代数的トポロジーの基礎

Yahata

概要

代数的トポロジーは、位相空間と連続写像の問題を群やベクトル空間などの代数系とその準同型の問題に帰着させて研究する数学の一分野である。代数的トポロジーではホモトピーやホモロジーといった手法によって空間の形を捉え、その背後にある秩序を代数系に投影する。

本稿では基本群とホモロジー群について整理する。定義や命題にはできるだけその概要や導入の動機、応用先について一言程度添える。演習問題にはできるだけ詳細な解答をつける。

内容は主に [Rot98] や [河 22]、[Lee10] を参考にしている。

目次

第 1 章　位相空間

代数的トポロジーでは位相空間内のパスを扱うから、必然的に実数体 $\mathbb{R}$ の位相を扱うことになる。そこで、代数的トポロジーでとくに重要な位相的性質について述べておくことにする。

1.1　連結空間

連結性について述べる。次の事実は次節で導入する弧状連結性の議論に必須である。

命題 1.1.1 ($\mathbb{R}$ の区間は連結). $\mathbb{R}$ の空でない任意の区間 J は連結である。

証明　$J_1, J_2 \overset{\text{open}}{\subset} J$, $J = J_1 \cup J_2$, $J_1 \neq \varnothing$, $J_2 \neq \varnothing$, $J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$ と表せたとして矛盾を導く。$x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$ をひとつずつ選ぶ。一般性を失うことなく $x_1 < x_2$ としてよい。

$$c := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid [x_1, x) \cap J \subset J_1\} \ (\geq x_1) \tag{1.1.1}$$

とおく。すると $c \leq x_2$ である。実際、$c > x_2$ とするといま $x_1 < x_2$ であったから $x_1 < x_2 < c$ したがって $x_2 \in [x_1, c) \cap J \subset J_1$ となり $x_2 \notin J_1$ に矛盾する。よって $c \in J$ である。実際、J が区間であることより $c \in [x_1, x_2] \subset J$ だからである。したがって上限の性質より $c \in \mathrm{Cl}_J J_1$ である。このことと $J_1\ (= J \setminus J_2)$ が closed in J であることから $c \in J_1$ である。いま $c \in J_1 \overset{\text{open}}{\subset} J$ ゆえにある $r > 0$ が存在して $c \in (c - r, c + r) \cap J \subset J_1$ が成り立つ。したがって $[x_1, c + r) \cap J \subset J_1$ となり c の定義に矛盾する。□

1.2　弧状連結空間

弧状連結性を定義する。弧状連結性は基本群の定義に不可欠な要素である。

定義 1.2.1 (パスとループ).　X を位相空間とする。連続写像 $f \colon [0, 1] \to X$ を X 内で $f(0)$ と $f(1)$ をつなぐ**パス (path)** という。さらに $f(0) = f(1)$ のとき、f を**ループ (loop)** といい、点 $f(0)$ をループ f の**基点 (base point)** という。今後は閉区間 $[0, 1]$ をよく使うので、$I := [0, 1]$ と書くことがある。

定義 1.2.2 (弧状連結). [TODO]

定義 1.2.3 (局所弧状連結). [TODO]

弧状連結空間は連結である。

命題 1.2.4 (弧状連結ならば連結). [TODO]

証明　[TODO] □

逆に連結空間が弧状連結であるとは限らないが、ひとつ条件を加えれば弧状連結性が成り立つ。証明の流れは連結空間の特徴付けを用いる典型的なものである。

命題 1.2.5 (連結かつ局所弧状連結ならば弧状連結). 位相空間 X が連結かつ局所弧状連結ならば弧状連結である。

証明 X は連結だから $X \neq \emptyset$ である。$x_0 \in X$ をひとつえらび、x_0 の属する弧状連結成分を C とおく。

まず、C が open in X であることを示す。X は局所弧状連結だから、各 $x \in C$ に対し、x の X での開近傍 U であって弧状連結であるようなものがとれる。このとき、U の点は x と U 内のパスでつなぐことができ、x は C の任意の点と C 内のパスでつなぐことができるから、U の点は C の任意の点とパスでつなぐことができる。よって、弧状連結成分の定義より $U \subset C$ である。ゆえに x は C の X における内点である。したがって C は open in X である。

次に、C が closed in X であることを示す。$x \in \partial C$ とすると、x の X での開近傍 U であって弧状連結であるようなものがとれる。このとき、$x \in \partial C$ であることより $C \cap U \neq \emptyset$ である。よって、或る $y \in C \cap U$ がとれる。x は y と U 内のパスでつなぐことができ、y は C の任意の点と C 内のパスでつなぐことができるから、x は C の任意の点とパスでつなぐことができる。よって、弧状連結成分の定義より $x \in C$ である。ゆえに $\partial C \in C$、したがって C は closed in X である。

以上より C は非空かつ clopen in X である。いま X は連結であったから、$C = X$ である。したがって X は弧状連結である。 □

定義 1.2.6 (弧状連結成分). [TODO]

命題 1.2.7 (clopen かつ弧状連結ならば弧状連結成分). 位相空間の部分集合は、clopen かつ弧状連結ならば弧状連結成分である。

証明 X を位相空間とし、$A \subset X$ は clopen in X かつ弧状連結であるとする。A は弧状連結ゆえに $A \neq \emptyset$ だから或る $a \in A$ がとれる。A が a の属する X の弧状連結成分 P に一致することを示す。そのためには、A は a とパスでつなぐことのできる X の点全体からなることを示せばよい。まず、A は弧状連結だから $A \subset P$ である。つぎに、$b \in P$ とする。a, b をつなぐパスを $\gamma\colon I \to X$ とすると、$\gamma^{-1}(A)$ は非空かつ clopen in I だから、I が連結であることとあわせて $I = \gamma^{-1}(A)$ である。よって $\gamma(I) \subset A$、とくに $b \in A$ である。したがって $P \subset A$ である。以上より $A = P$ がいえた。 □

1.3　演習問題

A.　問題セット 1

♤ **演習問題 1.1** (幾何学 II 1.1). 半開区間 $(0,1]$ から開区間 $(0,1)$ への連続な全単射が存在するかどうか調べよ。

♤ **演習問題 1.2** (幾何学 II 1.2). $[0,1]$ から $[0,1]\times[0,1]$ への連続な全単射が存在するかどうか調べよ。

♤ **演習問題 1.3** (幾何学 II 1.3). 直線 $\mathbb{R}$ から円周 S^1 への連続な全単射が存在するかどうか調べよ。

♤ **演習問題 1.4** (幾何学 II 1.4). 次の集合が互いに同相かどうか調べよ。

(1)　$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
(2)　$\mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1]\times\{0\})$
(3)　$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$

♤ **演習問題 1.5** (幾何学 II 1.5). 次の集合が互いに同相かどうか調べよ。

(1)　$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2=1\}\cup[-1,1]\times\{0\}$
(2)　$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon (x+1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon (x-1)^2+y^2=1\}$

♤ **演習問題 1.6** (幾何学 II 1.6). 次の集合が互いに同相かどうか調べよ。

(1)　$[0,1]^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$
(2)　$[0,1]^2 \setminus ((0,1)\times\{0\})$

♤ **演習問題 1.7** (幾何学 II 1.8). $\mathbb{R}^2$ 上の関係

$$(x,y)\sim(x',y') \quad\Leftrightarrow\quad (x-x',y-y')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \tag{1.3.1}$$

は同値関係となる。$\mathbb{R}^2/{\sim}\approx S^1\times S^1$ を示せ。

♤ **演習問題 1.8** (幾何学 II 1.9). 写像 $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$,

$$f(t) := \begin{cases} (t\cos(2\pi/t), t\sin(2\pi/t)) & (t>0) \\ (0,0) & (t=0) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

は部分集合 $(0,\infty)$ 上連続である。f が中への同相写像か調べよ。

♤ **演習問題 1.9** (幾何学 II 1.10). 開区間 $(-\pi,\pi)$ の各点 t に平面上の点 $(\sin t, \sin t\cos t)\in\mathbb{R}^2$ を対応させる写像 $f\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$ は連続である。写像 f が中への同相写像かどうか調べよ。

B. 幾何学 II 練習問題

♤ **演習問題 1.10** (幾何学 II 練習問題 6). $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ から余次元 2 の線型部分空間 V を除いて得られる集合 $\mathbb{R}^n \setminus V$ は弧状連結であることを示せ。

注意 1.3.1. この証明と同様の方法で $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ から余次元 3 の部分空間を除いた空間は単連結であることが示せる。

♤ **演習問題 1.11** (幾何学 II 練習問題 14). 直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 X の部分集合 A に対して、X において A を 1 点に縮めて得られる空間 X/A を考え、商写像を $p\colon X \to X/A$ とおく。このとき $p(X) \setminus p(A)$ は $X \setminus A$ と同相といえるか？

第 2 章　基本的な位相空間

この章ではいくつかの基本的な位相空間について調べる。まとまりを良くするために、ホモロジーなど現段階でまだ扱っていない概念も含めて述べておく。

2.1　球面

定義 2.1.1. [TODO]

補題 2.1.2. $D^n/\partial D^n$ は S^n と同相である。

証明　[TODO] □

定義 2.1.3 (立体射影)**.** S^n の北極を $N = (0, \ldots, 0, 1)$ とおく。連続写像

$$\begin{aligned} S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_n}\right) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

は連続逆写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{N\} \\ y &\longmapsto \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} N + \frac{2}{\|y\|^2 + 1} y \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

をもつ。したがって同相である。これを**立体射影 (stereographic projection)** という。

2.2　線型空間

補題 2.2.1. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ から余次元 2 の線型部分空間 V を除いて得られる集合 $\mathbb{R}^n \setminus V$ は弧状連結である。

証明　問題 1.10 を参照。 □

2.3　行列の空間

実行列や複素行列は線型代数で慣れ親しんだ主題である。ここでは行列の空間とその位相的性質について調べる。

定義 2.3.1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。全行列空間 $M(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}^{n^2}$ と同一視して位相が入っているとする。

(1) **一般線型群 (general linear group)**

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \coloneqq \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\} \tag{2.3.1}$$

特殊線型群 (special linear group)

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) \coloneqq \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \tag{2.3.2}$$

定義 2.3.2 (直交群とユニタリ群). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。

(1) **直交群 (orthogonal group)**

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A\,{}^t\!A = I\} \tag{2.3.3}$$

特殊直交群 (special orthogonal group) あるいは**回転群 (rotation group)**

$$\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mid A\,{}^t\!A = I\} \tag{2.3.4}$$

(2) **ユニタリ群 (unitary group)**

$$\mathrm{U}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I\} \tag{2.3.5}$$

特殊ユニタリ群 (special unitary group)

$$\mathrm{SU}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I\} \tag{2.3.6}$$

線型代数的な種々の変形操作を利用して空間の性質を調べよう。次の命題では行列の基本変形を用いる。

命題 2.3.3. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は弧状連結である。

証明 基本変形によって示す。$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ とする。A と I_n をつなぐ $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 内のパスの存在をいえばよい。A は正則だから左右から有限個の基本行列を掛けることで I_n が得られる。そこで、それぞれの基本行列が $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 内のパスで I_n とつながることをいえばよい。第 i, j 行の入れ替えの基本行列は

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1-t & \cdots & t & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & t & \cdots & 1-t & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

で I_n からのパスが得られる。第 i 行に第 j 行の m 倍を加える基本行列は

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & tm & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

で I_n からのパスが得られる。第 i 行を m $(m \neq 0)$ 倍する基本行列は

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta_m(t) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.9}$$

で I_n からのパスが得られる。ただし β_m は $\mathbb{C}^\times$ が弧状連結であることより存在する 1 から m への $\mathbb{C}^\times$ 内のパスである。以上で主張が示せた。 □

逆行列をとる操作は連続である。

命題 2.3.4 (逆行列)**.** 写像 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ は連続である。

証明 Cramer の公式を用いる。

[TODO] □

Gram-Schmidt の正規直交化は連続写像であり、より強く同相写像を与える。

命題 2.3.5 (Gram-Schmidt の正規直交化)**.** Gram-Schmidt の正規直交化は連続写像

(1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(n) \times T(n,\mathbb{R})$

(2) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{U}(n) \times T(n,\mathbb{C})$

を与える。さらにこれらはそれぞれ行列の積を逆写像として同相写像となる。

証明 [TODO] □

Gram-Schmidt の正規直交化を用いて次がわかる。

命題 2.3.6 (一般線型群の変形レトラクト)**.** (1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は $\mathrm{O}(n)$ を変形レトラクトにもつ。

(2) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{U}(n)$ を変形レトラクトにもつ。

証明 T が $\{I_n\}$ を変形レトラクトにもつことを使う。

[TODO] □

$\mathrm{SU}(2)$ は S^3 と同相であることを示そう。$\mathrm{SU}(2)$ は次のように表せることに注意しておく。

補題 2.3.7.

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \tag{2.3.10}$$

と表せる。

証明 右辺が左辺に含まれることは明らか。逆の包含を示す。$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ とする。$AA^* = I_2$, $\det A = 1$ よりとくに次が成り立つ。

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \tag{2.3.11}$$

$$a\bar{c} + b\bar{d} = 0 \tag{2.3.12}$$

$$ad - bc = 1 \tag{2.3.13}$$

(2.3.11) から $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を得る。$a = 0$ の場合、$|b| = 1$ だから (2.3.12) より $d = 0$ を得て、(2.3.13) より $c = -\bar{b}$ を得る。よって包含が成り立つ。

$a \neq 0$ の場合、(2.3.13) の両辺に $\bar{a}$ を掛けて $|a|^2 d - bc\bar{a} = \bar{a}$ を得る。(2.3.12) とあわせて $(|a|^2 + |b|^2)d = \bar{a}$ を得る。さらに (2.3.11) とあわせて $d = \bar{a}$ を得る。いま $a \neq 0$ だから (2.3.12) とあわせて $c = -\bar{b}$ を得る。よって包含が成り立つ。 □

命題 2.3.8. SU(2) は S^3 と同相である。

証明 写像 $\mathrm{SU}(2) \to S^3$, $\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \mapsto (a, b)$ が同相を与える。 □

SO(3) は $\mathbb{R}P^3$ と同相であることを示そう。

命題 2.3.9. SO(3) は $\mathbb{R}P^3$ と同相である。

証明 [TODO] □

2.4 トーラス

定義 2.4.1. [TODO]

2.5 Möbius の帯

Möbius の帯はホモロジーから位相が決まらない例のひとつでもある。

定義 2.5.1 (Möbius の帯)**.**

(1) $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の同値関係 $\sim$ を $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ により生成されるものとして定める。この同値関係に関する商空間を**境界を持つ Möbius の帯 (Möbius band with boundary)** という。

(2) $[0, 1] \times (0, 1)$ 上の同値関係 $\sim$ を $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ により生成されるものとして定める。この同値関係に関する商空間を**境界を持たない Möbius の帯 (Möbius band without boundary)** という。

命題 2.5.2 (境界を持つ Möbius の帯と円柱は同相でない). 境界を持つ Möbius の帯と境界を持つ円柱は同相でない。

証明　M を境界を持つ Möbius の帯、C を境界を持つ円柱とする。同相写像 $\varphi\colon M \to C$ が存在したとすると、φ の制限により多様体としての境界 ∂M と ∂C は同相となる。∂M は弧状連結だが ∂C は弧状連結でないから矛盾。 □

命題 2.5.3 (境界を持たない Möbius の帯と円柱は同相でない). 境界を持たない Möbius の帯と境界を持たない円柱は同相でない。

証明　とくに同相写像 $\varphi\colon E \to S^1 \times \mathbb{R}$ が存在する。$K := S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$、$K' := \varphi^{-1}(K)$ とおく。K はコンパクトだから L もコンパクトである。このとき $p^{-1}(L)$ は $[0,1] \times \mathbb{R}$ の有界閉集合である。

$\because$　閉であることは明らか。もし有界でなかったとすると任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $y_n > |n|$ なる点 (x_n, y_n) が $p^{-1}(K')$ に含まれ、したがって点 $p(x_n, y_n)$ が K' に含まれる。すると K' の開被覆 $\{p([0,1] \times (-n, n))\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ が有限部分被覆を持たないから K' はコンパクトでないことになり矛盾。 //

よってある $a > 0$ が存在して $[0,1] \times [-a, a] \supset p^{-1}(L)$、したがって $L' := p([0,1] \times [-a, a]) \supset L$ となる。L' はコンパクトだから $K' := \varphi(L')$ もコンパクトである。したがってある $b > 0$ が存在して $S^1 \times (-b, b) \supset K' \supset K$ をみたす。よって $(S^1 \times \mathbb{R}) \setminus K'$ は連結でない。一方 $E \setminus L'$ は連結である。これで矛盾がいえた。 □

2.6　射影空間

射影空間は、位相群の作用による商として定義される重要な空間のひとつである。射影空間 $\mathbb{K}P^n$ は $\mathbb{K}^{n+1}$ 内の原点を通る直線をひとつの点とみなしてそれらを集めた空間とみなすことができる。すなわち Grassmann 多様体と呼ばれる多様体の特別な場合である。ここでは複素射影空間と実射影空間について述べる。

2.7　基本性質

定義 2.7.1 (射影空間). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$n \geq 1$ とする。このとき、乗法群 $\mathbb{K}^\times$ の連続作用 $\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ に関する軌道空間を

$$\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^\times \tag{2.7.1}$$

とおき、これを **n 次元 $\mathbb{K}$ 射影空間 (n-dimensional $\mathbb{K}$-projective space)** という。標準射影 $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}P^n$ を ϖ とおく。

定義 2.7.2 (斉次座標・非斉次座標). [TODO]

補題 2.7.3. 射影空間は Hausdorff である。

証明　**??** より成り立つ。 □

斉次多項式により射影空間上に写像が誘導される。

定理 2.7.4 (斉次多項式から誘導される写像). [TODO]

証明 [TODO] □

$\mathbb{K}^{n+1}$ 上の線型自己同型は射影空間上に同相写像を誘導する。

定理 2.7.5 (射影変換). $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ とする。写像

$$\mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^n, \quad [z] \mapsto [Az] \tag{2.7.2}$$

は well-defined であり同相写像となる。これを**射影変換 (projective transformation)** という。

証明 [TODO] □

2.8 複素射影空間

Hopf ファイブレーションは複素射影空間の具体的な計算に役立つ。

定理 2.8.1 (Hopf ファイブレーション). 商写像 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ を ϖ とおき、

$$S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} \tag{2.8.1}$$

とみなして $\pi := \varpi|_{S^{2n+1}}$ とおく。このとき π は同相 $S^{2n+1}/S^1 \approx \mathbb{C}P^n$ を誘導する。ただし、S^1 の作用 $S^1 \curvearrowright S^{2n+1}$ は作用 $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の制限により定める。π を **Hopf ファイブレーション** という。

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, "\pi=\varpi|_{S^{2n+1}}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{C}P^n \\ S^{2n+1}/S^1 \arrow[ur, dashed, "\approx"'] & \end{tikzcd} \tag{2.8.2}$$

証明 π が連続であることは明らか。π が S^{2n+1} から $\mathbb{C}P^n$ の上への全射であることは各 $[z] \in \mathbb{C}P^n$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対し $\pi(z/\|z\|) = [z]$ が成り立つことからわかる。単射性は、$z, z' \in S^{2n+1}$ に関し $\pi(z) = \pi(z')$ ならば $z = \alpha z'$ $(\exists \alpha \in \mathbb{C}^\times)$ であり、$|z| = |z'| = 1$ ゆえに $|\alpha| = 1$ すなわち $\alpha \in S^1$ となることより従う。したがって π により連続全単射 $\bar{\pi}\colon S^{2n+1}/S^1 \to \mathbb{C}P^n$ が誘導されるが、いま S^{2n+1}/S^1 はコンパクトで $\mathbb{C}P^n$ は Hausdorff だから $\bar{\pi}$ は同相である。 □

射影空間の部分集合のうちよく現れるものに次がある:

(1) $\{z_n = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$
(2) $\{z_n \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$
(3) $\mathbb{C}P^n$ から 1 点を除いた空間

これらの空間について調べよう。

補題 2.8.2. $\{z_n = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{C}P^{n-1}$ に同相である。

証明

$$[z_0 : \cdots : z_{n-1} : 0] \mapsto [z_0 : \cdots : z_{n-1}] \tag{2.8.3}$$

[TODO] □

補題 2.8.3. $\{z_n \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{C}^n$ に同相である。

証明

$$[z_0 : \cdots : z_{n-1} : z_n] \mapsto [z_0/z_n : \cdots : z_{n-1}/z_n] \tag{2.8.4}$$

[TODO] □

以上の 2 つの補題によりとくに

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \sqcup \mathbb{C}^n \tag{2.8.5}$$

と表せることがわかった。この関係は複素射影空間の胞体的ホモロジーを考える際に役立つ。さらに次の連続写像は基本的である。

補題 2.8.4 ($\mathbb{C}P^n$ の胞体構造)**.** $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ とみなして写像

$$\varphi^{2n} = \varphi\colon D^{2n} \to \mathbb{C}P^n, \quad w \mapsto [w_0 : \cdots : w_{n-1} : \sqrt{1 - \|w\|^2}] \tag{2.8.6}$$

は商写像であり、制限 $\varphi|_{\mathring{D}^{2n}}$ は $\{z_n \neq 0\}$ の上への同相写像となる。$\varphi|_{\mathring{D}^{2n}}$ の連続逆写像は

$$\psi\colon \{z_n \neq 0\} \to \mathring{D}^{2n}, \quad [z_0 : \cdots : z_{n-1} : z_n] \mapsto \frac{|z_n|}{\|z\|}\left(\frac{z_0}{z_n} : \cdots : \frac{z_{n-1}}{z_n}\right) \tag{2.8.7}$$

で与えられる。

証明 φ および ψ が連続であることは定義から明らか。ψ が $\varphi|_{\mathring{D}^{2n}}$ の逆写像であることは直接計算によりわかる。したがって $\varphi|_{\mathring{D}^{2n}}$ は $\{z_n \neq 0\}$ の上への同相写像であり、逆写像は ψ である。また、φ の定義から明らかに $\varphi(\partial D^{2n}) = \{z_n = 0\}$ だから内部の対応とあわせて φ は全射である。D^{2n} はコンパクトで $\mathbb{C}P^n$ は Hausdorff だから**??**より φ は閉写像である。したがって φ は全射かつ連続な閉写像だから、**??**より φ は商写像である。 □

次に $\mathbb{C}P^n$ から 1 点を抜いた空間を調べる。

補題 2.8.5. $\mathbb{C}P^n$ から任意の 1 点を除いた空間は互いに同相である。

証明 $P \in \mathbb{C}P^n$ とし $P_0 := [1 : 0 : \cdots : 0]$ とおく。$\mathbb{C}P^n \setminus \{P_0\} \approx \mathbb{C}P^n \setminus \{P\}$ を示せばよい。そこで Hopf ファイブレーション $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ を π とおくと

$$P_0 = \pi(p_0), \quad p_0 := {}^t(1, 0, \ldots, 0) \tag{2.8.8}$$

$$P = \pi(p), \quad p \in S^{2n+1} \tag{2.8.9}$$

と表せる。まず S^{2n+1} のレベルで同相写像を構成し、そこから求める同相を誘導する。いま $p \neq 0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$ だから、$\mathbb{R}^{2n+2}$ の元を付け加えて $\mathbb{R}^{2n+2}$ の基底 $p, x_1, \ldots, x_{2n+1}$ が得られる。Gram-Schmidt の直交化により正規直交基底 $p, y_1, \ldots, y_{2n+1}$ を得る。これらを並べた $(2n+2)$ 次行列を $A := [py_1 \ldots y_{2n+1}]$ とおくと、A は直交行列だから同相写像 $S^{2n+1} \to S^{2n+1},\ x \mapsto Ax$ が定まる。ここで $Ap_0 = p,\ A(-p_0) = -p$ だから $S^{2n+1} \setminus \{p_0, -p_0\} \approx S^{2n+1} \setminus \{p, -p\}$ すなわち $\pi^{-1}(\mathbb{C}P^n \setminus \{P_0\}) \approx \pi^{-1}(\mathbb{C}P^n \setminus \{P\})$ が成り立つ。この両辺は π に関し saturated な S^{2n+1} の開集合だからそれぞれへの π の制限は等化写像となる。これにより同相 $\mathbb{C}P^n \setminus \{P_0\} \approx \mathbb{C}P^n \setminus \{P\}$ が誘導され、主張が示せた。 □

上の補題を用いれば、複素射影空間から 1 点を除いた空間は次元をひとつ下げた複素射影空間とホモトピー同値であることが示せる。

命題 2.8.6 ($\mathbb{C}P^{n+1}$ から 1 点を除いた空間)**.** $\mathbb{C}P^{n+1}$ から 1 点を除いた空間は $\mathbb{C}P^n$ とホモトピー同値である。

証明　標準射 $\mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^{n+1}$ を π とおく。上の補題より、$P_0 := [0 : \cdots : 0 : 1]$ とおいて $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} \mathbb{C}P^n$ を示せば十分。そこで埋め込み

$$\iota \colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\}, \quad [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \cdots : z_n : 0] \tag{2.8.10}$$

を考え、$\iota(\mathbb{C}P^n)$ が $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\}$ の変形レトラクトであることを示せばよい。集合 $U := \pi^{-1}(\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\})$ は π に関し saturated な $\mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\}$ の開部分集合だから、$\pi|_U$ は等化写像である。そこで連続写像

$$r \colon \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\} \to \iota(\mathbb{C}P^n), \quad [z_0 : \cdots : z_n : z_{n+1}] \mapsto [z_0 : \cdots : z_n : 0] \tag{2.8.11}$$

が誘導される。このとき r は変形レトラクションとなる。実際、J. H. C. Whitehead の補題より連続写像

$$H \colon \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\} \times I \to \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\}, \quad ([z_0 : \cdots : z_n : z_{n+1}], t) \mapsto [z_0 : \cdots : z_n : tz_{n+1}] \tag{2.8.12}$$

が誘導され、これがホモトピーとなるからである。したがって $\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{P_0\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} \mathbb{C}P^n$ が示せた。 □

$\mathbb{C}P^n$ の部分空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ を 1 点に縮めると S^{2n} が得られる。

補題 2.8.7. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{n-1}$ は S^{2n} と同相である。ただし $\mathbb{C}P^{n-1} = \{z_n = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ の意味である。

証明　補題 2.8.4 の連続写像 $\varphi^{2n} \colon D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ を用いる。図式

$$\begin{tikzcd} D^{2n} \arrow[r, two heads, "\varphi^{2n}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{C}P^n \arrow[d, two heads] \\ S^{2n} \approx D^{2n}/\partial D^{2n} \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \end{tikzcd} \tag{2.8.13}$$

を可換にする連続全単射 $\overline{\varphi}$ が誘導され、[TODO] $\overline{\varphi}$ が単射であるのはなぜ？S^{2n} はコンパクトで $\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{n-1}$ は Hausdorff だから $\overline{\varphi}$ は同相である。

∵ $\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{n-1}$ が Hausdorff であることを示す。[TODO] //

□

とくに次の系が従う。

系 2.8.8. $\mathbb{C}P^1$ は S^2 と同相である。 □

$\mathbb{C}P^1$ と S^2 が同相であることを利用して $\mathbb{C}P^2$ の単連結性を示す。

補題 2.8.9. $\mathbb{C}P^2$ は単連結である。

証明 $\mathbb{C}P^2$ から 1 点を抜いた空間 U, V で被覆し定理 3.3.13 を用いる。$U \cap V$ は $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ に引き戻すと $\mathbb{C}^3$ から $(z_0, 0, 0)$ や $(0, z_1, 0)$ の形の元を除いた空間になる。これは弧状連結であることが示せるから $U \cap V$ も弧状連結である。[TODO] □

$\mathbb{C}P^2$ 内の平面射影曲線の簡単な例を調べよう。次の証明は [川 01] を参考にした。[TODO] Fermat curve についても書きたい

命題 2.8.10. 空間

$$X = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0\} \tag{2.8.14}$$

は S^2 と同相である。

証明 補題 2.8.8 より $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ だから $X \approx \mathbb{C}P^1$ を示せばよい。$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = (z_0 + iz_1)(z_0 - iz_1) - (iz_2)^2$ と変形できることに着目して、線型同型

$$F \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad z \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} z \tag{2.8.15}$$

により定まる射影変換 $\bar{F} \colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ を考える。$\bar{F}(z_0, z_1, z_2) = (z_0 + iz_1, z_0 - iz_1, iz_2)$ だから

$$\bar{F}(X) = \{[w_0 : w_1 : w_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid w_0 w_1 - w_2^2 = 0\} \tag{2.8.16}$$

である。$\bar{F}(X) \approx \mathbb{C}P^1$ を示す。そこで $f \colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ を $f([\zeta_0 : \zeta_1]) \coloneqq [\zeta_0^2 : \zeta_1^2 : \zeta_0 \zeta_1]$ で定める。右辺は斉次だからこれは well-defined な連続写像であり、また像が $\bar{F}(X)$ に入ることも明らか。つぎに $g \colon \bar{F}(X) \to \mathbb{C}P^1$ を

$$g([w_0 : w_1 : w_2]) \coloneqq \begin{cases} [w_0 : w_2] & (w_0 \neq 0) \\ [w_2 : w_1] & (w_1 \neq 0) \end{cases} \tag{2.8.17}$$

で定める。$w_0 w_1 - w_2^2 = 0$ ゆえに $w_0 = 0$ と $w_1 = 0$ が同時に成り立つことはないから場合分けはこれで十分で、共通部分では $w_0 \neq 0,\ w_1 \neq 0,\ w_0 w_1 - w_2^2 = 0$ より $w_2 \neq 0$ も成り立つことから

$$[w_0 : w_2] = [w_0 w_1 : w_1 w_2] = [w_2^2 : w_1 w_2] = [w_2 : w_1] \tag{2.8.18}$$

となる。よって g は well-defined である。直接計算により f, g は互いに逆写像であることがわかる。したがって f は連続全単射で、$\mathbb{C}P^1$ がコンパクト、$\bar{F}(X)$ が Hausdorff であることから f は同相である。よって $S^1 \approx \mathbb{C}P^1 \approx \bar{F}(X) \approx X$ がいえた。 □

