発表中にコメントがあった事柄を整理する。

演習問題 0.1. $\tilde{g}$ を勝手な Riemann 計量とし、何らかの方法で座標を取り替えたとして、同じ方法で $\mathcal{P}$ 上に引き戻した g は well-defined となるか？ [TODO] もっときちんと定式化する

命題 0.1. M を多様体とする。このとき、M 上のアファイン接続全体の集合 $\mathcal{A}(M)$ は、$\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Gamma(TM), \Gamma(T^{\vee}M \otimes TM))$ のアファイン部分空間であり、そのモデル空間は $\Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM)$ である。

証明 M 上のアファイン接続 ∇^0 をひとつ選んで固定する。このとき、∇^0 に任意の $A \in \Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM)$ を加えた $\nabla^0 + A$ は M 上のアファイン接続となるから、$\nabla_0 + \Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM) \subset \mathcal{A}(M)$ が成り立つ。逆に任意の $\nabla \in \mathcal{A}(M)$ に対し $\nabla - \nabla_0$ は $\Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM)$ の元となるから、$\mathcal{A}(M) \subset \nabla_0 + \Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM)$ が成り立つ。したがって $\mathcal{A}(M) = \nabla_0 + \Gamma(T^{\vee}M \otimes T^{\vee}M \otimes TM)$ となり、$\mathcal{A}(M)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Gamma(TM), \Gamma(T^{\vee}M \otimes TM))$ のアファイン部分空間となることがわかる。 □

演習問題 0.2. $R^{(-1)} = 0$ を示せ。

演習問題 0.2 の解答. ∇-アファイン座標をひとつ選ぶと、`0613_資料.pdf` 命題 1.12 (2) より

$$R^{(-1)}{}^{l}_{ijk} = \partial_i A^l_{jk} - \partial_j A^l_{ik} + A^m_{jk} A^l_{im} - A^m_{ik} A^l_{jm} \tag{0.1}$$

と表せるから、この右辺が 0 となることを示せばよい。まず

$$\begin{aligned}
&(\text{式 (0.1) の右辺第 1 項}) && (0.2)\\
&= \partial_i A^l_{jk} && (0.3)\\
&= \partial_i (g^{ln} S_{jkn}) && (0.4)\\
&= \partial_i (g^{ln}) S_{jkn} + g^{lm} \partial_i S_{jkm} && (0.5)\\
&= -\partial_i (g_{mn}) g^{mn} g^{ln} S_{jkn} + g^{lm} \partial_i S_{jkm} \qquad (\partial_i (g_{nm} g^{lm}) = 0) && (0.6)\\
&= -S_{imn} g^{mn} g^{ln} S_{jkn} + g^{lm} \partial_i S_{jkm} && (0.7)\\
&= -A^l_{im} A^m_{jk} + g^{lm} \partial_i S_{jkm} && (0.8)
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
&(\text{式 (0.1) の右辺第 2 項}) && (0.9)\\
&= -\partial_j A^l_{ik} && (0.10)\\
&= \cdots && (0.11)\\
&= A^l_{jm} A^m_{ik} - g^{lm} \partial_j S_{ikm} && (0.12)
\end{aligned}$$

を得る。これらを合わせて

$$\begin{aligned}
&(\text{式 (0.1) の右辺第 1 項}) + (\text{式 (0.1) の右辺第 2 項}) && (0.13)\\
&= -A^l_{im} A^m_{jk} + g^{lm} \partial_i S_{jkm} + A^l_{jm} A^m_{ik} - g^{lm} \partial_j S_{ikm} && (0.14)
\end{aligned}$$

$$= -A^l_{im}A^m_{jk} + A^l_{jm}A^m_{ik} \qquad (\partial_i S_{jkm} = \partial_j S_{ikm}) \tag{0.15}$$

となる。これは式 (0.1) の右辺第 3, 4 項の符号を反転させたものに一致するから、${R^{(-1)}}^l_{ijk} = 0$ が従う。よって $R^{(-1)} = 0$ である。 □

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).