉体とする。

- 部分集合 $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ に対し

$$\mathrm{Var}(I) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\ (\forall f \in I)\} \tag{14.2.1}$$

とおく。$\mathrm{Var}(I)$ を I により定まる**アファイン多様体 (affine variety)** という。

- $S \subset K^n$ に対し

$$\mathrm{Id}(S) := \{f \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\ (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in S)\} \tag{14.2.2}$$

とおく。

定義 14.2.2 (closed algebraic set とその射).

- I がイデアルのとき、$\mathrm{Var}(I)$ を **closed algebraic set** という。
- [TODO]

定義 14.2.3 (座標環). $S \subset K^n$ を closed algebraic set とする。

$$K[S] := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathrm{Id}(S) \tag{14.2.3}$$

[TODO]

補題 14.2.4. $\mathrm{Id}(S)$ は $K[X_1, \ldots, X_n]$ の根基イデアルである。[TODO]

証明 [TODO] □

補題 14.2.5.

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}((S)) \tag{14.2.4}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

[TODO] Rabinowitz trick で示す？

定理 14.2.6 (Hilbert の零点定理 (強形)).

$$\mathrm{Id}(\mathrm{Var}(I)) = \sqrt{I} \tag{14.2.5}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

第 15 章　有限群の表現論

15.1　群の表現

郡の表現は 1.7 節で定義した。ここではとくにベクトル空間の圏における群の表現について考える。

定義 15.1.1. G を群、K を体とする。K-ベクトル空間の圏における G の表現 T に対し、K-ベクトル空間 $V := T(*)$ と T により定まる群準同型 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (V, π) を **G の K 上の表現**といい、V をこの表現の**表現空間 (representation space)** という。

次の定理により、G の K 上の表現のかわりに $K[G]$-加群を考えればよいことがわかる。

定理 15.1.2. G を群、K を体とする。G の K 上の表現と群環 $K[G]$ 上の加群は 1 対 1 に対応する。

証明　(V, π) を G の K 上の表現とするとき、V の $K[G]$-加群構造を

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) v := \sum_{g \in G} a_g \pi(g) v \quad \left(\sum_{g \in G} a_g g \in K[G],\ v \in V\right) \tag{15.1.1}$$

で定めることができる。

逆に V を $K[G]$-加群とするとき、V は標準的な方法で K-ベクトル空間であり、群準同型 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を

$$\pi(g) v := gv \quad (g \in G,\ v \in V) \tag{15.1.2}$$

で定めると G の K 上の表現 (V, π) が得られる。これらの対応は互いに逆になっている。 □

定理 15.1.3 (Maschke の定理). K を標数 p の体、G を $p \nmid \sharp G$ なる有限群、V を $\dim_K V < \infty$ なる $K[G]$-加群、W を V の $K[G]$-部分加群とする。このとき、V のある $K[G]$-部分加群 $\widetilde{W}$ であって $V = W \oplus \widetilde{W}$ なるものが存在する。

証明　[TODO] □

定理 15.1.4. K を標数 p の体、G を $p \nmid \sharp G$ なる有限群とする。このとき、$K[G]$ は半単純環である。

証明　[TODO] □

系 15.1.5. K を標数 p の代数的閉体、G を $p \nmid \sharp G$ なる有限群、$U_1, \ldots, U_l$ を G の既約表現の同型類の完全代表系とする。このとき

$$\sharp G = (\dim U_1)^2 + \cdots + (\dim U_l)^2 \tag{15.1.3}$$

が成り立つ。

[TODO] 既約表現とは？

証明 [TODO] □

定理 15.1.6. $\mathcal{C}(G)$ を G の共役類全体の集合とする。

$$\{f_c \mid c \in \mathcal{C}(G)\} \tag{15.1.4}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

定理 15.1.7.

$$\sharp\{G \text{ の既約表現の同型類}\} = \sharp\mathcal{C}(G) \tag{15.1.5}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

定義 15.1.8 (誘導表現)**.** [TODO]

補題 15.1.9.

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{K[G]}(U, V) = \dim_K \mathrm{Hom}_{K[G]}(V, U) \tag{15.1.6}$$

[TODO]

証明 [TODO] Schur の補題を使う □

定理 15.1.10.

$$K[G] \oplus_{K[H]} V \cong \mathrm{Hom}_{K[G]}(K[G], V) \tag{15.1.7}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

第 IV 部

体

第 16 章　体

体について述べる。

16.1　体

定義 16.1.1 (素体). k を体とする。k の部分体すべての共通部分を k の**素体 (prime field)** という。

定義 16.1.2 (標数). k を体とし、環準同型 $\mathbb{Z} \to k,\ n \mapsto n1_k$ を ϕ とおく。$1_k = \phi(1) \in \operatorname{Im}\phi$ ゆえに $\operatorname{Im}\phi \neq 0$ であり、また $\operatorname{Im}\phi$ は整域だから、準同型定理より $\operatorname{Ker}\phi$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルである。よって $\operatorname{Ker}\phi = (p)$ (p は 0 または素数) と表せる。p を k の**標数 (characteristic)** という。

16.2　有限体

定義 16.2.1 (有限体). 濃度が有限の体を**有限体 (finite field)** という。

定理 16.2.2 (有限体の濃度). 有限体の濃度は素数の冪である。

証明　k を有限体とし、k の標数を p とおく。$p = 0$ だとすると k が $\mathbb{Z}$ と同型な部分環を含むことになり k の濃度が有限であることに反するから、p は素数である。よって k は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な部分環、より強く部分体をもつ。k を左正則加群とみなせば、係数制限により k は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上のベクトル空間となり、いま k の濃度は有限だから $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} k =: n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ である。よって k の濃度は $\sharp k = p^n$ である。 □

第 17 章　体の拡大

17.1　体の拡大

多角形の対称変換と多項式の Galois 群との関連は次のように整理できる：

[TODO] なぜここに書いてある？

多角形 P	多項式 $f(x) \in F[x]$
平面	$f(x)$ の分離体 E
頂点 $\mathrm{Vert}(P) = \{v_1, \ldots, v_n\}$	根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
線型変換	E の自己同型
直交変換	F を固定する E の自己同型
P を固定する直交変換の群	Galois 群 $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(E/F)$
正多角形	既約多項式

定義 17.1.1 (体の拡大)**.** L を体とする。L の部分環 K が体であるとき、K を L の**部分体 (subfield)** といい、L を K の**拡大体 (extension field)** という。L/K **は体の拡大である**ともいう。L の K-ベクトル空間としての次元を $[L : K]$ と書き、L の K 上の**拡大次数 (degree of field extensioni)** という。

例 17.1.2 (拡大体の例)**.**

- $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ の拡大体である。
- $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の拡大体である。$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間として基底 $\{1, \sqrt{-1}\}$ がとれるので $[\mathbb{C} \colon \mathbb{R}] = 2$ である。したがって $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の 2 次拡大である。
- $d \neq 1$ を square-free な整数とする（e.g. $d = 6$）。$L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathbb{C}$ の部分体である（実際、$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$ であり、$x^2 - d$ は $\mathbb{Q}[x]$ の既約元（$\because$ L は $\mathbb{C}$ の部分環ゆえに整域）だから、$\mathbb{Q}$ が体であることと併せて $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$ は体である）。$\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ ゆえに $[L \colon \mathbb{Q}] \geq 2$ である。L は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間として基底 $\{1, \sqrt{d}\}$ がとれるので $[L \colon \mathbb{Q}] = 2$ である。
- K を体とする。$A = K[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環、$L = K(x_1, \ldots, x_n)$ を n 変数有理関数体とする。A の K-ベクトル空間としての次元は ∞ である。さらに A は整域なので、その商体 $K(x_1, \ldots, x_n)$ への自然な準同型は単射、したがって A は $K(x_1, \ldots, x_n)$ に含まれる。よって $K(x_1, \ldots, x_n)/K$ は無限次拡大である。

定義 17.1.3 (代数体)**.** $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体を**代数体 (algebraic field)** という。

定義 17.1.4 (合成体)**.** L を体とし、M_1, M_2 を L の部分体とする。[TODO]

命題 17.1.5 (体の準同型)**.** K を体とし、L, M を K の拡大体とする。

(1)　$S \subset L$ に対し包含写像　$S \hookrightarrow K(S)$　は K の拡大体の圏のエピ射である。

$$S \hookrightarrow K(S) \rightrightarrows \bullet \tag{17.1.1}$$

すなわち、K の拡大体の間の準同型 $K(S) \to \bullet$ は S 上の値で決まる。

(2)　[TODO]

証明　cf. [雪江] p.163　□

17.2　添加

定義 17.2.1 (添加). L/K を体の拡大、$S \subset L$ を部分集合とする。

- S が有限集合 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ なら

$$K(S) := \left\{ \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \in L \colon \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \text{ は } K \text{ 係数有理式}, \; g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \right\} \tag{17.2.1}$$

- S が無限集合なら

$$K(S) := \bigcup_{\substack{S' \subset S \\ |S'| < \infty}} K(S') \tag{17.2.2}$$

と定義する。$K(S)$ を K に S を**添加 (adjunction)** した体という。

- S が有限集合ならば $K(S)$ は K 上**有限生成 (finitely-generated)** といい、
- S が 1 元集合ならば $K(S)$ は K の**単拡大** であるという。

例 17.2.2 (有限生成だが有限次拡大でない例). K を体とする。K 上の 1 変数有理関数体 $K(x)$ は K 上有限生成である。しかし拡大次数は ∞ である。

定義 17.2.3 (代数拡大と超越拡大). L/K を体の拡大、$x \in L$ とする。$a_0, \ldots, a_n \in K$、少なくともひとつは 0 でない、が存在して

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{17.2.3}$$

が成り立つとき、x は K 上**代数的 (algebraic)** であるといい、そうでなければ x は K 上**超越的 (trancendental)** であるという。L のすべての元が K 上代数的ならば、L/K は**代数拡大 (algebraic extension)** といい、そうでなければ L/K は**超越拡大 (trancendental extension)** という。

例 17.2.4 (有限生成と代数拡大).

- $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ は有限生成だが代数拡大でない。
- $\mathbb{Q}(\{\sqrt[n]{2} \colon n = 1, 2, \ldots\})$ は代数拡大だが有限生成でない。

命題 17.2.5 (有限次拡大は代数拡大). 体の拡大 L/K が有限次拡大ならば、L/K は代数拡大である。

証明 省略 □

命題 17.2.6 (有限群の Lagrange の定理の類似). $L/M, M/K$ を体の有限次拡大とする。このとき、L/K も有限次拡大で

$$[L\colon K] = [L\colon M][M\colon K] \tag{17.2.4}$$

が成り立つ。

証明 省略 □

定義 17.2.7 (最小多項式). L/K を体の代数拡大とし、$\alpha \in L$ とする。K 上の 0 でないモニック多項式 f で $f(\alpha) = 0$ をみたすもののうち $\deg f(x)$ が最小となるものが一意に存在する（証明略)。これを α の K 上の**最小多項式 (minimal polynomial)** という。

定義 17.2.8 (共役). L, M を K の拡大体、$\alpha \in L$ とする。α の K 上の最小多項式を f とするとき、f の根で M に属するものを、α の M における K 上の**共役 (conjugate)**、あるいは単に K 上の共役という。

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[d, phantom, "\Cap"] & & \\
L \arrow[dr, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\
& K &
\end{tikzcd} \tag{17.2.5}$$

例 17.2.9 (共役の例). $d \neq 1$ を square-free な整数とする (e.g. $d = 6$)。$\sqrt{d}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $x^2 - d = (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d})$ なので、$\sqrt{d}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役は $\pm\sqrt{d}$ である。

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{d} \arrow[d, phantom, "\Cap"] & & -\sqrt{d} \arrow[d, phantom, "\Cap"] \\
\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd} \tag{17.2.6}$$

命題 17.2.10 (共役は K 準同型で保たれる). L/K を代数拡大、F/K を拡大とする。各 $\alpha \in L$ と $\phi \in \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L, F)$ に対し、$\phi(\alpha)$ は α の共役である。

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, phantom, "\Cap"] & & \phi(\alpha) \arrow[d, phantom, "\Cap"] \\
L \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, dash] & & F \arrow[dl, dash] \\
& K &
\end{tikzcd} \tag{17.2.7}$$

証明 cf. [雪江] p.167 □

17.3 代数閉包

定義 17.3.1 (代数閉包). K を体とする。L/K が代数拡大であり L が代数的閉体であるとき、L を K の**代数閉包 (algebraic closure)** という。

定理 17.3.2 (代数閉包の存在 (Steinitz)). [TODO]

証明 省略 □

17.4 分離拡大

定義 17.4.1 (分離拡大).

- $f(x) \in K[x], \alpha \in \overline{K}$ で、$f(x)$ が $\overline{K}[x]$ で $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき、α を $f(x)$ の**重根 (multiple root)** という。
- $f(x)$ が $\overline{K}$ に重根を持たないとき、$f(x)$ を**分離多項式 (separable polynomial)** という。
- $\alpha \in \overline{K}$ の K 上の最小多項式が分離多項式であるとき、α は K 上**分離的 (separable)** であるといい、そうでなければ**非分離的 (inseparable)** であるという。
- K の代数拡大 L のすべての元が K 上分離的であるとき、L を K の**分離拡大 (separable extension)** といい、そうでなければ**非分離拡大 (inseparable extension)** であるという。
- K の任意の代数拡大が K の分離拡大ならば、K を**完全体 (perfect field)** という。

多項式が分離多項式かどうかは、微分をみて判定することができる。

命題 17.4.2 (分離多項式と微分). K を体とし、$f(x) \in K[x]$ とする。このとき、次は同値である：

(1) $f(x)$ は分離多項式である。

(2) $f(x)$ と $f'(x)$ は互いに素である。

証明 省略 □

例 17.4.3 (分離的な元). p を素数、K を標数 p の体とする。$a \in K, f(x) = x^p - x - a$ とおく。$\alpha \in \overline{K}$ が $f(x)$ の根なら、$f'(x) = -1$ なので、α は K 上分離的である（実際、もし α が K 上分離的でなかったとすれば、α の K 上の最小多項式 $g(x)$ は $\overline{K}$ に重根を持つ。よって、いま $f(\alpha) = 0$ ゆえに f は g で割り切れることから、f は $\overline{K}$ に重根を持つ。一方、$f(x)$ と $f'(x)$ は互いに素だから、$f(x)$ は $\overline{K}$ に重根を持たず、矛盾）。

例 17.4.4 (非分離拡大の例). [TODO]

代数拡大が分離拡大かどうかを考えるとき、もとの体が完全体ならば話は簡単である。次の命題は体が完全体で

あるための十分条件を与える。

命題 17.4.5 (完全体であるための十分条件). 標数 0 の体と有限体は完全体である。

証明 省略 □

定義 17.4.6 (分離閉包). L/K を代数拡大とする。L の元で K 上分離的なもの全体の集合を L_s と書き、L における K の**分離閉包 (separable closure)** という。また、$\overline{K}$ における K の分離閉包を K^s と書き、K の**分離閉包**という。