2.9 実射影空間

実射影空間も複素射影空間の場合と同様に Hopf ファイブレーションが考えられる。

定理 2.9.1 (Hopf ファイブレーション). 商写像 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ を ϖ とおき、$\pi \coloneqq \varpi|_{S^n}$ とおく。このとき π は同相 $S^n/\{\pm 1\} \approx \mathbb{R}P^n$ を誘導する。π を **Hopf ファイブレーション** という。

証明 [TODO] □

実射影空間の場合、Hopf ファイブレーションは普遍被覆になっている。

命題 2.9.2 (実射影空間の普遍被覆). [TODO]

証明 [TODO] □

実射影空間は次のように表示することもできる。

定理 2.9.3 (実射影空間の表示). 対蹠点の同一視により $\mathbb{R}P^n \approx D^n/\sim$ [TODO]

証明 [TODO] □

複素射影空間の場合と同様に次の補題が成り立つ。証明は複素の場合と全く同様だから省略する。

補題 2.9.4. $\{x_n = 0\} \subset \mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}P^{n-1}$ に同相である。 □

補題 2.9.5. $\{x_n \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}^n$ に同相である。 □

補題 2.9.6. $D^n \subset \mathbb{R}^n$ とみなして写像

$$f\colon D^n \to \mathbb{R}P^n, \quad y \mapsto [y_0 : \cdots : y_{n-1} : \sqrt{1 - \|y\|^2}] \tag{2.9.1}$$

は $\{x_n \neq 0\}$ の上への同相となる。逆写像は

$$g\colon \{x_n \neq 0\} \to D^n, \quad [x_0 : \cdots : x_{n-1} : x_n] \mapsto \frac{|x_n|}{\|x\|}\left(\frac{x_0}{x_n} : \cdots : \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \tag{2.9.2}$$

で与えられる。 □

2.10 Klein の壺

定義 2.10.1 (Klein の壺). [TODO]

第 3 章　基本群と被覆空間

基本群と被覆空間について述べる。

3.1　空間対

空間対の概念を導入する。

定義 3.1.1 (空間対). 圏 $\mathbf{Top}^2$ を次のように定める:

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^2)$ は位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の対 (X, A) の全体
- 各 $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^2)$ に対し、$\mathrm{Ar}((X, A), (Y, B))$ は連続写像 $f : X \to Y$ であって $f(A) \subset B$ なるものの全体

$\mathbf{Top}^2$ を**空間対の圏 (category of pairs of spaces)** という。

定義 3.1.2 (空間対のホモトピー). $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ を空間対の射とする。f, g が**ホモトピック (homotopic)** であるとは、空間対の射 $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ であって $H : X \times I \to Y$ が $f : X \to Y$ を $g : X \to Y$ につなぐホモトピーであるようなものが存在することをいう。空間対の**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** や**ホモトピー同値射 (homotopy equivalence)** も同様に定義する。

3.2　ホモトピー

ホモトピーについて述べる。ホモトピーの概念は基本群やホモロジーの重要な基盤となる。

A.　ホモトピーの定義と基本性質

[TODO] 最初から空間対で定義する？

[TODO] 相対ホモトピーは後で導入すべき？空間対は包含だけど相対ホモトピーは固定だから違うもの？

ホモトピーとは、大まかには 2 つの写像の間の連続的な変形を表すものである。

定義 3.2.1 (相対ホモトピー). $f, g : X \to Y$ を連続写像、$A \subset X$、$f = g$ on A とする。連続写像 $H : X \times I \to Y$ であって

$$H(x, 0) = f(x) \quad (\forall x \in X) \tag{3.2.1}$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad (\forall x \in X) \tag{3.2.2}$$

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad (\forall a \in A,\ t \in I) \tag{3.2.3}$$

をみたすものが存在するとき $f \underset{\text{h.e.}}{\simeq} g$ rel A と書き、f と g は **rel A でホモトピック (homotopic rel A)** であるという。H を f と g をつなぐ rel A な**相対ホモトピー (relative homotopy)** という。

定義 3.2.2 (自由ホモトピー). $f \underset{\text{h.e.}}{\simeq} g$ rel $\varnothing$ のとき $f \underset{\text{h.e.}}{\simeq} g$ と書き、f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるという。f と g をつなぐ rel $\varnothing$ な相対ホモトピーを**自由ホモトピー (free homotopy)** あるいは単に**ホモトピー (homotopy)** という [1)]。

[TODO] antipodal map の例を挙げたい

例 3.2.3 (ホモトピックな写像の例). 連続写像 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) := (x, x^2), \quad g(x) := (x, x) \tag{3.2.5}$$

で定めると、線型ホモトピー $H(x,t) := (x, (1-t)x^2 + tx)$ により f, g はホモトピックとなる。

例 3.2.4 (ホモトピックでない写像の例). 連続写像 $f, g\colon S^1 \to S^1$ を

$$f(z) := 1, \quad g(z) := z \tag{3.2.6}$$

で定めると、f, g はホモトピックではない。このことは S^1 が単連結でないという (後で証明する) 事実を用いて示される。

ホモトピックな写像は左や右から連続写像を合成してもホモトピックである。

命題 3.2.5 (ホモトピックな写像と連続写像の合成). X, Y, Z を位相空間、$f, g\colon X \to Y$ および $h\colon Y \to Z$, $i\colon Z \to X$ を連続写像とする。$f \simeq g$ のとき

$$h \circ f \simeq h \circ g, \quad f \circ i \simeq g \circ i \tag{3.2.7}$$

が成り立つ。

証明 $f \simeq g$ より、図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "x\mapsto(x,0)"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X\times I \arrow[r, "F"] & Y \\
X \arrow[u, "x\mapsto(x,1)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2.8}$$

1) 連続写像 H が $f, g\colon X \to Y$ をつなぐホモトピーであることは、次の可換図式で表される：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "x\mapsto(x,0)"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X\times I \arrow[r, "H"] & Y \\
X \arrow[u, "x\mapsto(x,1)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

を可換にするホモトピー F が存在する。そこで、図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "x\mapsto(x,0)"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ X \times I \arrow[r, "F"] & Y \arrow[r, "h"] & Z \\ X \arrow[u, "x\mapsto(x,1)"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd} \tag{3.2.9}$$

を考えれば、ホモトピー $h \circ F$ により

$$h \circ f \simeq h \circ g \tag{3.2.10}$$

が成り立つことがわかる。また、図式

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "z\mapsto(z,0)"'] & X \arrow[d, "x\mapsto(x,0)"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \times I \arrow[r, "i\times\mathrm{id}"] & X \times I \arrow[r, "F"] & Y \\ Z \arrow[r, "i"'] \arrow[u, "z\mapsto(z,1)"] & X \arrow[u, "x\mapsto(x,1)"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{3.2.11}$$

を考えれば、ホモトピー $F \circ (i \times \mathrm{id})$ により

$$f \circ i \simeq g \circ i \tag{3.2.12}$$

が成り立つことがわかる。 □

補題 3.2.6 ($\simeq$ は同値関係). X, Y を位相空間、$A \subseteq X$ とする。このとき、$\simeq$ $relA$ は X から Y への連続写像全体の集合上の同値関係である。

証明 [TODO] 何に使う？ □

定義 3.2.7 (パスホモトピー類). X を位相空間、$x_0 \in X$ とする。x_0 を基点とするループ γ に対し、同値関係 $\simeq$ rel $\{0,1\}$ に関する γ の同値類を**パスホモトピー類 (path homotopy class)** といい、$[\gamma]$ と書く。

B. ホモトピー同値

ホモトピーの概念を用いて、空間のホモトピー同値性を定義する。

定義 3.2.8 (ホモトピー同値). X, Y を位相空間とする。

- 連続写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ が存在して $f \circ g \simeq 1_Y$, $g \circ f \simeq 1_X$ をみたすとき、X, Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** あるいは同じ**ホモトピー型 (homotopy type)** を持つという。
- 上の f, g を**ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence)** という。
- X, Y がホモトピー同値であることを $X \underset{\text{h.e.}}{\simeq} Y$ と書く。

注意 3.2.9 (同相ならばホモトピー同値). 上の定義で X, Y が同相ならば、「$\simeq$」が「$=$」で成り立つから、とくにホモトピー同値である。

例 3.2.10 (ホモトピー同値な空間の例). $\{0\}$ と $\mathbb{R}$ はホモトピー同値である。実際、$f\colon \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$, $g\colon \mathbb{R} \to \{0\}, y \mapsto 0$ とおけば、$g \circ f = 1_{\{0\}}$ であるし、$f \circ g$ は線型ホモトピーにより $1_{\mathbb{R}}$ とホモトピックである。

例 3.2.11 (ホモトピー同値でない空間の例). $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $\mathbb{C}$ はホモトピー同値でない。このことは S^1 が単連結でないという (後で証明する) 事実を用いて示される。

補題 3.2.12 (ホモトピー同値は同値関係). ホモトピー同値は位相空間の間の同値関係である。

証明　省略 □

C. レトラクト

基本群やホモロジーと相性の良い部分空間のクラスとしてレトラクトや変形レトラクトがある。

定義 3.2.13 (レトラクション). X を位相空間、$A \subset X$ を部分空間とする。連続写像 $r\colon X \to A$ が**レトラクション (retrcaction)** であるとは、包含写像 $i\colon A \to X$ に対し $r \circ i = \mathrm{id}_A$ が成り立つことをいう。このとき、A は X の**レトラクト (retract)** であるという。

Hausdorff 空間のレトラクトは閉集合でなければならない。

命題 3.2.14 (Hausdorff 空間のレトラクトは閉集合). X を Hausdorff 位相空間、$A \subset X$、$r\colon X \to A$ をレトラクションとする。このとき A は閉集合である。

証明　$i\colon A \to X$ を包含写像とすると A は $i \circ r$ の不動点である。したがって??より A は X の閉集合である。 □

X のレトラクト A であって X を A に連続的に変形できるようなものは変形レトラクトと呼ばれる。

定義 3.2.15 (変形レトラクション). X を位相空間、$A \subset X$ を部分空間とする。ホモトピー $H\colon X \times I \to X$ が X から A への**変形レトラクション (deformation retraction)** であるとは、次が成り立つことをいう:

$$H(x, 0) = x \quad (\forall x \in X) \tag{3.2.13}$$

$$H(x, 1) \in A \quad (\forall x \in X) \tag{3.2.14}$$

$$H(a, 1) = a \quad (\forall a \in A) \tag{3.2.15}$$

このとき、A は X の**変形レトラクト (deformation retract)** であるという。

補題 3.2.16 (変形レトラクトとのホモトピー同値). X を位相空間とし、$A \subset X$ を部分空間とする。A が X の変形レトラクトならば、X と A はホモトピー同値である。

証明 $H\colon X \times I \to X$ を X から A への変形レトラクションとし、包含写像 $A \to X$ を ι とおく。このとき、連続写像 $r\colon X \to A$ を

$$x \mapsto H(x, 1) \tag{3.2.16}$$

で定めることができる。X と A がホモトピー同値であることを示すには、

$$\begin{cases} \iota \circ r \simeq 1_X \\ r \circ \iota \simeq 1_A \end{cases} \tag{3.2.17}$$

をいえばよいが、1 個目は H が 1_X と $\iota \circ r$ をつなぐホモトピーであることから成り立ち、2 個目は H が X から A への変形レトラクションであることから等号で成り立つ。 □

D. 可縮空間

ホモトピー同値性を用いて定義される空間のクラスのうち最も重要なもののひとつが可縮空間である。

定義 3.2.17 (可縮空間). X を位相空間とする。X が 1 点からなる空間とホモトピー同値であるとき、X は**可縮 (contractible)** であるという。命題 3.2.5 より明らかに可縮性は位相不変である。

命題 3.2.18 (可縮空間の特徴付け). 位相空間 X に対し次は同値である:

(1) X は可縮である。
(2) id_X はある定値写像 $X \to X, x \mapsto c$ とホモトピックである。
(3) X は 1 点からなる変形レトラクトをもつ。

証明 <u>(1) ⇒(2)</u> X を可縮とするとホモトピー同値写像 $f\colon X \to *,\ g\colon * \to X$ が存在してとくに定値写像 $g \circ f\colon x \mapsto g(*)$ は id_X とホモトピックである。

<u>(2) ⇒(3)</u> 明らかに $\{c\} \subset X$ が X の変形レトラクトとなる。

<u>(3) ⇒(1)</u> X の変形レトラクトは X とホモトピー同値である。 □

例 3.2.19 (可縮空間の例). 凸集合は明らかに可縮である。また、関数 $x \mapsto x^2$ のグラフ $\Gamma := \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ は凸集合ではないが可縮である。実際、ホモトピー $H\colon \Gamma \times I \to \Gamma$ を

$$H((x, y), t) := ((1-t)x, ((1-t)x)^2) \quad (\forall (x, y) \in \Gamma, t \in I) \tag{3.2.18}$$

により 1_X は原点での定値ループとホモトピックとなる。

3.3 基本群

基本群について述べる。

A. 第 0 ホモトピー集合

弧状連結空間の基本的な事項は??で述べた。ここでは基本群の導入への橋渡しとして空間の弧状連結成分全体の集合を考える。

定義 3.3.1 (第 0 ホモトピー集合). X を位相空間とする。X の弧状連結成分全体の集合を $\pi_0(X)$ と書き、X の**第 0 ホモトピー集合** という。

命題 3.3.2 (第 0 ホモトピー集合上に誘導される写像). 位相空間 X, Y に対して、X から Y への連続写像は $\pi_0(X)$ から $\pi_0(Y)$ への写像を誘導する。また、X から Y への互いにホモトピックな連続写像が誘導する写像は一致する。

証明 問題 3.5 を参照。 □

系 3.3.3. X, Y がホモトピー同値ならば $\pi_0(X), \pi_0(Y)$ の濃度は一致する。 □

B. 基本群の定義と基本性質

[TODO] 基本亜群を経由した定義に修正する？それは同型類だから別物？

パスホモトピー類を用いて基本群を定義する。

定義 3.3.4 (パスの合成・反転). X を位相空間、$x_0 \in X$ とする。この節だけの記号として、x_0 を基点とする X 内のループ全体の集合を $\mathrm{Loop}(X, x_0)$ と書き、定値ループ x_0 を c_{x_0} と書くことにする。$\alpha, \beta \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$ に対し、パスの**合成** $\alpha * \beta$ およびパスの**反転** $\bar{\alpha}$ をそれぞれ

$$\alpha * \beta(s) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{if } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s - 1) & \text{if } s \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{3.3.1}$$

$$\bar{\alpha}(s) := \alpha(1 - s) \tag{3.3.2}$$

で定義する (写像の合成 $\circ$ と逆向きであることに注意)。

注意 3.3.5 ($\mathrm{Loop}(X, x_0)$ は群でない). 定義 3.3.4 の状況で、一見 $\mathrm{Loop}(X, x_0)$ はパスの合成と反転により群になりそうだが、一般にはそうはならない。実際、たとえば $X = S^1, x_0 = 1$ のとき、S^1 を反時計回りに 1 周するループを γ とすると、$\gamma * \bar{\gamma} \neq \bar{\gamma} * \gamma$ である。

定義 3.3.6 (基本群). X を位相空間、$x_0 \in X$ とする。パスホモトピー類の集合

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \colon \gamma \in \mathrm{Loop}(X, x_0)\} \tag{3.3.3}$$

は、パスの合成と反転により定まる演算

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \tag{3.3.4}$$

$$[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}] \tag{3.3.5}$$

をそれぞれ積、逆元として群をなし、単位元は $[c_{x_0}]$ となる（証明略）。群 $\pi_1(X, x_0)$ を、x_0 を基点とする X の**基本群 (fundamental group)** という[1)]。

注意 3.3.7 (弧状連結空間の基本群). X を弧状連結な位相空間、$x_0, x_1 \in X$ とすると、弧状連結性より x_0 と x_1 をつなぐ X 内のパス h がとれる。そこで、基点の取り換えの写像 $\beta_h \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ を

$$\beta_h([\gamma]) := [h * \gamma * \bar{h}] \tag{3.3.7}$$

で定めると、β_h は群同型となる（証明略）。これを表す可換図式が次である：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loop}(X, x_0) \arrow[r, "\gamma \mapsto h \cdot \gamma \cdot \bar{h}"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]}"'] & \mathrm{Loop}(X, x_1) \arrow[d, "{[\,\cdot\,]}"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\beta_h", "\cong"'] & \pi_1(X, x_1) \end{tikzcd} \tag{3.3.8}$$

よって、群構造のみを問題にするときは基点を省略して $\pi_1(X)$ と書くことがある。

定義 3.3.8 (連続写像により誘導される準同型). X, Y を位相空間、$x_0 \in X$ とし、$f \colon X \to Y$ を連続写像とする。このとき、写像 $f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$,

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma] \tag{3.3.9}$$

は群準同型として well-defined である (このあと示す)。これを表す可換図式が次である：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loop}(X, x_0) \arrow[r, "f \circ"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]}"'] & \mathrm{Loop}(Y, f(x_0)) \arrow[d, "{[\,\cdot\,]}"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "f_*"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \end{tikzcd} \tag{3.3.10}$$

証明 [TODO] □

定理 3.3.9 (基本群はホモトピー不変量). X, Y を位相空間、$x_0 \in X$ とし、$f \colon X \to Y$ をホモトピー同値写像とする。このとき、f により誘導される準同型 f_* は同型である。とくに、基本群はホモトピー不変量かつ位相不変量である。

証明 [TODO] □

注意 3.3.10 (基本群の一致はホモトピー同値を意味しない). 上の定理の逆は必ずしも成り立たない。すなわち、2 つの空間が同じ基本群を持ったとしても、ホモトピー同値であるとは限らない[2)]。

1） π_1 は点付き位相空間の圏 $\mathbf{Top}_*$ から $\mathbf{Groups}$ への共変関手である。

$$\mathbf{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{Groups} \tag{3.3.6}$$

C. 単連結空間

基本群を用いて定義される位相空間のクラスのうち最も重要なもののひとつが単連結空間である。

定義 3.3.11 (単連結). 位相空間 X が**単連結 (simply connected)** であるとは、X が弧状連結かつ $\pi_1(X)$ が自明群であることをいう。[TODO] 点付きでなくて良いか？

位相空間が単連結でないことを定義から直接示すのは難しいが、単連結であることを示すのは比較的簡単な場合がある。[TODO] 本当に？

例 3.3.12 (単連結な空間の例 1). $\mathbb{C}$ は単連結である。実際、$\mathbb{C}$ は弧状連結であるし、1 を基点とするループはすべて（線型ホモトピーによって）定値ループとホモトピックだから $\pi_1(X)$ は自明である。

次の定理はホモロジーの Mayer-Vietoris の定理の基本群における類似である。

定理 3.3.13 (Mayer-Vietoris の類似). X を位相空間とする。X 単連結な開集合 U, V で被覆され、共通部分 $U \cap V$ が弧状連結ならば、X は単連結である。

系 3.3.14 (球面の基本群). $n \geq 2$ ならば S^n は単連結である。

証明 S^n から南極を除いた集合と北極を除いた集合を考えて定理を適用すればよい。 □

D. 直積空間の基本群

定理 3.3.15 (直積空間の基本群). X, Y を位相空間、$x_0 \in X, y_0 \in Y$ とする。このとき、群の同型 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ が成り立つ。

証明 問題 3.24 を見よ。 □

例 3.3.16 (トーラスの基本群). S^1 の基本群 $\pi_1(S^1)$ が $\mathbb{Z}$ に同型であることを一時的に認めると、2 次元トーラスの基本群は直積群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に同型であることがわかる、実際、$T^2 = S^1 \times S^1$ だから定理 3.3.15 よりただちに従う。この証明は後の系 3.5.3 で与える。

このあとのいくつかの例では、S^1 が単連結でないという事実を一時的に認める。

例 3.3.17 ($\mathbb{R}^n$ と凸部分集合). $X \subset \mathbb{R}^n$ を凸部分集合とする。$x_0 \in X$ を任意に固定する。このとき、ホモトピー $H(x, t) := (1 - t)x + tx_0$ は A から $\{x_0\}$ への変形レトラクションである。

2) Whitehead の定理と呼ばれる定理は、特別な場合にこのような逆の成立を主張する。

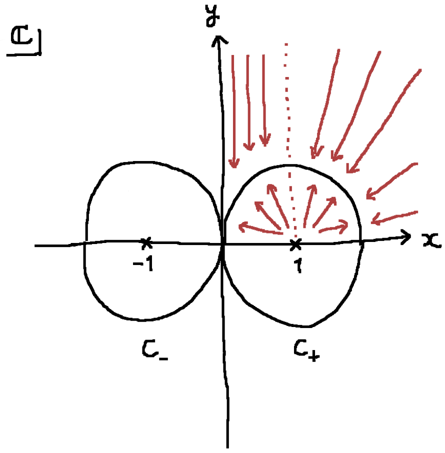

図 3.1　8 の字空間

例 3.3.18 ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と S^1). $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし、$A := S^1$ とする。ホモトピー $H\colon X \times I \to X$,

$$H(x,t) := (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \tag{3.3.11}$$

は X から A への変形レトラクションである。したがって X と A はホモトピー同値であり、それぞれの基本群は同型となるから、$A = S^1$ が単連結でないことから $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ も単連結でない。

例 3.3.19 ($\mathbb{C}$ から 2 点を除いた空間). $X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ とおき、$C_\pm := S^1 \pm 1$ とおく。**8 の字空間 (figure-eight space)** $A := C_- \cup C_+$ を考える。ホモトピー $H\colon X \times I \to X$ を、第 1 象限の $z = x + iy \in X$ に対し

$$H(x+iy,t) := \begin{cases} x + i\left((1-t)y + t\sqrt{1-(x-1)^2}\right) & (|z-1| \geq 1, x \leq 1) \\ 1 + (1-t)(z-1) + t\dfrac{z-1}{|z-1|} & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{3.3.12}$$

と定める。他の象限の z に対しても同様に定める（図 3.1）。このとき、H は X から A への変形レトラクションである。ここで、8 の字空間 A は単連結でない。

∵　包含写像 $C_+ \to A$ を ι とおき、$r\colon A \to C_+$ を $r(x+iy) := |x| + iy$ で定める。このとき $r \circ \iota = 1_{C_+}$ が成り立つから、誘導される準同型 $(r \circ \iota)_*\colon \pi_1(C_+, 0) \to \pi_1(C_+, 0)$ は恒等写像である。$(r \circ \iota)_* = r_* \circ \iota_*$ であることにも注意すれば、$\iota_*\colon \pi_1(C_+, 0) \to \pi_1(A, 0)$ は単射である。$\pi_1(C_+, 0) \cong \pi_1(S^1)$ は非自明だから、$\pi_1(A, 0)$ も非自明である。したがって A は単連結でない。　//

よって $X = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ も単連結でないことがわかる。

3.4　被覆空間

[TODO] 連結性に関する仮定があやしいので書き直したい

位相空間の被覆空間とは、大まかには位相空間を局所的な形を保ったまま覆うような位相空間のことである。

[TODO] ファイバー束の特別な場合であることを強調すべき？

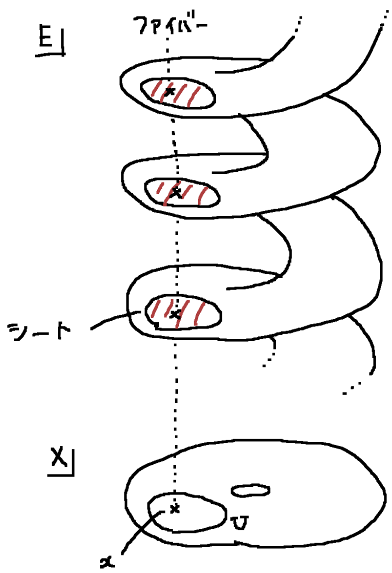

図 3.2　**被覆空間**

定義 3.4.1 (被覆空間). E, X を位相空間とする。連続写像 $p\colon E \to X$ が次を満たすとき、E は**被覆空間 (covering space)** であるという:

(1)　E は連結かつ局所弧状連結である[3)]。

(2)　各 $x \in X$ は p により**自明に被覆される (trivially covered)** 近傍をもつ。すなわち、各 $x \in X$ に対し、$x \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} X$ と E の disjoint な開集合の族 $\exists\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して次が成り立つ:

(a)　$p^{-1}(U)$ は

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \tag{3.4.1}$$

をみたす。

(b)　各 λ に対し $p|_{V_\lambda}$ は U の上への同相写像である。

このとき、

- X を**底空間 (base space)**、
- U を x の**自明化近傍**、
- V_λ らを U 上の p の**シート (sheets)**、
- $p^{-1}(x)$ を x 上の p の**ファイバー (fiber)**

という（図 3.2)。

例 3.4.2 (被覆空間の例).

- X を位相空間とする。恒等写像 $1_X\colon X \to X$ は X の自明な被覆空間である。

3)　したがってとくに弧状連結でもある。

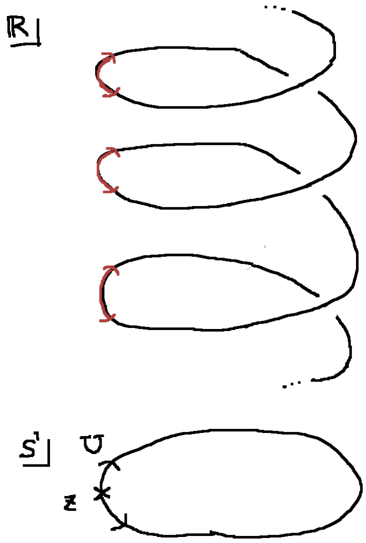

図 3.3　S^1 **の被覆空間**

例 3.4.3 (S^1 の被覆空間). $\mathbb{R}$ は S^1 の被覆空間である（図 3.3)。被覆空間 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ は $p(x) := e^{2\pi i x}$ とおけばよいことを確かめる。$\delta > 0$ を十分小さく固定しておく。各 $z = e^{i\theta_0} \in S^1, 0 \leq \theta_0 < 2\pi$ に対し、$U := \{e^{i\theta} \in S^1 \colon \theta_0 - \delta < \theta < \theta_0 + \delta\}$ とおけば、U は S^1 における z の開近傍である。U は

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\theta_0 - \delta + 2n\pi, \theta_0 + \delta + 2n\pi) \tag{3.4.2}$$

をみたし、各項は p により U と同相である。したがって、U は p により自明に被覆されることがわかる。

命題 3.4.4 (ファイバーは離散空間). $p\colon E \to X$ を被覆空間とする。このとき、各 $x \in X$ に対しファイバー $p^{-1}(x)$ は離散空間である。

証明　各 $e \in p^{-1}(x)$ に対し $\{e\}$ が $p^{-1}(x)$ の開集合であることをいえばよい。そこで x の自明化近傍 U をひとつ固定すると、U 上のシート V_λ であって e の属するものがただひとつ存在する。$\{e\} = V_\lambda \cap p^{-1}(x)$ を示せばよい。右向きの包含は明らかだから、逆向きを示す。そこで $e' \in V_\lambda \cap p^{-1}(x)$ とすると、$p(e') = x = p(e)$ であるが、p は V_λ から U への単射だから $e' = e$、したがって $e' \in \{e\}$ である。よって逆向きの包含もいえた。 □

被覆空間は全射連続開写像である。

命題 3.4.5 (被覆空間は全射連続開写像). [TODO]

証明　[TODO] □

A.　リフト

リフトについて述べる。

[TODO] 多価関数の枝についての例を念頭に考えたい

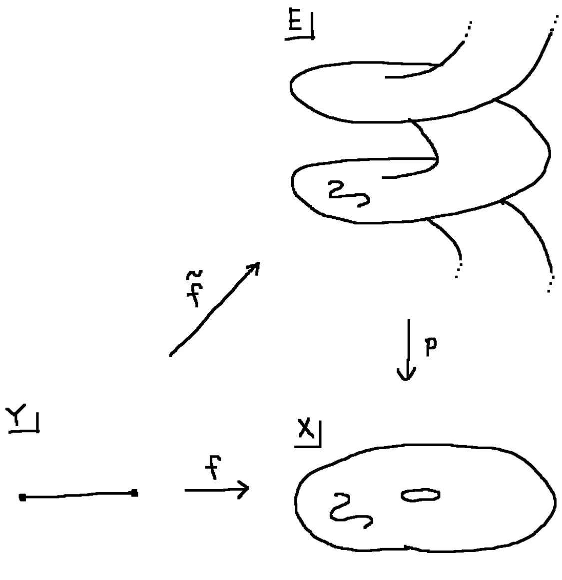

図 3.4　リフト

定義 3.4.6 (リフト). $p\colon E \to X$ を被覆空間、$f\colon Y \to X$ を連続写像とする。連続写像 $\widetilde{f}\colon Y \to E$ が p による f の **リフト (lift)** あるいは**持ち上げ** であるとは、図式

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \tag{3.4.3}$$

が可換となることをいう（図 3.4）。

例 3.4.7 (リフトが存在しない例). 例 3.4.3 の被覆空間 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を考える。$f\colon S^1 \to S^1$ を恒等写像とすると、p による f のリフト $\widetilde{f}$ は存在しない。

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd} \tag{3.4.4}$$

実際、もしこのようなリフト $\widetilde{f}$ が存在するとしたら、$p \circ \widetilde{f}$ から誘導される群準同型 $(p \circ \widetilde{f})_*\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ は恒等写像となるから、$p_*\colon \pi_1(\mathbb{R}) \to \pi_1(S^1)$ は全射である。ところが、（S^1 が単連結でないことを認めると）$\pi_1(S^1)$ は非自明で $\pi_1(\mathbb{R})$ は自明だからこれは矛盾である。したがって上のようなリフト $\widetilde{f}$ は存在しない。

例 3.4.8 (リフトが一意でない例). $U \subset \mathbb{C}^\times$ を単連結領域とする。このとき、指数関数 $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times,\ z \mapsto \exp(z)$ は被覆空間である。また、各 $n_0 \in \mathbb{Z}$ に対し写像 $\log_{n_0}\colon U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \log|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2n_0\pi)$ は $\exp$ による $f\colon U \to \mathbb{C}^\times,\ z \mapsto z$ のリフトである。n_0 をどのようにとっても $\log_{n_0}$ は $\exp$ のリフトであるが、$\log_{n_0}$ は n_0 ごとに異なるから、リフトは一意的でないことが確かめられた。

