

0516_資料.pdf で述べた微分と積分の順序交換について、 \exp を他の関数に置き換えた場合、どのくらい同じことがいえるかを考えてみる。

◇ 演習問題 0.1. X を可測空間、 μ を X 上の測度、 V を m 次元 \mathbb{R} -ベクトル空間、 $T: X \rightarrow V$ を可測関数、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能な関数、 $h: V^\vee \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(\langle t, T(x) \rangle)$ とし、 V^\vee のある開部分集合 Θ 上で $\lambda: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_X h(t, x) \mu(dx)$ が定義されているとする。このとき、 $\lambda'(t) = \int_X \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \mu(dx)$ ($t \in \Theta$) が成り立つような f の条件 (C^1 級、凸など) はどのようなものか？あるいは、どのような反例があるか？

もう少し簡単な設定で考えてみる。

◇ 演習問題 0.2. X を可測空間、 μ を X 上の測度、 $T: X \rightarrow \mathbb{R}$ を可測関数、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能で上または下に凸な関数、 $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(tT(x))$ とし、 \mathbb{R} のある開部分集合 Θ 上で $\lambda: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_X h(t, x) \mu(dx)$ が定義されているとする。このとき、 $\lambda'(t) = \int_X \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \mu(dx)$ ($t \in \Theta$) は成り立つか？

演習問題 0.2 の解答. $t \in \Theta$ とし、 $\lambda'(t) = \int_X \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \mu(dx)$ が成り立つことを示す。そのために示すべきことは偏導関数に対する優関数の存在、すなわち

(A) t のある開近傍 $U \stackrel{\text{open}}{\subset} \Theta$ と、ある μ -可積分関数 $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し、すべての $t' \in U$ に対し $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t', x) \right| \leq \Phi(x)$ a.e. x が成り立つ。

である。 f が上に凸の場合は f を $-f$ に置き換えて同様の議論をすればよいから、以降 f が下に凸の場合のみ示す。

Step 1: U, Φ の構成 $r > 0$ を十分小さく選び、 \mathbb{R} の閉区間

$$A_{2r} := [t - 2r, t + 2r], \quad A_r := [t - r, t + r] \quad (0.1)$$

が Θ に含まれるようにしておく。そこで $U := \text{Int}_\Theta A_r = (t - r, t + r)$ とおき、 $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Phi(x) := \frac{5}{2r} \left(|h(t - 2r, x)| + |h(t + 2r, x)| \right) \quad (0.2)$$

と定める。以下、この U, Φ が条件 (A) をみたすものであることを示す。

まず U は Θ における t の開近傍であり、また $t \pm 2r \in A_{2r} \subset \Theta$ ゆえに $h(t \pm 2r, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$ は μ -可積分だから、 Φ は μ -可積分である。したがって残りの示すべきことは、すべての $t' \in U$ に対し $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t', x) \right| \leq \Phi(x)$ a.e. x すなわち $|f'(t'T(x))T(x)| \leq \Phi(x)$ a.e. x が成り立つことである。

Step 2: Φ による不等式評価 $t' \in U$ とする。まず各 $x \in X$ に対し、 $T(x)$ の符号で場合分けして不等式評価を与える。そこで複号同順でそれぞれの場合を一度に書くと、 $T(x) \geq 0$ の場合、 $t'T(x) < (t \pm 2r)T(x)$ だから、 f の微分可能性と凸性より

$$f'(t'T(x)) \leq \frac{f((t \pm 2r)T(x)) - f(t'T(x))}{((t \pm 2r)T(x) - t'T(x))} \quad (0.3)$$

$$\therefore |f'(t'T(x))T(x)| \leq \frac{1}{|t \pm 2r - t'|} \left(|f((t \pm 2r)T(x))| + |f(t'T(x))| \right) \quad (0.4)$$

$$\leq \frac{1}{r} \left(|f((t \pm 2r)T(x))| + |f(t'T(x))| \right) \quad (0.5)$$

が成り立つ。したがって、 $T(x) > 0$ と $T(x) < 0$ の場合を合わせると、 $T(x) \neq 0$ のとき

$$|f'(t'T(x))T(x)| \leq \frac{1}{r} \left(|f((t-2r)T(x))| + |f(t'T(x))| + |f((t+2r)T(x))| + |f(t'T(x))| \right) \quad (0.6)$$

が成り立つ。この不等式は $T(x) = 0$ の場合も成り立つから、すべての $x \in X$ に対して成り立つ。

さらに (0.6) の右辺の $|f(t'T(x))|$ の項を評価することを考える。いま $t' \in A_r$ ゆえに、ある $s \in [1/4, 3/4]$ が存在して $t' = (1-s)(t-2r) + s(t+2r)$ が成り立つから、 f の凸性より

$$|f(t'T(x))| = |f((1-s)(t-2r)T(x) + s(t+2r)T(x))| \quad (0.7)$$

$$\leq |(1-s)f((t-2r)T(x)) + sf((t+2r)T(x))| \quad (0.8)$$

$$\leq (1-s)|f((t-2r)T(x))| + s|f((t+2r)T(x))| \quad (0.9)$$

$$\leq \frac{3}{4} \left(|f((t-2r)T(x))| + |f((t+2r)T(x))| \right) \quad (0.10)$$

が成り立つ。この不等式を (0.6) に合わせれば、すべての $x \in X$ に対して

$$|f'(t'T(x))T(x)| = \frac{10}{4r} \left(|f((t-2r)T(x))| + |f((t+2r)T(x))| \right) \quad (0.11)$$

$$= \frac{5}{2r} \left(|h(t-2r, x)| + |h(t+2r, x)| \right) \quad (0.12)$$

$$= \Phi(x) \quad (0.13)$$

が成り立つことがわかる。したがって U, Φ が条件 (A) をみたすことが示されて、証明が完了した。 \square