定義 17.4.7 (分離次数). L/K を有限次拡大とする。

- $[L_s : K]$ を L の K 上の**分離次数 (separable degree)** といい、$[L : K]_s$ と書く。
- $[L : L_s]$ を L の K 上の**非分離次数 (inseparable degree)** といい、$[L : K]_i$ と書く。

命題 17.4.8 (分離次数とホムセットの濃度). L/K を有限次拡大とする。

(1) [TODO]
(2) $[L : K]_s = |\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L, \overline{K})|$

証明 cf. [雪江] p.183 □

例 17.4.9 ($\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ のホムセット). $d \neq 1$ を square-free な整数とし (e.g. $d = 6$)、$L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とする。$\mathrm{ch}\, L = 0$ なので、$L/\mathbb{Q}$ は分離拡大である (命題 17.4.5)。よって $|\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{al}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| = 2$ である (命題 17.4.8)[TODO] ?。$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{al}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ とすると、L が $\mathbb{Q}$ の代数拡大であることから、命題 17.2.10 より $\sigma(\sqrt{d})$ は $\sqrt{d}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役、すなわち $\sigma(\sqrt{d}) = \pm\sqrt{d}$ である (例 17.2.9)。L は $\mathbb{Q}$ 上 $\sqrt{d}$ で生成されるので、σ は $\sqrt{d}$ での値で定まる (命題 17.1.5)。σ はちょうど 2 通りあるので、両方の可能性が起きなければならない。そこで σ を $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$ なるものとすれば、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{al}}(L, \overline{\mathbb{Q}}) = \{\mathrm{id}_L, \sigma\}$ と決まる。

17.5 正規拡大

定義 17.5.1 (正規拡大). L/K を代数拡大とする。すべての $\alpha \in L$ に対し α の K 上の最小多項式が L 上で 1 次式の積になるとき、L/K を**正規拡大 (normal extension)** という。

次の定理により、正規拡大かどうかはホムセットをみることで判定できる。

定理 17.5.2 (正規拡大とホムセット). L/K を体の有限次拡大とする。このとき、次は同値である：

(1) L/K は正規拡大である。
(2) $\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L, \overline{K})$ の元は L の元を固定する。

証明　cf. [雪江] p.185 □

正規拡大のうちとくに重要なのは、ホムセットが自己同型となる場合である。

命題 17.5.3 (ホムセットが自己同型群となる場合). L/K を正規代数拡大とする。このとき $\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L,L) = \mathrm{Aut}_K^{\mathrm{al}} L$ である。

証明　cf. [雪江] p.185 □

例 17.5.4 (正規拡大の例). $d \neq 1$ を square-free な整数とする (e.g. $d = 6$)。例 17.4.9 より各 $\phi \in \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{al}}(L, \overline{K})$ は $\phi(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ をみたすから、定理 17.5.2 より $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ は正規拡大である。

定義 17.5.5 (最小分解体). K を体とし、$f(x) \in K[x]$ とする。$f(x)$ を

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n) \quad (a_0 \in K^\times,\ \alpha_i \in \overline{K}) \tag{17.5.1}$$

と表すとき、$K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を f の K 上の**最小分解体 (splitting field)** という。

例 17.5.6 (最小分解体の例). [TODO] cf. [雪江] p.186

17.6 Galois 拡大

[TODO] キーワード: Galois の基本定理、円分体、有限体、Kummer 理論、Artin-Schreier 理論、可解性、作図

分離性と正規性を兼ね備えた拡大が Galois 拡大である。

定義 17.6.1 (Galois 拡大). L/K を代数拡大とする。

- L/K が分離拡大かつ正規拡大なら **Galois 拡大 (Galois extension)** という。

L/K をさらにガロア拡大とする。

- $\mathrm{Aut}_K^{\mathrm{al}} L$ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ と書き、L の K 上の **Galois 群 (Galois group)** という。
- $\mathrm{Gal}(L/K)$ がアーベル群なら、L/K を**アーベル拡大 (abelian extension)** という。
- $\mathrm{Gal}(L/K)$ が巡回群なら、L/K を**巡回拡大 (cyclic extension)** という。

定義 17.6.2 (多項式の Galois 群). K を体、$f(x) \in K[x]$ とし、L を $f(x)$ の K 上の最小分解体とする。$\mathrm{Gal}(L/K)$ を $f(x)$ の K 上の **Galois 群 (Galois group)** という。

次の例より、Galois 群の元は複素共役の一般化とみなせることがわかる。

例 17.6.3 (Galois 拡大の例 1). 体の拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は命題 17.4.5 と定理 17.5.2 により分離拡大かつ正規拡大だから、Galois 拡大である。例 17.4.9 と同様の議論により $|\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{al}}(\mathbb{C},\mathbb{C})| = 2$ であるから、命題 17.5.3 より

$|\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})| = |\mathrm{Aut}^{\mathrm{al}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})| = 2$ である。したがって $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

例 17.6.4 (Galois 拡大の例 2)**.** $d \neq 1$ は square-free な整数とする（e.g. $d = 6$）。例 17.4.9 と例 17.5.4 により、代数拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ は分離拡大かつ正規拡大だから、Galois 拡大である。命題 17.5.3 より $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が従う。

定理 17.6.5 (Galois 群は対称群の部分群)**.** K を体とし、$f(x) \in K[x]$ を $\deg f(x) = n$ なる分離多項式とする。このとき、$f(x)$ の K 上の Galois 群は対称群 S_n の部分群と同型である。

証明　$f(x)$ の相異なる n 個の根を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ とおくと、$f(x)$ の K 上の Galois 群は $L := K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と表せる。$\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ は σ の $A := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 上での値で決まるから、

$$\mathrm{Gal}(L/K) \to S_n, \quad \sigma \mapsto \sigma|_A \tag{17.6.1}$$

は単射準同型である。 □

17.7　不変体と Artin の定理

定義 17.7.1 (不変体)**.** L を体、G を有限群とし、G は L に忠実に作用しているとする。このとき、

$$L^G := \{\alpha \in L \colon g \cdot \alpha = \alpha \ (\forall g \in G)\} \tag{17.7.1}$$

を G の**不変体 (fixed field)** という。

命題 17.7.2 (Artin の定理)**.** 定義 17.7.1 の設定のもとで、L/L^G は Galois 拡大であり、$\mathrm{Gal}(L/L^G) \cong G$ が成り立つ。

17.8　Galois 理論の基本定理

命題 17.8.1 (中間体の束)**.** L/K を体の拡大とする。$\mathrm{Lat}(L/K)$ を L/K の中間体全体の集合とし、$\mathrm{Lat}(L/K)$ 上に半順序 $\preceq$ を

$$B \preceq C \quad \Leftrightarrow \quad B \subset C \tag{17.8.1}$$

で定めると、$(\mathrm{Lat}(L/K), \preceq)$ は共通部分を交わり、合成体を結びとして束となる。

証明　省略 □

次の補題は Galois 拡大の分離性と正規性を利用するもので、Galois 理論の基本定理の証明に重要な役割を果たす。

補題 17.8.2 (中間体と Galois 拡大)**.** L/K を有限次 Galois 拡大とし、$M \in \mathrm{Lat}(L/K)$ とする。このとき、L/M は Galois 拡大である。

証明 [TODO] □

定理 17.8.3 (Galois 理論の基本定理)**.** L/K を有限次 Galois 拡大とし、Galois 群を $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする。

(1) 写像 $\gamma\colon \mathrm{Sub}(G) \longrightarrow \mathrm{Lat}(L/K)$,

$$H \mapsto L^H \tag{17.8.2}$$

は order-reversing な全単射であり、逆写像は

$$\mathrm{Gal}(L/M) \leftarrow M \tag{17.8.3}$$

で与えられる。

(2) $M \in \mathrm{Lat}(L/K)$ に関し

$$M/K \text{ が Galois 拡大} \iff \mathrm{Gal}(L/M) \text{ が } G \text{ の正規部分群} \tag{17.8.4}$$

が成り立つ。

証明 不変体の定義から order-reversing であることは明らか。[TODO] □

17.9 Hilbert の定理 90

証明 cf. [雪江] p.197 □

定理 17.9.1 (Galois 拡大の推進定理)**.** [TODO] cf. [雪江] p.219

定義 17.9.2 (Galois コホモロジー)**.** [TODO]

定理 17.9.3 (Hilbert の定理 90)**.** [TODO]

演習問題の解答

演習問題 6.1 の解答. [TODO] □

演習問題 6.2 の解答. まず、$\mathbb{C}[\mu_2]$ および $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ はそれぞれ環準同型

$$\varphi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}[\mu_2],\quad z\mapsto z\bar{0} \tag{17.9.1}$$

$$\psi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}\times\mathbb{C},\quad z\mapsto (z,z) \tag{17.9.2}$$

により $\mathbb{C}$-alg となっている。写像 $f\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}[\mu_2]$ を

$$(a,b)\mapsto \frac{a+b}{2}\bar{0}+\frac{a-b}{2}\bar{1} \tag{17.9.3}$$

で定める。f が $\mathbb{C}$-alg 準同型であることを示す。加法について

$$\begin{aligned}
f((a,b)+(a',b')) &= f(a+a',b+b') && (17.9.4)\\
&= \frac{a+a'+b+b'}{2}\bar{0}+\frac{a+a'-b-b'}{2}\bar{1} && (17.9.5)\\
&= \frac{a+b}{2}\bar{0}+\frac{a-b}{2}\bar{1}+\frac{a'+b'}{2}\bar{0}+\frac{a'-b'}{2}\bar{1} && (17.9.6)\\
&= f(a,b)+f(a',b') && (17.9.7)
\end{aligned}$$

乗法について

$$\begin{aligned}
f(a,b)\cdot f(a',b') &= \left(\frac{a+b}{2}\bar{0}+\frac{a-b}{2}\bar{1}\right)\cdot\left(\frac{a'+b'}{2}\bar{0}+\frac{a'-b'}{2}\bar{1}\right) && (17.9.8)\\
&= \frac{1}{4}\left((a+b)(a'+b')+(a-b)(a'-b')\right)\bar{0} && (17.9.9)\\
&\quad+\frac{1}{4}\left((a-b)(a'+b')+(a+b)(a'-b')\right)\bar{1} && (17.9.10)\\
&= \frac{aa'+bb'}{2}\bar{0}+\frac{aa'-bb'}{2}\bar{1} && (17.9.11)\\
&= f(aa',bb') && (17.9.12)\\
&= f((a,b)\cdot(a',b')) && (17.9.13)
\end{aligned}$$

単位元について

$$f(1,1)=\frac{1+1}{2}\bar{0}+\frac{1-1}{2}\bar{1}=1\bar{0} \tag{17.9.14}$$

が成り立つから、f は環準同型である。また、図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\times\mathbb{C} \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{C}[\mu_2] \\
& \mathbb{C} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd} \tag{17.9.15}$$

が可換となることは

$$f\circ\psi(z)=f(z,z)=z\bar{0}=\varphi(z) \tag{17.9.16}$$

よりわかる。したがって f は $\mathbb{C}$-alg 準同型である。f の定義より明らかに $\operatorname{Ker} f=0$ だから、f は単射である。また、再び f の定義から明らかに f は全射である。よって f は全単射、したがって $\mathbb{C}$-alg 同型である。 □

演習問題 6.3 の解答. 反例を挙げる。$A := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$, $B := M_2(\mathbb{Z})$ とおき、写像 $f\colon A \to B$ を

$$f\colon \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17.9.17}$$

で定める。f は明らかに単射で、また行列の演算の性質から $f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y)$ も成り立つ。しかし

$$f\colon 1_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 1_B \tag{17.9.18}$$

だから f は環準同型ではない。 □

演習問題 6.4 の解答. a, b が冪零元であるとし、$a^m = 0, b^n = 0\ (m, n \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする。$l = m + n$ とおくと、

$$(a+b)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k} b^k = 0 \tag{17.9.19}$$

が成り立つ。ただし、最初の等号では a, b が可換であることを用い、最後の等号では

- $k \geq m$ のとき $a^k = 0$
- $k < m$ のとき $l - k > l - m = n$ より $b^{l-k} = 0$

であることを用いた。したがって $a + b$ も冪零元である。

非可換環の場合の反例として

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \tag{17.9.20}$$

を考える。

$$A^2 = 0, B^2 = 0 \tag{17.9.21}$$

だからこれらは冪零元である。一方、

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{17.9.22}$$

ゆえに

$$(A+B)^2 = I_2 \tag{17.9.23}$$

だから、$(A+B)^n = 0$ なる正整数 n があったとすると

$$I_2 = (A+B)^{2n} = 0 \tag{17.9.24}$$

となり矛盾。 □

演習問題 6.5 の解答. $n^{k-1} \neq 0, n^k = 0, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする。$u + n$ の逆元を発見する手立てとして、等比数列の公

式を思い出して形式的に

$$(u+n)^{-1} \overset{?}{=} \frac{1}{u+n} \overset{?}{=} u^{-1}\frac{1}{1+nu^{-1}} \overset{?}{=} u^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(-nu^{-1})^i \tag{17.9.25}$$

と書いてみると、

$$u^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i} n^i \tag{17.9.26}$$

が $u+n$ の逆元になりそうだと気づく。そして実際、

$$(u+n)u^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i} n^i = (u+n)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i-1} n^i \tag{17.9.27}$$

$$= u\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i-1} n^i + n\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i-1} n^i \tag{17.9.28}$$

$un = nu$ より $u^{-1}n = nu^{-1}$ であることに注意して

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i} n^i + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i-1} n^{i+1} \tag{17.9.29}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i} n^i + \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i u^{-i-1} n^{i+1} \tag{17.9.30}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i u^{-i} n^i + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1} u^{-i} n^i \tag{17.9.31}$$

$$= 1 \tag{17.9.32}$$

となる。したがって $u+n \in A^\times$ である。 □

演習問題 6.6 の解答. [TODO] □

演習問題 6.7 の解答. $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ とする。(i,j) 成分が 1 の行列単位を E_{ij} と書くことにする。まず

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = E_{ii}A = AE_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{17.9.33}$$

より A は対角行列である。つぎに

$$a_{jj}E_{ij} = E_{ij}A = AE_{ij} = a_{ii}E_{ij} \tag{17.9.34}$$

より $a_{jj} = a_{ii}$ であるから、A はスカラー行列である。そこで $A = aI_n, a \in R$ とおく。任意の $b \in R$ に対し

$$abI_n = A(bI_n) = (bI_n)A = baI_n \tag{17.9.35}$$

したがって $ab = ba$ が成り立つ。よって $a \in Z(R)$ である。逆に対角成分が $Z(R)$ の元であるようなスカラー行列は明らかに $Z(M_n(R))$ に属する。したがって $Z(M_n(R))$ は対角成分が $Z(R)$ の元であるようなスカラー行列の全体である。 □

演習問題 6.8 の解答. [TODO] □

演習問題 6.9 の解答. $f \in C(\mathbb{R})$ が $C(\mathbb{R})$ の零因子であることが次と同値であることを示す:

$$f \neq 0 \quad \text{and} \quad \exists U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in U \quad \text{に対し} \quad f(x) = 0 \tag{17.9.36}$$