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, "\log_{n_0}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_U"'] & C^\times \end{tikzcd} \tag{3.4.5}$$

連結空間 (たとえば I) からの写像がリフトを持つとき、上の例で見たようにそれは一意とは限らないが、1 点での値を決めれば一意に定まる。証明の手法は連結性を用いる典型的なものである。

定理 3.4.9 (リフトの一意性定理). $p\colon E \to X$ を被覆空間、Y を連結位相空間、$\varphi\colon Y \to X$ を連続写像とする。$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2\colon Y \to E$ を p による φ のリフトとするとき、$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ が 1 点で一致するならば全体で一致する。

証明 $B \coloneqq \{x \in Y\colon \widetilde{\varphi}_1(x) = \widetilde{\varphi}_2(x)\}$ とおく。問題の仮定より B は空でない。Y は連結だから、B が Y で開かつ閉であることを示せば $B = Y$ となり定理の主張が従う。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, shift left, "\widetilde{\varphi}_1"] \arrow[ur, shift right, "\widetilde{\varphi}_2"'] \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd} \tag{3.4.6}$$

<u>B が Y で開であること</u>　$b_0 \in B$ とする。

$$e \coloneqq \widetilde{\varphi}_1(b_0) = \widetilde{\varphi}_2(b_0), \quad x_0 \coloneqq \varphi(b_0) = p(e) \tag{3.4.7}$$

とおく。x_0 の自明化近傍 $U \subset X$ と、U 上のシート $\widetilde{U}$ であって e を含むものが存在する。ここで $V \coloneqq \widetilde{\varphi}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(\widetilde{U})$ とおくと、V は Y における b_0 の開近傍であり、$\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ は V 上で $\widetilde{U}$ に値をとる。したがって

- φ は $V \to U$ の連続写像とみなすことができ、
- $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ は $V \to \widetilde{U}$ の連続写像とみなすことができ、
- p は $\widetilde{U} \to U$ の同相写像とみなすことができる。

よって、図式

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{U} \arrow[d, "p", "\wr"'] \\ V \arrow[ur, shift left, "\widetilde{\varphi}_1"] \arrow[ur, shift right, "\widetilde{\varphi}_2"'] \arrow[r, "\varphi"] & U \end{tikzcd} \tag{3.4.8}$$

は可換となる。p の $\widetilde{U}$ 上での単射性から V 上 $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2$ となることがわかる。したがって $b_0 \in V \subset B$ であり、b_0 は Y における B の内点であることがいえた。$b_0 \in B$ は任意であったから、B は Y で開である。

<u>B が Y で閉であること</u>　$Y \setminus B$ が Y で開であることを示す。$b_0 \in Y \setminus B$ とする。$e_1 \coloneqq \widetilde{\varphi}_1(b_0)$, $e_2 \coloneqq \widetilde{\varphi}_2(b_0)$ とおくと、$b_0 \notin B$ より $e_1 \neq e_2$ である。$x_0 \coloneqq p(e_1) = p(e_2) = \varphi(b_0)$ とおくと、x_0 の自明化近傍 $U \subset X$ と、U 上のシート $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ であって e_1, e_2 をそれぞれ含むものが存在する。このとき $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$ である

> $\because$ もし交わりをもったとすれば、シートの disjoint 性より $\widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_2$ でなければならないが、すると p が $\widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_2$ から U への全単射となることから $e_1 = (p|_{\widetilde{U}_1})^{-1}(x_0) = (p|_{\widetilde{U}_2})^{-1}(x_0) = e_2$ となり矛盾。
> //

ここで $V \coloneqq \widetilde{\varphi}_1^{-1}(\widetilde{U}_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(\widetilde{U}_2)$ とおくと、V は Y における b_0 の近傍であり、$\widetilde{\varphi}_1(V) \subset \widetilde{U}_1$, $\widetilde{\varphi}_2(V) \subset \widetilde{U}_2$ をみたす。よって V 上 $\widetilde{\varphi}_1 \neq \widetilde{\varphi}_2$ である。したがって $V \subset Y \setminus B$ であり、b_0 は Y における $Y \setminus B$ の内点であることがいえた。$b_0 \in Y \setminus B$ は任意であったから、$Y \setminus B$ は Y で開である。よって B は Y で閉である。 □

リフトの存在について調べる。まずは一般の写像のリフトではなくパスのリフトに限って考えよう。パスのリフ

トの存在に関する定理はすべて次の定理から導かれる。

定理 3.4.10 (被覆ホモトピー定理). $p\colon E \to X$ を被覆空間、Y を位相空間とする。このとき、図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "y \mapsto (y,0)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & X \end{tikzcd} \tag{3.4.9}$$

を可換にする $\widetilde{F}$ が一意に存在する。

証明 [TODO] □

系 3.4.11 (パスのリフトの一意存在定理). $p\colon E \to X$ を被覆空間、$\gamma\colon I \to X$ をパス、$e \in p^{-1}(\gamma(0))$ とする。このとき、p による γ のリフト $\widetilde{\gamma}\colon I \to E$ であって $\widetilde{\gamma}(0) = e$ を満たすものが一意に存在する。

証明 [TODO] □

系 3.4.12 (モノドロミー定理). $p\colon E \to X$ を被覆空間、$f, g\colon I \to X$ を点 x_0 から x_1 へのパス、$\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ とする。

(1) (パスのホモトピーのリフトの一意存在) $H\colon f \sim g \ \mathrm{rel}\ \{0,1\}$ ならば、H のリフト $\widetilde{H}\colon I \times I \to E$ であって $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$ を満たすものが一意に存在する。
(2) (モノドロミー定理) さらに $\widetilde{x}_0$ を始点とする f, g のリフトをそれぞれ $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ とおくと、$\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ は終点も一致し、さらに $\widetilde{H}\colon f \sim g \ \mathrm{rel}\ \{0,1\}$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

モノドロミー定理を用いて S^1 は単連結でないことを示そう。

定理 3.4.13. S^1 は単連結でない。

証明 写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto \exp(2\pi i t)$ は S^1 の被覆空間である。ここで写像 $\gamma, \widetilde{\gamma}$ を

$$\gamma\colon I \to S^1, \quad t \mapsto \exp(2\pi i t) \tag{3.4.10}$$
$$\widetilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t \tag{3.4.11}$$

で定めると、$\widetilde{\gamma}$ は γ のリフトである。また、写像 β を

$$\beta\colon I \to S^1, \quad t \mapsto 1 \tag{3.4.12}$$
$$\widetilde{\beta}\colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 0 \tag{3.4.13}$$

で定めると、$\widetilde{\beta}$ は β のリフトである。ここで S^1 が単連結であると仮定すると、β と γ が共通の端点を持つこ

とから

$$H: \beta \sim \gamma \quad \mathrm{rel} \quad \{0,1\} \tag{3.4.14}$$

が成り立つ。$\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ は共通の始点を持つからモノドロミー定理より終点も共通である。ところが定義より $\widetilde{\beta}(1) = 0 \neq 1 = \widetilde{\gamma}(1)$ だから矛盾。したがって S^1 は単連結でない。 □

次に写像のリフトの存在について考える。一般の写像の定義域はパスの定義域 I のように良い性質を持つとは限らない。そこで定義域の連結性を限定したクラスのなかで存在条件を考えることになる。

定理 3.4.14 (リフトの存在条件)**.** $p: E \to X$ を被覆空間、Y を連結かつ局所弧状連結な位相空間、$f: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ を連続写像、$\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ とする。このとき、次は同値である:

(1) f のリフト $\widetilde{f}: (Y, y_0) \to (E, \widetilde{x}_0)$ が一意に存在する。

(2) $f_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(E, \widetilde{x}_0)$ である。

証明 Y は連結なので一意性は成り立つ。
[TODO] □

B. ファイバーへの基本群の作用

位相空間の基本群は、被覆空間のファイバーへの自然な群作用をもつ。
[TODO]

C. 普遍被覆

単連結な被覆空間を普遍被覆という。

定義 3.4.15 (普遍被覆)**.** 被覆空間 $p: E \to X$ が単連結であるとき、p を**普遍被覆 (universal covering)** という。

普遍被覆は存在すれば次の定理の意味で一意である。したがって X が単連結ならば X 自身が (自明な被覆として) 普遍被覆となる。

定理 3.4.16 (普遍被覆の一意性)**.** 普遍被覆は被覆空間としての同型を除いて一意である。[TODO]

証明 [TODO] □

普遍被覆はつねに存在するとは限らない。存在条件は次の定理で与えられる。

定理 3.4.17 (普遍被覆の存在定理)**.** 半局所単連結であること [TODO]

証明 [TODO] □

命題 3.4.18 (普遍被覆のファイバーと基本群). X を位相空間、$p\colon \widetilde{X} \to X$ を普遍被覆とし、p は $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ を $x_0 \in X$ に写すとする。このとき、写像

$$\pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), \quad [\gamma] \mapsto \widetilde{\gamma}(1) \tag{3.4.15}$$

は全単射である。ただし、$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{x}_0$ を始点とする γ のリフトである。また、逆写像は $y \in p^{-1}(x_0)$ に対し $\widetilde{x}_0$ を y につなぐパス β をひとつ選んで $[p \circ \beta]$ を対応付けることで得られる。

証明 [TODO] □

D. 被覆変換群

被覆空間の射と被覆変換群について述べる。

定義 3.4.19 (被覆空間の射). $p\colon E \to X$, $p'\colon E' \to X$ を被覆空間とする。連続写像 $f\colon E \to E'$ であって

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{3.4.16}$$

を可換にするものを**被覆空間の射 (morphism of covering spaces)** という。

定義 3.4.20 (被覆変換群). 被覆空間の自己同型射を**被覆変換 (covering transformation)** という。被覆空間 E の被覆変換全体のなす群を $\mathrm{Deck}(E)$ と書き、E の**被覆変換群 (covering transformation group)** という。

普遍被覆の被覆変換群は基本群の計算に利用できる。

定理 3.4.21 (普遍被覆の被覆変換群と基本群). X を局所弧状連結な位相空間、$p\colon \widetilde{X} \to X$ を普遍被覆とする。このとき、任意の $x_0 \in X$ に対し群の同型

$$\pi_1(X, x_0) \cong \mathrm{Deck}(\widetilde{X}) \tag{3.4.17}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

3.5 S^1 の基本群

S^1 の基本群を計算する。S^1 の基本群は最も身近にある非自明な例というばかりでなく、ホモロジーの理論の基礎にもつながっている。[TODO] どのように？

補題 3.5.1 (S^1 のループのリフト). 例 3.4.3 の被覆空間 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を考える。ここだけの用語として、各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、S^1 上を点 1 から反時計回りに k 周するループ

$$\omega_k\colon I \to S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi kit} \tag{3.5.1}$$

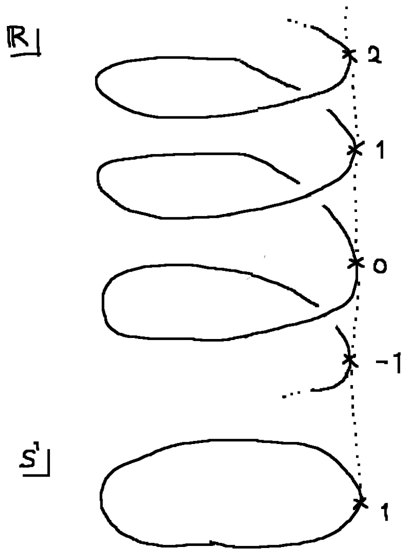

図 3.5　S^1 の基本群

を k-**基本ループ** (k-**elementary loop**) と呼ぶことにする。[TODO] 必要ある？このとき、$0 \in \mathbb{R}$ を始点とする ω_k のリフト $(\tilde{\omega}_k)_0$ は

$$(\tilde{\omega}_k)_0 : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto kt \tag{3.5.2}$$

で与えられる。

証明　補題の $(\tilde{\omega}_k)_0$ は

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "(\tilde{\omega}_k)_0"] \arrow[r, "\omega_k"'] & S^1 \end{tikzcd} \tag{3.5.3}$$

を可換にする連続写像だから ω_k のリフトであり、また明らかに始点は 0 である。 □

定理 3.5.2 (S^1 の基本群)**.** $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である（図 3.5）。

証明　例 3.4.3 の被覆空間 $p : \mathbb{R} \to S^1$ を考える。$\mathbb{R}$ は単連結だから、**??**および**??**より $\pi_1(S^1, 1)$ の $p^{-1}(1)$ へのモノドロミー作用は推移的かつ自由である。したがって、写像 $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \to p^{-1}(1)$,

$$[f] \mapsto 0 \cdot [f] \tag{3.5.4}$$

は全単射である。

∵　全射性　作用が推移的であることの定義から明らか。
単射性　$[f], [g] \in \pi_1(S^1, 1)$ とする。

$$\Phi([f]) = \Phi([g]) \Rightarrow 0 \cdot [f] = 0 \cdot [g] \tag{3.5.5}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot ([f] \cdot [g]^{-1}) = 0 \tag{3.5.6}$$

$$\Rightarrow [f]\cdot[g]^{-1} = 1 \quad (\because \text{ 作用は自由}) \tag{3.5.7}$$

$$\Rightarrow [f] = [g] \tag{3.5.8}$$

より、単射性がいえた。 //

あとは Φ が群準同型であることをいえばよい。そこで、まず $\pi_1(S^1, 1)$ の具体的な形を考える。いま p の定め方から $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ であったから、$\pi_1(S^1, 1) = \Phi^{-1}(\mathbb{Z})$ である。$\Phi([\omega_k]) = 0 \cdot [\omega_k] = (\tilde{\omega}_k)_0(1) = k$ ゆえに $\Phi^{-1}(k) = [\omega_k]$ だから、

$$\pi_1(S^1, 1) = \Phi^{-1}(\mathbb{Z}) = \{[\omega_k] \colon k \in \mathbb{Z}\} \tag{3.5.9}$$

と表せることがわかる。

Φ が群準同型であることを示す。

$$\begin{aligned}
\Phi([\omega_k]\cdot[\omega_j]) &= 0\cdot([\omega_k]\cdot[\omega_j]) && (3.5.10)\\
&= 0\cdot[\omega_k * \omega_j] && (3.5.11)\\
&= 0\cdot[\omega_{k+j}] && (3.5.12)\\
&= (\tilde{\omega}_{k+j})_0(1) && (3.5.13)\\
&= k + j \quad (\text{補題 } 3.5.1) && (3.5.14)\\
&= (\tilde{\omega}_k)_0(1) + (\tilde{\omega}_j)_0(1) \quad (\text{補題 } 3.5.1) && (3.5.15)\\
&= 0\cdot[\omega_k] + 0\cdot[\omega_j] && (3.5.16)\\
&= \Phi([\omega_k]) + \Phi([\omega_j]) && (3.5.17)
\end{aligned}$$

だから、Φ は $\mathbb{Z}$ と $\pi_1(S^1, 1)$ との群準同型であることがいえた。以上で $\pi_1(S^1) = \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ がいえた。 □

系 3.5.3 (トーラスの基本群)**.** $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ である。

証明　例 3.3.16 ですでに確かめた。また、問題 3.18 で被覆変換群を用いる別解を与えた。 □

3.6 Seifert-Van Kampen の定理*

Seifert-Van Kampen の定理は、一定の条件下において、位相空間の基本群が部分空間の基本群の融合積に分解できることを述べた定理である。定理の系として、wedge 和や CW 複体の基本群が簡単に計算できるようになる。ここでは wedge 和の例を計算する。

定理 3.6.1 (Seifert-Van Kampen の定理)**.** X を位相空間とする。$U, V \subset X$ は開部分集合であって、$U \cup V = X$ をみたし、$U, V, U \cap V$ は弧状連結であるとする。$p \in U \cap V$ とし、部分集合 $C \subset \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p)$ を

$$C \coloneqq \{(i_*\gamma)(j_*\gamma)^{-1} \colon \gamma \in \pi_1(U \cap V, p)\} \tag{3.6.1}$$

で定義する。[TODO]

証明　省略 □

例 3.6.2 (円のブーケ)**.** [TODO]

3.7　演習問題

A.　問題セット 2

♤ **演習問題 3.1** (幾何学 II 2.1). $\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ は可縮であることを示せ。

♤ **演習問題 3.2** (幾何学 II 2.2). 球面 S^n の北極を $N = (0, \ldots, 0, 1)$ とおくとき、集合 $S^n \setminus \{N\}$ は可縮であることを示せ。

♤ **演習問題 3.3** (幾何学 II 2.3). 次の集合は互いにホモトピー同値であることを示せ。

(1)　$S^1 \times S^1 \setminus \{(-1, -1)\}$

(2)　$(S^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S^1)$

♤ **演習問題 3.4** (幾何学 II 2.4). 次の集合が互いにホモトピー同値かどうか調べよ。

(1)　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \cup ([-1, 1] \times \{0\})$

(2)　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

♤ **演習問題 3.5** (幾何学 II 2.5). 位相空間 X, Y に対して、X から Y への連続写像は $\pi_0(X)$ から $\pi_0(Y)$ への写像を誘導することを示せ。また、X から Y への互いにホモトピックな連続写像が誘導する写像は一致することを示せ。

♤ **演習問題 3.6** (幾何学 II 2.6). 位相空間 X が連結かつ局所弧状連結ならば弧状連結であることを示せ。

♤ **演習問題 3.7** (幾何学 II 2.7). コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像であることを示せ。

♤ **演習問題 3.8** (幾何学 II 2.8). 全射かつ連続な閉写像は商写像であることを示せ。

♤ **演習問題 3.9** (幾何学 II 2.9). 位相空間 X の部分集合 A の部分集合 S が A の閉集合であるためには、X のある閉集合 F に対して $S = A \cap F$ となることが必要十分であることを示せ。

♤ **演習問題 3.10** (幾何学 II 2.10). 位相空間の部分集合は、開かつ閉かつ弧状連結ならば弧状連結成分であることを示せ。

B.　問題セット 3

♤ **演習問題 3.11** (幾何学 II 3.1). 球面 S^n の懸垂 ΣS^n は S^{n+1} と同相であることを示せ。

♤ **演習問題 3.12** (幾何学 II 3.2). 単位閉球体 D^n において境界 ∂D^n を 1 点に縮めた空間 $D^n/\partial D^n$ は球面 S^n と同相であることを示せ。

♤ **演習問題 3.13** (幾何学 II 3.3). 位相空間 X に対して、柱 ZX は X にホモトピー同値であり、錐 CX は可縮であることを示せ。

♤ **演習問題 3.14** (幾何学 II 3.4). 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像柱 Z_f は Y とホモトピー同値であることを示せ。

♤ **演習問題 3.15** (幾何学 II 3.5). 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像錐 C_f への Y の自然な埋め込み $i\colon Y \to C$ の写像錐 C_i は、X の懸垂 ΣX とホモトピー同値であることを示せ。

♤ **演習問題 3.16** (幾何学 II 3.6). 球面 S^n から位相空間 X への連続写像 $f\colon S^n \to X$ が定値写像にホモトープであるためには、単位閉球体 D^{n+1} からの連続写像 $g\colon D^{n+1} \to X$ で $g|_{S^n} = f$ をみたすものが存在することが必要十分であることを示せ。

C. 問題セット 4

♤ **演習問題 3.17** (幾何学 II 4.1). 次の写像は被覆空間を与えることを示せ。

(1) $\pi_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^n$

(2) $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$

♤ **演習問題 3.18** (幾何学 II 4.2). トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の基本群を求めよ。

解答 1 基本群が直積を保つことを用いる。問題 3.24 の証明と全く同様なので省略。 □

解答 2 [TODO] 色々言葉が不足してる $T^2 \approx \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ だから、$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の基本群を求めればよい。標準射影 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を p とおく。p が普遍被覆であることを示せば

$$\pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \xi_0) \cong \mathrm{Deck}(\mathbb{R}^2) \quad (\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \tag{3.7.1}$$

が成り立つことを用いて基本群が求まる。実際、p は普遍被覆である。

∵ $\xi_0 = p(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とする。p の全射性より $\xi_0 = p(x_0, y_0)$ なる $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ が存在する。そこで、中心 (x_0, y_0)、半径 $1/2$ の $\mathbb{R}^2$ 内の開球 $B((x_0, y_0), 1/2)$ を V とおき、$U := p(V)$ とおく。いま $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ は位相群 $\mathbb{Z}^2$ の連続作用に関する商空間ゆえに p は open map だから、U は $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の開集合である。U が ξ_0 の自明化近傍となることを示せばよい。まず明らかに $p^{-1}(U)$ は

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} B((x_0 + m, y_0 + n), 1/2) = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (m, n) \cdot V \quad (\cdot \text{ は } \mathbb{Z}^2 \text{ の作用}) \tag{3.7.2}$$

と disjoint union に書ける。あとは各 $(m,n)\cdot V$ が p の制限により U と同相となることを示せばよいが、位相群の連続作用の性質から

$$(m,n)\cdot V \approx V \tag{3.7.3}$$

なので、V が $p|_V$ により U と同相となることを示せば十分である。$p|_V\colon V \to U$ が well-defined な連続全射であることは明らか。また、p は open map だから $p|_V\colon V \to U$ も open map である。最後に単射性について、$(x,y),(x',y') \in V$ に対し $p|_V(x,y) = p|_V(x',y')$ を仮定すると $(x,y)-(x',y') = (m,n)$ $(\exists m,n \in \mathbb{Z})$ が成り立つから

$$\|(x,y)-(x',y')\| = \sqrt{m^2+n^2} \tag{3.7.4}$$

である。したがって V の定義より $(m,n) = (0,0)$ でなければならず、$(x,y) = (x',y')$ となる。よって $p|_V$ は単射である。したがって $p|_V\colon V \to U$ は同相写像であることがいえた。よって U は ξ_0 の自明化近傍であり、ξ_0 は p により自明に被覆される。$\xi_0 \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ は任意であったから、p は $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の普遍被覆である。 //

また、$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の局所弧状連結性は $\mathbb{R}^2$ が局所弧状連結であることと p が局所同相写像であることから従う。また、$\mathrm{Deck}(\mathbb{R}^2)$ は群として $\mathbb{Z}^2$ と同型である。

∵ 写像 $\Phi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Deck}(\mathbb{R}^2)$ を、$(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ に対し $\mathbb{Z}^2$ の連続作用のもとで (m,n) が定める写像

$$\mu_{(m,n)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+m, y+n) \tag{3.7.5}$$

を対応付けるものと定める。明らかに Φ は群準同型かつ単射である。全射性を示すため、$f \in \mathrm{Deck}(\mathbb{R}^2)$ とする。f は図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "p"] \\
& \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &
\end{tikzcd} \tag{3.7.6}$$

を可換にするから、各 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し或る $(m_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2$ がただひとつ存在して

$$f(x,y)-(x,y) = (m_x, n_y) \tag{3.7.7}$$

が成り立つ。この写像

$$(x,y) \mapsto f(x,y)-(x,y) = (m_x, n_y) \tag{3.7.8}$$

は連結空間 $\mathbb{R}^2$ から離散空間 $\mathbb{Z}^2$ への連続写像だから定値である。よって (m_x, n_y) は (x,y) によらず決まる。したがって f は $\mathbb{Z}^2$ の連続作用のもとで (m,n) により定まる写像、すなわち $f = \Phi(m,n)$ である。これで Φ の全射性がいえた。したがって、Φ は群の同型 $\mathbb{Z}^2 \cong \mathrm{Deck}(\mathbb{R}^2)$ を与える。 //

よって $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の、したがって T^2 の基本群は直積群 $\mathbb{Z}^2$ に同型である。 □

♤ **演習問題 3.19** (幾何学 II 4.3)**.** 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ $(n \geq 2)$ の基本群の生成元を 1 つ与えよ。

♤ **演習問題 3.20** (幾何学 II 4.4)**.** 基本群を利用して、座標空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ は平面 $\mathbb{R}^2$ と同相でないことを示せ。

♤ **演習問題 3.21** (幾何学 II 4.5)**.** 基本群を利用して、S^1 は D^2 のレトラクトでないことを示せ。

注意 3.7.1. 一般に $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し S^n は D^{n+1} のレトラクトでない。この事実はホモロジーを用いて示すことができる。

♤ **演習問題 3.22** (幾何学 II 4.6)**.** 集合 $\mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{0\})$ の基本群を求めよ。

♤ **演習問題 3.23** (幾何学 II 4.7)**.** 位相空間 X が単連結な開集合 U, V で被覆され、共通部分 $U \cap V$ が弧状連結ならば、X は単連結であることを示せ。

♤ **演習問題 3.24** (幾何学 II 4.8)**.** 点付き空間 $(X, x_0), (Y, y_0)$ に対して、直積 $(X \times Y, (x_0, y_0))$ の基本群は群の直積 $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ と同型であることを示せ。

D. 幾何学 II 練習問題

♤ **演習問題 3.25** (幾何学 II 練習問題 25)**.** 実射影平面の被覆空間を分類せよ。

証明 [TODO] □

第 4 章　特異ホモロジー

ホモロジーとは、大まかには位相空間などの対象にホモロジー群と呼ばれるアーベル群を対応させる手続きのことである。ホモロジー群の構成方法は大きく分けて 2 ステップに分けられる:

(1)　位相空間などの対象から、チェイン複体と呼ばれる代数的対象を構成し、
(2)　チェイン複体からホモロジー群を構成する。

1 つ目のステップには分野ごとの手法が用いられるが、2 つ目のステップは純粋に代数的な操作である。この 2 つ目のステップを切り出し、位相空間などの具体的対象から切り離して研究する分野はホモロジー代数学と呼ばれる。

ホモロジー群が基本群より優れている点として、基本群は一般に非アーベルである一方、ホモロジー群はアーベルなので、非アーベル性に起因する計算上の困難を回避できるという点がある。また、ホモロジー群では基本群のように基点を選ぶ必要がないため、位相空間のすべての弧状連結成分の情報を持っているという利点もある。

4.1　アーベル群のチェイン複体

ここで位相空間から一旦離れて、アーベル群のチェイン複体という代数的対象を定義する。チェイン複体とは、境界作用素と呼ばれる特別な準同型で繋がれたアーベル群の列のことである。チェイン複体は CW 複体や単体的複体と名前が似ているが、全く別物である。

A.　チェイン複体

チェイン複体を定義する。

定義 4.1.1 (チェイン複体). アーベル群と準同型の列

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots \tag{4.1.1}$$

が**チェイン複体 (chain complex)** であるとは、すべての $p \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ が成り立つことをいう。∂_p らを**境界作用素 (boundary operator)** といい、単に ∂ と書くこともある。チェイン複体を (C_*, ∂_*) や C_* で表す。また、

- C_p を**第 p チェイン群 (p-th chain group)** という。
- C_p の元を **p-チェイン (p-chain)** という。
- $\mathrm{Ker}(\partial_p)$ の元を **p-サイクル (p-cycle)** という。
- $\mathrm{Im}(\partial_{p+1})$ の元を **p-バウンダリ (p-boundary)** という。

また、p-サイクル z, z' の差 $z - z'$ が p-バウンダリであるとき、$z \sim z'$ と書き、z, z' は**ホモローグ (homologue)** であるという。

定義 4.1.2 (チェイン写像). C_*, D_* をチェイン複体とする。準同型の族 $F = \{F_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$, $F_p \colon C_p \to D_p$ が**チェイン写**

像 (chain map) であるとは、図式

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "F_p"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "F_{p-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_p \arrow[r, "\partial_p"] & D_{p-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.1.2}$$

が可換であることをいう。

定義 4.1.3 (分裂). $C = (C_p, \partial_p)$ をチェイン複体とする。C が次の条件をみたすとき、C は**分裂 (split)** するという:

- 準同型の族 $\{s_p : C_p \to C_{p+1}\}$ が存在し、$\partial_{p+1} \circ s_p \circ \partial_{p+1} = \partial_{p+1}$ をみたす。

次の補題は整係数ホモロジー群の計算に役立つ。

補題 4.1.4. アーベル群の完全列

$$A \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.1.3}$$

に対し $\operatorname{Im} f \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。

証明 まず

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} g \hookrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.1.4}$$

より $\operatorname{Im} g \cong \mathbb{Z}$ だから、

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \underbrace{\operatorname{Im} g}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.1.5}$$

が分裂することとあわせて $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \operatorname{Ker} g \oplus \mathbb{Z}$ である。有限生成アーベル群の構造定理より [TODO] とは？ $\mathbb{Z} \cong \operatorname{Ker} g \ (= \operatorname{Im} f)$ である。 □

B. 代数的構成

定義 4.1.5 (部分複体). C, D をチェイン複体とする。C が D の**部分複体 (subcomplex)** であるとは、

- 各 C_p は D_p の部分群
- 包含写像の族 $\{C_p \hookrightarrow D_p\}_p$ はチェイン写像

が成り立つことをいう。

定義 4.1.6 (商複体). [TODO] $\bar{\partial}$ が誘導される場合しか定義できない？

定義 4.1.7 (和複体). [TODO] アーベル群の和とは？

定義 4.1.8 (チェイン複体の柱と錐). $A=(A_p,\partial_p)$, $B=(B_p,\partial_p)$ をチェイン複体とし、$f\colon A\to B$ をチェイン写像とする。

- 次で定義されるチェイン複体 Z_f を f の**写像柱 (mapping cylinder)** という:

$$Z_f := \left(A_p \oplus A_{p-1} \oplus B_p, \begin{bmatrix} \partial & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\partial & 0 \\ 0 & -f & \partial \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.6}$$

ただし、行列の意味は

$$\partial_p(a,a',b) = (\partial_p a + a',\ -\partial_{p-1}a',\ \partial_p b - f(a')) \tag{4.1.7}$$

ということである。

- 次で定義されるチェイン複体 C_f を f の**写像錐 (mapping cone)** という:

$$C_f := \left(A_{p-1} \oplus B_p, \begin{bmatrix} -\partial & 0 \\ -f & \partial \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.8}$$

- 恒等写像 id_A の写像柱 Z_{id} を ZA と書き、A の**柱 (cylinder)** という。
- 恒等写像 id_A の写像錐 C_{id} を CA と書き、A の**錐 (cone)** という。