($\Leftarrow$) U は $\mathbb{R}$ の開集合だから、或る開区間 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ を含む。そこで

$$g(x) := \begin{cases} x - (x_0 - \varepsilon/2) & x \in (x_0 - \varepsilon/2, x_0) \\ -x + (x_0 + \varepsilon/2) & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon/2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17.9.37}$$

と定めれば $g \in C(\mathbb{R}), g \neq 0$ であり、$f|_U = 0$ の仮定から $f \cdot g = 0$ が従う。$f \neq 0, g \neq 0$ だから f は $C(\mathbb{R})$ の零因子である。

($\Rightarrow$) f は $C(\mathbb{R})$ の零因子であるとする。零因子の定義から $f \neq 0$ である。背理法のため

$$\forall U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \quad \text{に対し} \quad \exists x \in U \quad \text{s.t.} \quad f(x) \neq 0 \tag{17.9.38}$$

を仮定する。いま f が $C(\mathbb{R})$ の零因子であることから

$$\exists g \in C(\mathbb{R}), g \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad f \cdot g = 0 \tag{17.9.39}$$

である。このとき、$g \neq 0$ より

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad g(x_0) \neq 0 \tag{17.9.40}$$

である。このことと g の点 x_0 における連続性より

$$\exists U: x_0 \text{ の開近傍} \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in U \quad \text{に対し} \quad g(x) \neq 0 \tag{17.9.41}$$

が成り立つ。ここで、この U に対して背理法の仮定を用いると

$$\exists x_1 \in U \quad \text{s.t.} \quad f(x_1) \neq 0 \tag{17.9.42}$$

である。よって

$$(f \cdot g)(x_1) = f(x_1)g(x_1) \neq 0 \tag{17.9.43}$$

が成り立つ。これは $f \cdot g = 0$ に矛盾。 □

演習問題 6.10 の解答. $\dim_{\mathbb{C}} A > 1$ だから $\mathbb{C}$-線型独立な $v_1, v_2 \in A$ がとれる。A が零因子を持たないとして矛盾を導く。$a \in A \setminus \{0\}$ とし、2 つの写像

$$L_a: A \to A, \quad x \mapsto ax, \quad R_a: A \to A, \quad x \mapsto xa \tag{17.9.44}$$

を考える。これらは明らかに $\mathbb{C}$-線型であり、A が零因子を持たないという仮定から Ker は自明、したがって

単射である。$\dim_{\mathbb{C}} < \infty$ であることとあわせて、L_a, R_a の全射性が従う。よって

$$\begin{cases} \exists x \in A \quad \text{s.t.} \quad ax = 1 \\ \exists y \in A \quad \text{s.t.} \quad ya = 1 \end{cases} \tag{17.9.45}$$

であり、逆元の一意性から $x = y$ が従う。よって a は A の可逆元である。さて、$a \in A \setminus \{0\}$ は任意であったから、とくに v_1, v_2 も A の可逆元である。そこで $w \coloneqq v_2 v_1^{-1}$ $(\neq 0)$ とおき、$\mathbb{C}$-線型写像 L_w の特性多項式[1)]を $\Phi(X)$ とおく。Cayley-Hamilton の定理より $\Phi(L_w) = 0$ が成り立つから、

$$0 = (\Phi(L_w))(v_1) = \Phi(w)v_1 \tag{17.9.46}$$

であり、A が零因子を持たないという仮定から $\Phi(w) = 0$ が従う。ここで、$\mathbb{C}$ は代数的閉体だから $\Phi(X)$ は 1 次式の積に分解し

$$\Phi(X) = (X - \mu_1)(X - \mu_2) \cdots (X - \mu_n) \tag{17.9.47}$$

の形に書ける。ただし μ_i らは L_w の固有値である。したがって、$\Phi(w) = 0$ であることと、A が零因子を持たないという仮定をあわせて

$$w - \mu_k \cdot 1_A = 0 \quad (\exists k = 1, \ldots, n) \tag{17.9.48}$$

が成り立ち、w の定義とあわせて

$$v_2 = wv_1 = \mu_k \cdot v_1 \tag{17.9.49}$$

が従う。これは v_1, v_2 の $\mathbb{C}$-線型独立性に矛盾する。よって A が零因子を持たないとした仮定は偽で、題意の主張が示せた。 □

演習問題 6.11 の解答.　($\Rightarrow$)　$B \times C$ において $(1_B, 0) \neq 1_{B\times C}, 0_{B\times C}$ は

$$(1_B, 0)^2 = (1_B, 0) \tag{17.9.50}$$

をみたすから冪等元であり、また明らかに $B \times C$ の中心に属する。そこで、これを同型によって A に写したものが求める e となる。

($\Leftarrow$)　$e, 1 - e$ は A の中心冪等元だから、

$$B \coloneqq Ae, \quad C \coloneqq A(1 - e) \tag{17.9.51}$$

はそれぞれ $e, 1 - e$ を単位元として環をなす。そこで写像 $A \to B \times C$ を

$$x \mapsto (xe, x(1 - e)) \tag{17.9.52}$$

で定めれば、これが環同型 $A \cong B \times C$ を与える。定義より B, C は零環でないから、これらが求めるものである。 □

演習問題 6.12 の解答.　所与の行列を左から順に $1, I, J, K$ と書くことにする。乗積表は

	1	I	J	K
1	1	I	J	K
I	I	-1	K	$-J$
J	J	$-K$	-1	I
K	K	J	$-I$	-1

となる。よって

$$\begin{aligned}(a1 + bI + cJ + dK)(a'1 + b'I + c'J + d'K) &= aa'1 + bb'I + cc'J + dd'K \\ &\quad + ba'I - bb'1 + bc'K - bd'J \\ &\quad + ca'J - cb'K - cc'1 + cd'I \\ &\quad + da'K + db'J - dc'I - dd'1\end{aligned}$$

である。そこで

$$a' = a, \quad b' = -b, \quad c' = -c, \quad d' = -d \tag{17.9.53}$$

とおけば

$$(a1 + bI + cJ + dK)(a1 - bI - cJ - dK) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)1 \tag{17.9.54}$$

となる。したがって $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ のとき、すなわち $a1 + bI + cJ + dK \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ のとき $a1 + bI + cJ + dK$ の乗法逆元が

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a1 - bI - cJ - dK) \tag{17.9.55}$$

で与えられることがわかる。よって $\mathbb{H} \setminus \{0\} \subset \mathbb{H}^\times$ である。逆向きの包含も明らかに成り立つ。よって $\mathbb{H} \setminus \{0\} = \mathbb{H}^\times$、したがって $\mathbb{H}$ は division algebra である。 □

演習問題 6.13 の解答. $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ とおくと

$$x^2 = (a + bi + cj + dk)^2 \tag{17.9.56}$$
$$= aa + abi + acj + adk \tag{17.9.57}$$
$$+ bai - bb + bck - bdj \tag{17.9.58}$$
$$+ caj - cbk - cc + cdi \tag{17.9.59}$$
$$+ dak + dbj - dci - dd \tag{17.9.60}$$
$$= a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk \tag{17.9.61}$$

だから、これが -1 に一致する条件は

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1 \\ ab = ac = ad = 0 \end{cases} \tag{17.9.62}$$

すなわち

$$a = 0 \wedge b^2 + c^2 + d^2 = 1 \tag{17.9.63}$$

である。よって

$$\{x \in \mathbb{H} \mid x^2 = -1\} = \{bi + cj + dk \mid b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \tag{17.9.64}$$

$$= \{(\sin\theta_1 \sin\theta_2)i + (\sin\theta_1 \cos\theta_2)j + (\cos\theta_1)k \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\} \tag{17.9.65}$$

が成り立つ。右辺は無限集合だから、左辺もそうであり、したがって題意の主張が示せた。 □

演習問題 6.14 の解答. [TODO] 1.10 を使えば零因子の存在はいえるが…？ cf. http://doi.org/10.5169/seals-46956 □

演習問題 6.15 の解答. [TODO] □

演習問題 6.16 の解答. [TODO] 環同型を除いて？巡回群は $\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に群同型だから、$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ について考えれば十分。そこで、まず $\mathbb{Z}$ について考える。$\mathbb{Z}$ の通常の加法、乗法をそれぞれ $+, \times$ で表すことにし、さらに $\mathbb{Z}$ に乗法 $\odot$ が与えられたとする。乗法 $\odot$ に関する単位元を e とおく。このとき $e = 0$ なら

$$1 = e \odot 1 \tag{17.9.66}$$

$$= 0 \odot 1 \tag{17.9.67}$$

$$= 0 \tag{17.9.68}$$

となり矛盾だから、$e \neq 0$ である。$e > 0$ の場合

$$1 = e \odot 1 \tag{17.9.69}$$

$$= (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{e \text{ times}}) \odot 1 \tag{17.9.70}$$

$$= \underbrace{1 \odot 1 + \cdots + 1 \odot 1}_{e \text{ times}} \tag{17.9.71}$$

$$= e \times (1 \odot 1) \tag{17.9.72}$$

ゆえに e は乗法 $\times$ に関し可逆だから $e = \pm 1$ である。いま $e > 0$ であったから $e = 1$ である。すると $1 \odot 1 = e \odot e = e = 1$ だから、各 $a, b \in \mathbb{Z}$ に対し

$$a \odot b = a \times b \times (1 \odot 1) \tag{17.9.73}$$

$$= a \times b \times 1 \tag{17.9.74}$$

$$= a \times b \tag{17.9.75}$$

が成り立つ。 □

演習問題 6.17 の解答. [TODO] □

演習問題 6.18 の解答. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ が $\mathbb{C}$ の加法部分群であることと 1 を含むことは明らか。乗法について閉じていることは

$$(n+\sqrt{2}m)(a+\sqrt{2}b) = na + 2mb + \sqrt{2}(nb+ma) \tag{17.9.76}$$

よりわかる。したがって $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ は $\mathbb{C}$ の部分環である。乗法群 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times}$ が題意のように表されることを示す。"⊂"はモノイド準同型

$$N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times} \to \mathbb{Z}, \quad n+\sqrt{2}m \mapsto n^2 - 2m^2 \tag{17.9.77}$$

を用いて示せる。

∵ $(n+\sqrt{2}m)(a+\sqrt{2}b) = 1$ であるとすれば、両辺を N で写して

$$(n^2-2m^2)(a^2-2b^2) = 1 \tag{17.9.78}$$

よって $n^2 - 2m^2 = \pm 1$ を得る。 //

"⊃"は、$n^2-2m^2 = \pm1$ のとき $n+\sqrt{2}m$ の逆元が $\pm(n-\sqrt{2}m)$ となることから明らか。最後に $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times}$ が無限群であることは、ひとつの解 $n+\sqrt{2}m$ から新たな解として $(n^2+2m^2)+2\sqrt{2}nm$ を構成できることからわかる。

∵ 実際、

$$(n^2+2m^2)^2 - 2(2nm)^2 = (n^2-2m^2)^2 \tag{17.9.79}$$
$$= 1 \tag{17.9.80}$$

である。新たな解の実部 n^2+2m^2 はもとの解より大きいから、この構成で得られる無限個の解たちはすべて相異なる。 //

□

演習問題 6.19 の解答. [TODO] まず $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$d_n(k) = \binom{k+n-1}{n-1} \tag{17.9.81}$$

である (区別のある n 個の箱に区別のない k 個の玉を入れることを考える)。つぎに、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\frac{d^n}{dt^n}\frac{t^n}{1-t} = \frac{d^n}{dt^n}\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+n} \tag{17.9.82}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} t^{k+n} \tag{17.9.83}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)\ldots(k+1)t^k \tag{17.9.84}$$

が成り立つ。一方、

$$\frac{d^n}{dt^n}\frac{t^n}{1-t} = \frac{d^n}{dt^n}\left(-(t^{n-1}+\cdots+t+1) + \frac{1}{1-t}\right) \tag{17.9.85}$$
$$= \frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{1-t} \tag{17.9.86}$$

$$= n!\frac{1}{(1-t)^{n+1}} \tag{17.9.87}$$

が成り立つ。したがって

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\frac{t^n}{1-t} \tag{17.9.88}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+n)\dots(k+1)t^k \tag{17.9.89}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}t^k \tag{17.9.90}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}d_{n+1}(k)t^k \tag{17.9.91}$$

である。 □

演習問題 6.20 の解答. $K[X]$ が Euclid 整域であることを示す。まず $K[X]$ が整域であることは、任意の $f, g \in K[X] - \{0\}$ について

$$f(X) = \sum_{i=0}^{\deg(f)} a_i X^i, \quad a_{\deg(f)} \neq 0 \tag{17.9.92}$$

$$g(X) = \sum_{i=0}^{\deg(g)} b_i X^i, \quad b_{\deg(g)} \neq 0 \tag{17.9.93}$$

と表したときに、これらの積

$$f(X)\cdot g(X) = \sum_{i=0}^{\deg(f)+\deg(g)}\sum_{j=0}^{i}a_j b_{i-j}X^i \tag{17.9.94}$$

の最高次係数 $a_{\deg(f)}b_{\deg(g)}$ が 0 でない (∵ K は整域) ことから従う。さらに写像 $\deg\colon K[X] \to \mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{-\infty\}$ は次をみたす:

(1) $\deg(K[X]-\{0\}) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$
(2) $\deg(0) = -\infty$
(3) $\forall f \in K[X]$ と $\forall g \in K[X]-\{0\}$ に対し、K が体ゆえに g の最高次係数は単元だから、多項式環の除法定理 (定理 4.3.4) より $\exists q, r \in K[X]$ が存在して

$$f = g\cdot q + r, \quad \deg(r) < \deg(g) \tag{17.9.95}$$

が成り立つ。

したがって $K[X]$ は Euclid 整域である。 □

演習問題 6.21 の解答. n に関する帰納法で示す。$n = 0$ の場合は f の根は存在しないから主張が成り立つ。$n \geq 1$ とし、すべての $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対し主張の成立を仮定する。f が根を持たなければただちに主張が成り立つから、f は少なくとも 1 つの根 $\alpha_0 \in K$ を持つとする。剰余定理より

$$\exists g \in K[X] \quad \text{s.t.} \quad f(X) = (X-\alpha_0)g(X) \tag{17.9.96}$$

が成り立つ。いま K は体、とくに整域だから α_0 以外の f の根は g の根でもある。さらに $\deg g = \deg f - 1 = n - 1$ であることとあわせて、帰納法の仮定より

$$|\{a \in K \colon f(a) = 0\}| \leq |\{a \in K \colon g(a) = 0\} \cup \{\alpha_0\}| \tag{17.9.97}$$
$$\leq |\{a \in K \colon g(a) = 0\}| + 1 \tag{17.9.98}$$
$$\leq n \tag{17.9.99}$$

が成り立つ。 □

演習問題 6.22 の解答. [TODO] トーシェント関数についてどこかに書きたい

Euler のトーシェント関数を φ とおく。すなわち

$$\varphi(n) = (n \text{ と互いに素な } n \text{ 以下の正整数の個数}) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \tag{17.9.100}$$

とおく。一般に、任意の巡回群 G に対し

$$\sharp\{x \in G \colon x \text{ は } G \text{ の生成元}\} = \varphi(|G|) \tag{17.9.101}$$

が成り立つ。

∵ $d = |G|$ とおき、G の生成元 g_0 をひとつ固定する。$g \in G$ を G の生成元とすると、ある $1 \leq d' \leq d$ がただひとつ存在して $g = g_0^{d'}$ が成り立つ。このとき $\gcd(d', d) = 1$ である。実際、g が生成元であることより、ある $1 \leq k \leq d$ が存在して

$$g_0 = g^k = g_0^{d'k} \tag{17.9.102}$$

が成り立つ。よって、ある $l \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$1 = d'k + dl \tag{17.9.103}$$

が成り立つ。よって $\gcd(d', d) = 1$ である。逆に $1 \leq d'' \leq d$ が $\gcd(d'', d) = 1$ をみたすとすればある $k', l' \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$1 = d''k' + dl' \tag{17.9.104}$$

が成り立つから、

$$g_0 = g_0^{d''k'} \tag{17.9.105}$$

となり、したがって $g_0^{d''}$ は G の生成元である。以上より全単射

$$\{x \in G \colon x \text{ は } G \text{ の生成元}\} \leftrightarrow \{k \in \{1, \ldots, d\} \colon \gcd(k, d) = 1\} \tag{17.9.106}$$

が存在するから、求める主張が従う。 //

また、一般に任意の正整数 n に対し

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \tag{17.9.107}$$

が成り立つ。

∵ 巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考える。各 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ d|n$ に対し、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の位数 d の巡回部分群 H_d はただひとつ存在する (ちなみにそれは $H_d = \left\langle \frac{n}{d} + n\mathbb{Z} \right\rangle$ である) から、

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigsqcup_{d|n} \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \colon x \text{ の位数は } d\} \tag{17.9.108}$$

$$= \bigsqcup_{d|n} \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \colon x \text{ は } H_d \text{ の生成元}\} \tag{17.9.109}$$

が成り立つ。よって

$$n = \sum_{d|n} \sharp\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \colon x \text{ は } H_d \text{ の生成元}\} \tag{17.9.110}$$

$$= \sum_{d|n} \varphi(d) \tag{17.9.111}$$

である。 //

さて、$H \subset K^\times$ を有限部分群とし、H が巡回群であることを示す。$n := |H|$ とおくと

$$H = \bigsqcup_{d|n} \{x \in H \colon x \text{ の位数は } d\} \tag{17.9.112}$$

が成り立つ。$d \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ d|n$ とし、H の位数 d の元 x_0 が存在したとする。すると

$$\langle x_0 \rangle \subset \{x \in H \colon x^d = 1\} \tag{17.9.113}$$

が成り立つが、いま H は体 K の部分集合であったから右辺の集合の濃度は d 以下である (問題 6.21)。このことと、左辺の集合の濃度が d であることをあわせて

$$\langle x_0 \rangle = \{x \in H \colon x^d = 1\} \tag{17.9.114}$$

が成り立つ。よって x_0 は巡回群 $\{x \in H \colon x^d = 1\}$ の生成元である。したがって、各 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ d|n$ に対し

$$H_d := \{x \in H \colon x^d = 1\} \tag{17.9.115}$$

とおけば

$$\{x \in H \colon x \text{ の位数は } d\} = \begin{cases} \{x \in H \colon x \text{ は } H_d \text{ の生成元}\} & (H \text{ が位数 } d \text{ の元をもつ}) \\ \varnothing & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{17.9.116}$$

が成り立つ。したがって

$$n = |H| \tag{17.9.117}$$

$$= \sum_{d|n} \sharp\{x \in H \colon x \text{ の位数は } d\} \tag{17.9.118}$$

$$\leq \sum_{d|n} \sharp\{x \in H \colon x \text{ は } H_d \text{ の生成元}\} \tag{17.9.119}$$

$$= \sum_{d|n} \varphi(d) \quad (\because (17.9.101)) \tag{17.9.120}$$

$$= n \quad (\because (17.9.107)) \tag{17.9.121}$$

が成り立つ。よってとくに集合 $\{x \in H \colon x \text{ の位数は } d\}$ は空でなく、H は位数 n の元をもつ。したがって H は巡回群である。 □

演習問題 6.23 の解答. 写像 $N\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ を

$$N(m+ni) \coloneqq m^2 + n^2 \tag{17.9.122}$$

で定める。$\mathbb{C}$ における絶対値の性質から明らかに

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]) \tag{17.9.123}$$

が成り立つ。さて、$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, $\beta \neq 0$ に対し

$$\exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}[i] \quad \text{s.t.} \quad \alpha = \beta\gamma + \delta, \quad N(\delta) < N(\beta) \tag{17.9.124}$$

を示す。目標の式から逆算して形式的に変形してみると

$$\frac{\alpha}{\beta} - \gamma = \frac{\delta}{\beta} \tag{17.9.125}$$

を得る。右辺の絶対値をできるだけ小さくすればうまくいきそうである。そこで α/β に最も近い Gauss 整数のひとつを $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ とおき、$\delta \coloneqq \alpha - \beta\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ とおく。あとは $N(\delta) < N(\beta)$ を示せばよい。γ の定め方から明らかに

$$\left|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \tag{17.9.126}$$

なので

$$1 > N\left(\frac{\delta}{\beta}\right) = \frac{N(\delta)}{N(\beta)} \tag{17.9.127}$$

よって $N(\delta) < N(\beta)$ が成り立つ。そこで写像 $N'\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ を

$$N'(\alpha) \coloneqq \begin{cases} N(\alpha) - 1 & (\alpha \neq 0) \\ -\infty & (\alpha = 0) \end{cases} \tag{17.9.128}$$

と定めれば N' は

(1) $N'(\mathbb{Z}[i] - \{0\}) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$
(2) $N'(0) = -\infty$
(3) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}[i]$ と $\beta \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ に対し、$\exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}[i]$ が存在して

$$\alpha = \beta\gamma + \delta, \quad N'(r) < N'(g) \tag{17.9.129}$$

が成り立つ (除法定理)。

をみたすから、$\mathbb{Z}[i]$ は Euclid 整域である。 □

演習問題 6.24 の解答. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し F を F_n と書くことにし、$\mathrm{Map}(K^n, K)$ には K 上の和と積から自然に環構造を入れる。すると各 F_n は環準同型である。よって、F_n の単射性を示すには $\mathrm{Ker}\, F_n = \{0_{K[X_1,\ldots,K_n]}\}$ を示せばよい。これを n に関する数学的帰納法で示す。

[1] $\mathrm{Ker}\, F_1 \subset \{0_{K[X_1]}\}$ を示す。そこで $f \in K[X_1]$ について $f \neq 0_{K[X_1]}$ とすると、K が体であることから f の根は有限個である。一方、問題の仮定より K は無限個の元を持つから、或る $b_1 \in K$ が存在して $f(b_1) \neq 0$ が

成り立つ。よって $F_1(f) \neq 0_{\mathrm{Map}(K^1,K)}$ である。したがって $\mathrm{Ker}\, F_1 \subset \{0_{K[X_1]}\}$ である。逆の包含は明らかだから $\mathrm{Ker}\, F_1 = \{0_{K[X_1]}\}$ が成り立つ。

[2]　$n-1$ のとき成立を仮定し、$\mathrm{Ker}\, F_n \subset \{0_{K[X_1,\dots,X_n]}\}$ を示す。そこで $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ とする。f は

$$f = \sum_{\substack{0\le i_1\le d_1\\ \cdots \\ 0\le i_n\le d_n}} a_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \quad (a_{i_1\dots i_n}\in K) \tag{17.9.130}$$

と表せる。ここで $f \neq 0_{K[X_1,\dots,X_n]}$ とすると、或る $0 \le \exists k_j \le d_j$ $(j=1,\dots,n)$ が存在して

$$a_{k_1\dots k_n} \neq 0 \tag{17.9.131}$$

が成り立つ。さて、$F_n(f) \neq 0_{\mathrm{Map}(K^n,K)}$ を示したい。ここで $(K[X_1,\dots,X_{n-1}])[X_n]$ の元

$$\sum_{i_n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\cdots X_{n-1}^{i_{n-1}}\right) X_n^{i_n} \tag{17.9.132}$$

を考えると、$a_{k_1\dots k_n}\neq 0$ より k_n 次の係数は

$$\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_{n-1}k_n} X_1^{i_1}\cdots X_{n-1}^{i_{n-1}} \neq 0_{K[X_1,\dots,X_{n-1}]} \tag{17.9.133}$$

をみたす。したがって帰納法の仮定より

$$F_{n-1}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_{n-1}k_n} X_1^{i_1}\cdots X_{n-1}^{i_{n-1}}\right) \neq 0_{\mathrm{Map}(K^{n-1},K)} \tag{17.9.134}$$

である。よって、或る $(b_1,\dots,b_{n-1})\in K^{n-1}$ が存在して

$$\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_{n-1}k_n} b_1^{i_1}\cdots b_{n-1}^{i_{n-1}} \neq 0 \tag{17.9.135}$$

が成り立つ。そこで $K[X_n]$ の元

$$\sum_{i_n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_n} b_1^{i_1}\cdots b_{n-1}^{i_{n-1}}\right) X_n^{i_n} \tag{17.9.136}$$

を考えると、これは k_n 次の係数が 0 でないから $\neq 0_{K[X_n]}$ となる。よって、$n=1$ の場合と同様の議論により、或る $b_n\in K$ が存在して

$$\sum_{i_n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_n} b_1^{i_1}\cdots b_{n-1}^{i_{n-1}}\right) b_n^{i_n} \neq 0 \tag{17.9.137}$$

が成り立つ。よって

$$F_n(f)(b_1,\dots,b_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n} \tag{17.9.138}$$

$$= \sum_{i_n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} a_{i_1\dots i_n} b_1^{i_1}\cdots b_{n-1}^{i_{n-1}}\right) b_n^{i_n} \tag{17.9.139}$$

$$\neq 0 \tag{17.9.140}$$

である。したがって

$$F_n(f) \neq 0_{\mathrm{Map}(K^n,K)} \tag{17.9.141}$$

である。これで $\mathrm{Ker}\, F_n \subset \{0_{K[X_1,\dots,X_n]}\}$ がいえた。逆の包含は明らかだから $\mathrm{Ker}\, F_n = \{0_{K[X_1,\dots,X_n]}\}$、したがって F_n は単射である。帰納法より、すべての $n\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して F_n が単射であることが示せた。 □

演習問題 6.25 の解答. 各 $(a_1,\ldots,a_n)\in K^n$ に対し、多項式 $\delta_{a_1\ldots a_n}$ を

$$\delta_{a_1\ldots a_n}(X_1,\ldots,X_n) := \prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{t\in K\\ t\neq a_i}}(a_i-t)^{-1}(X_i-t) \tag{17.9.142}$$

で定めると、K が有限個の元からなることから右辺は有限積となり $\delta_{a_1\ldots a_n}$ は well-defined である。$\delta_{a_1\ldots a_n}$ は $(t_1,\ldots,t_n)\in K^n$ に対し

$$\delta_{a_1\ldots a_n}(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} 1 & (t_1,\ldots,t_n)=(a_1,\ldots,a_n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17.9.143}$$

をみたす。そこで $f\in\mathrm{Map}(K^n,K)$ に対し多項式 $g\in K[X_1,\ldots,X_n]$ を

$$g(X_1,\ldots,X_n) := \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n} f(a_1,\ldots,a_n)\delta_{a_1\ldots a_n}(X_1,\ldots,X_n) \tag{17.9.144}$$

で定めると、K、したがって K^n が有限個の元からなることから右辺は有限和となり g は well-defined である。g は $(t_1,\ldots,t_n)\in K^n$ に対し

$$F(g)(t_1,\ldots,t_n) = f(t_1,\ldots,t_n) \tag{17.9.145}$$

をみたす。よって F は全射である。 □

演習問題 6.26 の解答. [TODO] □

演習問題 6.27 の解答. A を 1 つの元 $s\in A$ で $\mathbb{C}$ 上生成される $\mathbb{C}$-代数とする。このとき評価準同型 $\mathrm{ev}_s\colon\mathbb{C}[X]\to A$ は全射だから、準同型定理より $A\cong\mathbb{C}[X]/\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s$ が成り立つ。ここで $\mathbb{C}[X]$ のイデアルは $(0),(1),(X^m)$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ で尽くされるから $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s$ はこれらのいずれかに一致する。$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s=(0)$ なら $A\cong\mathbb{C}[X]/(0)\cong\mathbb{C}[X]$ であり、これは整域だから零因子をもたない。$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s=(1)$ なら $A\cong\mathbb{C}[X]/(1)=0$ であり、これは零因子をもたない。$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s=(X)$ なら $A\cong\mathbb{C}[X]/(X)$ であり、(X) は素イデアルだから $\mathbb{C}[X]/(X)$ は整域で零因子をもたない。$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_s=(X^m)$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 2})$ なら $A\cong\mathbb{C}[X]/(X^m)$ は $s\neq 0,\ s^m=0$ となり s が零因子となる。よって A は $(0),\mathbb{C}[X],\mathbb{C}[X]/(X)$ のいずれかであり、逆にこれらはそれぞれ $0,X,X+(X)$ により $\mathbb{C}$ 上生成される $\mathbb{C}$-代数で零因子を持たない。したがって求めるものは $(0),\mathbb{C}[X],\mathbb{C}[X]/(X)$ である。 □

演習問題 6.28 の解答. [TODO] □

演習問題 6.29 の解答. $\sqrt{I}$ が R のイデアルであるとは

(1) $\sqrt{I}$ は R の加法部分群である。
(2) $p\in R,\ q\in\sqrt{I}$ ならば $pq\in\sqrt{I}$ である。

が成り立つことであった。

まず (1) を示す。$a,b\in\sqrt{I}$ をとる。$a+b\in\sqrt{I}$ を示す。このとき

$$\exists\, m,n\geq 1 \quad \text{s.t.} \quad a^m\in I,\ b^n\in I \tag{17.9.146}$$

が成り立つ。このとき

$$(a+b)^{m+n} = \underbrace{a^{m+n}}_{\in I} + \binom{m+n}{1}\underbrace{a^{m+n-1}b}_{\in I} + \cdots + \binom{m+n}{m+n-1}\underbrace{ab^{m+n-1}}_{\in I} + \underbrace{b^{m+n}}_{\in I} \tag{17.9.147}$$

となる。よって $a+b \in \sqrt{I}$ となる。よって $\sqrt{I}$ は加法について閉じている。また、$\sqrt{I}$ は加法の単位元 0 を含む。なぜなら $0 = 0^1 \in I$ だからである。つぎに $a \in \sqrt{I}$ をとる。$-a \in \sqrt{I}$ を示す。$a \in \sqrt{I}$ より

$$\exists\, m \geq 1 \quad \text{s.t.} \quad a^m \in I \tag{17.9.148}$$

である。このとき $(-1)^m a^m \in I$ なので、R が可換であることより $(-a)^m \in I$ である。したがって $-a \in \sqrt{I}$ となる。以上より $\sqrt{I}$ は R の加法部分群である。