C. チェインホモトピー

定義 4.1.9 (チェインホモトピー). C,D をチェイン複体とし、$f,g\colon C\to D$ をチェイン写像とする。

- f と g が**チェインホモトピック (chain homotopic)** であるとは、ある写像の族 $\{s_n\colon C_n\to D_{n+1}\}_n$ が存在して

$$f-g = s\circ\partial + \partial\circ s \tag{4.1.9}$$

が成り立つことをいう [TODO] 準同型ではないか？。この写像族 $\{s_n\}$ を f から g への**チェインホモトピー (chain homotopy)** という。

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "f-g"] & C_{n-1} \arrow[dl, "s"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & D_n & \end{tikzcd} \tag{4.1.10}$$

- f が**チェインホモトピー同値写像 (chain homotopy equivalence)** であるとは、あるチェイン写像 $h\colon D\to C$ が存在して、$h\circ f$ が id_C と、$f\circ h$ が id_D とそれぞれチェインホモトピックであることをいう。

D. ホモロジー群

チェイン複体に対しホモロジー群を定義する。ホモロジー群は、チェイン複体が完全からどれほどずれているかを測る指標である。

定義 4.1.10 (ホモロジー群). C_* をチェイン複体とする。各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$H_p(C_*) := \mathrm{Ker}(\partial_p)/\mathrm{Im}(\partial_{p+1}) \tag{4.1.11}$$

を C_* の**第 p ホモロジー群 (p-th homology group)** という。

定義 4.1.11 (チェイン写像から誘導される群準同型). [TODO] チェイン写像はホモロジー群の間の準同型を誘導する

定義 4.1.12 (擬同型). $f : C \to D$ をチェイン写像とする。f の誘導する群準同型 $f_* : H_p(C) \to H_p(D)$ がすべての $p \in \mathbb{Z}$ に対し同型であるとき、f は**擬同型 (quisi-isomorphism; quism)** であるという。

定理 4.1.13 (チェインホモトピーと誘導される群準同型). [TODO]

証明 [TODO] □

次の定理は後々 4.3 H 節 で導入する Betti 数や Euler 標数と深く関係している。

定理 4.1.14 (Euler-Poincaré の原理). $C = (C_p, \partial_p)$ を有限生成アーベル群からなる有界なチェイン複体とする。このとき

$$\sum_p (-1)^p \operatorname{rk} C_p = \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} H_p(C) \tag{4.1.12}$$

が成り立つ。

証明 ホモロジー代数学の基本的な結果により、有限生成アーベル群の短完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \tag{4.1.13}$$

に対し $\operatorname{rk} Y = \operatorname{rk} X + \operatorname{rk} Z$ が成り立つ。いまチェイン複体 C に対し

$$0 \longrightarrow B_p(C) \longrightarrow Z_p(C) \longrightarrow H_p(C) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.1.14}$$

$$0 \longrightarrow Z_p(C) \longrightarrow C_p \longrightarrow B_{p-1}(C) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.1.15}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} C_p &= \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} Z_p(C) + \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} B_{p-1}(C) && (4.1.16) \\ &= \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} Z_p(C) - \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} B_p(C) && (4.1.17) \\ &= \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} H_p(C) && (4.1.18) \end{aligned}$$

を得る。 □

4.2 アファインホモロジー

位相空間に戻り、アファインチェイン複体を定義する。[TODO] アファインチェイン複体は特異ホモロジーの議論に使われる以上の役割はあるのだろうか？

定義 4.2.1 (アファイン単体). $A \subset \mathbb{R}^n$ を凸部分集合、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$v_0, \dots, v_k \in A$ とする。

- $\mathbb{R}^{k+1}$ の標準基底 $e_0, \dots, e_k$ の凸包を Δ^k と書き、**標準 k-単体 (standard k-simplex)** という。
- アファイン写像

$$[v_0 \dots v_k] := \Delta^k \to A, \quad e_i \mapsto v_i \quad (i = 0, \dots, k) \tag{4.2.1}$$

を A 内の**アファイン k-単体 (affine k-simplex)** という。

- 集合

$$|[v_0 \dots v_k]| := \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \;\middle|\; t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\} \tag{4.2.2}$$

を $v_0, \dots, v_k$ を頂点とする**凸多面体 (convex polyhedron)** という。

- A 内のアファイン k-単体の全体を

$$\begin{aligned} S_k^{\mathrm{aff}}(A) &:= \{A \text{ 内のアファイン } k\text{-単体}\} && (4.2.3) \\ &= \{\sigma\colon \Delta^k \to A \mid \sigma \text{ はアファイン写像}\} && (4.2.4) \end{aligned}$$

で表す。

- $S_p^{\mathrm{aff}}(A)$ により生成される自由アーベル群を $C_p^{\mathrm{aff}}(A)$ と書き、$C_p^{\mathrm{aff}}(A)$ の元を A 内の**アファイン p-チェイン (affine p-chain)** という。
- 各 $i \in \{0, \dots, k\}$ に対し、アファイン写像 $F_i\colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を

$$F_i(e_j) := \begin{cases} e_j & (j < i) \\ e_{j+1} & (j \geq i) \end{cases} \tag{4.2.5}$$

で定め、これを**面写像 (face map)** という。F_i による引き戻しで写像 $F_i^*\colon C_k^{\mathrm{aff}}(A) \to C_{k-1}^{\mathrm{aff}}(A)$ が

$$F_i^*[v_0 \dots v_k] = [v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_k] \tag{4.2.6}$$

と定まる。

$$\begin{tikzcd} \Delta^k \arrow[r, "{[v_0 \dots v_k]}"] & A \\ \Delta^{k-1} \arrow[u, "F_i"] \arrow[ur, "{F_i^*[v_0 \dots v_k]}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2.7}$$

- 写像 $\partial_k\colon C_k^{\mathrm{aff}}(A) \to C_{k-1}^{\mathrm{aff}}(A)$ を次のように定める: 各 $[v_0 \dots v_k] \in S_k^{\mathrm{aff}}(A)$ に対し

$$\partial_k[v_0 \dots v_k] := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i F_i^*[v_0 \dots v_k] \tag{4.2.8}$$

と定め、$C_k^{\mathrm{aff}}(A)$ 上まで $\mathbb{Z}$-線型に拡張する。∂_k を**境界作用素 (boundary operator)** という。

命題 4.2.2. 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ が成り立つ。

注意 4.2.3. この命題により

$$\cdots \longrightarrow C^{\mathrm{aff}}_{k+1}(A) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C^{\mathrm{aff}}_{k}(A) \xrightarrow{\partial_{k}} C^{\mathrm{aff}}_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{4.2.9}$$

はアーベル群のチェイン複体となる。

証明 [TODO] □

例 4.2.4 ($[ab]$ と $-[ba]$ はホモローグ)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ を凸部分集合とし、$a, b \in A$ とする。

$$[ab] \sim -[ba] \quad \text{すなわち} \quad [ab] + [ba] \in \operatorname{Im} \partial_2 \tag{4.2.10}$$

が成り立つことを示す。そこで 2-単体 $[aba], [aaa]$ をそれぞれ ∂_2 で写すと

$$\partial_2[aba] = [ba] - [aa] + [ab] \tag{4.2.11}$$

$$\partial_2[aaa] = [aa] - [aa] + [aa] = [aa] \tag{4.2.12}$$

となるから

$$[ab] + [ba] = \partial_2[aba] + \partial_2[aaa] \tag{4.2.13}$$

$$= \partial_2([aba] + [aaa]) \tag{4.2.14}$$

$$\in \operatorname{Im} \partial_2 \tag{4.2.15}$$

より $[ab] \sim -[ba]$ が従う。

A. プリズム構成

プリズム構成は、k-チェインから $(k+1)$-チェインを構成する方法であり、特異ホモロジーのホモトピー不変性の証明に用いられる。

定義 4.2.5 (プリズム構成)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$ を凸部分集合とする。写像 i_k $(k = 0, 1)$ を

$$i_k \colon A \to A \times I, \quad x \mapsto (x, k) \tag{4.2.16}$$

と定める。各 $\alpha = [v_0 \dots v_p] \in S^{\mathrm{aff}}_p(A)$ に対し $v_{ij} := (v_i, j) \in A \times I$ と書くことにする。このとき

$$i_{0*}\alpha = [v_{00} \dots v_{p0}] \tag{4.2.17}$$

$$i_{1*}\alpha = [v_{01} \dots v_{p1}] \tag{4.2.18}$$

である。ここで $\alpha \in S^{\mathrm{aff}}_p(A)$ の**プリズム (prism)** $\Pi_p \alpha$ を

$$\Pi_p \alpha := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_{00} \dots \underbrace{v_{i0} v_{i1}}_{i\text{ 番目で上にあがる}} \dots v_{p1}] \in C^{\mathrm{aff}}_{p+1}(A \times I) \tag{4.2.19}$$

と定め、$C^{\mathrm{aff}}_p(A)$ 上まで $\mathbb{Z}$-線型に拡張して群準同型 $\Pi_p \colon C^{\mathrm{aff}}_p(A) \to C^{\mathrm{aff}}_{p+1}(A \times I)$ を定義する。

命題 4.2.6 (プリズム構成の公式). [TODO]

注意 4.2.7. この命題より、$\Pi_p\colon C_p^{\mathrm{aff}}(A) \to C_{p+1}^{\mathrm{aff}}(A \times I)$ はチェイン写像 $i_{0*}, i_{1*}\colon C_p^{\mathrm{aff}}(A) \to C_p^{\mathrm{aff}}(A \times I)$ をつなぐチェインホモトピーであることがわかる。

証明 [TODO] □

B. 重心細分

[TODO] 切除定理のところでしか使わないので、そこで述べるべき？

4.3 特異ホモロジー

一般の空間に対し特異ホモロジー群を定義する。特異ホモロジー群は直接計算するには適さないが、理論的には重要な役割を果たす。

A. 定義と基本性質

定義 4.3.1 (特異単体). X を位相空間、$p \in \mathbb{Z}$ とする。

- 連続写像 $\Delta^p \to X$ を X 内の**特異 p-単体 (singular p-simplex)** という。
- X 内の特異 p-単体の全体を

$$S_p^{\mathrm{sing}}(X) := \{X \text{ 内の特異 } p\text{-単体}\} \tag{4.3.1}$$
$$= \{\sigma\colon \Delta^p \to X \mid \sigma \text{ は連続写像}\} \tag{4.3.2}$$

で表す。
- $S_p^{\mathrm{sing}}(X)$ により生成される自由アーベル群を $C_p^{\mathrm{sing}}(X)$ と書き、$C_p^{\mathrm{sing}}(X)$ の元を X 内の**特異 p-チェイン (singular p-chain)** という。
- **境界作用素 (boundary operator)** と呼ばれる写像 $\partial_p\colon C_p^{\mathrm{sing}}(X) \to C_{p-1}^{\mathrm{sing}}(X)$ を次のように定める: 各 $\sigma \in S_p^{\mathrm{sing}}(X)$ に対し

$$\partial_p \sigma := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i F_i^* \sigma \tag{4.3.3}$$

と定め、$C_p^{\mathrm{sing}}(X)$ 上まで $\mathbb{Z}$-線型に拡張する。

命題 4.3.2. 任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ が成り立つ。

注意 4.3.3. この命題により

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}^{\mathrm{sing}}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p^{\mathrm{sing}}(X) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}^{\mathrm{sing}}(X) \longrightarrow \cdots \tag{4.3.4}$$

はアーベル群のチェイン複体となる。

証明 [TODO] □

定義 4.3.4 (連続写像から誘導されるチェイン写像). [TODO] $f_\sharp$

定義 4.3.5 (特異ホモロジー群). [TODO]

定義 4.3.6 ($\mathbb{Z}$-加群を係数にもつ特異ホモロジー群). X を位相空間、$p \in \mathbb{Z}$、A を $\mathbb{Z}$-加群とする。テンソル積関手 $C_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \square$ により

$$C_p(X) \mapsto C_p(X; A) := C_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A \tag{4.3.5}$$

$$\partial_p \mapsto \partial_p^A := \partial_p \otimes \mathrm{id}_A \tag{4.3.6}$$

と写したチェイン複体 $C(X; A) := (C_p(X; A), \partial_p^A)$ から得られるホモロジー群 $H_p(X; A) := H_p(C(X; A))$ を **A-係数特異ホモロジー群** という。

注意 4.3.7. 上の定義で得られたホモロジー群 $H_p(X; A)$ は、一般には $H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ とは異なることに注意。定義のようにチェイン群の段階でテンソル積をとる必要がある。

[TODO] 普遍係数定理？

定義 4.3.8 (特異チェインのプリズム). X を位相空間、$p \in \mathbb{Z}$ とする。$\sigma \in S_p^{\mathrm{sing}}(X)$ に対し、σ の**プリズム (prism)** $\Pi_p \sigma$ を次のように定める: $[v_0 \dots v_p] := \mathrm{id}_{\Delta^p} \in S_p^{\mathrm{aff}}(\Delta^p)$ とおき、

$$\Pi_p \sigma := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ [v_{00} \dots \underbrace{v_{i0} v_{i1}}_{i\text{ 番目で上にあがる}} \dots v_{p1}] \in C_{p+1}^{\mathrm{sing}}(X \times I) \tag{4.3.7}$$

と定め、$C_p^{\mathrm{sing}}(X)$ 上まで $\mathbb{Z}$-線型に拡張して群準同型 $\Pi_p \colon C_p^{\mathrm{sing}}(X) \to C_{p+1}^{\mathrm{sing}}(X \times I)$ を定義する。[TODO] もっとアファインチェインのプリズムの定義をそのまま利用する定義にできないか？

例 4.3.9 (0 次ホモロジー). [TODO] X が弧状連結なら

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \tag{4.3.8}$$

である。

B. ホモトピー不変性

定理 4.3.10 (特異ホモロジー群のホモトピー不変性). X, Y を位相空間とする。X, Y がホモトピー同値ならば、$H_p(X), H_p(Y)$ は同型である ($p \in \mathbb{Z}$)。とくに特異ホモロジー群は位相不変量である。

証明 [TODO] □

プリズム分解を用いて次が示される[1]。

定理 4.3.11 (誘導準同型のホモトピー不変性). $f, g\colon X \to Y$ を互いにホモトピックな連続写像とする。このとき、各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し $f_*, g_*\colon H_p(X) \to H_p(Y)$ は互いに一致する。

証明 $f \simeq g$ よりある連続写像 $H\colon X \times I \to Y$ が存在して図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "x\mapsto H(x,1)"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \times I \arrow[r, "H"] & Y \\ X \arrow[u, "x\mapsto H(x,0)"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3.9}$$

が可換となる。[TODO] □

定義 3.2.13 で空間のレトラクトを定義した。レトラクトは一般にホモトピー同値ではないから包含写像から誘導される準同型は同型とは限らないが、もう少し弱い主張なら成り立つ。

命題 4.3.12 (レトラクトの包含準同型は単射). [TODO]

証明 [TODO] □

レトラクトの概念を用いて次が示せる。

定理 4.3.13 (Brouwer の不動点定理). 連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ は固定点を持つ。

証明 問題 4.15 を参照。 □

C. 1 点空間のホモロジー

例 4.3.14 (1 点空間のホモロジー). [TODO] Pt を 1 点空間として

$$H_p(\mathrm{Pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & p \geq 1 \end{cases} \tag{4.3.10}$$

である。したがって $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ のとき

$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & p = 0 \\ 0 & p \geq 1 \end{cases} \tag{4.3.11}$$

となる。

1) [河澄] では acyclic model theorem を用いて証明している。

D. 加法性

特異ホモロジーは次の意味での加法性をみたす。

命題 4.3.15 (特異ホモロジーの加法性)**.** X を位相空間、$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を弧状連結成分への分解とする。このとき各 $\sigma\colon \Delta^p \to X$ の像はただひとつの $\lambda \in \Lambda$ に対し $\sigma(\Delta^p) \subset X_\lambda$ をみたす。したがって

$$S_p(X) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} S_p(X_\lambda), \quad C_p(X) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda), \quad H_p(X) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_p(X_\lambda) \tag{4.3.12}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

E. Mayer-Vietoris の定理

このあと導入する Mayer-Vietoris の定理を用いると、位相空間の開被覆を用いてホモロジーを計算することができる。まずジグザグ補題とよばれる定理を示す。これはチェイン複体の短完全列からホモロジーの長完全列が導かれることを示すものである。

補題 4.3.16 (ジグザグ補題)**.** A, B, C をアーベル群のチェイン複体とし、

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.13}$$

は完全系列であるとする。このとき次が成り立つ:

(1) 各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し系列

$$H_p(A) \longrightarrow H_p(B) \longrightarrow H_p(C) \tag{4.3.14}$$

は完全である。

(2) 各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し**連結準同型 (connecting homomorphism)** と呼ばれる群準同型 $\partial_*\colon H_p(C) \to H_{p-1}(A)$ を構成できる。

(3) 各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し系列

$$H_p(A) \longrightarrow H_p(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow H_{p-1}(B) \tag{4.3.15}$$

は完全である。

注意 4.3.17. 上の補題の状況は補助的な図で

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr] & & H(B) \arrow[dl] \\ & H(C) \arrow[ul, "\partial_*"] & \end{tikzcd} \tag{4.3.16}$$

と表される。したがって上の補題は **Exact Triangle** とも呼ばれる。

証明 [TODO] □

補題 4.3.18. X を位相空間、$U, V \subset X$, $X = \operatorname{Int} U \cup \operatorname{Int} V$ とする。チェイン複体の包含写像 $i \colon C(U) + C(V) \to C(X)$ は、各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し群の同型 $H_p(C(U) + C(V)) \to H_p(C(X)) = H_p(X)$ を誘導する。

証明 $p \in \mathbb{Z}$ とし、$i_* \colon H_p(C(U) + C(V)) \to H_p(C(X))$ が全単射であることを示す。まず i_* は全射である。

$\because$ $[c] \in H_p(X)$, $c \in Z_p(X)$ とする。[TODO] //

□

定理 4.3.19 (Mayer-Vietoris)**.** X を位相空間、$X_0, X_1 \subset X$, $X = \operatorname{Int} X_0 \cup \operatorname{Int} X_1$ とする。包含写像を次のようにおく:

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\ X_0 \cap X_1 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_0 \cup X_1 = X \\ & X_1 \arrow[ur, "j_1"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3.17}$$

このとき次の系列は完全である:

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r] & H_{p+1}(X) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\ H_p(X_0 \cap X_1) \arrow[r, "(i_{0*}, -i_{1*})"] & H_p(X_0) \oplus H_p(X_1) \arrow[r, "j_{0*} + j_{1*}"] & H_p(X) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\ H_{p-1}(X_0 \cap X_1) \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd} \tag{4.3.18}$$

この系列を (X, X_0, X_1) の **Mayer-Vietoris 完全系列 (Mayer-Vietoris sequence)** という。

証明 [TODO] □

Mayer-Vietoris の定理を用いた計算の例として S^n の特異ホモロジー群を求めてみる。この結果は単にホモロジーの計算例のひとつというばかりでなく、後で導入する写像度や胞体的ホモロジーなどの発展的概念の基礎となる。

定理 4.3.20 (S^n の特異ホモロジー群)**.** 球面 S^n の特異ホモロジー群 $H_p(S^n)$ は次の表のとおりである:

$p \backslash n$	0	1	2	$\cdots$
0	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$
1	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
2	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

証明　S^n の北極を N、南極を S とおき、

$$U_+ \coloneqq S^n \setminus \{S\} \overset{\text{open}}{\subset} S^n, \quad U_- \coloneqq S^n \setminus \{N\} \overset{\text{open}}{\subset} S^n \tag{4.3.19}$$

とおく。Pt を 1 点空間として

$$U_+ \cap U_- \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^{n-1}, \quad U_+ \underset{\text{h.e.}}{\simeq} N = \text{Pt}, \quad U_- \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S = \text{Pt} \tag{4.3.20}$$

が成り立つから、(S^n, U_+, U_-) の Mayer-Vietoris 完全系列は

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_{p+1}(S^n) \\ \hookrightarrow H_p(S^{n-1}) \longrightarrow H_p(\text{Pt}) \oplus H_p(\text{Pt}) \longrightarrow H_p(S^n) \\ \hookrightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{4.3.21}$$

となる。例 4.3.14 より

$$H_p(\text{Pt}) \cong \begin{cases} 0 & (p \geq 1) \\ \mathbb{Z} & (p = 0) \end{cases} \tag{4.3.22}$$

であったから、次を得る:

(1)　$p \geq 2$ のとき

$$0 \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_p(S^{n-1}) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.23}$$

が完全であることより $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ となる。

(2)　$p = 1$ のとき

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \longrightarrow H_0(S^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow H_0(S^n) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.24}$$

は完全である。

(2-a)　$n = 1$ のとき、$S^0 = \{\pm 1\}$ であることと S^1 が弧状連結であることより

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow \underbrace{H_0(S^0)}_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{H_0(S^1)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.25}$$

を得る。したがって $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である (このあと示す)。

(2-b)　$n \geq 2$ のとき、S^{n-1}, S^n が弧状連結であることより

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \longrightarrow \underbrace{H_0(S^{n-1})}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{H_0(S^n)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.26}$$

を得る。したがって $H_1(S^n) \cong 0$ である (このあと示す)。

(2-a), (2-b) の結論を証明する。(2-a) の完全系列の各射に名前をつけて

$$0 \xrightarrow{f_1} H_1(S^1) \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{f_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{f_4} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_5} 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.27}$$

とおく。有限ランク自由 $\mathbb{Z}$-加群の Rank-Nullity Theorem を右側から順次適用して

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} f_4 = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f_5 = \operatorname{rk} \mathbb{Z} - \operatorname{rk} \operatorname{Im} f_5 = 1 - 0 = 1 \tag{4.3.28}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} f_3 = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{rk}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) - \operatorname{rk} \operatorname{Im} f_4 = 2 - 1 = 1 \tag{4.3.29}$$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{rk} \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{rk}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) - \operatorname{rk} \operatorname{Im} f_3 = 2 - 1 = 1 \tag{4.3.30}$$

を得る。[TODO] 本当か？したがって $\operatorname{Im} f_2 \cong \mathbb{Z}$ だから、完全系列

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.3.31}$$

を得る。よって (2-a) の結論 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ がたしかに成り立つ。同様にして (2-b) の結論 $H_1(S^n) \cong 0$ も成り立つ。以上をまとめて定理の表を得る。 □

系 4.3.21. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が $m \neq n$ ならば $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$ である。

証明　対偶を示す。$\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^n$ とすると

$$S^{m-1} \approx \mathbb{R}^m \setminus \{*\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{*\} \approx S^{n-1} \tag{4.3.32}$$

だから

$$H_p(S^{m-1}) \cong H_p(S^{n-1}) \quad (\forall p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{4.3.33}$$

よって $m = n$ である。 □

例 4.3.22 (Mayer-Vietoris 完全列の計算例)**.** S^n の例は、目的の空間 $X = S^n$ が $X = U \cup V$ の形の場合であった。目的の空間が $X = U \cap V$ の形の場合にも Mayer-Vietoris 完全列を使うことができる。

[TODO] $D^n \setminus \{p, q\}$ の例

F. Hurewicz の定理

1 次ホモロジーと基本群を結びつける Hurewicz の定理について述べる。

補題 4.3.23. X は弧状連結な位相空間、$x_0 \in X$ とする。このとき、x_0 を基点とする X 内のループ $\gamma: I \to X$ は $I = \Delta^1$ の同一視のもとで X の 1-サイクルである。

証明　$\gamma \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$ とする。$I = \Delta^1$ の同一視のもとで γ は 1-単体となる。さらに

$$\partial\gamma = F_0^*\gamma - F_1^*\gamma \tag{4.3.34}$$

であるが、$\mathbb{R}$ の標準基底 1 および $\mathbb{R}^2$ の標準基底 e_0, e_1 に対し

$$F_0^*\gamma(1) = \gamma \circ F_0(1) = \gamma(e_1) = x_0 \tag{4.3.35}$$
$$F_1^*\gamma(1) = \gamma \circ F_1(1) = \gamma(e_0) = x_0 \tag{4.3.36}$$

だから $\partial\gamma = 0$ が従う。よって γ は 1-サイクルである。□

補題 4.3.24. 上の補題により得られる写像 $\mathrm{Loop}(X, x_0) \to Z_1(X),\ \gamma \mapsto \gamma$ は次の図式を可換にする群準同型 $\widetilde{h}$ を誘導する:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Loop}(X, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & Z_1(X) \arrow[d] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & H_1(X) \end{tikzcd} \tag{4.3.37}$$

証明　主張を少し一般化して、$x_0, x_1 \in X$ とし、$\gamma, \beta \in \mathrm{Path}(X)(x_0, x_1)$ が端点を固定してホモトピック、すなわち

$$\gamma \simeq \beta \quad \mathrm{rel} \quad \{0, 1\} \tag{4.3.38}$$

であるとき、1-単体としての γ, β がホモローグであることをいえばよい。[TODO] □

定理 4.3.25 (Hurewicz). 上の補題の $\widetilde{h}$ は群 $\pi_1(X, x_0)$ からアーベル群 $H_1(X)$ への群準同型だから、アーベル化の普遍性より

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "\widetilde{h}"] & \\ \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, dashed, "h"'] & H_1(X) \end{tikzcd} \tag{4.3.39}$$

を可換にする群準同型 h が一意に存在する。このとき h は群の同型を与える。

証明　[TODO] □

G. Wedge 和のホモロジー

命題 4.3.26 (wedge 和のホモロジーとホモロジーの直和). $(X, x_0), (Y, y_0)$ を点付き空間、$i_0\colon X \to X \vee Y,\ x \mapsto (x, y_0),\ i_1\colon Y \to X \vee Y,\ y \mapsto (x_0, y)$ とする。各 $p \geq 1$ に対し準同型 $i_{0*} + i_{1*}\colon H_p(X) \oplus H_p(Y) \to H_p(X \vee Y)$ は同型である。

証明　[TODO] □

H. Betti 数と Euler 標数

Betti 数と Euler 標数を定義する。

定義 4.3.27 (Betti 数と Euler 標数). X を位相空間とする。各 $p \geq 0$ に対し、$H_p(X)$ の階数を**第 n Betti 数 (n-th Betti number)** という。Betti 数の交代和

$$\chi(X) \coloneqq \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{rk} H_p(X) \tag{4.3.40}$$

を X の **Euler 標数 (Euler characteristic)** という。

特異ホモロジーが位相不変量であることから次がわかる。

命題 4.3.28. Betti 数および Euler 標数は位相不変量である。 □

4.4 被約ホモロジー

[TODO] 特異ホモロジーに限らない一般的なものか？

すでにみたように、1 点空間の 0 次ホモロジー群は $\mathbb{Z}$ であった。1 点空間の 0 次ホモロジー群が 0 となってほしいという動機により被約ホモロジーが導入される。

定義 4.4.1 (添加複体). X を位相空間とする。アーベル群 $\widetilde{C}_i(X)$ を

$$\widetilde{C}_p(X) \coloneqq \begin{cases} C_p(X) & (p \geq 0) \\ \mathbb{Z} & (p = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{4.4.1}$$

で定め、群準同型 ε を

$$\widetilde{C}_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X), \quad \sum_{i=0}^{k} n_i x_i \mapsto \sum_{i=0}^{k} n_i \tag{4.4.2}$$

で定める。このとき、系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \widetilde{C}_1(X) \xrightarrow{\partial} \widetilde{C}_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{C}_{-1}(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{4.4.3}$$

はチェイン複体となり、これを**添加特異複体 (argumented singular complex)** あるいは単に**添加複体** という。

定義 4.4.2 (被約ホモロジー). 添加複体のホモロジー群を $\widetilde{H}_p(X)$ と書き、X の **p 次被約ホモロジー群 (reduced homology group)** という。

被約ホモロジーを導入した動機は、1 点空間の 0 次ホモロジーが 0 となってほしいというものであった。それが確かに成り立つことを述べたのが次の命題である。

命題 4.4.3. X を位相空間とする。次が成り立つ:

(1) 各 $p \geq 1$ に対し $\widetilde{H}_p(X) = H_p(X)$ である。

(2) $X = \varnothing$ のとき、
$$\widetilde{H}_0(X) = 0, \quad \widetilde{H}_{-1}(X) \cong \mathbb{Z} \tag{4.4.4}$$

(3) $X \neq \varnothing$ のとき、
$$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, \quad \widetilde{H}_{-1} = 0 \tag{4.4.5}$$

が成り立つ。とくに X が弧状連結ならば $\widetilde{H}_0(X) = 0$ である。

注意 4.4.4. この命題からわかるように、0 次ホモロジーに対しては命題 4.3.15 のような加法性は成り立たない。

[TODO] 被約ホモロジーはむしろ点付き空間からの関手と考えるべき？そうすれば余積である wedge 和を保つ

証明 まず (2) を示す。$X = \varnothing$ ならば、$\varepsilon\colon \widetilde{C}_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X)$ の定義より
$$\widetilde{Z}_p(X) \cong \begin{cases} 0 & (p \neq -1) \\ \mathbb{Z} & (p = -1) \end{cases}, \qquad \widetilde{B}_p(X) \cong \begin{cases} 0 & (p \neq -1) \\ 0 & (p = -1) \end{cases} \tag{4.4.6}$$
だから (2) の主張が成り立つ。

以後 $X \neq \varnothing$ とする。アーベル群の系列
$$\cdots \longrightarrow \underbrace{0}_{\text{第 1 項}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{第 0 項}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{4.4.7}$$
を記号の濫用で $\mathbb{Z}$ と書くことにし、チェイン写像
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.4.8}$$
を記号の濫用で ε と書くことにする。このとき、アーベル群のチェイン複体の系列
$$0 \longrightarrow \widetilde{C}(X) \longrightarrow C(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{4.4.9}$$

は完全である。ジグザグ補題よりホモロジー群の完全列

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[dll] \\
\widetilde{H}_p(X) \arrow[r] & H_p(X) \arrow[r] & 0 \arrow[dll] \\
\widetilde{H}_{p-1}(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[dll] \\
\widetilde{H}_0(X) \arrow[r] & H_0(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[dll] \\
\widetilde{H}_{-1}(X) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{4.4.10}
$$