(2) を示す。$p \in R,\ q \in \sqrt{I}$ をとる。$pq \in \sqrt{I}$ を示す。$q \in \sqrt{I}$ より

$$\exists\, m \geq 1 \quad \text{s.t.} \quad q^m \in I \tag{17.9.149}$$

となる。これと $p^m \in R$ より $p^m q^m \in I$ となる。R が可換であることより $(pq)^m \in I$ である。よって $pq \in \sqrt{I}$ となる。 □

演習問題 6.30 の解答. $K[[X]]$ のイデアルが

$$(0), (X^d)\ (d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{17.9.150}$$

で尽くされることを示せばよく、このときイデアルの形から明らかに $K[[X]]$ は局所環かつ PID である。各 $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_i X^i \in K[[X]]$ に対し、係数が単元である次数の最小値を $\deg^-(f)$ と表すことにする。すなわち、

$$\deg^-(f) \coloneqq \min(\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \colon a_i \in K^\times\} \cup \{\infty\}) \tag{17.9.151}$$

とおく。$I \subset K[[X]]$ を $I \neq (0)$ なるイデアルとする。ここで

$$d \coloneqq \min\{\deg^-(f) \colon f \in I\} \tag{17.9.152}$$

とおくと、$I \neq (0)$ より $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。$I = (X^d)$ を示せばよい。ここで、d の定め方から $\deg^-(f_0) = d$ なる $f_0 \in I$ が存在し、$\deg^-$ の定義から

$$\exists g = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_i X^i \in K[[X]] \quad \text{s.t.} \quad a_0 \in K^\times,\ f_0(X) = g(X) X^d \tag{17.9.153}$$

が成り立つ。このとき、$a_0 \in K^\times$ より $g \in K[[X]]^\times$ である。

$\because$ $a_0 \in K^\times$ より

$$g(X) = a_0\left(1 - \underbrace{\left(-\sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_0^{-1} a_{i+1} X^i\right) X}_{=: h(X)}\right) = a_0(1 - h(X)X) \tag{17.9.154}$$

であり、

$$(1 - h(X)X) \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} h(X)^i X^i = 1 \tag{17.9.155}$$

より

$$g(X)a_0^{-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}h(X)^iX^i=1 \tag{17.9.156}$$

が成り立つ。よって $g\in K[[X]]^\times$ である。 //

したがって

$$X^d=g(X)^{-1}f_0(X)\in I \tag{17.9.157}$$

より $(X^d)\subset I$ である。また、d の定め方から逆向きの包含も成り立つ。したがって $I=(X^d)$ である。これが示したいことであった。 □

演習問題 6.31 の解答. $(\supset)$ は明らかだから $(\subset)$ を示す。n に関する帰納法で示す。$n=1$ のときは明らかだから、$n\geq 2$ とし、$a\in I_1\cap\cdots\cap I_n$ とする。ここで、各 $i=1,\ldots,n$ に対し或る $c_i\in I_i$ と $d_i\in\bigcap_{j\neq i}I_j$ が存在して

$$c_i+d_i=1 \tag{17.9.158}$$

が成り立つ。

∵ $R=I_i+\bigcap_{j\neq i}I_j$ を示せばよい。各 $j\neq i$ に対し、問題の仮定 $I_i+I_j=R$ より或る $a_j\in I_i$ と $b_j\in I_j$ が存在して

$$a_j+b_j=1 \tag{17.9.159}$$

が成り立つ。このとき $\prod_{j\neq i}(a_j+b_j)=1$ であり、左辺を展開すると $a_j\in I_i$ $(j\neq i)$ を含む項と $\prod_{j\neq i}b_j\in\bigcap_{j\neq i}I_j$ との和の形になるから、整理して

$$1-\prod_{j\neq i}b_j\in I_i \tag{17.9.160}$$

を得る。よって

$$1=\left(1-\prod_{j\neq i}b_j\right)+\prod_{j\neq i}b_j \tag{17.9.161}$$

$$\in I_i+\bigcap_{j\neq i}I_j \tag{17.9.162}$$

が成り立つ。したがって $R=I_i+\bigcap_{j\neq i}I_j$ がいえた。 //

このとき

$$\prod_{i=1}^n(c_i+d_i)=1 \quad \therefore \quad a\prod_{i=1}^n(c_i+d_i)=a \tag{17.9.163}$$

が成り立つ。左辺は

$$ad_i\in I_i\bigcap_{j\neq i}I_j\overbrace{=}^{\text{帰納法の仮定}}I_1\cdots I_n \quad (i=1,\ldots,n) \tag{17.9.164}$$

を含む項と

$$a\prod_{i=1}^{n}c_i \in I_1\cdots I_n \tag{17.9.165}$$

との和の形になるから $a \in I_1\cdots I_n$ である。よって $I_1\cap\cdots\cap I_n = I_1\cdots I_n$ がいえた。 □

演習問題 6.32 の解答. 二項係数 $\binom{p}{i}$ $(1 \le \forall i \le p-1)$ は p で割り切れるから、$x, y \in R$ に対し

$$\begin{aligned}
F(x+y) &= (x+y)^p && (17.9.166)\\
&= \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i y^{p-i} \quad (\because\ R \text{ は可換環}) && (17.9.167)\\
&= x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}x^i y^{p-i} && (17.9.168)\\
&= x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1}\iota\left(\binom{p}{i}\right)x^i y^{p-i} && (17.9.169)\\
&= x^p + y^p \quad (\because\ \mathrm{Ker}(\iota) = (p)) && (17.9.170)\\
&= F(x) + F(y) && (17.9.171)
\end{aligned}$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned}
F(xy) &= (xy)^p && (17.9.172)\\
&= x^p y^p \quad (\because\ R \text{ は可換環}) && (17.9.173)\\
&= F(x)F(y) && (17.9.174)
\end{aligned}$$

と

$$F(1_R) = 1_R^p = 1_R \tag{17.9.175}$$

も成り立つ。よって F は環準同型である。 □

演習問題 6.33 の解答. [TODO] □

演習問題 6.34 の解答. [TODO] □

演習問題 6.35 の解答. [TODO] □

演習問題 6.36 の解答. A を環とし、$P \subset A$ を完全素イデアルとする。A の固有両側イデアル I, J が $IJ \subset P$ をみたすとし、さらに $I \not\subset P$ を仮定する。仮定より或る $i_0 \in I \setminus P$ が存在する。このとき、任意の $j \in J$ に対し $j \in P$ が成り立つ。実際、$i_0 j \in IJ \subset P$ だから P が完全素イデアルであることより $i_0 \in P$ または $j \in P$ であるが、いま $i_0 \notin P$ であったから $j \in P$ である。したがって $J \subset P$ である。よって P は素イデアルである。

　逆が成り立たないことを反例によって示す。$\mathbb{R}$ 上の 2 次の全行列環 $M_2(\mathbb{R})$ と、その零イデアル (0) を考える。まず、(0) は素イデアルであることを示したい。そのために $M_2(\mathbb{R})$ の両側イデアルが自明なものしかない

ことを示しておく。$I \subset M_2(\mathbb{R})$ を $I \neq (0)$ なる両側イデアルとする。$I \neq (0)$ より或る $B_0 \in I, B_0 \neq 0$ が存在する。このとき $\operatorname{rank} B_0 > 0$ だから、或る正則行列 $Q, R \in M_2(\mathbb{R})$ が存在して

$$QB_0R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \tag{17.9.176}$$

が成り立つ。I は両側イデアルであったから

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \in I \tag{17.9.177}$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \tag{17.9.178}$$

も成り立つ。よって

$$1_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in I \tag{17.9.179}$$

である。したがって $I = M_2(\mathbb{R})$ となる。よって $M_2(\mathbb{R})$ の両側イデアルは自明なものしかないことがいえた。よって、明らかに (0) は素イデアルである。ところが、(0) は完全素イデアルではない。実際、$M_2(\mathbb{R})/(0) \cong M_2(\mathbb{R})$ は零因子を持つ。 □

演習問題 6.37 の解答. [TODO] □

演習問題 6.38 の解答. [TODO] □

演習問題 6.39 の解答. Z を不定元とする多項式環 $\mathbb{C}[Z]$ を考える。部分集合 $\{Z^{2k+1}, Z^2\} \subset \mathbb{C}[Z]$ により $\mathbb{C}$ 上生成される $\mathbb{C}[Z]$ の部分 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}\langle\{Z^{2k+1}, Z^2\}\rangle$ を B とおく。A は B と $\mathbb{C}$-代数として同型であることを示す。多項式環の普遍性より、$\mathbb{C}$-代数準同型 $\varphi\colon \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[Z]$ であって

$$X \mapsto Z^{2k+1}, \quad Y \mapsto Z^2 \tag{17.9.180}$$

をみたすものが存在する。このとき、$\operatorname{Im}\varphi = B$ である。

> ∵ 両辺とも $Z^{2k+1}, Z^2 \in \mathbb{C}[Z]$ の和、積および $\mathbb{C}$ の元によるスカラー倍の有限回の組み合わせで表せる元全体の集合だから、たしかに一致する。 //

また、$\operatorname{Ker}\varphi = (X^2 - Y^{2k+1})$ である。

> ∵ ($\supset$) は φ の定義より明らかだから、($\subset$) を示す。$f \in \operatorname{Ker}\varphi$ とする。f と $X^2 - Y^{2k+1}$ を ($\mathbb{C}$-代数としての) 同型 $\mathbb{C}[X,Y] \cong (\mathbb{C}[Y])[X]$ により $(\mathbb{C}[Y])[X]$ の元とみなすと、$X^2 - Y^{2k+1}$ の最高次係数 1 は $\mathbb{C}[X,Y]$ の単元だから、除法定理より或る $g(X,Y) \in (\mathbb{C}[Y])[X]$ と $r_1, r_0 \in \mathbb{C}[Y]$ が存在して
>
> $$f(X,Y) = (X^2 - Y^{2k+1})g(X,Y) + r_1(Y)X + r_0(Y) \tag{17.9.181}$$

が成り立つ。いま $f \in \operatorname{Ker}\varphi$ ゆえに $f(Z^{2k+1}, Z^2) = 0$ だから

$$r_1(Z^2)Z^{2k+1} + r_0(Z^2) = 0 \tag{17.9.182}$$

である。左辺の第 1 項は奇数次の項しかなく、第 2 項は偶数次の項しかないから、右辺と係数を比較して $r_1 = 0, r_0 = 0$ となる。よって

$$f(X, Y) = (X^2 - Y^{2k+1})g(X, Y) \in (X^2 - Y^{2k+1}) \tag{17.9.183}$$

が成り立つから $\operatorname{Ker}\varphi \subset (X^2 - Y^{2k+1})$ である。したがって $\operatorname{Ker}\varphi = (X^2 - Y^{2k+1})$ である。 //

したがって、準同型定理より $\mathbb{C}$-代数の同型 $\overline{\varphi}\colon B \to A$ が誘導される。$\overline{\varphi}$ により $x \in A$ と対応する元は $Z^{2k+1} \in B$ だから、Z^{2k+1} が B の既約元であって素元でないことを示せばよい。まず、Z^{2k+1} は B の既約元である。

$\because$ 背理法を用いる。すなわち Z^{2k+1} が B の既約元でないと仮定して矛盾を導く。まず $\deg Z^{2k+1} \neq 0$ より Z^{2k+1} は B の単元でない。よって、背理法の仮定から Z^{2k+1} は B の単元でない 2 元 f, g の積で $Z^{2k+1} = f(Z)g(Z)$ と表せる。すると $\mathbb{C}[Z]$ が整域であることとあわせて

$$\deg f \geq 1, \quad \deg g \geq 1, \quad \deg f + \deg g = 2k + 1 \tag{17.9.184}$$

が成り立ち、とくに

$$1 \leq \deg f \leq 2k, \quad 1 \leq \deg g \leq 2k \tag{17.9.185}$$

が成り立つ。このことと $f, g \in B$ であることから、f, g は Z^2 の和、積および $\mathbb{C}$ の元によるスカラー倍の有限回の組み合わせで表せる。よって f, g の次数は偶数であり、$\deg f + \deg g = 2k + 1$ に矛盾する。背理法より Z^{2k+1} は B の既約元である。 //

さらに、Z^{2k+1} は B の素元でない。

$\because$ Z^{2k+1} により生成される B の単項イデアルを J とおく ($\mathbb{C}[Z]$ でなく B のイデアルだから、たとえば Z^{2k+2} は J には属さない)。すると

$$Z^{4k}Z^2 = (Z^{2k+1})^2 \in J, \quad Z^{4k}, Z^2 \notin J \tag{17.9.186}$$

だから J は B の素イデアルでない。よって Z^{2k+1} は B の素元でない。 //

以上より、x は A の既約元だが素元ではないことが示せた。 □

演習問題 6.40 の解答. R を PID とし、$r \in R$ が既約元であるとする。まず (r) は極大イデアルである。

$\because$ (r) を含む任意の固有イデアルは、R が PID であることからある $a \in R$ を用いて (a) の形に書ける。すると $r \in (r) \subset (a)$ より $r = ab$ $(\exists b \in R)$ と書ける。いま (a) は固有イデアルゆえに a は単元でないから、r が既約元であることとあわせて b は単元となる。よって $a = rb^{-1} \in (r)$ だから $(a) \subset (r)$ である。よって $(r) = (a)$ である。したがって (r) は極大イデアルである。 //

極大イデアルは素イデアルだから (r) は素イデアルである。よって r は素元である。 □

演習問題 6.41 の解答. [TODO] 可換性いつ使う？A の相異なる $r > d$ 個の極大イデアル $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ がとれたとして矛盾を導く。CRT より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_r = A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r \\ A/(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r) \arrow[ur, dashed, "\cong"'] & \end{tikzcd} \tag{17.9.187}$$

を可換にする環の同型が誘導されるから、図式の上側の射 (これは $\mathbb{C}$-代数準同型である) は全射である。よって

$$\dim_C A \geq \dim_C(A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r) \geq r > d \tag{17.9.188}$$

となり矛盾が従う。

∵ 各 $A/\mathfrak{m}_i$ は 0 でない $\mathbb{C}$-代数だから $\mathbb{C}$ 上の次元が 1 以上の $\mathbb{C}$-ベクトル空間である。よって

$$\dim_C(A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r) \geq r \tag{17.9.189}$$

である。 //

よって A の極大イデアルは d 個以下である。 □

演習問題 6.42 の解答. 問題 6.41 より A の極大イデアルは d 個以下である。そこで A の相異なる極大イデアルのすべてを

$$\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r \quad (1 \leq r \leq d) \tag{17.9.190}$$

とおく。すると CRT より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_r = A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r \\ A/(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r) \arrow[ur, dashed, "\cong"'] & \end{tikzcd} \tag{17.9.191}$$