を得る。よって (1) が成り立つ。添加複体の定義より $\widetilde{H}_{-1}(X) = 0$ であり、さらに $\mathbb{Z}$ が射影的であることより短完全列

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{4.4.11}$$

は分裂する。したがって (3) が成り立つ。 □

4.5 写像度

定理 4.3.20 の結果を利用し、連続写像の写像度の概念を導入する。写像度は回転数の一般化であり、連続写像の像が値域を向きを込めて何重に被覆するかを表す量である。写像度はホモロジーの具体的な計算においてしばしば用いられる。

定義 4.5.1 (写像度). 連続写像 $f\colon S^n \to S^n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し、$f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ を同型 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ により $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ なる写像とみなしたとき、値 $f_*(1)$ を $\deg f$ で表し、f の**写像度 (mapping degree)** という。

ホモロジー H_n の性質から写像度の基本的な性質が導かれる。

命題 4.5.2 (写像度の基本性質). [TODO]

鏡映は写像度の計算において重要な役割を果たす。

命題 4.5.3 (鏡映の写像度). 第 r 成分の鏡映 $S^n \to S^n$, $(x_0, \ldots, x_r, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, -x_r, \ldots, x_n)$ の写像度は -1 である。

証明 [TODO] □

鏡映の合成により**対蹠写像 (antipodal map)** の写像度が求まる。

系 4.5.4 (対蹠写像の写像度). 対蹠写像 $S^n \to S^n$, $x \to -x$ の写像度は $(-1)^{n+1}$ である。

証明　対蹠写像は $n+1$ 個の鏡映の合成だから明らか。 □

対蹠写像は不動点を持たないが、逆に不動点を持たない写像 $S^n \to S^n$ は対蹠写像にホモトピックである。たとえば S^1 の回転は不動点を持たない写像の例である。

補題 4.5.5. $f, g\colon S^n \to S^n$ を連続写像とする。任意の $x \in S^n$ に対し $f(x) \neq -g(x)$ が成り立つならば、f, g は互いにホモトピックである。

証明　写像

$$H\colon S^n \times I \to S^n, \quad (x,t) \mapsto \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|} \tag{4.5.1}$$

を考える。$f(x) \neq -g(x)$ $(\forall x \in S^n)$ の仮定より H は well-defined な連続写像である。$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ だから H により f, g はホモトピックとなる。 □

命題 4.5.6 (不動点を持たない写像の写像度). $f\colon S^n \to S^n$ が不動点を持たないならば f は対蹠写像にホモトピックである。とくに $\deg f = (-1)^{n+1}$ である。

証明　α を対蹠写像とする。f が不動点を持たないならば任意の $x \in S^n$ に対し $f(x) \neq x = -\alpha(x)$ が成り立つ。したがって上の補題より f は α にホモトピックである。 □

定理 4.5.7 (Hairy Ball Theorem). [TODO]

証明　[TODO] □

4.6　空間対のホモロジー

位相空間のホモロジーの概念を一般化し、空間対のホモロジーの概念を導入する。あとで導入する切除定理の有用性は、空間対のホモロジーを導入する利点のひとつである。

A.　定義と基本性質

定義 4.6.1 (相対ホモロジー). (X, A) を空間対とする。

- アーベル群 $C_n(X, A)$ を

$$C_n(X,A) := C_n(X)/C_n(A) \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4.6.1}$$

で定め、境界写像 $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ により誘導される準同型 $C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ を同じ記号で ∂ と書くことにする。このとき $C(X,A) := (C_n(X,A), \partial)$ はチェイン複体となり、これを空間対 (X,A) の**特異チェイン複体 (singular chain complex)** という。

- $Z_n(X, A) := Z_n(C(X, A))$, $B_n(X, A) := B_n(C(X, A))$ の元をそれぞれ**相対サイクル (relative cycle)**、**相対バウンダリ (relative boundary)** という。
- $H_n(X, A)$ を n 次の**相対ホモロジー群 (relative homology group)** という。

命題 4.6.2. (X, A) を空間対とし、次の図式のように写像に名前をつける:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\pi_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[d] \\ C_n(X, A) \arrow[r] & C_{n-1}(X, A) \end{tikzcd} \tag{4.6.2}$$

このとき

$$Z_n(X, A) \cong \pi_n(\partial^{-1}(C_{n-1}(A))), \quad B_n(X, A) \cong \pi_n(\partial C_{n+1}(X)) \tag{4.6.3}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

定義 4.6.3 (空間対の射から誘導されるチェイン写像). [TODO] $f_\sharp$

B. ホモトピー不変性

定理 4.6.4 (相対ホモロジー群のホモトピー不変性).

(1) 空間対 $(X, A), (Y, B)$ がホモトピー同値ならば、$H_p(X, A), H_p(Y, B)$ は同型である ($p \in \mathbb{Z}$)。
(2) 包含写像 $A \hookrightarrow X$ がホモトピー同値射ならば $i_*: H_p(A) \to H_p(X)$ は同型となる。
(3) 包含写像 $B \hookrightarrow X$ がホモトピー同値射ならば $i_*: H_p(X, B) \to H_p(X, A)$ は同型となる。

証明 [TODO] □

C. 加法性

特異ホモロジーの加法性 (命題 4.3.15) と同様に、相対ホモロジーに対し次が成り立つ。

命題 4.6.5 (相対ホモロジー群の加法性). (X, A) を空間対、$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を弧状連結成分への分解とする。このとき包含写像 $i_\lambda: (X_\lambda, A \cap X_\lambda) \hookrightarrow (X, A)$ は直和分解

$$H_p(X, A) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_p(X_\lambda, A \cap X_\lambda) \tag{4.6.4}$$

を誘導する。

証明 [TODO] cf. [河澄] p.167 □

D. 完全性

ひとつの空間対から次のようなホモロジー完全列が得られる。

命題 4.6.6 (空間対のホモロジー完全列). (X, A) を空間対、$i\colon A \to X$ および $\pi\colon C(X) \to C(X, A)$ を標準的な射とする。このとき、次の長完全列が得られる:

$$\begin{tikzcd} & & \cdots \arrow[r] & H_{p+1}(X,A) \arrow[dll, rounded corners] \\ H_p(A) \arrow[r, "i_*"] & H_p(X) \arrow[r, "\pi_*"] & H_p(X,A) \arrow[dll, rounded corners] & \\ H_{p-1}(A) \arrow[r] & \cdots & & \end{tikzcd} \tag{4.6.5}$$

証明 $C(X, A)$ の定義より、**Comp**(**Ab**) の短完全列

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{i_\sharp} C(X) \xrightarrow{\pi} C(X, A) \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)} \tag{4.6.6}$$

が得られる。ジグザグ補題を適用して命題の主張を得る。 □

例 4.6.7 (円板と境界の空間対のホモロジー). 空間対のホモロジー完全列の応用例として円板とその境界の空間対を考える。円板とその境界の空間対は、後で導入する胞体的ホモロジーにとって非常に基本的なパーツであるから、そのホモロジーを調べておくことには価値がある。具体的には次が成り立つ:

$$H_p(D^n, \partial D^n) = H_p(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{4.6.7}$$

命題 4.6.8 (被約ホモロジーと相対ホモロジー). $X \neq \varnothing$ のとき、各 $x_0 \in X$ に対し $\widetilde{H}_p(X) \cong H_p(X, x_0)$ が成り立つ。[TODO]

注意 4.6.9. この命題は一見すると後の系 4.6.13 の系として得られそうだが、独立な主張である。

証明 [TODO] □

3 対 (X, A, B) から得られる 3 つの空間対 $(X, A), (X, B), (A, B)$ に空間対のホモロジー完全列の定理を適用して次が得られる。[TODO] 本当に？

命題 4.6.10 (3 対のホモロジー完全列). X を位相空間、$B \subset A \subset X$ を部分空間とする。このとき **Comp**(**Ab**) の系列

$$0 \longrightarrow C(A, B) \longrightarrow C(X, B) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0 \tag{4.6.8}$$

は完全である。

証明 [TODO] □

E. 切除

定理 4.6.11 (切除定理). (X, A) を空間対、$B \subset A$、$\mathrm{Cl}\, B \subset \mathrm{Int}\, A$ とする。このとき、包含写像 $X \setminus B \to X$ はホモロジー群の同型 $H_p(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_p(X, A)$ $(\forall p \in \mathbb{Z})$ を誘導する。

証明 [TODO] □

切除定理の応用として次の定理が示される。

定理 4.6.12 (部分空間を 1 点につぶした空間のホモロジー). 空間対 (X, A) が次をみたすとする [5):]

(1) A は閉である。
(2) A はある近傍の変形レトラクトである。

このとき、標準射 $\pi\colon X \to X/A$ はホモロジー群の同型 $H_p(X, A) \cong H_p(X/A, A/A)$ $(\forall p \in \mathbb{Z})$ を誘導する。

証明 [TODO] cf. [Hat02, p.124] □

系 4.6.13. 上の定理の状況でさらに $A \neq \varnothing$ ならば $H_p(X, A) \cong \widetilde{H}_p(X/A)$ が成り立つ。

証明 定理と命題 4.6.8 より明らか。 □

4.7 普遍係数定理

定義 4.7.1 (Tor 関手と Ext 関手). [TODO]

定理 4.7.2 (普遍係数定理). 分裂完全列

$$0 \longrightarrow H_p(X) \otimes M \longrightarrow H_p(X; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{p-1}(X), M) \longrightarrow 0 \tag{4.7.1}$$

が存在する (ただし分裂では一意でない)。したがって

$$H_p(X; M) \cong (H_p(X) \otimes M) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(X), M) \tag{4.7.2}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

5) 定理の仮定をみたす空間対 (X, A) に名前があると都合が良さそうである。実際 [Hat02] では、このような (X, A) であって $A \neq \varnothing$ なるものを **good pair** と呼んでいる。

定義 4.7.3 (自由分解). [TODO]

直積空間のホモロジーは Tor を用いて計算できる。

定理 4.7.4 (Künneth の公式).

$$H_p(X \times Y) = \bigoplus_{k+l=p} H_k(X) \otimes H_l(Y) \oplus \bigoplus_{k+l=p-1} \mathrm{Tor}(H_k(X), H_l(Y)) \tag{4.7.3}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

4.8 演習問題

A. 問題セット 5

♤ **演習問題 4.1** (幾何学 II 演習問題 5.1). 鎖複体 A の錐 CA は分裂する完全列であることを示せ。

注意 4.8.1. 一般のチェイン複体に関する「split exact $\iff$ id が null-homotopic」という事実を念頭に置いた答案が解法 1 である。

♤ **演習問題 4.2** (幾何学 II 演習問題 5.2). 2 つの鎖写像 $f, f' \colon A \to B$ が鎖ホモトピックであるためには、複体 A の柱 ZA からの鎖写像 $F \colon ZA \to B$ であって $F|_{(A_p,0,0)} = f$, $F|_{(0,0,A_p)} = f'$ となるものが存在することが必要十分であることを示せ。

♤ **演習問題 4.3** (幾何学 II 演習問題 5.3). 鎖写像 $f \colon A \to B$ がホモロジー群の同型 $H_p(A) \cong H_p(B)$ を誘導するためには C_f が完全列となることが必要十分であることを示せ。

注意 4.8.2. この命題により、同型を示すために必要だった 2 ステップ「単射を示す」「全射を示す」が「サイクルがバウンダリになる」という 1 ステップにまとまり、考えやすくなるかもしれない。擬同型の問題が完全列の問題に帰着されるということでもある。

♤ **演習問題 4.4** (幾何学 II 演習問題 5.4). 鎖写像 $f \colon A \to B$ に対して、複体 B を写像錐 Z_f の $(0, 0, b)$ の形の元からなる部分複体に埋め込む写像はホモロジーの同型を誘導することを示せ。

注意 4.8.3. つまり包含写像 $B \to Z_f$ が擬同型になるということである。

♤ **演習問題 4.5** (幾何学 II 演習問題 5.5). 鎖写像 $f \colon A \to B$ に対して B と Z_f の間の鎖ホモトピー同値を構成せよ。

♤ **演習問題 4.6** (幾何学 II 演習問題 5.6). 鎖複体 $A = (A_p, \partial_p)$ に対して $\Sigma A = (A_{p-1}, \partial_{p-1})$ とおくと鎖複体になる。鎖写像 $f\colon A \to B$ に対して、埋め込み $i\colon B \to C_f$ の写像錐 C_i は ΣA と鎖ホモトピー同値であることを示せ。

B. 問題セット 6

♤ **演習問題 4.7** (幾何学 II 演習問題 6.1). 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 4.8** (幾何学 II 演習問題 6.2). Klein の壷 K の整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 4.9** (幾何学 II 演習問題 6.3). 実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 4.10** (幾何学 II 演習問題 6.4). 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ の整係数ホモロジー群を求めよ。

注意 4.8.4. この問題では Mayer-Vietoris 完全列を構成する準同型の具体的な形を知る必要がない。

♤ **演習問題 4.11** (幾何学 II 演習問題 6.5). 球面 S^n において、赤道 S^{n-1} を 1 点に縮めて得られる位相空間の整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 4.12** (幾何学 II 演習問題 6.6). 空間 $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ の整係数ホモロジー群を求めよ。ただし $\mathbb{R}^3$ の適当な開集合 Y に対して、開被覆 $\mathbb{R}^3 = X \cup Y$ に Mayer-Vietoris 完全列を適用すること。

♤ **演習問題 4.13** (幾何学 II 演習問題 6.7). 空間 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視して $P_k = e^{k\pi\sqrt{-1}/4}$ とおき、正八角形 $P_0P_1 \dots P_7$ および $\mathbb{R}^2$ におけるその内部を考える。この空間において、有向線分 P_0P_1 と P_3P_2、P_2P_1 と P_7P_0、P_3P_4 と P_6P_5、P_4P_5 と P_7P_6 を同一視して得られる位相空間 Σ_2 の整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 4.14** (幾何学 II 演習問題 6.8). 標準 q 単体 Δ^q から標準 $(q-1)$ 単体 Δ^{q-1} へのアファイン写像 e_i^* $(i = 0, \dots, q-1)$ を、頂点を

$$e_i^*(P_k) := \begin{cases} P_k & (0 \le k \le i) \\ P_{k-1} & (i+1 \le k \le q) \end{cases} \tag{4.8.1}$$

と対応させることにより定める。このとき、ある特異 $(q-1)$ 単体 σ に対して $\sigma \circ e_i^*$ $(i = 0, \dots, q-1)$ と書ける特異 q 単体で生成された $C_q(X)$ の部分アーベル群を $D_q(X)$ とおくと、これらは $C(X)$ の部分複体をなし、商複体 $\overline{C}(X) = C(X)/D(X)$ は、標準的射影 $C(X) \to \overline{C}(X)$ によって $C(X)$ と自然に鎖ホモトピー同値であることを示せ。

C. 幾何学 II 練習問題

♤ **演習問題 4.15** (幾何学 II 練習問題 42)**.** 連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ は固定点を持つことを示せ。

証明 [TODO] [? , p. 36] □

♤ **演習問題 4.16** (幾何学 II 練習問題 45)**.** $f, g\colon S^n \to S^n$ を連続写像とする。任意の $x \in S^n$ に対し $f(x) \neq -g(x)$ が成り立つならば、f, g は互いにホモトピックであることを示せ。

♤ **演習問題 4.17** (幾何学 II 練習問題 46)**.** 連続写像 $f\colon S^n \to S^n$ の写像度が 0 でないならば f は全射であることを示せ。

第 5 章　その他のホモロジー

5.1　胞体的ホモロジー

この節では胞体的ホモロジーを定義する。胞体的ホモロジーは特異ホモロジーよりも具体的な計算に適している。[TODO] why?

A.　胞体複体

胞体的ホモロジーでは、位相空間をセルと呼ばれる円板と同相なパーツに分割 (胞体分割) し、ある意味でセルを単体とみなしてホモロジーを構成する。胞体分割は常にできるとは限らないが、球面やトーラスなどのよく見かける位相空間ではそれが可能である。

ここではまず胞体分割について述べる。

定義 5.1.1 (セル)**.** X を位相空間、$e \subset X$、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。e が X の ***n*-セル (*n*-cell)** であるとは、ある連続写像 $\varphi\colon D^n \to X$ が存在して $\varphi|_{\mathring{D}^n}$ が $\mathring{D}^n$ から e への同相写像であることをいう。このとき φ を e の**特性写像 (characteristic map)** といい、n を e の**次元 (dimension)** という。

この節では基本的に Hausdorff 空間を考えることになる。Hausdorff 空間において、特性写像は次の性質をもつ。

命題 5.1.2. X を Hausdorff 位相空間、$e \subset X$ を X のセルとする。このとき、e の特性写像は $\bar{e}$ の上への商写像である。

証明　[TODO] □

補題 5.1.3 (セルの境界の存在)**.** X を Hausdorff 位相空間、e を X のセル、φ を e の特性写像とする。このとき $\dim e \geq 1$ ならば $\partial e \neq \varnothing$ である。

証明　$\partial e = \varnothing$ とすると $\varphi(D^n) \subset \operatorname{Int} e$ である。一方 φ はセル e の特性写像だから $\varphi(D^n) \supset e \supset \operatorname{Int} e$ である。したがって $\varphi(D^n) = \operatorname{Int} e = \varphi(\operatorname{Int} D^n)$ である。いま $n \geq 1$ だから左辺はコンパクトであり右辺はコンパクトでない。矛盾。 □

胞体分割を定義する。

定義 5.1.4 (胞体分割)**.** X を Hausdorff 位相空間とする。各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、X の ***n*-スケルトン (*n*-skelton)** X^n を

$$X^n := \bigcup_{\dim e_\lambda \leq n} e_\lambda \tag{5.1.1}$$

と定める。また、分割 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ が X の**胞体分割 (cell decomposition)** であるとは、

(1) 各 e_λ は X のセルである。
(2) n-セル e_λ の境界 ∂e_λ は $(n-1)$-スケルトンに含まれる。

が成り立つことをいう。胞体分割が与えられているとき X を**胞体複体 (cell complex)** といい、さらに Λ が有限集合であるとき X を**有限胞体複体 (finite cell complex)** という。

注意 5.1.5. 胞体分割のスケルトンは低次から順に埋まっている必要はない。すなわち n-セルを持ったとしても $(n-1)$-セルは持たなくてもよい。たとえば S^2 を北極とそれ以外に分ける胞体分割は 0-セルと 2-セルを持つが 1-セルは持たない。

ただし、X が空集合でない限り X の胞体分割は必ず 0-セルを持つ。これは補題 5.1.3 と胞体分割の条件 (2) からわかる。したがって、とくに各スケルトンは空でない。

命題 5.1.6 (有限胞体複体の位相的性質). X を有限胞体複体とする。

(1) n-スケルトン X^n は X の閉集合である。
(2) n-セル e_λ は X^n の開集合である。
(3) n-セル e_λ は $X^n \setminus X^{n-1}$ の開かつ閉集合である。

証明 [TODO] □

B. スケルトン対の性質

胞体的ホモロジーを扱う際にはスケルトンの空間対 (X^p, X^{p-1}) がしばしば現れる。そこで、胞体的ホモロジーを定義する前にこの空間対の性質を調べておく。

簡単な観察により次のことがわかる。

補題 5.1.7.

$$X^n/X^{n-1} \approx \bigvee_{\dim e_\lambda = n} S^n \tag{5.1.2}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

これにより次がわかる。

補題 5.1.8 (スケルトン対のホモロジーは自由). $n \geq 1$ のとき

$$H_p(X^n, X^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\sharp\{\lambda \mid \dim e_\lambda = p\}} & (p = n) \\ 0 & (p \neq n) \end{cases} \tag{5.1.3}$$

である。したがってとくに

$$C_p^{\mathrm{cell}}(X) \cong \mathbb{Z}^{\sharp\{\lambda \mid \dim e_\lambda = p\}} \tag{5.1.4}$$

である。[TODO]

証明

$$
\begin{aligned}
&H_p(X^n, X^{n-1}) && (5.1.5)\\
&\cong \widetilde{H}_p(X^n/X^{n-1}) \quad (\text{系 } 4.6.13) && (5.1.6)\\
&\cong \widetilde{H}_p\left(\bigvee S^n\right) \quad (\text{上の補題}) && (5.1.7)\\
&\cong H_p\left(\bigvee S^n, *\right) \quad (\text{命題 } 4.6.8) && (5.1.8)\\
&\cong H_p\left(\coprod S^n, \coprod \{1\}\right) \quad (\text{系 } 4.6.13) && (5.1.9)\\
&\cong \bigoplus H_p(S^n, 1) \quad (\text{命題 } 4.6.5) && (5.1.10)\\
&\cong \bigoplus \widetilde{H}_p(S^n) \quad (\text{命題 } 4.6.8) && (5.1.11)\\
&\cong \begin{cases} \bigoplus \mathbb{Z} & (p = n) \\ 0 & (p \neq n) \end{cases} && (5.1.12)
\end{aligned}
$$

□

より具体的には次がわかる。

補題 5.1.9 (スケルトン対のホモロジーの基底). X を有限胞体複体、$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ をその胞体分割、$\varphi_\lambda\colon D^p \to X^p \subset X$ $(p = \dim e_\lambda)$ を e_λ の特性写像とする。各 $p \geq 1$ に対し、$H_p(D^p, \partial D^p) \cong \mathbb{Z}$ ($\because$ 例 4.6.7) の生成元 $[D^p]$ をひとつずつ選んでおく。このとき

$$H_p(X^p, X^{p-1}) = \bigoplus_{\dim e_\lambda = p} \mathbb{Z}\varphi_{\lambda *}[D^p] \tag{5.1.13}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

C. 胞体的ホモロジー

補題 5.1.9 により有限胞体複体のホモロジーが定義できる。

定義 5.1.10 (胞体複体のホモロジー). X を有限胞体複体、$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ をその胞体分割、$\varphi_\lambda\colon D^p \to X^p \subset X$ $(p = \dim e_\lambda)$ を e_λ の特性写像とする。各 $p \geq 1$ に対し、$H_p(D^p, \partial D^p) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 $[D^p]$ をひとつずつ選んでおく [6]。

- 自由アーベル群 $C_p^{\mathrm{cell}}(X)$ を
$$C_p^{\mathrm{cell}}(X) := H_p(X^p, X^{p-1}) \tag{5.1.14}$$
と定める。補題 5.1.9 よりこれは自由アーベル群である。
- $C_p^{\mathrm{cell}}(X)$ の基底 $\varphi_{\lambda *}[D^p]$ を記号の濫用で e_λ と書く。

- **境界写像 (boundary map)** $\partial_p^{\text{cell}}\colon C_p^{\text{cell}}(X) \to C_{p-1}^{\text{cell}}(X)$ を 3 対 (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) のホモロジー長完全列の連結準同型で定める。これは $\partial^{\text{cell}} \circ \partial^{\text{cell}} = 0$ をみたす (このあと示す)。
- チェイン複体 $(C_p^{\text{cell}}(X), \partial_p^{\text{cell}})$ のホモロジーを $H_p^{\text{cell}}(X)$ と書き、**胞体的ホモロジー (cellular homology)** という。

証明 [TODO] □

胞体的ホモロジーを求める際には境界写像の具体的な計算がしばしば必要となる。そのために重要となるのが結合係数である。

定義 5.1.11 (結合係数)**.** 上の定義の状況で

$$\partial_p e_\lambda = \sum_{\dim e_\mu = p-1} [e_\lambda, e_\mu] e_\mu \quad ([e_\lambda, e_\mu] \in \mathbb{Z}) \tag{5.1.15}$$

と書いたときの $[e_\lambda, e_\mu]$ を**結合係数 (incidence number)** という。

D. 胞体的ホモロジーと特異ホモロジー

実は胞体的ホモロジーは特異ホモロジーと同型となる。まず定理の証明に用いる補題を示す。

補題 5.1.12. $p \geq q \geq 0$ とする。$n \leq q$ または $n > p$ ならば $H_n(X^p, X^q) = 0$ である。[TODO]

証明 $p - q \geq 0$ に関する帰納法で示す。$p - q = 0$ の場合は任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $H_n(X^p, X^p) = \widetilde{H}_n(X^p/X^p) = \widetilde{H}_n(*) = 0$ より成り立つ。

$p - q > 0$ とする。3 対 (X^p, X^{q+1}, X^q) の長完全列

$$H_n(X^{q+1}, X^q) \longrightarrow H_n(X^p, X^q) \longrightarrow H_n(X^p, X^{q+1}) \tag{5.1.16}$$

を考える。$n > p\ (\geq q+1)$ とすると $n \neq q+1$ だから補題 5.1.8 より第 1 項は 0 であり、さらに第 3 項も帰納法の仮定から 0 となり $H_n(X^p, X^q) = 0$ を得る。一方 $n \leq q$ とすると $n \neq q+1$, $n \leq q+1$ だからそれぞれ補題5.1.8、帰納法の仮定から第 1 項、第 3 項は 0 となり $H_n(X^p, X^q) = 0$ を得る。これで帰納法が完成した。 □

これで次が示せる。

定理 5.1.13 (特異ホモロジーと胞体的ホモロジーの同型)**.** 有限胞体複体 X に対し $H_p^{\text{cell}}(X) \cong H_p(X)$ が成り立つ。

注意 5.1.14. この同一視により、以後 $H_p^{\text{cell}}(X)$ も $H_p(X)$ と書くことにする。

証明 [TODO] □

6) 見慣れない記法かもしれないが今後よく使う。

胞体分割があれば Euler 標数が求まる。

定理 5.1.15. $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ を有限胞体複体とする。このとき

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \sharp\{\lambda \in \Lambda \mid \dim e_\lambda = p\} \tag{5.1.17}$$

が成り立つ。

証明 Euler-Poincaré の定理 (定理 4.1.14) より

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \operatorname{rk} H_p(X) = \sum_p (-1)^p \sharp\{\lambda \in \Lambda \mid \dim e_\lambda = p\} \tag{5.1.18}$$

である。 □

E. 胞体的ホモロジーの計算

胞体的ホモロジーの計算例を挙げる。

例 5.1.16 (複素射影空間). [TODO]

上の例では胞体分割をしただけで、境界写像を具体的に知ることなくすぐにホモロジーが得られた。しかし一般にはそれほど簡単にはいかず、境界写像を計算する必要がある。

補題 5.1.17 (∂_1 の計算). 1-セル e_λ に対し 0-セル $\varphi_{\lambda,\pm 1} \colon D^0 \to X^0 \subset X$ を

$$D^0 = \{1\} \xrightarrow{1 \mapsto \pm 1} S^0 \xrightarrow{\varphi_\lambda|_{S^0}} X^0 \tag{5.1.19}$$

で定める。このとき

$$\partial_1 e_\lambda = \varphi_{\lambda,+1} - \varphi_{\lambda,-1} \in C_0(X) \tag{5.1.20}$$

が成り立つ。[TODO]

証明 [TODO] □

∂_p $(p \geq 2)$ の計算、すなわち e_λ と e_μ の結合係数 $[e_\lambda : e_\mu]$ の計算には写像度が利用できる。

補題 5.1.18 (∂_p $(p \geq 2)$ の計算).

$$[e_\lambda : e_\mu] = \deg(\pi_\mu \circ \varphi_\lambda|_{S^{p-1}}) \tag{5.1.21}$$

[TODO]

証明 [TODO] ちゃんと書く次の図式を考える。胞体分割の定義 (定義 5.1.4) の条件 (2) より $\overline{\varphi}_\lambda := \varphi_\lambda|_{S^{p-1}}$ は

$S^{p-1} \to X^{p-1}$ なる写像とみなせることに注意すれば

$$\begin{tikzcd} H_p(D^p, S^{p-1}) \arrow[r, "\varphi_{\lambda*}"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_p(X^p, X^{p-1}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_*"] & H_p(X^p, X^{p-1}) \arrow[d, "\partial_p"] & \\ H_{p-1}(S^{p-1}) \arrow[r, "\overline{\varphi}_{\lambda*}"] & H_{p-1}(X^{p-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \arrow[r, "\pi_{\mu*}"] & H_{p-1}(S^{p-1}) \end{tikzcd} \tag{5.1.22}$$

ただし左から第 1, 2 列の射 ∂_* は対の完全列の連結準同型、第 3 列の射 ∂_p はいま計算したい境界写像、i は空間対の射 $X^{p-1} \hookrightarrow (X^{p-1}, X^{p-2})$、$\pi_\mu$ は空間対の射

$$(X^{p-1}, X^{p-2}) \twoheadrightarrow \left(X^{p-1} \Big/ \bigcup_{\substack{\dim e_\nu \le p-1 \\ \nu \ne \mu}} \overline{e_\nu},\ * \right) \xrightarrow{\approx} (S^{p-1}, *) \tag{5.1.23}$$

である。i_* は $(p-1)$ 次の特異単体を胞体的チェインで表す写像になっている。$\pi_{\mu*}$ は $H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ の基底のうち e_μ を $[S^{p-1}]$ に、それ以外を 0 に写す写像になっている。図式の可換性より

$$\partial_p e_\lambda = \partial_p \varphi_{\lambda*}[D^p] = i_* \overline{\varphi}_{\lambda*} \partial_*[D^p] = i_* \overline{\varphi}_{\lambda*}[S^{p-1}] \tag{5.1.24}$$

だから、∂_p を計算するには $i_* \overline{\varphi}_{\lambda*}[S^{p-1}]$ を考えればよい。ただし最後の等号には $p \ge 2$ より第 1 列が同型射であることを用いた。さらに $i_* \overline{\varphi}_{\lambda*}[S^{p-1}] = \sum_{\dim e_\nu = p-1} a_\nu e_\nu$ と表したとき

$$\pi_{\mu*} i_* \overline{\varphi}_{\lambda*}[S^{p-1}] = \pi_{\mu*} \sum_{\dim e_\nu = p-1} a_\nu e_\nu = \sum_{\dim e_\nu = p-1} a_\nu \pi_{\mu*} e_\nu = \sum_{\dim e_\nu = p-1} a_\nu \delta_{\mu,\nu}[S^{p-1}] = a_\mu [S^{p-1}] \tag{5.1.25}$$

だから

$$\pi_{\mu*} i_* \overline{\varphi}_{\lambda*}[S^{p-1}] = [e_\lambda : e_\mu][S^{p-1}] \tag{5.1.26}$$

である。したがって

$$[e_\lambda : e_\mu] = \deg(\pi_\mu \circ \overline{\varphi}_\lambda) \tag{5.1.27}$$

が成り立つ。[TODO] i はどう扱った？ □

例 5.1.19 (2 次元トーラス). 2 次元トーラス T^2 のホモロジーを計算する。通常の商写像 $I \times I \to T^2$ を π とおく。記号の簡略化のため、以下 $X := T^2$ と書く。X の胞体分割を

$$X = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2 \tag{5.1.28}$$

$$e^0 := \{\pi(0,0)\} \tag{5.1.29}$$

$$e^1_1 := \pi(\mathring{I} \times \{0\}) \tag{5.1.30}$$

$$e^1_2 := \pi(\{0\} \times \mathring{I}) \tag{5.1.31}$$

$$e^2 := \pi(\mathring{I} \times \mathring{I}) \tag{5.1.32}$$

で与えることができる。セル e^k_i の特性写像を $\varphi^k_i : D^k \to X^k \subset X$ とおく。上の胞体分割より、チェイン複体

$$0 \longrightarrow \underbrace{C_2(X)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_2} \underbrace{C_1(X)}_{\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{C_0(X)}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{5.1.33}$$

を得る。

ホモロジーを求めるために境界写像を計算する。まず補題 5.1.17 を用いて ∂_1 を考える。

$$\partial_1 e_1^1 = e^0 - e^0 = 0 \tag{5.1.34}$$
$$\partial_1 e_2^1 = e^0 - e^0 = 0 \tag{5.1.35}$$

だから $\partial_1 = 0$ である。

つぎに補題 5.1.18 を用いて ∂_2 を考える。空間対の射 $(X^1, X^0) \twoheadrightarrow (X^1/(X^0 \cup e_2^1), *) \to (S^1, *)$ を π_1^1 とおき $[e^2 : e_1^1] = \deg(\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1})$ を求める。ここで特性写像 φ^2 は $S^1 \subset D^2$ 上の点を $\partial(I \times I)$ 上の点に反時計回りに等間隔に写すもの (に商写像 π を合成したもの) としてよい。すると $S^1 \subset D^2$ の適当な鏡映 r に対し

$$\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1} \circ r = \pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1} \tag{5.1.36}$$

が成り立つ。よって

$$\deg(\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1}) \underbrace{\deg r}_{=-1} = \deg(\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1}) \tag{5.1.37}$$
$$\therefore \quad \deg(\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1}) = 0 \tag{5.1.38}$$

である。したがって $[e^2 : e_1^1] = 0$ である。同様にして $[e^2 : e_2^1] = 0$ を得て $\partial_2 = 0$ となる。

以上より $H_p(X) = C_p(X)$ を得る。したがって

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (p = 1) \\ \mathbb{Z} & (p = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.1.39}$$

を得る。

例 5.1.20 (実射影空間). [TODO]

5.2 位相多様体

定義 5.2.1 (局所ホモロジー). [TODO]

定義 5.2.2 (向きづけ). [TODO]

定義 5.2.3 (基本類). [TODO]

定理 5.2.4 (Poincaré 双対性). [TODO]

5.3 単体的ホモロジー

[TODO] cf. [河澄] p.209

単体的ホモロジーを定義する。

A. 基本概念

CW 複体とは、大まかには特別なパーツを貼り合わせて構成される位相空間のことであり、ある意味で "well-behaved" な空間である。

定義 5.3.1 (n-セル). ***n*-セル (*n*-cell)** とは、n 次元閉球 D^n に同相な空間のことである。ただし、0-セルは 1 点からなる空間とする。

例 5.3.2 (n-セルの例). n 次元閉球 D^n は n-セルである。1 点集合 A と n-セル C との直積空間 $A \times C$ は n-セルである。穴あき円板 $D^2 \setminus \{(0,0)\}$ は 2-セルではない。

定義 5.3.3 (n-セルを接着した空間). X を位相空間、$\{A_\alpha\}_\alpha$ を n-セルの族、$f\colon \coprod_\alpha \partial A_\alpha \to X$ を連続写像とする（このとき $\coprod_\alpha \partial A_\alpha$ は $\coprod_\alpha A_\alpha$ の閉集合である。証明略）。このとき、接着空間 $X \cup_f \coprod_\alpha A_\alpha$ を、***X* に *n*-セルを接着した空間**という。

例 5.3.4 (n-セルを接着した空間の例). $X := [0,1] \times S^2$（円筒）とし、2-セルの族 $\{\{0\} \times D^2, \{1\} \times D^2\}$ を考える。$A := (\{0\} \times S^2) \amalg (\{1\} \times S^2)$ とおき、接着写像 $f\colon A \to X$ を

$$f(\sigma, a) := \begin{cases} (0, a) & \text{if } \sigma = 0 \\ (1, a) & \text{if } \sigma = 1 \end{cases} \tag{5.3.1}$$

で定める。このとき、上の定義のように構成した X' は両端を閉じた円筒（と同相）である。

定義 5.3.5 (CW 複体). 以下のように帰納的に定義される位相空間の列 $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ を考える。

- X_0 は 1 個以上の 0-セルの和の空間とする。すなわち、X_0 は非空な離散空間である。
- X_0 に対して 0 個以上の 1-セルを接着した空間を X_1 とする。
- X_1 に対して 0 個以上の 2-セルを接着した空間を X_2 とする。
- ...
- X_{n-1} に対して 0 個以上の n-セルを接着した空間を X_n とする。
- ...

このとき各 X_{n-1} は X_n に埋め込まれており（証明略）、したがって $X_{n-1} \subset X_n$ とみなせることに注意する。各 X_n を ***n*-スケルトン (*n*-skelton)** といい、$X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ を **CW 複体 (CW complex)** という。1 個以上の n-セルが X の構成に用いられているような $0 \le n \le \infty$ の最大値を X の**次元 (dimension)** という。

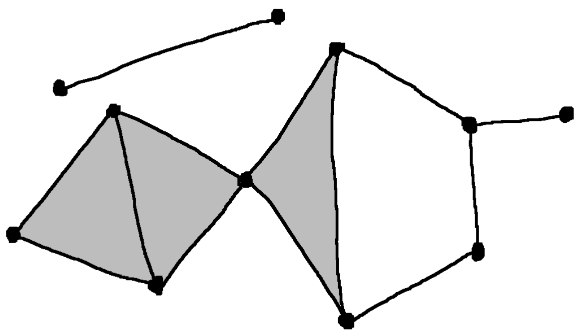

図 5.1　$\mathbb{R}^2$ の単体的複体

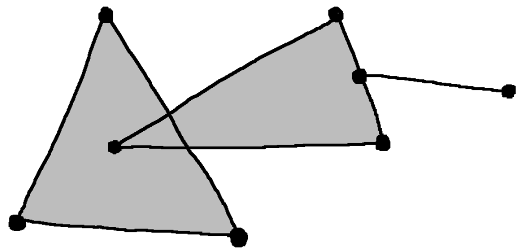

図 5.2　単体的複体でない例

定義 5.3.6 (単体の構成要素). $\sigma = [v_0 \ldots v_k]$ を k-単体とする。

- $v_0, \ldots, v_k$ を σ の**頂点 (vertex)** という。
- σ の 1 個以上の頂点により張られる単体を σ の**面 (face)** という。
- 1 次元の面を**辺 (edge)** という。
- $k-1$ 次元の面を**境界面 (boundary face)** という。
- σ の境界面すべての合併を σ の**境界 (boundary)** という。
- σ から境界を除いた集合を σ の**内部 (interior)** という。

定義 5.3.7 (単体的複体). $\mathbb{R}^n$ 内の単体の有限集合 K であって次をみたすものを**単体的複体 (simplicial complex)** という：

- (Subcomplex Condition) $\sigma \in K$ ならば σ の面もすべて K に属する。
- (Intersection Condition) $\sigma, \sigma' \in K$ ならば、$\sigma \cap \sigma'$ は空であるかまたは σ, σ' それぞれの面になっている。

定義 5.3.6 の用語は単体的複体に対しても同様に定義される。また、

- K に属する単体の最大次元を K の**次元 (dimension)** という。
- K に属する単体すべての合併を $|K|$ と書き、K の**多面体 (polyhedron)** と呼ぶ。
- K の頂点全体の集合を $\mathrm{Vert}(K)$ と書く。

例 5.3.8 (単体的複体の例). 図 5.1 は $\mathbb{R}^2$ の単体的複体の例である。図 5.2 は Intersection Condition をみたさないため単体的複体ではない。

定義 5.3.9 (単体分割). 単体的複体 K に対し $|K|$ が位相空間 X と同相であるとき、K を X の**単体分割**という。

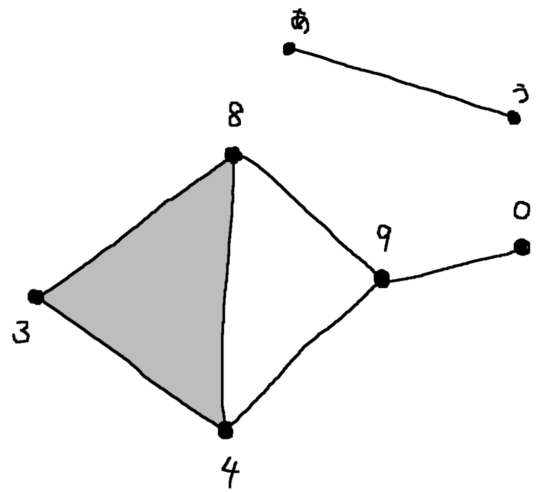

図 5.3　向き付けられた単体的複体

定義 5.3.10 (向き付けられた単体的複体). K を $\mathbb{R}^n$ 内の単体的複体とする。Vert(K) 上の半順序であって、各単体 $\sigma \in K$ 上への制限が全順序であるものを K の**向き (orientation)** という (図 5.3)。以後、単に単体的複体といったときは向きが入っているものとする。また、k-単体 σ を $\sigma = [v_0 \dots v_k]$ と書いたとき、σ には $v_0 < \cdots < v_k$ なる向きが入っているものとする。

B.　単体的ホモロジー

[TODO] 単体的ホモロジーはアファインホモロジーと違う？

定義 5.3.11 (単体的チェイン群). K を単体的複体とする。各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し、**第 p 単体的チェイン群 (p-th simplicial chain group)** と呼ばれるアーベル群 $C_p(K)$ を以下のように定める。

- $p < 0$ のときは $C_p(K) := 0$ と定める。
- $p \geq 0$ のときは、$C_p(K)$ は K に属する p-単体のすべてにより生成される自由アーベル群であって、関係式
  (1)　$p+1$ 次の置換 π に対し $[v_0 \dots v_p] = \mathrm{sgn}(\pi)[v_{\pi(0)} \dots v_{\pi(p)}]$
  をみたすものとして定める（ことができる）[1)]。

1)　$C_p(K)$ は

- 生成元：Vert(K) の $p+1$ 個の元のタプル $(v_0, \dots, v_p)$ であって、$\{v_0, \dots, v_p\}$ の凸包が K に属する（p 次元とは限らない）単体となるもの全体
- 関係式：
  (1)　$v_0, \dots, v_p$ に重複があれば $(v_0, \dots, v_p) = 0$
  (2)　$p+1$ 次の置換 π に対し $(v_0 \dots v_p) = \mathrm{sgn}(\pi)(v_{\pi(0)} \dots v_{\pi(p)})$

により表示される群のアーベル化である。

例 5.3.12 (単体的チェイン群の関係式). 単体的複体

$$K := \{[abc], [cbd], [ab], [bc], [ca], [bd], [dc], [a], [b], [c], [d]\} \tag{5.3.2}$$

を考える（K には向きが入っていることに注意）。このとき第 2 チェイン群の形は

$$C_2(K) = \{\alpha[abc] + \beta[cbd] \colon \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\} \tag{5.3.3}$$

である。ただし、たとえば $[abc], [bac] \in C_2(K)$ に対し $[abc] = -[bac]$ が成り立つ。これは単体に逆の向きを入れたものがチェイン群上での逆元に対応することを表している。

定義 5.3.13 (単体的チェイン複体). K を単体的複体とする。群準同型 $\partial_p \colon C_p(K) \to C_{p-1}(K)$ を次のように定める：

- $p \geq 1$ なら、∂_p は
$$[v_0 \dots v_p] \mapsto \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \tag{5.3.4}$$
により定まる準同型とし、
- $p \leq 0$ なら、$\partial_p := 0$ とする。

このとき、列

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \longrightarrow \cdots \tag{5.3.5}$$

はチェイン複体となる。これを K の**単体的チェイン複体 (simplicial chain complex)** という。

チェイン複体となることの証明　$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ を示せばよい。$p \leq 1$ のときは明らか。$p > 1$ のときは (5.3.4) に基づいて確かめればよい。たとえば $p = 2$ の場合を確かめると

$$\partial_1 \circ \partial_2([v_0v_1v_2]) = \partial_1([v_1v_2] - [v_0v_2] + [v_0v_1]) \tag{5.3.6}$$
$$= \partial_1([v_1v_2]) - \partial_1([v_0v_2]) + \partial_1([v_0v_1]) \tag{5.3.7}$$
$$= ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) + ([v_1] - [v_0]) \tag{5.3.8}$$
$$= 0 \tag{5.3.9}$$

となり、たしかに成り立つ。$p > 2$ の場合は省略。 □

定義 5.3.14 (単体的ホモロジー群). 定義 5.3.13 の状況で、

- $\mathrm{Ker}(\partial_p)$ を $Z_p(K)$ と書く。
- $\mathrm{Im}(\partial_{p+1})$ を $B_p(K)$ と書く。
- 単体的チェイン複体のホモロジー群 $Z_p(K)/B_p(K)$ を K の**単体的ホモロジー群 (simplicial homology group)** といい、$H_p(K)$ と書く。

例 5.3.15 (0-単体の単体的ホモロジー群). 0-単体の定める単体的複体 $K = \{[v_0]\}$ を考える。

$$C_0(K) = \{n[v_0] \colon n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \tag{5.3.10}$$

$$Z_0(K) = C_0(K) \tag{5.3.11}$$

$$C_0(K) = 0 \tag{5.3.12}$$

だから

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K)/0 \cong C_0(K) \cong \mathbb{Z} \tag{5.3.13}$$

である。一方、$k \neq 0$ ならば $C_k(K) = 0$ だから $H_k(K) = 0$ である。まとめると

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{if } k \neq 0 \end{cases} \tag{5.3.14}$$

である。

例 5.3.16 (内部を含まない三角形の単体的ホモロジー群). 三角形 $v_0v_1v_2$ の周の定める単体的複体 $K = \{[v_0v_1], [v_1v_2], [v_2v_0], [v_0], [v_1]\}$ を考える。表記の簡略化のため

$$P_j \coloneqq [v_j] \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.3.15}$$

$$e_0 \coloneqq [v_1v_2],\ e_1 \coloneqq [v_2v_0],\ e_2 \coloneqq [v_0v_1] \tag{5.3.16}$$

とおく。単体的チェイン群は

$$C_0(K) \coloneqq \{aP_0 + bP_1 + cP_2 \colon a, b, c \in \mathbb{Z}\} \tag{5.3.17}$$

$$C_1(K) \coloneqq \{se_0 + te_1 + ue_2 \colon s, t, u \in \mathbb{Z}\} \tag{5.3.18}$$

である。境界作用素 $\partial_1 \colon C_1(K) \to C_0(K)$ は

$$\partial_1(e_0) = P_2 - P_1 \tag{5.3.19}$$

$$\partial_1(e_1) = P_0 - P_2 \tag{5.3.20}$$

$$\partial_1(e_2) = P_1 - P_0 \tag{5.3.21}$$

をみたすから、∂_1 の基底 $P_0, P_1, P_2; e_0, e_1, e_2$ に関する行列表示は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \eqqcolon A \tag{5.3.22}$$

となる。A は基本変形により

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.23}$$

となるから、

$$\operatorname{rk} B_0(K) = \operatorname{rk} \operatorname{Im}(\partial_1) = \operatorname{rk} \operatorname{Im}(A) = 2 \tag{5.3.24}$$

$$\operatorname{rk} Z_1(K) = \operatorname{rk}\operatorname{Ker}(\partial_1) = \operatorname{rk} C_1(K) - \operatorname{rk}\operatorname{Im}(\partial_1) = 3 - 2 = 1 \tag{5.3.25}$$

である。一方、$\partial_0 = 0, C_2(K) = 0$ より

$$\operatorname{rk} Z_0(K) = \operatorname{rk} C_0(K) = 3 \tag{5.3.26}$$

$$\operatorname{rk} B_1(K) = \operatorname{rk}\operatorname{Im}(\partial_2) = \operatorname{rk} \partial_2(C_2(K)) = 0 \tag{5.3.27}$$

である。よって

$$\operatorname{rk} H_0(K) = \operatorname{rk} Z_0(K) - \operatorname{rk} B_0(K) = 3 - 2 = 1 \tag{5.3.28}$$

$$\operatorname{rk} H_1(K) = \operatorname{rk} Z_1(K) - \operatorname{rk} B_1(K) = 1 - 0 = 1 \tag{5.3.29}$$

である。したがって

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.3.30}$$

を得る。とくに $Z_1(K)$ の基底として $e_0 + e_1 + e_2$ がとれるが、これは三角形の周である。いま $B_1(K) = 0$ だから、自然な準同型 $Z_1(K) \to H_1(K)$ による $e_0 + e_1 + e_2$ の像が $H_1(K)$ の基底となる。よって、大まかには三角形の周が $H_1(K)$ の基底となるようなイメージである。

定理 5.3.17 (単体的ホモロジー群と特異ホモロジー群). X を位相空間とする。X が単体分割 K をもつとき、$H_p(X) \cong H_p(K)$ $(p \in \mathbb{Z})$ である。

証明 省略 □

5.4 Polygonal Presentations

ここでは球面やトーラスなど平面のホモロジーを計算するための特別な手法を導入する。

定義 5.4.1 (2 次元単体的複体). X を 2 次元の CW 複体とする。X の構成に用いられた p-セル全体の集合 $(p = 0, 1, 2)$ をそれぞれ V, E, F と書き、各集合の元をそれぞれ**頂点 (vertex)**、**辺 (edge)**、**面 (face)** という。X を (V, E, F) と書き、**2 次元単体的複体**という。

用語がややこしいが、2 次元単体的複体は単体的複体ではない。

定義 5.4.2 (頂点・辺・面の記法). [TODO]

定義 5.4.3 (2 次元単体的複体から定まるチェイン複体). $X = (V, E, F)$ を 2 次元単体的複体とする。各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し、アーベル群 $C_p(X)$ を以下のように定める。

- $p = 0, 1, 2$ のときは、$C_p(X)$ はそれぞれ V, E, F により生成される自由アーベル群と定める。
- それ以外のときは $C_p(X) := 0$ と定める。

また、群準同型 $\partial_p \colon C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ を次のように定める：

- $p = 0, 1, 2$ のときは

$$\partial_0([v]) := 0, \tag{5.4.1}$$

$$\partial_1([uv]) := [v] - [u], \tag{5.4.2}$$

$$\partial_2((e_0 \dots e_k)) := e_0 + \cdots + e_k \tag{5.4.3}$$

- それ以外のときは $\partial_p := 0$ とする。

定理 5.4.4 (2 次元単体的ホモロジーの細分による不変性). [TODO]

証明 省略 □

例 5.4.5 (2 次元トーラス). [TODO]

5.5 Eilenberg-Steenrod 公理系

[TODO]

5.6　演習問題

A.　問題セット 7

♤ **演習問題 5.1** (幾何学 II 演習問題 7.1). 空間 $S^1 \times D^2$ において、集合 $S^1 \times \{0\}$ を一点に縮めて得られる空間の整係数ホモロジー群を求めよ。

解答.　特異ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列を用いる。$X := (S^1 \times D^2)/(S^1 \times \{0\})$ とおき、標準射 $S^1 \times D^2 \to X$ を π とおく。

$$X_0 := \pi(S^1 \times [0, 1/2)) \tag{5.6.1}$$

$$X_1 := \pi(S^1 \times (0, 1]) \tag{5.6.2}$$

とおくと X_0, X_1 は X の開集合であって $X = X_0 \cup X_1$ をみたす。包含写像に名前をつけて

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\ X_0 \cap X_1 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_0 \cup X_1 = X \\ & X_1 \arrow[ur, "j_1"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.3}$$

とおく。$X_0 \cap X_1 = \pi(S^1 \times (0, 1/2)) \neq \emptyset$ だから被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{p+1}(X) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X_0 \cap X_1) \xrightarrow{(i_{0*}, -i_{1*})} \widetilde{H}_p(X_0) \oplus \widetilde{H}_p(X_1) \xrightarrow{j_{0*}+j_{1*}} \widetilde{H}_p(X) \longrightarrow \cdots \tag{5.6.4}$$

を得る。ここで $i_1 \colon X_0 \cap X_1 \to X_1$ は変形レトラクションだから、$X_0 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} *$ であることとあわせて $(i_{0*}, -i_{1*})$ は同型 $\widetilde{H}_p(X_0 \cap X_1) \cong \widetilde{H}_p(X_0) \oplus \widetilde{H}_p(X_1)$ を与える。よって Mayer-Vietoris 完全列から $\widetilde{H}_p(X) = 0$ が従う。X が弧状連結 ($\because X$ は弧状連結空間 $S^1 \times D^2$ の連続写像による像) ゆえに $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ であることとあわせて

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_p(X) = 0 & (p \geq 1) \\ \mathbb{Z} & (p = 0) \end{cases} \tag{5.6.5}$$

を得る。 □

♤ **演習問題 5.2** (幾何学 II 演習問題 7.2). 空間 $S^1 \times D^2$ において、集合 $S^1 \times S^1$ を一点に縮めて得られる空間の整係数ホモロジー群を求めよ。

解答 1.　Mayer-Vietoris を用いる。[TODO] □

解答 2.　胞体分割を用いる。$X := (S^1 \times D^2)/(S^1 \times S^1)$ とおき、標準射 $S^1 \times D^2 \to X$ を π とおく。X の胞体分割を

$$X = e^0 \sqcup e^2 \sqcup e^3 \tag{5.6.6}$$

$$e^0 := \pi(S^1 \times S^1) \tag{5.6.7}$$

$$e^2 := \pi(\{1\} \times \mathring{D}^2) \tag{5.6.8}$$

$$e^3 := \pi((S^1 \setminus \{1\}) \times \mathring{D}^2) \tag{5.6.9}$$

で与えることができる。したがってチェイン複体

$$0 \longrightarrow \underbrace{C_3(X)}_{\cong\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_3} \underbrace{C_2(X)}_{\cong\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_2} \underbrace{C_1(X)}_{=0} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{C_0(X)}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{5.6.10}$$

を得る。$C_1(X) = 0$ より $\partial_1 = 0, \partial_2 = 0$ である。

∂_3 を求める。空間対の射 $(X^2, X^1) \twoheadrightarrow (X^2/X^1, *) \to (S^2, *)$ を π^2 とおき $[e^3 : e^2] = \deg(\pi^2 \circ \varphi^3|_{S^2})$ を求める。ここで特性写像 φ^3 は、$S^2 \subset D^3$ を次のように写すものとしてよい。すなわち $\{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\}$, $\{(x,y,z) \in S^2 \mid z \leq -1/2\}$ はこれらを平面 $z = 0$ に射影した像を D^2 とみて $\overline{e^2}$ に写し、$\{(x,y,z) \in S^2 \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\}$ は e^0 に写す。すると S^2 の平面 $x = 0$ に関する鏡映 r により

$$\pi^2 \circ \varphi^3|_{S^2} \circ r = \pi^2 \circ \varphi^3|_{S^2} \tag{5.6.11}$$

が成り立つ。したがって $[e^3 : e^2] = \deg(\pi^2 \circ \varphi^3|_{S^2}) = 0$ である。よって $\partial_3 = 0$ である。

以上より $H_p(X) = C_p(X)$ を得る。したがって

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0, 2, 3) \\ 0 & (p = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.12}$$

である。 □

♤ **演習問題 5.3** (幾何学 II 演習問題 7.3). Klein の壺 K の胞体分割を与え、それを用いて整係数ホモロジー群を求めよ。

[TODO] K を $S^1 \to S^1 \vee S^1$ の写像錐とみる方法もある。cf. 大学院への幾何学演習

♤ **演習問題 5.4** (幾何学 II 演習問題 7.4). 3 次元トーラス $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ の胞体分割を与え、それを用いて整係数ホモロジー群を求めよ。

♤ **演習問題 5.5** (幾何学 II 演習問題 7.5). 次の集合 X_1, X_2 の和集合 $X = X_1 \cup X_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ。

$$X_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - 3\} \tag{5.6.13}$$

$$X_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - 3\} \tag{5.6.14}$$

♤ **演習問題 5.6** (幾何学 II 演習問題 7.6). 階数 1 の $2 \times n$ 行列全体のなす集合 X の整係数ホモロジー群を求めよ

演習問題の解答

演習問題 1.1 の解答. 連続全単射 $f\colon (0,1] \to (0,1)$ が存在したとして矛盾を導く。$s := f(1)$ とおく。制限 $f|_{(0,1)}$ を F とおく。F は $(0,1)$ から $(0,s)\cup(s,1)$ への連続全単射であり、

$$F^{-1}((0,s)\cup(s,1)) = F^{-1}((0,s))\cup F^{-1}((s,1)) = (0,1) \tag{5.6.15}$$

をみたす。ここで、F の連続性より $F^{-1}((0,s)), F^{-1}((s,1))$ は disjoint open sets in $(0,1)$ だから、$(0,1)$ は連結でないことになり矛盾が従う。 □

演習問題 1.2 の解答. 連続全単射 $f\colon [0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ が存在するとして矛盾を導く。$[0,1]$ のコンパクト性と $[0,1]\times[0,1]$ の Hausdorff 性より、f は同相写像である (**??**)。いま $[0,1]\times[0,1]$ は 3 個以上の点を含むから、$[0,1]\times[0,1]$ の点 a であって $[0,1]$ の端点以外に対応するもの、すなわち $f^{-1}(a)\in(0,1)$ なるものが存在する。このとき制限 $f|_{[0,1]\setminus\{f^{-1}(a)\}}$ は

$$[0,1]\setminus\{f^{-1}(a)\} \to ([0,1]\times[0,1])\setminus\{a\} \tag{5.6.16}$$

の同相写像である。ところが、左辺は弧状連結でなく、右辺は弧状連結だから、弧状連結性の位相不変性に矛盾する。 □

演習問題 1.3 の解答. 題意の連続全単射 $f\colon \mathbb{R}\to S^1$ が存在するとして矛盾を導く。合成

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{f} S^1\setminus\{f(0)\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R} \tag{5.6.17}$$

を F とおくと、F も連続全単射である。連続単射であることより F は狭義単調であり、必要ならばさらに同相写像 $x\mapsto -x$ を合成することで F は狭義単調増加であるとしてよい。

ここで、空でない開区間 I と狭義単調な連続写像 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し $J := g(I)$ が $\mathbb{R}$ の開区間であることを示す。まず区間であることを示す。いま I は区間ゆえに弧状連結だから、g の連続性より J も弧状連結である。もし J が区間でないとすると、J の或る 2 点 $x<y$ がとれて、x と y の間の点 c で J に属さないようなものが存在する。一方、J の弧状連結性により x, y をつなぐ J 内のパス γ がとれて、中間値定理より γ は c を通る。c は J に属さないから矛盾。よって J は区間である。つぎに J が開区間であることを示す。$y\in J$ を任意の点とすると、$g^{-1}(y)$ は開区間 I の点だから、或る $x, x'\in I$ であって $x<g^{-1}(y)<x'$ であるものがとれる。g の狭義単調性より $g(x)<y<g(x')$ が成り立つ。$g(x), g(x')\in J$ だから、y は J の端点ではない。したがって J は開区間であることがいえた。

上の段落の議論から $F((-\infty,0)), F((0,\infty))$ は開区間である。したがって

$$\mathbb{R} = F(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = F((-\infty,0))\cup F((0,\infty)) \tag{5.6.18}$$

は disjoint open intervals の和の形である。これは $\mathbb{R}$ の連結性に矛盾。 □

演習問題 1.4 の解答. すべて互いに同相となることを示す。

<u>(1) ≈ (2)</u> 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1]\times\{0\})$ を

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{1+r}{r}x, \frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}y\right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{5.6.19}$$

で定める。このとき $r > 0$ であることに注意すれば f は連続である。図形的には、点 (x,y) は焦点 ±1、長半径 $1+r$ の楕円上に写る (短半径はこれらの情報から決まる)。楕円の方程式を書いておくと

$$\left(\frac{p}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{r(2+r)}}\right)^2 = 1 \tag{5.6.20}$$

である。

念のため、連続写像の族 $F_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ $(\alpha \in A)$ の直積 $F\colon X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ が連続写像であることを示しておく。$V \overset{\text{open}}{\subset} \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ を任意の開集合とする。積位相の準開基の定め方から

$$V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\alpha\in A_\lambda} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \tag{5.6.21}$$

$$A_\lambda \subset A\colon \text{finite}, \quad V_\alpha \overset{\text{open}}{\subset} Y_\alpha \tag{5.6.22}$$

と表せる。よって

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\alpha\in A_\lambda} (\pi_\alpha \circ F)^{-1}(V_\alpha) \tag{5.6.23}$$

$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\alpha\in A_\lambda} \underbrace{F_\alpha^{-1}(V_\alpha)}_{\text{open}} \tag{5.6.24}$$

が成り立ち、これは open in X である。よって F は連続であることがいえた。

さて、f の連続な逆写像を構成する。連続写像 $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1]\times\{0\}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を

$$(p,q) \mapsto \left(\frac{R}{1+R}p, \frac{R}{\sqrt{R(2+R)}}q\right), \quad R = -1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}\right) \tag{5.6.25}$$