を可換にする環の同型が誘導される。ここで各 $A/\mathfrak{m}_i$ は極大イデアルによる商だから体であり、また $\mathbb{C}$ 上の次元は d 以下である。よって Dixmier の定理より $A/\mathfrak{m}_i \cong \mathbb{C}$ が成り立ち、上の図式より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^r \\ A/(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r) \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd} \tag{17.9.192}$$

が成り立つ。さて、A は 0 でない冪零元を持たないとする。いま A は可換アルティン環だから、[TODO] アルティンとは仮定されてない A の素イデアルは極大イデアルでもある。よって $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ は A の素イデアル全部の交わり、すなわち A の冪零根基である。いま A は 0 でない冪零元を持たないから $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r = 0$ である。よって図式から $A \cong \mathbb{C}^r$ が従う。$\mathbb{C}$ 上の次元を比較して $r = d$ でなければならず、$A \cong \mathbb{C}^d$ がいえた。[TODO] 初等的に示せるか？ □

演習問題 6.43 の解答. [TODO] monomial について議論すればよい □

演習問題 6.44 の解答. $a, b \in A$ とする。A は所与の K-gradation のような直和分解を持つから、或る $x, y \in K$ が存在して

$$a \in A(x), \quad b \in A(y) \tag{17.9.193}$$

が成り立つ。このとき、K-gradation の定義より $ab \in A(x+y)$ だから $D(ab) = (x+y)ab$ である。よって

$$\begin{aligned} D(a)b + aD(b) &= (xa)b + a(yb) && (17.9.194)\\ &= xab + yab && (17.9.195)\\ &= (x+y)ab && (17.9.196)\\ &= D(ab) && (17.9.197)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって D は A 上の derivation である。 □

演習問題 6.45 の解答. A を単純環とし、$Z(A)$ が体であることを示す。中心の定義から $Z(A)$ が可換環であることは明らかだから、あとは $Z(A)$ の 0 でない任意の元が $Z(A)$ に逆元を持つことを示せばよい。$x \in Z(A)$, $x \neq 0$ とすると、Ax は A の左イデアルであり、(0) を真に含む。いま A は単純環ゆえに (0) は A の極大イデアルなので、$A = Ax$ である。よって、或る $x' \in A$ が存在して

$$\begin{aligned} 1 &= x'x \quad (\because A = Ax) && (17.9.198)\\ &= xx' \quad (\because x \in Z(A)) && (17.9.199)\end{aligned}$$

が成り立つ。このとき

$$x'y = x'yxx' = x'xyx' = yx' \quad (\forall y \in A) \tag{17.9.200}$$

が成り立つから $x' \in Z(A)$ である。よって、x は $Z(A)$ の可逆元である。したがって $Z(A)$ は体である。 □

演習問題 6.49 の解答. イデアルの対応原理より、$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ は $R/\mathfrak{m}^n$ の極大イデアルである。これが唯一の極大イデアルであることを示せばよい。そこで $J/\mathfrak{m}^n$ を $R/\mathfrak{m}^n$ の極大イデアルとする。すると J は R の極大イデアルであって $\mathfrak{m}^n$ を含む。ここで J は R の素イデアルでもあるから、J は $\mathfrak{m}$ を含む。よって、$\mathfrak{m}$ が R の極大イデアルであることより $J = \mathfrak{m}$ である。したがって $J/\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ である。これで唯一性がいえた。 □

演習問題 6.50 の解答. R/I の 0 でない冪零元 $a + I$ $(a \in R - I)$ が存在したとすると、ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $a^n + I = (a+I)^n = 0 + I$ より $a^n \in I$、したがって $a \in \sqrt{I}$ が成り立つ。よって $I \neq \sqrt{I}$ である。逆に $I \neq \sqrt{I}$ とすると $I \subsetneq \sqrt{I}$ であるから、ある $b \in \sqrt{I} - I$ がとれる。このとき

- $b \in \sqrt{I}$ よりある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $(b+I)^n = b^n + I = 0 + I$
- $b \notin I$ より $b + I \neq 0 + I$

したがって $b + I$ は R/I の 0 でない冪零元である。 □

演習問題 6.51 の解答. I を準素イデアルであるとする。$r + I \in R/I$ を零因子とすると

$$(s+I)(r+I) = 0 + I \quad (\exists s \in R - I) \tag{17.9.201}$$

が成り立つ。よって

$$sr \in I, \quad s \notin I \tag{17.9.202}$$

だから、I が準素イデアルであることより $r \in \sqrt{I}$ である。よって $r + I$ は R/I の冪零元である。逆に、R/I の零因子はすべて冪零元であるとする。$x, y \in R$ について、$xy \in I$ かつ $x \neq I$ であるとする。$y \in I$ の場合は $y \in I \subset \sqrt{I}$ である。$y \notin I$ の場合は

$$(x + I)(y + I) = xy + I = 0 + I \tag{17.9.203}$$

$$x + I \neq 0 + I, \quad y + I \neq 0 + I \tag{17.9.204}$$

より $y + I$ は零因子、したがって冪零元だから $y \in \sqrt{I}$ が成り立つ。よって I は準素イデアルである。 □

演習問題 6.52 の解答. [TODO] 問題の前半は誤植。反例がある。https://math.stackexchange.com/questions/93478/is-each-power-of-a-prime-ideal-a-primary-ideal

$\mathbb{C}[X, Y]$ のイデアル $I = (X, Y^2)$ を考える。準素イデアルの特徴付け (命題 5.1.8) を用いて I が $\mathbb{C}[X, Y]$ の準素イデアルであることを示す。ここで $\mathbb{C}[X, Y]/I \cong \mathbb{C}[Y]/(Y^2)$ である。$f + (Y^2)$, $g + (Y^2) \neq 0 + (Y^2)$, $fg + (Y^2) = 0 + (Y^2)$ とすると、f, g は Y の倍元でなければならないから $f^2 + (Y^2) = 0 + (Y^2)$, $g^2 + (Y^2) = 0 + (Y^2)$ である。したがって $\mathbb{C}[X, Y]/I \cong \mathbb{C}[Y]/(Y^2)$ の零因子はすべて冪零元である。特徴付けより I は準素イデアルである。

一方、I は素イデアルの冪でないことを示す。I は準素イデアルだから、命題 5.1.9 より $\sqrt{I}$ は I を含む最小の素イデアルである。ここで I が素イデアルの冪 $I = \mathfrak{p}^n$ の形に表せたとする。すると $I = \mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}$ だから $\sqrt{I}$ の最小性より $\mathfrak{p}^n = I \subset \sqrt{I} \subset \mathfrak{p}$ が成り立つ。さらに $\sqrt{I}$ は素イデアルだから $\mathfrak{p}^n \subset \sqrt{I}$ より $\mathfrak{p} \subset \sqrt{I}$ が成り立つ。よって $\mathfrak{p} \subset \sqrt{I} \subset \mathfrak{p}$、したがって $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ が従う。$\sqrt{I}$ を具体的に求める。同型 $\mathbb{C}[X, Y]/I \cong \mathbb{C}[Y]/(Y^2)$ を再び用いる。$\mathbb{C}[Y]$ が PID ゆえに $\mathbb{C}[Y]$ の素イデアルは極大イデアルでもあることに注意すると、問題 6.49 より $\mathbb{C}[Y]/(Y^2)$ の素イデアルは $(Y)/(Y^2)$ ただひとつであるから、同型で写して $\mathbb{C}[X, Y]/I$ の素イデアルは $(X, Y)/I$ ただひとつである。したがって $\mathbb{C}[X, Y]$ の I を含む素イデアルは (X, Y) ただひとつであり、$\mathfrak{p} = \sqrt{I} = (X, Y)$ が従う。すると $\mathfrak{p}^2 = (X, Y)^2 \subsetneq I = (X, Y^2) \subsetneq (X, Y) = \mathfrak{p}$ が成り立つ (左の不等号は $X \notin (X, Y)^2$ より従い、右の不等号は $Y \notin (X, Y^2)$ より従う)。これは $I = \mathfrak{p}^n$ に矛盾。したがって I は素イデアルの冪でない。 □

演習問題 6.53 の解答. $\sqrt{I}$ が素イデアルであることを示す。$ab \in \sqrt{I}$, $(a, b \in R)$, $a \notin \sqrt{I}$ とし、$b \in \sqrt{I}$ を示す。$ab \in \sqrt{I}$ より、ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $a^n b^n \in I$ が成り立つ。このとき $a \notin \sqrt{I}$ より $a^n \notin I$ だから、I が準素イデアルであることよりある $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $b^{nm} \in I$ が成り立つ。したがって $b \in \sqrt{I}$ である。よって $\sqrt{I}$ は素イデアルである。[TODO] 冪零根基の特徴付けを使うべき？

$\mathfrak{p}$ を I を含む素イデアルとし、$\sqrt{I} \subset \mathfrak{p}$ を示す。$x \in \sqrt{I}$ とすると、ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $x^n \in I$ が成り立つ。このとき $x^n \in I \subset \mathfrak{p}$ だから、$\mathfrak{p}$ が素イデアルであることより $x \in \mathfrak{p}$ となる。したがって $\sqrt{I} \subset \mathfrak{p}$ である。

□

演習問題 6.54 の解答. $R := \mathbb{C}[X, Y]$ とおき、R の部分集合 S を $S := \{X^k Y^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ で定めると S は R の積閉集合であり、環の同型 $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XYZ - 1) \cong S^{-1}R$ が成り立つ。

$\because$ [TODO] //

そこで $S^{-1}R$ が PID でないことを示せばよい。$S^{-1}R$ のイデアル $\left(\dfrac{X-1}{1}, \dfrac{Y-1}{1}\right)$ を J とおく。J が単項イデアルでないことを示す。背理法のため、ある $f \in R$ が存在して $\left(\dfrac{f}{1}\right) = J$ と表せたとする。このとき $J = S^{-1}R$ である。

∵ $f/1 \in J$ よりある $g, h \in R$ および $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$\begin{cases} \dfrac{X-1}{1} &= \dfrac{g}{X^mY^m}\dfrac{f}{1} \\ \dfrac{Y-1}{1} &= \dfrac{h}{X^nY^n}\dfrac{f}{1} \end{cases} \tag{17.9.205}$$

が成り立つ。必要ならば g, h をそれぞれ gX^nY^n, hX^mY^m に置き換えることで $m = n$ であるとしてよい。R は整域かつ $S \not\ni 0$ だから通分して

$$\begin{cases} X^mY^m(X-1) &= fg \\ X^mY^m(Y-1) &= fh \end{cases} \tag{17.9.206}$$

が成り立つ。よって $X^mY^m(X-1)h = fgh = X^mY^m(Y-1)g$ であり、X^mY^m を払って $(X-1)h = (Y-1)g$ が成り立つ。$X-1, Y-1$ は互いに素だから、[TODO] 説明不足 R が体上の多項式環ゆえに UFD であることよりある $g' \in R$ が存在して $g = g'(X-1)$ と表せる。したがって (17.9.206) の第 1 式より

$$X^mY^m(X-1) = fg'(X-1) \quad \therefore \quad X^mY^m = fg' \tag{17.9.207}$$

を得る。よって $\dfrac{1}{1} = \dfrac{g'}{X^mY^m}\dfrac{f}{1} \in \left(\dfrac{f}{1}\right) = J$ だから $J = S^{-1}R$ がいえた。 //

よって $(X-1, Y-1) \cap S \neq \varnothing$ である。

∵ $I := (X-1, Y-1)$ とおき、標準射 $R \to S^{-1}R,\ r \mapsto r/1$ を φ とおく。明らかに $J = \left(\dfrac{X-1}{1}, \dfrac{Y-1}{1}\right) = S^{-1}\varphi(I)$ であることに注意する。いま $J = S^{-1}R$ だから $\varphi^{-1}(J) = \varphi^{-1}(S^{-1}R) = R$ である。よって $1 \in \varphi^{-1}(J) = \varphi^{-1}(S^{-1}\varphi(I))$ だから、ある $i \in I,\ s \in S$ が存在して $\dfrac{1}{1} = \dfrac{i}{s}$ と表せる。通分して $s = i$ だから $I \cap S \neq \varnothing$ がいえた。 //

よってある $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $X^mY^m \in (X-1, Y-1)$、したがって

$$X^mY^m = u(X-1) + v(Y-1) \quad (\exists u, v \in R) \tag{17.9.208}$$

となるが、両辺に $X = 1, Y = 1$ を代入すると $1 = 0$ となり矛盾が従う。背理法より J は単項イデアルでない。したがって $S^{-1}R$、ひいては $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XYZ-1)$ が PID でないことが示せた。 □

演習問題 7.1 の解答. 写像 $\Phi\colon \mathrm{End}_A({}_AA) \to A^{\mathrm{OP}}$ を

$$\Phi(f) = f(1) \tag{17.9.209}$$

で定める。Φ は環準同型である。

∵ $\Phi(0)=0,\ \Phi(f+g)=\Phi(f)+\Phi(g)$ は明らか。積を保つことは、A^{OP} の積を $*$ と書けば

$$\Phi(f\circ g) = f\circ g(1) \tag{17.9.210}$$
$$= f(g(1)) \tag{17.9.211}$$
$$= f(g(1)\cdot 1) \tag{17.9.212}$$
$$= g(1)f(1) \tag{17.9.213}$$
$$= f(1)*g(1) \tag{17.9.214}$$
$$= \Phi(f)*\Phi(g) \tag{17.9.215}$$

より成り立つ。 //

逆写像 $\Psi\colon A^{\mathrm{OP}} \to \mathrm{End}_A({}_AA)$ は

$$\Psi(a) = (x \mapsto x\cdot a) \tag{17.9.216}$$

で定まる。

∵ 逆写像であることは

$$\Phi\circ\Psi(a) = \Phi(x\mapsto x\cdot a) \tag{17.9.217}$$
$$= a \tag{17.9.218}$$

および

$$\Psi\circ\Phi(f) = (x\mapsto x\cdot f(1)) \tag{17.9.219}$$
$$= (x\mapsto f(x)) \tag{17.9.220}$$
$$= f \tag{17.9.221}$$

よりわかる。 //

よって Φ は環の同型 $\mathrm{End}_A({}_AA)\cong A^{\mathrm{OP}}$ を与える。 □

演習問題 7.2 の解答. [TODO] c.f. `https://mathlog.info/articles/619` □

演習問題 7.3 の解答. [TODO] V が既約であることはいつ使う？ $d := \dim_K V \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とおく。V の K-ベクトル空間としての基底 $e_1,\dots,e_d$ をひとつ選ぶ。$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$n=0$ の場合は示したい含意の前提が偽なので成り立つ。以下、$n\geq 1$ の場合を考える。対偶を示すため、$V^{\oplus n}$ は巡回 A-加群であると仮定する。仮定より、$V^{\oplus n}$ の A-加群としての生成元 $v_1,\dots,v_n$ が存在する。このとき $v_1,\dots,v_n$ は V において K 上 1 次独立である。

∵ $\mu_1,\dots,\mu_n\in K$ に対し線型関係

$$\mu_1v_1+\cdots+\mu_nv_n = 0 \tag{17.9.222}$$

を仮定する。いま $V^{\oplus n}$ は A 上 $v_1,\dots,v_n$ で生成されるのであったから、とくにある $a_i\in A$ $(i=$

$1,\dots,n)$ が存在して

$$a_i\cdot(v_1,\dots,v_n)\quad\bigl(=(a_i\cdot v_1,\dots,a_i\cdot v_n)\bigr)\quad=(0,\dots,\overset{i}{\breve{e_1}},\dots,0) \tag{17.9.223}$$

が成り立つ。そこで、上の線型関係の式の両辺に左から a_i を掛けて

$$a_i\cdot(\mu_1 v_1+\cdots+\mu_n v_n)=0 \tag{17.9.224}$$
$$\therefore\quad \mu_i e_1=0 \tag{17.9.225}$$
$$\therefore\quad \mu_i=0 \tag{17.9.226}$$

をすべての $i=1,\dots,n$ に対し得る。よって $v_1,\dots,v_n$ は K 上 1 次独立である。 //

したがって $\dim_K(V)\geq n$ であり、対偶が示せた。 □

演習問題 7.4 の解答. 中国剰余定理の証明と同様の流れで示す。V,W は既約だから、A のある極大左イデアル I,J が存在して $V\cong {}_AA/I,\ W\cong {}_AA/J$ が成り立つ。ここで準同型定理より図式

$$\begin{tikzcd} {}_AA \arrow[r, "p=p_1\times p_2"] \arrow[d] & {}_AA/I\times {}_AA/J={}_AA/I\oplus {}_AA/J=V\oplus W \\ {}_AA/(I\cap J) \arrow[ur, dashed, "\overline{p}"'] & \end{tikzcd} \tag{17.9.227}$$

の破線部に A-加群準同型 $\overline{p}$ が誘導される。${}_AA$ が巡回 A-加群ゆえに ${}_AA/(I\cap J)$ も巡回 A-加群なので、$V\oplus W$ が巡回 A-加群であることを示すには $\overline{p}$ が同型であることを示せば十分である。そのためには全単射をいえばよい。$\overline{p}$ が単射であることは $\operatorname{Ker}\overline{p}=I\cap J$ より明らか。$\overline{p}$ が全射であることを示す。そのためには

$$e_1:=(1,0)\in {}_AA/I\times A/J \tag{17.9.228}$$
$$e_2:=(0,1)\in {}_AA/I\times A/J \tag{17.9.229}$$

とおき、$e_1,e_2\in\operatorname{Im}\overline{p}$ をいえばよい。いま V,W は同型でないから $I\neq J$、したがって I,J が極大であることとあわせて $I+J=A$ である。よって $x+y=1$ なる $x\in I,\ y\in J$ が存在する。このとき

$$p_1(x)=0 \tag{17.9.230}$$
$$p_2(x)=p_2(1-y)=p_2(1)=1 \tag{17.9.231}$$

よって

$$p(x)=(p_1(x),p_2(x))=(0,1)=e_2\in\operatorname{Im}\overline{p} \tag{17.9.232}$$

が成り立つ。同様に $e_1\in\operatorname{Im}\overline{p}$ も成り立つ。よって $\overline{p}$ は同型である。したがって $V\oplus W$ は巡回 A-加群である。

□

演習問題 7.5 の解答. [TODO] division algebra であることはいつ使う？

$(D^n)^n$ は D^n の元である縦ベクトルを横に n 個並べたもの全部の空間とする。$(D^n)^n$ には左 $\operatorname{End}_D(D^n)$-加群の構造

$$\varphi.[v_1,\dots,v_n]:=[\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)]\quad(\varphi\in\operatorname{End}_D(D^n),\ v_i\in D^n) \tag{17.9.233}$$

が入り (ただし「.」で $\mathrm{End}_D(D^n)$ の作用を表す)、また右からの積で右 $M_n(D)$-加群の構造が入る。さらに各 $\varphi \in \mathrm{End}_D(D^n)$, $v_i \in D^n$, $A = (a_{ij}) \in M_n(D)$ に対し

$$(\varphi.[v_1, \dots, v_n])A = [\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)]A \tag{17.9.234}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{j1}\varphi(v_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}\varphi(v_j)\right] \tag{17.9.235}$$

$$= \varphi.\left[\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_j\right] \tag{17.9.236}$$

$$= \varphi.([v_1, \dots, v_n]A) \tag{17.9.237}$$

が成り立つから、$(D^n)^n$ は $(\mathrm{End}_D(D^n), M_n(D))$-両側加群である。ここで D^n の標準基底を $e_1, \dots, e_n$ とおき、

$$E := [e_1, \dots, e_n] \in (D^n)^n \tag{17.9.238}$$

とおくと、$e_1, \dots, e_n$ が D^n の基底であることから各 $f \in \mathrm{End}_D(D^n)$ に対し $f.E = E\,{}^tA$ なる $A \in M_n(D)$ がただひとつ定まる。逆に各 $A \in M_n(D)$ に対し、自由加群の普遍性より $f.E = E\,{}^tA$ なる $f \in \mathrm{End}_D(D^n)$ がただひとつ定まる。したがって、このように f を A に写す写像を $\Phi\colon \mathrm{End}_D(D^n) \to M_n(D)^{\mathrm{OP}}$ とおけば Φ は全単射である。あとは Φ が D-代数の準同型であることを示せばよい。各 $f, g \in \mathrm{End}_D(D^n)$, $a \in D$ に対し

$$(f + g).E = f.E + g.E \tag{17.9.239}$$

$$= E\,{}^t\Phi(f) + E\,{}^t\Phi(g) \tag{17.9.240}$$

$$(f \circ g).E = f.(g.E) \tag{17.9.241}$$

$$= f.(E\,{}^t\Phi(g)) \tag{17.9.242}$$

$$= (f.E)\,{}^t\Phi(g) \tag{17.9.243}$$

$$= E\,{}^t\Phi(f)\,{}^t\Phi(g) \tag{17.9.244}$$

$$= E\,{}^t(\Phi(g)\Phi(f)) \tag{17.9.245}$$

$$(\mathrm{id}).E = E = E\,{}^tI_n \tag{17.9.246}$$

$$(af).E = a.(f.E) \tag{17.9.247}$$

$$= a.(E\,{}^t\Phi(f)) \tag{17.9.248}$$

$$= aE\,{}^t\Phi(f) \tag{17.9.249}$$

$$= E\,{}^t(a\Phi(f)) \tag{17.9.250}$$

が成り立つことから Φ は D-代数の準同型、したがって同型である。よって $\mathrm{End}_D(D^n) \cong M_n(D)^{\mathrm{OP}}$ である。

□

演習問題 7.6 の解答. [TODO] 長過ぎる？いま図式

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0 \tag{17.9.251}$$

は exact である。また、$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ N/L \arrow[r, dashed] & M/L \end{tikzcd}$ について、$n \in N$ が $\begin{tikzcd} N \arrow[d] \\ N/L \end{tikzcd}$ で 0 に写ることは $n \in L$ と同値で、さらにこれは n が $\begin{tikzcd} N \arrow[r] & M \arrow[d] \\ & M/L \end{tikzcd}$ で 0 に写ることと同値である。よって単射 $N/L \longrightarrow M/L$ が誘導される。これにより N/L を M/L の部分 A-加群とみなすことができる。したがって上下の行が exact な可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N/L \arrow[r] & M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{17.9.252}$$

を得る。このとき $\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[d, dashed] \\ M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ を可換にする射 $\begin{tikzcd} M/N \arrow[d] \\ (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ が誘導される。なぜならば、$m \in M$ が $M \longrightarrow M/N$ で 0 に写るとすれば、上の行の exact 性により m はある $n \in N$ の $N \longrightarrow M$ による像となり、m の $\begin{tikzcd} M \arrow[d] \\ M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ による像は n の

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] & M \arrow[d] \\ & M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} N \arrow[d] \\ N/L \arrow[r] & M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd} \tag{17.9.253}$$

による像 0 に一致するからである。ただし、像が 0 であることは下の行の exact 性による。さらに $\begin{tikzcd} M \arrow[d] \\ M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ の全射性より $\begin{tikzcd} M/N \arrow[d] \\ (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ は全射である。あとは $\begin{tikzcd} M/N \arrow[d] \\ (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ の単射性を示せばよい。$m + N \in M/N$ が $\begin{tikzcd} M/N \arrow[d] \\ (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ で 0 に写るとする。そこで $m + N$ の $M \longrightarrow M/N$ による逆像のひとつ m' を選ぶと、m' は $\begin{tikzcd} M \arrow[d] \\ M/L \arrow[r] & (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ により 0 に写り、したがって $m' + L$ は $M/L \longrightarrow (M/L)/(N/L)$ により 0 に写る。下の行の exact 性により、$m' + L$ は $N/L \longrightarrow M/L$ の像に含まれる。よって、m' はある $n \in N$ と $l \in L$ により $m' = n + l$ と表せる。したがって

$$m + N = m' + N = (n + l) + N = 0 \tag{17.9.254}$$

となり、$\begin{tikzcd} M/N \arrow[d] \\ (M/L)/(N/L) \end{tikzcd}$ の単射性が示せた。 □

演習問題 10.0 の解答. cf. 問題 10.8 □

演習問題 10.1 の解答. p を素数とする。**Prüfer p 群 (Prüfer p-group)** $M := \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ が問題の条件をみたす例であることを示す[12]。ただし $\mathbb{Z}[1/p]$ は $1/p$ により $\mathbb{Z}$ 上生成された $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}$-部分代数を $\mathbb{Z}$-加群とみなしたものである。

まず次の claim を示しておく。

- M の任意の $\mathbb{Z}$-真部分加群 N に対しある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $N = \langle 1/p^k \rangle/\mathbb{Z}$ が成り立つ。

ただし各 $q \in \mathbb{Z}[1/p]$ に対し $\langle q \rangle$ は $\mathbb{Z}$ 上 q により生成された $\mathbb{Z}[1/p]$ の巡回部分加群を表す。

$\because$ 各 $x \in M$ に対し $k_x := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x \in \langle 1/p^k \rangle/\mathbb{Z}\}$ とおくと

$$x = \frac{n}{p^{k_x}} + \mathbb{Z} \quad (n \in \mathbb{Z},\ \gcd(n, p^{k_x}) = 1) \tag{17.9.255}$$

と表せる。このとき $\gcd(n, p^{k_x}) = 1$ よりある $l, m \in \mathbb{Z}$ が存在して $nl + p^{k_x}m = 1$ が成り立つから

$$N \ni lx = \frac{1 - p^{k_x}m}{p^{k_x}} + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^{k_x}} + \mathbb{Z} \tag{17.9.256}$$

が成り立つ。よって $\langle 1/p^{k_x} \rangle/\mathbb{Z} \subset N$ が成り立つ。ここで、N が M の真部分加群であることから集合 $\{k_x \mid x \in N\}$ には最大値 $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。$N \subset \bigcup_{x \in N}(\langle 1/p^{k_x} \rangle/\mathbb{Z}) \subset \langle 1/p^{k_0} \rangle/\mathbb{Z}$ だから $N = \langle 1/p^{k_0} \rangle/\mathbb{Z}$ となる。 //

M がアルティンであることを示す。各 $x \in M$ に対し $\langle x \rangle_M$ で $\mathbb{Z}$ 上 x により生成された $\mathbb{Z}[1/p]$ の巡回部分加群を表すことにする。M の $\mathbb{Z}$-真部分加群の任意の減少列

$$\left\langle \frac{1}{p^{n_0}} \right\rangle_M \supset \left\langle \frac{1}{p^{n_1}} \right\rangle_M \supset \cdots \quad (n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{17.9.257}$$

は n_i が非負整数の減少列であることから停留的である。したがって M はアルティンである。M がネーターでないことは、M の $\mathbb{Z}$-真部分加群の増大列

$$\left\langle \frac{1}{p} \right\rangle_M \subset \left\langle \frac{1}{p^2} \right\rangle_M \subset \cdots \tag{17.9.258}$$

が停留的でないことから従う。以上より M はアルティン加群だがネーター加群でないことが示せた。 □

演習問題 10.2 の解答. R がネーター環となることの対偶を示す。R がネーター環でないとすると、昇鎖条件をみたさない R のイデアルの増大列

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \tag{17.9.259}$$

がとれる。そこで

$$J_n := \left\{ \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \in R[X] \mid a_i \in I_n \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{17.9.260}$$

12) より強く、M は $\mathbb{Z}$ 上有限生成でもない。[TODO] 証明？

とおけば、

$$J_1 \subset J_2 \subset \cdots \tag{17.9.261}$$

は昇鎖条件をみたさない $R[X]$ のイデアルの増大列となる。よって $R[X]$ はネーター環でない。これで対偶がいえた。 □

演習問題 10.3 の解答 (解法 1.). 可換ネーター環の部分環はネーターとは限らない。実際、$\mathbb{C}[X,Y]$ は $\mathbb{C}$ が体ゆえにネーター環であることと Hilbert の基底定理よりネーター環であるが、部分環

$$\mathbb{C}\langle\{XY, XY^2, XY^3, \ldots\}\rangle \tag{17.9.262}$$

は昇鎖条件をみたさないイデアルの増大列

$$(XY) \subsetneq (XY, XY^2) \subsetneq (XY, XY^2, XY^3) \subsetneq \cdots \tag{17.9.263}$$

をもつからネーター環ではない。 □

演習問題 10.3 の解答 (解法 2.). 無限変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots]$ はネーター環ではないが、これは整域だから商体に埋め込める。商体は体ゆえにネーター環だからこれが反例になっている。 □

演習問題 10.4 の解答. R を可換アルティン環、P を R の素イデアルとする。$B := A/P$ とおくと、定理 9.2.5 より B はアルティン環であり、さらに P: 素イデアルより B は整域でもある。P が極大イデアルであることをいうには、B が体であることを示せばよい。そこで $x \in B - \{0\}$ とする。降鎖条件より、ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $(x^n) = (x^{n+1})$ が成り立つ。したがって、ある $y \in B$ が存在して $x^n = yx^{n+1}$ となる。いま B は整域だから x^n を打ち消して $1 = xy$ が成り立つ。よって $x \in B^\times$ となる。B は零環でないからこれで $B^\times = B - \{0\}$ がいえた。よって $B = A/P$ は体であり、したがって P は極大イデアルである。 □

演習問題 10.5 の解答. [TODO] cf. [AM69, p.89] □

演習問題 10.6 の解答. $A \times B$ の左イデアルは A, B の左イデアルの直積の形に書けることに注意する。$A \times B$ の左イデアルの昇鎖

$$I_1 \times J_1 \subset I_2 \times J_2 \subset \cdots \tag{17.9.264}$$

が与えられたとする。このとき、とくに

$$\begin{cases} I_1 \subset I_2 \subset \cdots \\ J_1 \subset J_2 \subset \cdots \end{cases} \tag{17.9.265}$$

が成り立つから、A, B の左ネーター性より

$$\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad \text{s.t.} \quad I_m = I_{m+1} = \cdots \tag{17.9.266}$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad \text{s.t.} \quad J_n = J_{n+1} = \cdots \tag{17.9.267}$$