と定めることができる。実際、図形的に考えて R の定義式の括弧内は > 2 だから $R > 0$ であり (あるいは三角不等式を用いてもう少し厳密にも示せる)、さらに $(p,q) \neq (0,0)$ も満たされている。

g が f の逆写像であることを示す。まず

$$f \circ g(p,q) = f\left(\frac{R}{1+R}p, \frac{R}{\sqrt{R(2+R)}}q\right) \tag{5.6.26}$$

である。ここで

$$r = \sqrt{\left(\frac{R}{1+R}\right)^2 p^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{R(2+R)}}\right)^2 q^2} \tag{5.6.27}$$

$$= R\sqrt{\left(\frac{p}{1+R}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{R(2+R)}}\right)^2} \tag{5.6.28}$$

であるが、R の定義から

$$\sqrt{(p-1)^2+q^2}+\sqrt{(p+1)^2+q^2}=2(R+1)=(1+R-1)+(1+R+1) \tag{5.6.29}$$

なので、図形的に考えれば、点 (p,q) は冒頭の楕円の方程式で r を R に置き換えたものを満たす。したがって

$$r=R \tag{5.6.30}$$

を得る。よって

$$f\circ g(p,q)=\left(\frac{1+r}{r}\frac{R}{1+R}p,\frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}\frac{R}{\sqrt{R(2+R)}}q\right)=(p,q) \tag{5.6.31}$$

である。

つぎに

$$g\circ f(x,y)=g\left(\frac{1+r}{r}x,\frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}y\right) \tag{5.6.32}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
R&=-1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{1+r}{r}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}y\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1+r}{r}x+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}y\right)^2}\right) && (5.6.33)\\
&=-1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left((1+r)-\frac{x}{r}\right)^2}+\sqrt{\left((1+r)+\frac{x}{r}\right)^2}\right)\quad (\because r=\sqrt{x^2+y^2}) && (5.6.34)\\
&=-1+\frac{1}{2}\left((1+r)-\frac{x}{r}+(1+r)+\frac{x}{r}\right) && (5.6.35)\\
&=r && (5.6.36)
\end{aligned}$$

なので

$$g\circ f(x,y)=\left(\frac{R}{1+R}\frac{1+r}{r}x,\frac{R}{\sqrt{R(2+R)}}\frac{\sqrt{r(2+r)}}{r}y\right)=(x,y) \tag{5.6.37}$$

である。よって f は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ から $\mathbb{R}^2\setminus([-1,1]\times\{0\})$ への同相写像であることがいえた。

<u>(1) ≈ (3)</u>　写像 $f\colon\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1\}$ を

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{1+r}{r}x,\frac{1+r}{r}y\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{5.6.38}$$

で定める。このとき $r>0$ であることに注意すれば f は連続である。f の連続な逆写像は

$$(p,q)\mapsto\left(\frac{R}{1+R}p,\frac{R}{1+R}q,\right),\quad R=\sqrt{p^2+q^2}-1 \tag{5.6.39}$$

で与えられる。よって f は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ から $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1\}$ への同相写像であることがいえた。 □

演習問題 1.5 の解答.　集合 (1), (2) をそれぞれ A,B とおく。A,B が同相であるとすると、B から点 $(0,0)$ を抜いた集合は A から 1 点を抜いた集合と同相である。ところが、$B\setminus\{(0,0)\}$ は 2 個の弧状連結成分を持つのに対し、A から 1 点を抜いた集合は 1 個しか弧状連結成分を持たない。矛盾。 □

演習問題 1.6 の解答. (1) は局所コンパクトだが (2) は点 $(0,0)$ のコンパクトな近傍がとれないから局所コンパクトでない。したがって (1) と (2) は同相でない。 □

演習問題 1.7 の解答. 商写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/$ を π とおく。題意の同相を示すため、写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$,

$$(x, y) \mapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \tag{5.6.40}$$

を考える。これは連続写像の積・合成・直積だから連続である。また、

$$\begin{aligned}
\pi(x, y) = \pi(x', y') &\Rightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} && (5.6.41)\\
&\Rightarrow (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi ix'}, e^{2\pi iy'}) && (5.6.42)\\
&\Rightarrow f(x, y) = f(x', y') && (5.6.43)
\end{aligned}$$

が成り立つから、商位相空間の普遍性より、図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \times S^1 \\
\mathbb{R}^2/{\sim} \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.6.44}$$

を可換にする連続写像 $\overline{f}$ が誘導される。$\overline{f}$ は逆写像 $g\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2/{\sim}$,

$$(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \mapsto \pi(x, y) \quad (x, y \in [0, 1)) \tag{5.6.45}$$

をもつ。実際、

$$\begin{aligned}
\overline{f} \circ g(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) &= \overline{f}(\pi(x, y)) && (5.6.46)\\
&= f(x, y) && (5.6.47)\\
&= (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) && (5.6.48)\\
g \circ \overline{f}(\pi(x, y)) &= g(f(x, y)) && (5.6.49)\\
&= g(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) && (5.6.50)\\
&= g(e^{2\pi i(x - \lfloor x \rfloor)} e^{2\pi i \lfloor x \rfloor}, e^{2\pi i(y - \lfloor y \rfloor)} e^{2\pi i \lfloor y \rfloor}) && (5.6.51)\\
&= g(e^{2\pi i(x - \lfloor x \rfloor)}, e^{2\pi i(y - \lfloor y \rfloor)}) && (5.6.52)\\
&= \pi(x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor) && (5.6.53)\\
&= \pi(x, y) && (5.6.54)
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\overline{f}$ は $\mathbb{R}^2/{\sim}$ から $S^1 \times S^1$ への連続全単射である。ここで $\mathbb{R}^2/{\sim}$ はコンパクト空間 $[0, 1] \times [0, 1]$ の連続写像 π による像ゆえにコンパクトである。一方、S^1 は距離空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間だから Hausdorff である。よって $S^1 \times S^1$ は Hausdorff である。したがって、$\overline{f}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射だから同相写像である。 □

演習問題 1.8 の解答. [TODO] より「集合と位相」的な議論で連続性を示したい f の像を $X := f([0, \infty))$ とおく。X の概形は、$t = 1/n$ のとき x 軸と $1/n$ で交わるような時計回りの渦巻きのような図形である。

まず、f が $t=0$ においても連続であることを示す。そこで $\varepsilon>0$ を任意とする。$\delta:=\varepsilon^2\ (>0)$ とおけば、各 $t\in[0,\delta)$ に対し

$$\begin{aligned} |f(t)-f(0)| &= |(t\cos(2\pi/t),t\sin(2\pi/t))-(0,0)| && (5.6.55)\\ &= \sqrt{t^2\cos^2(2\pi/t)+t^2\sin^2(2\pi/t)} && (5.6.56)\\ &= \sqrt{t} && (5.6.57)\\ &< \sqrt{\delta} && (5.6.58)\\ &= \varepsilon && (5.6.59)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、f は $t=0$ において連続である。

また、連続写像 $g\colon X\to[0,\infty)$,

$$(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2} \tag{5.6.60}$$

が f の逆写像となる。以上より、f は中への同相写像である。ただし、g が f の逆写像であることは [TODO]

□

演習問題 1.9 の解答. f は中への同相写像でないことを示す。f の像を $X:=f([0,\infty))$ とおく。X の概形は、「∞」のような図形であって、原点から左上に出発して一筆書きをしながら原点に右下から帰ってくるようなものである。f が中への同相写像であったとすると、X から 1 点 $(1/\sqrt{2},1/2)=f(\pi/4)$ を抜いた集合 $X':=X\setminus\{(1/\sqrt{2},1/2)\}$ は $(-\pi,\pi/4)\cup(\pi/4,\pi)$ と同相である。ここで、X' の 2 点 $(0,0),(1,0)$ は X' 内のパス

$$[\pi/2,\pi]\to X',\quad t\mapsto(\sin t,\sin t\cos t) \tag{5.6.61}$$

でつなぐことができるから、ひとつの弧状連結成分に属する。一方、これら 2 点を f で引き戻した $0,\pi/2\in(-\pi,\pi/4)\cup(\pi/4,\pi)$ はそれぞれ相異なる弧状連結成分に属する。矛盾。 □

演習問題 1.10 の解答. $x,y\in\mathbb{R}^n\setminus V$ とする。x,y の V の直交補空間 $V^\perp$ への射影をそれぞれ x',y' とする。このとき x から x' への線分 γ_x は V と交わりをもたない。実際、ある $t\in I$ に対し $(1-t)x+tx'=v\in V$ であったとすると、$V^\perp$ への射影は $x'=(1-t)x'+tx'=0$ となるから、直和分解 $V\oplus V^\perp$ に沿って x をそれぞれの空間の元の和に表すと $x=(x-x')+x'=x-x'\in V$ が成り立ち矛盾。同様に y' から y への線分 γ_y も V と交わりをもたない。また、同相 $V^\perp\setminus V=V^\perp\setminus\{0\}$ は弧状連結空間 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ と同相だから x' と y' をつなぐ $V^\perp\setminus V$ 内のパス γ が存在する。以上をまとめるとパスの合成 $\gamma_x\cdot\gamma\cdot\gamma_y$ が x と y をつなぐ $\mathbb{R}^n\setminus V$ 内のパスとなる。よって $\mathbb{R}^n\setminus V$ は弧状連結である。 □

演習問題 1.11 の解答. 反例を挙げる。$X=[0,2],\ A=\{0\}\cup(1,2]$ とおく。まず $p(X)=X/A$ は S^1 と同相である。実際、写像

$$f\colon X\to S^1,\quad t\mapsto\begin{cases} e^{2\pi it} & t\in[0,1]\\ 1 & t\in[1,2]\end{cases} \tag{5.6.62}$$

を考えるとこれは全射で、貼り合わせ補題より連続である。f は p のファイバー上定値だから、$p(X)$ がコンパクト集合 X の連続像ゆえにコンパクトで S^1 が Hausdorff であることとあわせて同相 $p(X)\to S^1$ が誘導される。よって $p(X)\setminus p(A)\approx S^1\setminus\{1\}\approx(0,1)$ である。したがって $p(X)\setminus p(A)\approx(0,1]$ は $X\setminus A\approx(0,1)$ と同相で

はない。

∵ 同相であったとすると $(0,1]$ から 1 を抜いた空間 $(0,1)$ (これは連結である) が $(0,1)$ から 1 点を除いた空間 (これは連結でない) と同相になり矛盾する。 //

□

演習問題 3.0 の解答. 問題 3.23 を参照。 □

演習問題 3.1 の解答. $X := \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ とおく。id_X が定値写像 $c\colon X \to X, x \mapsto (1,0)$ にホモトピックであることを示せばよいが、X は点 $(1,0)$ に関し星型だから

$$H\colon X \times I \to X, \quad ((x,y),t) \mapsto ((1-t)x + t, (1-t)y) \tag{5.6.63}$$

が求めるホモトピーを与える。 □

演習問題 3.2 の解答. $X := S^n \setminus \{N\}$ とおく。可縮性は位相不変だから X が可縮空間 $\mathbb{R}^n$ と同相であることをいえばよいが、立体射影 $X \to \mathbb{R}^n$ は同相写像だから $X \approx \mathbb{R}^n$ である。 □

演習問題 3.3 の解答. [TODO] J. H. C. Whitehead を使うべし □

演習問題 3.4 の解答. (1), (2) はホモトピー同値である。[TODO] □

演習問題 3.5 の解答. まず図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"'] & Y \arrow[d, "\pi_0"] \\ \pi_0(X) \arrow[r, dashed, "\pi_0(f)"'] & \pi_0(Y) \end{tikzcd} \tag{5.6.64}$$

を可換にする写像 $\pi_0(f)$ を構成する。そこで

$$\pi_0(f)(\pi_0(x)) := \pi_0(f(x)) \tag{5.6.65}$$

と定義する。これは well-defined である。実際、$\pi_0(x) = \pi_0(x')$ ならば x, x' をつなぐ X 内のパス $\gamma\colon I \to X$ が存在するから、合成 $f \circ \gamma$ が $f(x), f(x')$ をつなぐ Y 内のパスとなり、したがって $\pi_0(f(x)) = \pi_0(f(x'))$ が成り立つ。

次に連続写像 $f, g\colon X \to Y$ がホモトピックであるとし、f と g をつなぐホモトピーを $H\colon X \times I \to Y$ とする。各 $x \in X$ に対し

$$H(x, \cdot)\colon I \to X, \quad t \mapsto H(x,t) \tag{5.6.66}$$

は $f(x), g(x)$ をつなぐ Y 内のパスであるから、

$$\pi_0(f(x)) = \pi_0(g(x)) \tag{5.6.67}$$

$$\therefore \quad \pi_0(f)(\pi_0(x)) = \pi_0(g)(\pi_0(x)) \tag{5.6.68}$$

が成り立つ。したがって $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ である。 □

演習問題 3.6 の解答. 命題 1.2.5 を参照。 □

演習問題 3.7 の解答. ?? を参照。 □

演習問題 3.8 の解答. ?? を参照。 □

演習問題 3.9 の解答. 相対位相の定義に注意すれば

$$\begin{aligned} S \overset{\text{closed}}{\subset} A &\Leftrightarrow A \setminus S \overset{\text{open}}{\subset} A && (5.6.69)\\ &\Leftrightarrow \exists U \overset{\text{open}}{\subset} X \quad \text{s.t.} \quad A \setminus S = A \cap U && (5.6.70)\\ &\Leftrightarrow \exists U \overset{\text{open}}{\subset} X \quad \text{s.t.} \quad S = A \cap (X \setminus U) && (5.6.71)\\ &\Leftrightarrow \exists F \overset{\text{closed}}{\subset} X \quad \text{s.t.} \quad S = A \cap F && (5.6.72) \end{aligned}$$

より題意の主張が成り立つ。 □

演習問題 3.10 の解答. 命題 1.2.7 を参照。 □

演習問題 3.11 の解答. ΣS^n はコンパクト空間 ZS^n の連続像ゆえにコンパクトで S^{n+1} は Hausdorff だから、ΣS^n と S^{n+1} の同相を示すには連続全単射 $\Sigma S^n \to S^{n+1}$ の存在をいえばよい。まず写像 $f\colon ZS^n \to S^{n+1}$ を

$$(x,t) \mapsto (\sqrt{1-(2t-1)^2}x, 2t-1) \tag{5.6.73}$$

で定める (円柱の上下端を絞って球面にするイメージ)。明らかに f は連続である。全射性については、各 $y = (y_1, \dots, y_{n+2}) \in S^{n+1}$ に対し $(x,t) \in ZS^n$ を

$$(x,t) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-{y_{n+2}}^2}}(y_1,\dots,y_{n+1}), \dfrac{y_{n+2}+1}{2}\right) & \text{if } y_{n+2} \neq \pm 1 \\ (1,0,\dots,0,y_{n+2}) & \text{if } y_{n+2} = \pm 1 \end{cases} \tag{5.6.74}$$

とおけば $f(x,t) = y$ をみたすから f は全射である。また、標準射影 $ZS^n \to \Sigma S^n$ を p とおくと、f の定め方から明らかに

$$p(x,t) = p(x',t') \implies f(x,t) = f(x',t') \quad ((x,t),(x',t') \in ZS^n) \tag{5.6.75}$$

が成り立つ。したがって、等化写像の普遍性により図式

$$\begin{tikzcd} ZS^n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^{n+1} \\ \Sigma S^n \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.76}$$

を可換にする連続写像 $\overline{f}\colon \Sigma S^n \to S^{n+1}$ が誘導される。このとき f の全射性より $\overline{f}$ は全射である。あとは $\overline{f}$ が単射であることを示せばよい。

$$\overline{f}([(x,t)]) = \overline{f}([(x,t')]) \implies f(x,t) = f(x',t') \tag{5.6.77}$$

$$\implies (\sqrt{1-(2t-1)^2}x, 2t-1) = (\sqrt{1-(2t'-1)^2}x', 2t'-1) \tag{5.6.78}$$

$$\implies \begin{cases} \sqrt{1-(2t-1)^2}x = \sqrt{1-(2t'-1)^2}x' \\ t = t' \end{cases} \tag{5.6.79}$$

$$\implies \begin{cases} \sqrt{1-(2t-1)^2}(x-x') = 0 \\ t = t' \end{cases} \tag{5.6.80}$$

$$\implies t = 0 \lor t = 1 \lor (x,t) = (x',t') \tag{5.6.81}$$

$$\implies [(x,t)] = [(x',t')] \tag{5.6.82}$$

より、$\overline{f}$ は単射である。 □

演習問題 3.12 の解答. [TODO] stereographic projection を経由する必要はない！ □

演習問題 3.13 の解答. 写像 $f\colon X \to ZX$, $g\colon ZX \to X$ をそれぞれ

$$f(x) := (x, 0) \tag{5.6.83}$$

$$g(x, s) := x \tag{5.6.84}$$

で定める。これらは明らかに連続である。$g \circ f(x) = x \ (x \in X)$ より $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ である。また、写像 $H\colon ZX \times I \to ZX$ を

$$H((x,s),t) := (x, ts) \tag{5.6.85}$$

で定めると、これは明らかに連続であり、図式

$$\begin{tikzcd} ZX \arrow[d, "\xi\mapsto(\xi,0)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{ZX}"] & \\ ZX \times I \arrow[r, "H"] & ZX \\ ZX \arrow[u, "\xi\mapsto(\xi,1)"] \arrow[ur, "f\circ g"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.86}$$

を可換にする。よって $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{ZX}$ である。したがって f, g をホモトピー同値写像として X, ZX はホモトピー同値である。つぎに標準射影 $ZX \to CX$ を π とおく。すると $(x,s), (x',s') \in ZX$, $t \in I$ に対し

$$(\pi(x,s),t) = (\pi(x',s'),t) \implies s = s' = 0 \lor (x,s) = (x',s') \tag{5.6.87}$$

$$\implies \pi(x, ts) = \pi(x', ts') \tag{5.6.88}$$

$$\implies \pi \circ H((x,s),t) = \pi \circ H((x',s'),t) \tag{5.6.89}$$

が成り立つ。よって J. H. C. Whitehead の補題より $\pi \times \mathrm{id}_I$ は等化写像となるから、図式

$$\begin{tikzcd} ZX \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"'] & ZX \arrow[d, "\pi"] \\ CX \times I \arrow[r, dashed, "\overline{H}"'] & CX \end{tikzcd} \tag{5.6.90}$$

を可換にする連続写像 $\overline{H}$ が誘導される。図式より

$$\overline{H}(\pi(x,s),0) = \pi(x,0) \quad (x \text{ によらない定点}) \tag{5.6.91}$$
$$\overline{H}(\pi(x,s),1) = \pi(x,s) = \mathrm{id}_{CX}(x,s) \tag{5.6.92}$$

が成り立つから、CX は可縮である。 □

演習問題 3.14 の解答. [TODO] 書き直す標準射影 $ZX \sqcup Y \to Z_f$ を π とおく。写像 $g\colon ZX \sqcup Y \to Y$ を

$$g(\xi) := \begin{cases} f(x) & (\xi = (x,s) \in ZX) \\ y & (\xi = y \in Y) \end{cases} \tag{5.6.93}$$

と定義する。すると g は連続である。実際、各 $V \overset{\text{open}}{\subset} Y$ に対し

$$g^{-1}(V) \cap ZX = f^{-1}(V) \overset{\text{open}}{\subset} X, \quad g^{-1}(V) \cap Y = V \overset{\text{open}}{\subset} Y \tag{5.6.94}$$

より $g^{-1}(V) \overset{\text{open}}{\subset} ZX \sqcup Y$ である。また、各 $\xi, \xi' \in ZX \sqcup Y$ に対し、$\pi(\xi) = \pi(\xi')$ を仮定すると、

- $\xi, \xi' \in ZX$ あるいは $\xi, \xi' \in Y$ ならば明らかに $g(\xi) = g(\xi')$ である。
- $\xi = (x,s) \in ZX,\ \xi' = y' \in Y$ ならば

$$\begin{cases} (x,s) & = (x,1) \\ y' & = f(x) \end{cases} \tag{5.6.95}$$

  だから $g(\xi) = g(\xi')$ である。$\xi \in Y,\ \xi' \in ZX$ の場合も同様である。

よって、等化写像の普遍性により連続写像 $\widetilde{g}\colon Z_f \to Y$ が誘導される。さらに連続写像 $h\colon Y \to Z_f$ を $h(y) := \pi(y)$ で定める。$\widetilde{g}, h$ がホモトピー同値写像であることを示したい。まず $y \in Y$ に対し

$$\widetilde{g} \circ h(y) = \widetilde{g}(\pi(y)) \tag{5.6.96}$$
$$= g(y) \tag{5.6.97}$$
$$= y \tag{5.6.98}$$

より $\widetilde{g} \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$ である。次に $h \circ \widetilde{g} \simeq \mathrm{id}_{Z_f}$ を示す。いま $\xi \in Z_f$ に対し

$$h \circ \widetilde{g}(\pi(\xi)) = \begin{cases} \pi(f(x)) & (\xi = (x,s) \in ZX) \\ \pi(y) & (\xi = y \in Y) \end{cases} \tag{5.6.99}$$

である。ホモトピーを構成するため、写像 $H\colon (ZX \sqcup Y) \times I \to ZX \sqcup Y$ を

$$H(\xi,t) := \begin{cases} (x, t + (1-t)s) & (\xi = (x,s) \in ZX) \\ y & (\xi = y \in Y) \end{cases} \tag{5.6.100}$$

で定義する。すると、ふたつの写像

$$ZX \times I \to ZX, \quad ((x,s),t) \mapsto (x, t + (1-t)s) \tag{5.6.101}$$

$$Y \times I \to Y, \quad (y,t) \mapsto y \tag{5.6.102}$$

の連続性より、H は連続である。また、各 $\xi, \xi' \in ZX \sqcup Y,\ t \in I$ に対し、$\pi(\xi) = \pi(\xi')$ を仮定すると、

- $\xi, \xi' \in ZX$ あるいは $\xi, \xi' \in Y$ ならば明らかに $\pi \circ H(\xi, t) = \pi \circ H(\xi', t)$ である。
- $\xi = (x,s) \in ZX,\ \xi' = y' \in Y$ ならば

$$\begin{cases} (x,s) & = (x,1) \\ y' & = f(x) \end{cases} \tag{5.6.103}$$

だから

$$\begin{cases} \pi \circ H(\xi, t) = \pi \circ H((x,1),t) = \pi(x,1) \\ \pi \circ H(\xi', t) = \pi \circ H(f(x),t) = \pi(f(x)) \end{cases} \tag{5.6.104}$$

より $\pi \circ H(\xi, t) = \pi \circ H(\xi', t)$ である。$\xi \in Y,\ \xi' \in ZX$ の場合も同様である。

よって、J. H. C. Whitehead の補題の系より、

$$\begin{tikzcd} (ZX \sqcup Y) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi \times \mathrm{id}"'] & ZX \sqcup Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z_f \times I \arrow[r, dashed, "G"'] & Z_f \end{tikzcd} \tag{5.6.105}$$

を可換にする連続写像 G が存在する。G は各 $\xi \in ZX \sqcup Y$ に対し

$$G(\pi(\xi), 0) = \pi \circ H(\xi, 0) \tag{5.6.106}$$
$$= \pi(\xi) \tag{5.6.107}$$
$$= \mathrm{id}_{Z_f}(\pi(\xi)) \tag{5.6.108}$$

および

$$G(\pi(\xi), 1) = \pi \circ H(\xi, 1) \tag{5.6.109}$$
$$= \begin{cases} \pi(x,1) = \pi(f(x)) & (\xi = (x,s) \in ZX) \\ \pi(y) & (\xi = y \in Y) \end{cases} \tag{5.6.110}$$
$$= h \circ \widetilde{g}(\pi(\xi)) \tag{5.6.111}$$

をみたすから、id_{Z_f} と $h \circ \widetilde{g}$ をつなぐホモトピーである。よって $h \circ \widetilde{g} \simeq \mathrm{id}_{Z_f}$ である。以上で $\widetilde{g}, h$ がホモトピー同値写像であることが示された。したがって Z_f は Y とホモトピー同値である。 □

演習問題 3.15 の解答. [TODO] □

演習問題 3.16 の解答. ($\Leftarrow$) 題意の連続写像 g の存在を仮定する。写像 $H\colon S^n \times I \to X$ を

$$H(p,t) \coloneqq g(tp) \tag{5.6.112}$$

で定めると、H は連続であり、図式

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[d, "p\mapsto(p,0)"'] \arrow[dr, "p\mapsto g(0)"] & \\ S^n \times I \arrow[r, "H"] & X \\ S^n \arrow[u, "p\mapsto(p,1)"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.113}$$

を可換にする。よって、ホモトピー H により f は定値写像 $p \mapsto g(0)$ にホモトープである。

($\Rightarrow$)　f が定値写像 $S^n \to X,\ p \mapsto x_0$ にホモトープであるとする。すると図式

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[d, "p\mapsto(p,0)"'] \arrow[dr, "p\mapsto x_0"] & \\ S^n \times I \arrow[r, "H"] & X \\ S^n \arrow[u, "p\mapsto(p,1)"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.114}$$

を可換にするホモトピー H が存在する。そこで、写像 $g\colon D^{n+1} \to X$ を

$$g(q) := \begin{cases} H\left(\dfrac{1}{\|q\|}q, \|q\|\right) & (\|q\| \neq 0) \\ x_0 & (\|q\| = 0) \end{cases} \tag{5.6.115}$$

で定める。g の $\|q\| \neq 0$ なる点 $q \in D^{n+1}$ での連続性は明らか。また、g は点 $q = 0$ でも連続である。

∵　[TODO] ε-δ 論法でもっと楽に示せるか？点 $g(0) = x_0$ の開近傍 $V \overset{\text{open}}{\subset} X$ が任意に与えられたとする。このとき各 $p \in S^n$ に対し、$x_0 = H(p, 0)$ であることと H の連続性より

$$(p, 0) \in \exists U_p \overset{\text{open}}{\subset} S^n \times I \quad \text{s.t.} \quad H(U_p) \subset V \tag{5.6.116}$$

が成り立つ。そこで $S^n \times I$ の部分集合系 $\mathscr{U}$ を

$$\mathscr{U} := \{U_p : p \in S^n\} \cup \{S^n \times (0, 1]\} \tag{5.6.117}$$

で定めると、$\mathscr{U}$ は open cover となる。$S^n \times I$ はコンパクト距離空間だから、$\mathscr{U}$ の Lebesgue 数 $\rho > 0$ が存在する。そこで D^{n+1} の開部分集合 U を

$$U := \{q \in D^{n+1} : \|q\| < \rho/2\} \tag{5.6.118}$$

で定める。$g(U) \subset V$ であることを示したい。そこで $q \in U$ とする。$q = 0$ ならば $g(q) = x_0 \in V$ が成り立つから、$q \neq 0$ の場合を考える。Lebesgue 数の定義より

$$\exists W \in \mathscr{U} \quad \text{s.t.} \quad B\left(\frac{1}{\|q\|}q, \|q\|;\ \rho\right) \subset W \tag{5.6.119}$$

が成り立つ（ただし $B(x; r)$ は D^{n+1} における開球）。いま $\|q\| < \rho/2$ ゆえに $B\left(\dfrac{1}{\|q\|}q, \|q\|;\ \rho\right)$ は $S^n \times \{0\}$ と交わりを持つから、$W = S^n \times (0, 1]$ ではありえない。よって open cover $\mathscr{U}$ の定め方から $W = U_{p_0}$ ($\exists p_0 \in S^n$) である。したがって

$$\left(\frac{1}{\|q\|}q, \|q\|\right) \in U_{p_0} \tag{5.6.120}$$

$$\therefore \quad g(q) = H\left(\frac{1}{\|q\|}q, \|q\|\right) \in H(U_{p_0}) \subset V \tag{5.6.121}$$

が成り立つ。これで $g(U) \subset V$ がいえた。よって g は点 $q = 0$ において連続である。 //

したがって g は D^{n+1} 上で連続である。g の定め方から明らかに $g|_{S^n} = f$ も成り立つ。 □

演習問題 3.17 の解答. (1) 位相群 S^1 が普通の積により $\mathbb{C}^*$ に連続に作用していると考える。まず開集合 $U_0 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^*$, $V_0 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^*$ を

$$U_0 := \{w \in \mathbb{C}^* \mid -\pi < \operatorname{Arg} w < \pi\} \tag{5.6.122}$$

$$V_0 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid -\pi/n < \operatorname{Arg} z < \pi/n\} \tag{5.6.123}$$

で定める。ただし Arg の値域は $(-\pi, \pi]$ とする。π_n が被覆空間であることを示すため、$w \in \mathbb{C}^*$ とし、w が π_n により自明に被覆されることを示す。

$$U := \frac{w}{|w|} \cdot U_0 \tag{5.6.124}$$

$$V := \left(\frac{w}{|w|}\right)^{1/n} \cdot V_0 \tag{5.6.125}$$

とおく。ただし $\left(\frac{w}{|w|}\right)^{1/n} := \exp\left(i\frac{\operatorname{Arg}(w/|w|)}{n}\right)$ である。このとき

$$\pi_n^{-1}(U) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \alpha^k \cdot V \tag{5.6.126}$$

と disjoint union に書ける。ただし α は 1 の原始 n 乗根 $e^{2\pi i/n}$ である。

∵ [TODO] //

あとは各 $k = 0, \ldots, n-1$ に対し $\alpha^k \cdot V$ が π_n の制限により U と同相であることを示せばよいが、位相群の連続作用の性質から

$$\alpha^k \cdot V \approx V \tag{5.6.127}$$

なので、V が $\pi_n|_V$ により U と同相となることを示せば十分である。さらに図式

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "\pi_n|_{V_0}"] \arrow[d, "\approx", "\left(\frac{w}{|w|}\right)^{1/n}"'] & U_0 \arrow[d, "\approx"', "\frac{w}{|w|}"] \\ V \arrow[r, "\pi_n|_V"'] & U \end{tikzcd} \tag{5.6.128}$$

が可換であることから、V_0 が $\pi_n|_{V_0}$ により U_0 と同相であることを示せばよい。実際、$\pi_n|_{V_0}$ は V_0 から U_0 への同相写像である。