が成り立つ。よって $k := \max\{m, n\}$ とおけば

$$I_k \times J_k = I_{k+1} \times J_{k+1} = \cdots \tag{17.9.268}$$

となる。したがって $A \times B$ は左ネーター環である。 □

演習問題 10.7 の解答. [TODO] 本当に正しい？

[AF92, p.172]

A は左アルティン環だから、降鎖 $J(A) \supset J(A)^2 \supset \ldots$ は停留的である。すなわちある正整数 n が存在して $J(A)^n = J(A)^{n+1} = \ldots$ となる。この n に対し $J(A)^n = 0$ となることを示せばよい。$J(A)^n \neq 0$ であると仮定して矛盾を導く。集合 P を

$$P := \{I \subset A : 左イデアル \mid I \subset J(A)^n,\ IJ(A)^n \neq 0\} \tag{17.9.269}$$

と定める。$J(A)^n \in P$ より $P \neq \emptyset$ だから、A のアルティン性より P は包含に関する極小元 I_0 をもつ。

ここで I_0 は単項イデアルであることを示す。$I_0 J(A)^n \neq 0$ よりある $x_0 \in I_0 - \{0\}$ であって $x_0 J(A)^n \neq 0$ なるものが存在する。このとき $(x_0)J(A)^n \neq 0$ である。$(x_0) \subset I_0 \subset J(A)^n$ であることとあわせて $(x_0) \in P$ だから、I_0 の極小性より $(x_0) = I_0$ が従い、I_0 は単項イデアルであることがいえた。

さて、$I_0 J(A)^n \subset J(A)^n$ かつ $I_0 J(A)^n J(A)^n = I_0 J(A)^n \neq 0$ より $I_0 J(A)^n \in P$ であり、また $I_0 J(A)^n \subset I_0$ だから、I_0 の極小性より $I_0 J(A)^n = I_0$ である。したがって $I_0 J(A)^n = I_0 = (x_0)$ は x_0 で生成される (有限生成) A-加群であって $I_0 J(A)^n J(A) = I_0 J(A)^n$ をみたすから、Nakayama の補題より $I_0 J(A)^n = 0$ である。これは $I_0 J(A)^n = I_0 \neq 0$ に矛盾。背理法より $J(A)^n = 0$ である。 □

演習問題 10.8 の解答. [TODO] cf. [AM69, p.90] □

演習問題 10.9 の解答. v_i $(1 \leq i \leq n)$ は M を R 上生成するから $d(\varphi)v_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ をいえばよい。M に X を φ として作用させることで $R[X]$-加群の構造を入れる。これにより M^n に $M_n(R[X])$-加群の構造が入り、

$$v := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in M^n \tag{17.9.270}$$

とおくと

$$Lv = 0 \tag{17.9.271}$$

が成り立つ。左から L の余因子行列を掛けて

$$\det(L) I_n v = 0 \tag{17.9.272}$$

したがって $d(\varphi)v_i = d(X)v_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ。 □

演習問題 10.10 の解答. 問題 10.9 の記号を引き続き用いて $\varphi = \mathrm{id}_M$ の場合を考える。$IM = M$ の仮定から $a_{i,j}$ らは I の元にとれる。ここで行列式の定義より

$$d(X) = \det(L) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(\delta_{\sigma(1)1} X - a_{\sigma(1)1}) \tag{17.9.273}$$

だから、右辺の形より $d(X)$ の最高次以外の係数はすべて I に属する。したがって

$$d(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_{n-1} X + b_n \quad (b_i \in I,\ 1 \leq i \leq n) \tag{17.9.274}$$

と表せる。このことと $d(\mathrm{id}_M)v = d(X)v = 0\ (v \in M)$ より

$$(1 + b_1 + \cdots + b_n)v = 0 \quad (v \in M) \tag{17.9.275}$$

が成り立つ。したがって $x := b_1 + \cdots + b_n$ とおけば $x \in I,\ 1 + x \in \mathrm{Ann}_R(M)$ が成り立つ。 □

演習問題 10.11 の解答. f の単射性をいえばよい。M に X を f として作用させることで $R[X]$-加群の構造を入れる。M は R-加群として有限生成だから $R[X]$-加群としても有限生成である。また、f の全射性より $R[X]$ のイデアル (X) は $(X)M = M$ をみたす。そこで問題 10.10 より、ある $F \in R[X]$ であって $1 + F(X)X \in \mathrm{Ann}_{R[X]}(M)$ をみたすものが存在する。したがって

$$\mathrm{id}_M(v) + F(f) \circ f(v) = 0 \quad (v \in M) \tag{17.9.276}$$

$$\therefore -F(f) \circ f = \mathrm{id}_M \tag{17.9.277}$$

が成り立つから、f は左逆写像 $-F(f)$ をもつ。よって f は単射であり、したがって f は自己同型である。 □

演習問題 10.12 の解答. [TODO] □

演習問題 12.1 の解答. [TODO] https://math.stackexchange.com/questions/1702297/is-there-a-ring-which-satisfies-xy-1-and-yx-neq-1 □

演習問題 12.2 の解答. I は少なくともひとつの元をもつとしてよい。

$\because$ もし $I = \varnothing$ なら $\varinjlim_{i \in I} M_i = \varnothing$ となってしまい A-加群の構造が入らない。 //

$\varinjlim_{i \in I} M_i$ に A-加群の構造が入ることを確かめる。$\bigsqcup_{i \in I} M_i$ の元を (i, x) の形に書くことにすれば、$\varinjlim_{i \in I} M_i$ の元は $[(i, x)]$ の形に書ける。まず各 $[(i, x)], [(j, y)] \in \varinjlim_{i \in I} M_i$ に対し和を次のように定義する:

$$[(i, x)] + [(j, y)] := [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))] \tag{17.9.278}$$

ただし $k \in I$ は、$k \geq i, j$ なる k をひとつ選ぶとする (このような k は I が有向系であることにより確かに存在する)。この和は well-defined に定まり、可換性および結合律をみたす。

$\because$ 可換性および結合律は各 M_i の加法の可換性および結合律より明らかだから、well-defined 性のみ示す。

$$\begin{cases} (i, x) \sim (i', x') \\ (j, y) \sim (j', y') \end{cases} \tag{17.9.279}$$

とする。$k \geq i, j$ なる $k \in I$ と $k' \geq i', j'$ なる $k' \in I$ をひとつずつ選び、

$$(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) \sim (k', \varphi_{i'k'}(x') + \varphi_{j'k'}(y')) \tag{17.9.280}$$

が成り立つことを示せばよい。まず ((17.9.279)) よりある $s, t \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i, i' \le s \\ \varphi_{is}(x) = \varphi_{i's}(x') \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} j, j' \le t \\ \varphi_{jt}(y) = \varphi_{j't}(y') \end{cases} \tag{17.9.281}$$

が成り立つ。さらに I が有向系であることを用いて次の図の下から順に $k, k', m \in I$ を選んでいく:

$$\begin{tikzcd}
 & & & m & & & \\
 & \cdot \arrow[urr] & & & & \cdot \arrow[ull] & \\
s \arrow[ur] & & k \arrow[ul] & & k' \arrow[ur] & & t \arrow[ul] \\
i \arrow[u] \arrow[urr] & & i' \arrow[ull] \arrow[urr] & & j \arrow[ull] \arrow[urr] & & j' \arrow[u] \arrow[ull]
\end{tikzcd} \tag{17.9.282}$$

すると

$$\begin{aligned}
\varphi_{km}(\varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) &= \varphi_{km}(\varphi_{ik}(x)) + \varphi_{km}(\varphi_{jk}(y)) \quad (\text{準同型}) & (17.9.283)\\
&= \varphi_{im}(x) + \varphi_{jm}(y) \quad (\text{有向系の定義}) & (17.9.284)\\
&= \varphi_{sm}(\varphi_{is}(x)) + \varphi_{tm}(\varphi_{jt}(y)) \quad (\text{有向系の定義}) & (17.9.285)\\
&= \varphi_{sm}(\varphi_{i's}(x')) + \varphi_{tm}(\varphi_{j't}(y')) \quad (s, t\ \text{のとり方}) & (17.9.286)\\
&= \varphi_{i'm}(x') + \varphi_{j'm}(y') \quad (\text{有向系の定義}) & (17.9.287)\\
&= \varphi_{k'm}(\varphi_{i'k'}(x')) + \varphi_{k'm}(\varphi_{j'k'}(y')) \quad (\text{有向系の定義}) & (17.9.288)\\
&= \varphi_{km}(\varphi_{ik}(x') + \varphi_{jk}(y')) \quad (\text{準同型}) & (17.9.289)
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) \sim (k', \varphi_{i'k'}(x') + \varphi_{j'k'}(y')) \tag{17.9.290}$$

が示せた。 //

いま I は元をもつとしていたからある $i_0 \in I$ がとれる。このとき $[(i_0, 0)]$ はすべての $[(i, x)] \in \varinjlim M_i$ に対し

$$[(i_0, 0)] + [(i, x)] = [(i, x)] \tag{17.9.291}$$

をみたす。

∵ $k \ge i_0, i$ なる $k \in I$ をひとつ選ぶ。

$$\begin{aligned}
[(i_0, 0)] + [(i, x)] &= [(k, \varphi_{i_0k}(0) + \varphi_{ik}(x))] \quad (\text{和の定義}) & (17.9.292)\\
&= [(k, \varphi_{ik}(x))] \quad (\text{準同型}) & (17.9.293)\\
&= [(i, x)] & (17.9.294)
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号が成り立つのは、いま $i, k \le k$ であり、また $\varphi_{kk} = \mathrm{id}_{M_k}$ より

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{kk}(\varphi_{ik}(x)) \tag{17.9.295}$$

したがって $(i, x) \sim (k, \varphi_{ik}(x))$ だからである。 //

加法逆元は

$$-[(i,x)] \coloneqq [(i,-x)] \tag{17.9.296}$$

により定まる。したがって $\varinjlim M_i$ はアーベル群となる。つぎに各 $[(i,x)] \in \varinjlim_{i\in I} M_i$, $a \in A$ に対しスカラー倍を次のように定義する:

$$a[(i,x)] \coloneqq [(i,ax)] \tag{17.9.297}$$

このスカラー倍は well-defined に定まり、$1 \in A$ は自明に作用し、結合律および分配律が成り立つ。

∵ $1 \in A$ が自明に作用することと結合律および分配律が成り立つことは各 M_i のスカラー乗法に対するそれらの性質より明らかだから、well-defined 性のみ示す。$(i,x) \sim (i',x')$ とするとある $s \in I$ が存在して

$$\begin{cases} i, i' \leq s \\ \varphi_{is}(x) = \varphi_{i's}(x') \end{cases} \tag{17.9.298}$$

が成り立つ。$\varphi_{is}, \varphi_{i's}$ が A-加群準同型であることより

$$\varphi_{is}(ax) = \varphi_{i's}(ax') \tag{17.9.299}$$

が成り立つ。したがって $(i,ax) \sim (i',ax')$ である。 //

したがって $\varinjlim M_i$ は A-加群となる。つぎに各 $\iota_i\colon M_i \to \varinjlim M_i$ が A-代数準同型となることを示す。ι_i の定義より

$$\iota_i(x) = [(i,x)] \quad (x \in M_i) \tag{17.9.300}$$

であることに注意すれば、$\varinjlim M_i$ への加法とスカラー乗法の定め方から明らかに ι_i は A-代数準同型である。最後に $(\varinjlim M_i, \{\iota_i\}_{i\in I})$ が $(\{M_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i\leq j})$ の帰納極限となることを示す。そこで A-加群と A-加群準同型の族の組 $(N, \{\xi_i\colon M_i \to N\}_{i\in I})$ であって $\xi_i = \xi_j \circ \varphi_{ij}$ をみたすものが与えられたとする。図式

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim M_k \arrow[d, dashed, "\eta"] \\ M_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\xi_i"'] & N \end{tikzcd} \tag{17.9.301}$$

を可換にする A-加群準同型 $\eta\colon \varinjlim M_k \to N$ を構成する。そこで写像 $\eta\colon \varinjlim M_k \to N$ を

$$\eta([(i,x)]) \coloneqq \xi_i(x) \tag{17.9.302}$$

と定める。[TODO] □

演習問題 12.3 の解答. 帰納極限の構成から明らかに C_0^∞ は可換 $\mathbb{C}$-代数である。C_0^∞ の元は 0 の十分近くで一致する関数を同一視した類になっている。

$$I \coloneqq \{[(U,f)] \in C_0^\infty \mid f(0) = 0\} \tag{17.9.303}$$

とおくと、I は C_0^∞ の極大イデアルである。

☹ [TODO] //

$f(0) \neq 0$ なる元 $[(U, f)]$ を含むイデアルは C_0^∞ に一致するから、C_0^∞ の任意の極大イデアル I' はそのような元は含まない。よって I の定義から $I' \subset I$ であり、I' が極大イデアルであることから $I' = I$ である。したがって C_0^∞ の極大イデアルは I のみである。よって C_0^∞ は局所環である。つぎに

$$J \coloneqq \{[(\mathbb{R}, 0)]\} \tag{17.9.304}$$

とおけば J は C_0^∞ の零イデアルであるが、これは素イデアルでもある。

☹ [TODO] (問題 6.9) //

I はたとえば $[(\mathbb{R}, x^2)]$ を含むから零イデアルではないことに注意すれば、J が求める素イデアル、すなわち I と異なる素イデアルである。 □

演習問題 12.8 の解答. R-**Mod** の完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \tag{17.9.305}$$

に対し、N の平坦性より

$$0 \longrightarrow N \otimes_R X \longrightarrow N \otimes_R Y \tag{17.9.306}$$

は R-**Mod** の完全列だから、M の平坦性より

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N \otimes_R X \longrightarrow M \otimes_R N \otimes_R Y \tag{17.9.307}$$

は R-**Mod** の完全列である。したがって $M \otimes_R N$ は平坦である。 □

参考文献

群、環、加群、体についてひととおり知るには [松 76] や [Lan02] がよいと思う。[松 76] では初等整数論についても触れられている。[AB95] には群の表現について簡潔にまとまっている。可換環論の本は [AM69] が有名である。非可換環論の本は [AF92] がある。結合的代数については [Pie82] がよいと思う。[Rot15] にはテンソル代数などの話題も載っている。

[AB95] J. L. Alperin and Rowen B. Bell, **Groups and representations**, Springer, 1995.

[AF92] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, **Rings and categories of modules**, Springer New York, NY, 1992.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, **Introduction to commutative algebra**, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Lan02] Serge Lang, **Algebra**, Springer, 2002.

[Pie82] Richard S. Pierce, **Associative algebras**, Springer, 1982.

[Rei95] Miles Reid, **Undergraduate commutative algebra**, Cambridge University Press, 1995.

[Rot15] Joseph J. Rotman, **Advanced modern algebra**, American Mathematical Society, 2015.

[松 76] 和夫 松坂, **代数学入門**, 岩波書店, 1976.

[松 00] 秀之 松村, **復刊 可換環論**, 共立出版, 2000.

記号一覧

索引