∵ $\pi_n|_{V_0}\colon V_0 \to U_0$ が well-defined かつ連続全射であることは明らか。また、$\pi_n|_{V_0}$ は $\mathbb{C}$ の連結開集合 V_0 上の定数でない解析関数だから、開写像定理より $\mathbb{C}$ への写像として open map であり、codomain を U_0 に制限したものも open map である。最後に単射性について、

$$\pi_n|_{V_0}(z) = \pi_n|_{V_0}(z') \quad (z_0, z_1 \in V_0) \tag{5.6.129}$$

とすると

$$z_0^n = z_1^n \quad \therefore \quad \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n = 1 \tag{5.6.130}$$

$$\therefore \quad \frac{z_0}{z_1} = \alpha^k \quad (\exists k = 0, \ldots, n-1) \tag{5.6.131}$$

$$\therefore \quad \operatorname{Arg}\frac{z_0}{z_1} = 2\pi\frac{k}{n} \tag{5.6.132}$$

だから、$z_0, z_1 \in V_0$ より $-\dfrac{2\pi}{n} < \operatorname{Arg}\dfrac{z_0}{z_1} < \dfrac{2\pi}{n}$ であることとあわせて $k = 0$、よって $z_0 = z_1$ である。これで単射性がいえた。したがって $\pi_n|_{V_0}$ は V_0 から U_0 への同相写像である。 //

(2) [TODO] □

演習問題 3.19 の解答. $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ と考えることにする。標準射影 $S^n \to \mathbb{R}P^n$ を p とおくと、p は普遍被覆である。p の各ファイバーの濃度は 2 だから、$\mathbb{R}P^n$ の基本群も濃度 2 であり、したがって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に群として同型である。ここで $x_0 := (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ とおき、x_0 と $-x_0$ をつなぐ S^n 内のパス γ を

$$\gamma(s) := (\cos\pi s, \sin\pi s, 0, \ldots, 0) \quad (s \in I) \tag{5.6.133}$$

で定める。このとき $p \circ \gamma$ は $\mathbb{R}P^n$ 内のループとなる。そこで $[p \circ \gamma]$ が $\pi_1(\mathbb{R}P^n, p(x_0))$ の単位元でないことを示せば、これが求める生成元のひとつである。実際、$[p \circ \gamma]$ は単位元でない。

∵ 背理法のため $[p \circ \gamma]$ が単位元であると仮定する。仮定より、ある $\xi_0 \in \mathbb{R}P^n$ が存在して、あるホモトピー $H\colon I \times I \to \mathbb{R}P^n$ により

$$p \circ \gamma \sim \xi_0 \quad \text{rel} \quad \{0, 1\} \tag{5.6.134}$$

が成り立つ。また、γ は $p \circ \gamma$ の、定値写像 x_0 は ξ_0 のリフトであって共通の始点を持つ。したがって、端点を固定するホモトピーのリフトの一意存在定理より、H のリフト $\widetilde{H}\colon I \times I \to S^n$ であって端点を固定して γ を x_0 につなぐホモトピーであるものが存在する。このとき

$$-x_0 = \gamma(1) = \widetilde{H}(1, 0) = \widetilde{H}(1, 1) = x_0 \tag{5.6.135}$$

となり矛盾が従う。背理法より $[p \circ \gamma]$ は単位元でない。 //

□

演習問題 3.20 の解答. 背理法のため $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^2$ が同相であると仮定する。仮定より、$\mathbb{R}^2$ から原点を、$\mathbb{R}^n$ からそれに対応する 1 点をそれぞれ除いた空間も同相である。必要ならば平行移動を合成することで $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ であるとしてよい。ここで、$S^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ および $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、Euclid ノルムを 1 に正規化するレトラクションによりそれぞれ変形レトラクトとなっている。したがって

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1 \tag{5.6.136}$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^{n-1} \tag{5.6.137}$$

である。よって、基本群のホモトピー不変性より $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^{n-1})$ が成り立つ。左辺は非自明群で右辺は

$n \geq 3$ ゆえに自明群だから矛盾が従う。背理法より $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^2$ は同相でない。 □

演習問題 3.21 の解答. 包含写像 $S^1 \to D^2$ を i とおく。レトラクション $r\colon D^2 \to S^1$ が存在したとすると $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ だから基本群に誘導される準同型 $i_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(D^2, 1)$ は単射であるが、左辺は $\mathbb{Z}$、右辺は 0 だから単射ではありえない。背理法より S^1 は D^2 のレトラクトでない。 □

演習問題 3.22 の解答. 所与の集合を $X := \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{0\})$ とおき、右半平面から 1 点 $(1, 0)$ を抜いた空間を

$$Y := (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, 0)\} \tag{5.6.138}$$

とおく。写像 $f\colon X \to Y$ を

$$(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \tag{5.6.139}$$

で定める。これは明らかに連続である。[TODO] f_* の単射性をどう示す？ □

演習問題 3.23 の解答. [TODO] 「基点は $U \setminus V$ にあるとしてよい」からスタートしたほうがよいか？γ を X 内のループとし、γ が端点を固定して定値ループにホモトピックであることを示す。$\gamma(I) \subset U$ または $\gamma(I) \subset V$ の場合は、U, V の単連結性より γ は端点を固定して定値ループにホモトピックである。以下、$\gamma(I) \not\subset U$ かつ $\gamma(I) \not\subset V$ の場合を考える。このとき、$\gamma(I)$ は $U \cap V$ と交わりを持つ。

$\because$ もし $\gamma(I)$ が $U \cap V$ と交わりを持たないとすると、

$$\begin{aligned} I &= \gamma^{-1}(X) && (5.6.140)\\ &= \gamma^{-1}(U \cup V) \quad (\because\ U, V \text{ は } X \text{ の被覆}) && (5.6.141)\\ &= \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) && (5.6.142) \end{aligned}$$

となる。γ の連続性より右辺は開集合の disjoint union だから、I の連結性より $\gamma^{-1}(U) = I$ または $\gamma^{-1}(V) = I$ となり、$\gamma(I) \subset U$ または $\gamma(I) \subset V$ となって矛盾が従う。 //

そこで、必要ならばパラメータを取り替えて γ の基点は $U \cap V$ 上の点であるとしてよい。さて、$\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$ はコンパクト距離空間 I の open cover だから、Lebesgue 数 $\rho > 0$ が存在する。さらに $1/N < \rho$ なる $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して、$1/N$ も Lebesgue 数のひとつである。したがって I を N 等分した小区間の列

$$[0, 1/N], [1/N, 2/N], \ldots, [(N-1)/N, 1] \tag{5.6.143}$$

のそれぞれは $\gamma^{-1}(U)$ または $\gamma^{-1}(V)$ の少なくとも一方に含まれる。必要ならば隣り合う小区間を繋げて、I の小区間の列

$$[s_0, s_1], [s_1, s_2], \ldots, [s_{N-1}, s_N] \quad (s_0 = 0,\ s_N = 1) \tag{5.6.144}$$

は次の条件をみたすとしてよい:

(i) 各小区間は $\gamma^{-1}(U)$ または $\gamma^{-1}(V)$ の少なくとも一方に含まれる。

(ii) 各 s_i $(i = 0, \ldots, N)$ は $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cap V)$ に属する。

∵ 隣り合う小区間の繋げ方は、たとえば $[0,1/N]$ が $\gamma^{-1}(U)$ に含まれるなら、

$$[0,1/N] \subset \gamma^{-1}(U) \tag{5.6.145}$$

$$\vdots \tag{5.6.146}$$

$$[(k-1)/N, k/N] \subset \gamma^{-1}(U) \tag{5.6.147}$$

$$[k/N, (k+1)/N] \subset \gamma^{-1}(V) \tag{5.6.148}$$

と初めて $\gamma^{-1}(V)$ に含まれる小区間が現れたら $s_1 := k/N$ とおく操作を繰り返せばよい。こうして得られる小区間の列は明らかに (i) をみたす。また、上の例で $s_1 = k/N \in \gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V)$ であることから (ii) も成り立つことがわかる。 //

ここで、小区間 $[s_i, s_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, N-1)$ が $\gamma^{-1}(V)$ に含まれるとする。小区間の条件 (ii) より $\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})$ は $U \cap V$ 上の点だから、$U \cap V$ の弧状連結性より $\gamma(s_i)$ と $\gamma(s_{i+1})$ をつなぐ $U \cap V$ 内のパス β_i が存在する。このとき、パス γ の $\gamma(s_i)$ から $\gamma(s_{i+1})$ までの部分は β_i と共通の端点をもつ V 内のパスとなるから、V の単連結性より端点を固定して β_i にホモトピックである。同様の議論を $\gamma^{-1}(V)$ に含まれるすべての小区間について行うことで、γ は U 内の或るループ β に端点を固定してホモトピックであることがわかる。

∵ γ の $\gamma(s_i)$ から $\gamma(s_{i+1})$ までの部分とは、より正確には

$$\gamma_i(s) := \gamma((1-s)s_i + s s_{i+1}) \tag{5.6.149}$$

で定まるパス $\gamma_i \colon I \to X$ のことである。β_i, γ_i は共通の端点を持つ V 内のパスであるから、V の単連結性より、端点を固定して β_i を γ_i につなぐホモトピー $H_i \colon I \times I \to V$ が存在する。そこで、写像 $H \colon I \times I \to X$ を

$$H(s,t) := \begin{cases} H_i\left(\dfrac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i}, t\right) & (s \in [s_i, s_{i+1}] \subset \gamma^{-1}(V)) \\ \gamma(s) & (s \in [s_i, s_{i+1}] \subset \gamma^{-1}(U)) \end{cases} \tag{5.6.150}$$

で定める。各 H_i は端点を固定するから、これは well-defined である。H の各閉集合 $[s_i, s_{i+1}] \times I$ 上への制限は連続だから、貼り合わせ補題より H も連続である。また、定め方から明らかに

$$H(s,0) = \gamma(s) \qquad (s \in I) \tag{5.6.151}$$

$$H(s,1) \in U \qquad (s \in I) \tag{5.6.152}$$

$$H(0,t) = H(1,t) = \gamma(0) \quad (t \in I) \tag{5.6.153}$$

が成り立つ。そこで $\beta \colon I \to U$ を

$$\beta(s) := H(s,1) \tag{5.6.154}$$

で定めれば、β は基点を $\gamma(0)$ とする U 内のループであり、H は端点を固定して γ を β につなぐホモトピーである。 //

U の単連結性から β、したがって γ は定値ループにホモトピックである。以上で X の単連結性が示せた。 □

演習問題 3.24 の解答. $X\times Y$ から X,Y への射影をそれぞれ p,q とおく。p,q から誘導される群準同型 p_*,q_* の直積 (これも群準同型である)

$$p_*\times q_*\colon \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0) \tag{5.6.155}$$

が同型を与えることを示せばよい。まず、$p_*\times q_*$ は単射である。

∵ $[\gamma]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$ が $p_*\times q_*([\gamma])=1$ をみたすとすれば、

$$p_*([\gamma])=[p\circ\gamma]=1 \tag{5.6.156}$$
$$q_*([\gamma])=[q\circ\gamma]=1 \tag{5.6.157}$$

より、それぞれホモトピー H,G により

$$p\circ\gamma\sim x_0 \quad \text{rel} \quad \{0,1\} \tag{5.6.158}$$
$$q\circ\gamma\sim y_0 \quad \text{rel} \quad \{0,1\} \tag{5.6.159}$$

となる。そこで $F:=H\times G\colon I\times I\to X\times Y$ とおけば、F により

$$\gamma\sim(x_0,y_0) \quad \text{rel} \quad \{0,1\} \tag{5.6.160}$$

が成り立つ。よって $[\gamma]=1$ である。したがって $p_*\times q_*$ は単射である。 //

また、$p_*\times q_*$ は全射である。

∵ $([\alpha],[\beta])\in\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ とする。直積 $\alpha\times\beta$ は $X\times Y$ 内のパスであり

$$p_*\times q_*([\alpha\times\beta])=(p_*([\alpha\times\beta]),q_*([\alpha\times\beta]))=([\alpha],[\beta]) \tag{5.6.161}$$

をみたす。よって $p_*\times q_*$ は全射である。 //

したがって $p_*\times q_*$ は同型写像である。 □

演習問題 4.1 の解答 (解法 1.). 写像族 $\{s_p\colon(CA)_p\to(CA)_{p+1}\}_p$ を

$$s_p(a,a'):=(-a',0) \tag{5.6.162}$$

で定めると

$$(\partial\circ s+s\circ\partial)(a,a')=\partial(-a',0)+s(-\partial a,-a+\partial a') \tag{5.6.163}$$
$$=(\partial a',a')+(a-\partial a',0) \tag{5.6.164}$$
$$=(a,a') \tag{5.6.165}$$

が成り立つから $\mathrm{id}_{CA}=\partial\circ s+s\circ\partial$ である。よって

$$\partial=\partial\circ s\circ\partial+s\circ\underbrace{\partial\circ\partial}_{0}=\partial\circ s\circ\partial \tag{5.6.166}$$

が成り立ち、CA は分裂する。また、サイクル $(a,a') \in Z_p(CA)$ に対し

$$\partial \circ s(a,a') = (a,a') - s \circ \underbrace{\partial(a,a')}_{0} \tag{5.6.167}$$

より (a,a') はバウンダリでもある。したがって CA は完全列である。 □

演習問題 4.1 の解答 (解法 2.). 分裂することを示す。ある写像族 $\{s_p\colon (CA)_p \to (CA)_{p+1}\}_p$ であって $\partial = \partial \circ s \circ \partial$ をみたすものを構成する。次数を考えると s_p の形としては

$$s_p(a,a') = (n_p a', 0) \quad (n_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.168}$$

くらいしかない (n_p は p ごとに異なりうることに注意)。そこで

$$s_p(a,a') := (-a', 0) \tag{5.6.169}$$

とおいてみる。実はこれが求めるものになっている。実際、

$$\begin{aligned}
\partial_p \circ s_{p-1} \circ \partial_p(a,a') &= \partial_p \circ s_{p-1}(-\partial a, -a + \partial a') && (5.6.170)\\
&= \partial_p(a - \partial a', 0) && (5.6.171)\\
&= (-\partial(a - \partial a'), -a + \partial a' + \partial 0) && (5.6.172)\\
&= (-\partial a, -a + \partial a') && (5.6.173)\\
&= \partial_p(a,a') && (5.6.174)
\end{aligned}$$

だからである。つぎに完全列であることを示す。$(a,a') \in Z_p(CA)$ とし、(a,a') がバウンダリでもあることをいえばよい。(a,a') がサイクルであることより

$$0 = \partial_p(a,a') = (-\partial a, -a + \partial a') \tag{5.6.175}$$

すなわち

$$\begin{cases} \partial a &= 0 \\ -a + \partial a' &= 0 \end{cases} \tag{5.6.176}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1}(-a', 0) &= (-\partial(-a'), a' + \partial 0) && (5.6.177)\\
&= (a,a') && (5.6.178)
\end{aligned}$$

となる。したがって (a,a') はバウンダリである。よって CA は完全列である。 □

演習問題 4.2 の解答. ($\Leftarrow$) 鎖写像 $F\colon ZA \to B$ であって $F|_{(A_p,0,0)} = f$, $F|_{(0,0,A_p)} = f'$ となるものが存在するとし、f と f' の間の鎖ホモトピーを構成する。ここで f と f' の間の鎖ホモトピーとは A_p から B_{p+1} へと次数を上げる写像であることに着目し、写像族 $\{t_p\colon A_p \to B_{p+1}\}_p$ を

$$t_p(a') := F_{p+1}(0, a', 0) \quad (a' \in A_p) \tag{5.6.179}$$

で定めてみる。このとき、t は f から f' への鎖ホモトピーになっている。実際、$f - f' = \partial \circ t + t \circ \partial$ が成り立つ。

$\because$

$$(\partial \circ t_p + t_{p-1} \circ \partial)(a') = \partial \circ F_{p+1}(0, a', 0) + t_{p-1} \circ \partial(a') \tag{5.6.180}$$
$$= F_p \circ \partial(0, a', 0) + t_{p-1} \circ \partial(a') \tag{5.6.181}$$
$$= F_p(a', -\partial a', -a') + t_{p-1} \circ \partial(a') \tag{5.6.182}$$
$$= f_p(a') + \cancel{t_{p-1}(-\partial a')} + f'_p(-a') + \cancel{t_{p-1} \circ \partial(a')} \tag{5.6.183}$$
$$= (f_p - f'_p)(a') \tag{5.6.184}$$

//

よって f, f' は鎖ホモトピックである。

(⇒)　f, f' が鎖ホモトピックであるとする。f から f' への鎖ホモトピー $\{s_p \colon A_p \to B_{p+1}\}_p$ がとれる。そこで、(⇐) の証明で用いた鎖ホモトピーの構成法を思い出して、写像族 $\{F_p \colon ZA_p \to B_p\}_p$ を

$$F_p(a, a', a'') \coloneqq f_p(a) + s_{p-1}(a') + f'_p(a'') \tag{5.6.185}$$

で定めてみる。各 F_p は明らかに群準同型であり、$F|_{(A_p,0,0)} = f$, $F|_{(0,0,A_p)} = f'$ が成り立つ。さらに、F は鎖写像である。

$\because$　図式

$$\begin{CD} ZA_p @>{\partial}>> ZA_{p-1} \\ @V{F_p}VV @VV{F_{p-1}}V \\ B_p @>{\partial}>> B_{p-1} \end{CD} \tag{5.6.186}$$

が可換となることを示せばよいが、

$$F_{p-1} \circ \partial(a, a', a'') = F_{p-1}(\partial a + a', -\partial a', \partial a'' - a') \tag{5.6.187}$$
$$= f_{p-1}(\partial a + a') + s_{p-2}(-\partial a') + f'_{p-1}(\partial a'' - a') \tag{5.6.188}$$
$$= f_{p-1} \circ \partial(a) + f_{p-1}(a') \tag{5.6.189}$$
$$- s_{p-2} \circ \partial(a') \tag{5.6.190}$$
$$+ f'_{p-1} \circ \partial(a'') - f'_{p-1}(a') \tag{5.6.191}$$
$$= \partial \circ f_p(a) + \cancel{f_{p-1}(a')} \tag{5.6.192}$$
$$- \cancel{f'_{p-1}(a')} + \cancel{f_{p-1}(a')} + \partial \circ s_{p-1}(a') \tag{5.6.193}$$
$$+ \partial \circ f'_p(a'') - \cancel{f'_{p-1}(a')} \tag{5.6.194}$$
$$= \partial \circ F_p(a, a', a'') \tag{5.6.195}$$

よりたしかに成り立つ。 //

よってこの F が求めるものである。 □

演習問題 4.3 の解答. ($\Rightarrow$) f により誘導される群準同型 $(f_p)_*\colon H_p(A) \to H_p(B)$ がすべての $p \in \mathbb{Z}$ に対し同型であるとする。写像錐 C_f が完全列であることを示すには、$p \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in Z_p(C_f)$ $(\subset A_{p-1} \oplus B_p)$ として (a,b) がバウンダリであることを示せばよい。まず (a,b) がサイクルであることより

$$0 = \partial_p(a,b) = (-\partial_{p-1}a, -f_{p-1}(a) + \partial_p b) \tag{5.6.196}$$

すなわち関係式

$$\begin{cases} \partial_{p-1}a & = 0 \\ f_{p-1}(a) & = \partial_p b \end{cases} \tag{5.6.197}$$

が成り立つ。1 つ目の関係式より a はサイクルだから $[a] \in H_{p-1}(A)$ が定まる。また、2 つ目の関係式より $f_{p-1}(a)$ はバウンダリだから $[f_{p-1}(a)] \in H_{p-1}(B)$ が定まり $[f_{p-1}(a)]$ $(= (f_{p-1})_*[a]) = 0_{H_{p-1}(B)}$ となる。いま $(f_{p-1})_*$ が同型、とくに単射であるという仮定から $[a] = 0_{H_{p-1}(A)}$ が従う。よって a はバウンダリなので

$$a = \partial_p a' \quad (\exists a' \in A_p) \tag{5.6.198}$$

と表せる。したがって (5.6.197) の 2 つ目の関係式から

$$\partial_p b = f_{p-1}(a) = f_{p-1} \circ \partial_p(a') = \partial_p \circ f_p(a') \tag{5.6.199}$$

$$\therefore \partial_p(b - f_p(a')) = 0 \tag{5.6.200}$$

が成り立つ。よって $b - f_p(a')$ はサイクルだから $[b - f_p(a')] \in H_p(B)$ が定まる。そこで、いま $(f_p)_*$ が同型、とくに全射であるという仮定から

$$[b - f_p(a')] = (f_p)_*[a''] \ (= [f_p(a'')]) \quad (\exists a'' \in Z_p(A)) \tag{5.6.201}$$

と表せる。したがって

$$b - f_p(a') = f_p(a'') + \partial_{p+1}b' \quad (\exists b' \in B_{p+1}) \tag{5.6.202}$$

$$\therefore f_p(a' + a'') = b - \partial_{p+1}b' \tag{5.6.203}$$

が成り立つ。さて、(a,b) がバウンダリであることを示す。

$$\partial_{p+1}(-a' - a'', b') = (-\partial_p(-a' - a''),\ -f_p(-a' - a'') + \partial_{p+1}b') \tag{5.6.204}$$

$$= (\underbrace{\partial_p a'}_{a} + \underbrace{\partial_p a''}_{0},\ b - \partial_{p+1}b' + \partial_{p+1}b') \tag{5.6.205}$$

$$= (a,b) \tag{5.6.206}$$

より (a,b) はバウンダリである。これで C_f が完全列であることがいえた。

($\Leftarrow$) C_f が完全列であるとする。各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し $(f_p)_*$ が同型であることを示すには、$(f_p)_*$ が単射かつ全射であることをいえばよい。まず $(f_p)_*$ は単射である。

$\because$ $(f_p)_*$ は群準同型だから、$[a] \in H_p(A)$, $a \in Z_p(A)$ が $(f_p)_*[a]$ $(= [f_p(a)]) = 0$ をみたすとして $[a] = 0$ を示せばよい。まず $[f_p(a)] = 0$ の仮定より $f_p(a)$ はバウンダリだから

$$f_p(a) = \partial_{p+1}b \quad (\exists b \in B_{p+1}) \tag{5.6.207}$$

と表せる。すると
$$\partial_{p+1}(a,b) = (-\partial_p a, -f_p(a) + \partial_{p+1} b) = (0,0) \tag{5.6.208}$$
が成り立つから (a,b) は C_f のサイクルであるが、いま C_f が完全列であるという仮定から (a,b) はバウンダリでもある。よって
$$(a,b) = \partial_{p+2}(a',b') \quad (\exists (a',b') \in (C_f)_{p+2} = A_{p+1} \oplus B_{p+2}) \tag{5.6.209}$$
と表せる。右辺の ∂ の定義よりとくに
$$a = -\partial_{p+1} a' \tag{5.6.210}$$
が成り立つから a はバウンダリである。よって $[a] = 0$ がいえた。したがって $(f_p)_*$ は単射である。//

さらに $(f_p)_*$ は全射である。

$\because$ $[b] \in H_p(B),\ b \in Z_p(B)$ とし、$(f_p)_*\xi = [b]$ なる $\xi \in H_p(A)$ の存在を示せばよい。まず b がサイクルであることから
$$\partial_p(0,b) = (-\partial_{p-1}0,\ -f_{p-1}(0) + \partial_p b) = (0,0) \tag{5.6.211}$$
が成り立つ。よって $(0,b)$ は C_f のサイクルであるが、いま C_f が完全列であるという仮定から $(0,b)$ はバウンダリでもある。よって
$$(0,b) = \partial_{p+1}(a'',b'') \quad (\exists (a'',b'') \in (C_f)_{p+1} = A_p \oplus B_{p+1}) \tag{5.6.212}$$
と表せる。右辺の ∂ の定義より
$$\begin{cases} 0 = -\partial_p a'' \\ b = -f_p(a'') + \partial_{p+1} b'' \end{cases} \tag{5.6.213}$$
が成り立つ。1 つ目の関係式より $-a''$ はサイクルだから $[-a''] \in H_p(A)$ が定まる。また、2 つ目の関係式より
$$[b] = [f_p(-a'')] \tag{5.6.214}$$
$$= (f_p)_*[-a''] \tag{5.6.215}$$
が成り立つ。よって $\xi := [-a'']$ とおけばこれが求めるものである。したがって $(f_p)_*$ は全射である。//

以上より $(f_p)_*$ は同型である。 □

演習問題 4.4 の解答 (解法 1.). 問題 4.5 の議論より問題の埋め込み写像は B から Z_f への鎖ホモトピー同値写像であるから、とくに擬同型である。 □

演習問題 4.4 の解答 (解法 2.). 問題の埋め込み写像を $i\colon B \to Z_f$ とおく。すなわち、写像族 $\{i_p\colon B_p \to (Z_f)_p\}_p$ を
$$i_p(b) := (0,0,b) \quad (b \in B_p) \tag{5.6.216}$$

で定める。これは

$$\partial \circ i_p(b) = \partial(0,0,b) \tag{5.6.217}$$
$$= (0,0,\partial b) \tag{5.6.218}$$
$$= i_{p-1} \circ \partial(b) \tag{5.6.219}$$

をみたすから鎖写像になっている。したがって群準同型 $(i_p)_*\colon H_p(B) \to H_p(Z_f)$ が誘導される。$(i_p)_*$ が同型を与えることを示す。そのためには i の写像錐 C_i が完全列となることをいえばよい (問題 4.3)。そこで $p \in \mathbb{Z},\ c = (b,(a,a',b')) \in Z_p(C_i)$ $(\subset B_{p-1} \oplus (A_p \oplus A_{p-1} \oplus B_p))$ として c がバウンダリであることを示す。まず $c = (b,(a,a',b'))$ がサイクルであることから

$$0 = \partial(b,(a,a',b')) \tag{5.6.220}$$
$$= (-\partial b,\ -i(b) + \partial(a,a',b')) \tag{5.6.221}$$
$$= (-\partial b,\ -(0,0,b) + (\partial a + a', -\partial a', -f(a') + \partial b')) \tag{5.6.222}$$
$$= (-\partial b,\ (\partial a + a', -\partial a', -f(a') + \partial b' - b)) \tag{5.6.223}$$

すなわち

$$\begin{cases} \partial b & = 0 \\ \partial a + a' & = 0 \\ \partial a' & = 0 \\ -f(a') + \partial b' - b & = 0 \end{cases} \tag{5.6.224}$$

が成り立つ。4 つ目と 2 つ目の関係式より

$$b = -f(a') + \partial b' \tag{5.6.225}$$
$$= f \circ \partial(a) + \partial b' \tag{5.6.226}$$
$$= \partial \circ f(a) + \partial b' \tag{5.6.227}$$
$$= -\partial(-f(a) - b') \tag{5.6.228}$$

が成り立つ。さて、∂ に関する c の逆像をひとつ構成したい。そこで、次数にも注意して $c' \coloneqq (-f(a) - b', (0,a,0)) \in (C_i)_{p+1}$ $(\subset B_p \oplus (A_{p+1} \oplus A_p \oplus B_{p+1}))$ とおいてみると

$$\partial c' = \partial(-f(a) - b', (0,a,0)) \tag{5.6.229}$$
$$= (-\partial(-f(a) - b'),\ -i(-f(a) - b') + \partial(0,a,0)) \tag{5.6.230}$$
$$= (b,\ -(0,0,-f(a) - b') + (\partial 0 + a, -\partial a, -f(a) + \partial 0)) \quad (\because\ (5.6.228)) \tag{5.6.231}$$
$$= (b,(a,-\partial a,b')) \tag{5.6.232}$$
$$= (b,(a,a',b')) \quad (\because\ (5.6.224) \text{ の第 2 式}) \tag{5.6.233}$$

が成り立つ。よって $c = (b,(a,a',b'))$ はバウンダリである。したがって C_f は完全列であり、問題 4.3 より $(i_p)_*$ は同型写像である。 □

演習問題 4.5 の解答. $(Z_f)_p = A_p \oplus A_{p-1} \oplus B_p$ であることに注意する。ホモトピー同値写像 $i\colon B \to Z_f$ および $j\colon Z_f \to B$ を構成する。そこでアーベル群の準同型の族 $\{i_p\colon B_p \to (Z_f)_p\}_p$ および $\{j_p\colon (Z_f)_p \to B_p\}_p$ を構成したいが、次数を考えると i_p および j_p の形は

$$i_p(b) \coloneqq (0, 0, m_p b) \quad (m_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.234}$$

$$j_p(a, a', b) \coloneqq n_p f_p(a) + k_p b \quad (n_p, k_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.235}$$

くらいしかない。そこで

$$i_p(b) \coloneqq (0, 0, b) \tag{5.6.236}$$

$$j_p(a, a', b) \coloneqq f_p(a) + b \tag{5.6.237}$$

と定めてみる。明らかに各 i_p, j_p は群準同型である。さらに i, j は鎖写像である。

∵ i について

$$\begin{aligned} \partial \circ i(b) &= \partial(0, 0, b) && (5.6.238)\\ &= (0, 0, \partial b) && (5.6.239)\\ &= i \circ \partial(b) && (5.6.240) \end{aligned}$$

j について

$$\begin{aligned} j\partial(a, a', b) &= j(\partial a + a', -\partial a', -f(a') + \partial b) && (5.6.241)\\ &= f(\partial a + a') - f(a') + \partial b && (5.6.242)\\ &= f \circ \partial(a) + \partial b && (5.6.243)\\ &= \partial \circ f(a) + \partial b && (5.6.244)\\ &= \partial(f(a) + b) && (5.6.245)\\ &= \partial \circ j(a, a', b) && (5.6.246) \end{aligned}$$

が成り立つ。 //

定義より明らかに $j \circ i = \mathrm{id}_B$ だから、とくに $j \circ i$ と id_B は鎖ホモトピックである。あとは $i \circ j$ と id_{Z_f} が鎖ホモトピックであることをいえばよい。そのために $i \circ j$ と id_{Z_f} の間の鎖ホモトピー $s = \{s_p\colon (Z_f)_p \to (Z_f)_{p+1}\}_p$ を構成したい。次数を考えると s_p の形は

$$s_p(a, a', b) = (0, n_p a, 0) \quad (n_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.247}$$

くらいしかない。そこで

$$s_p(a, a', b) \coloneqq (0, -a, 0) \tag{5.6.248}$$

と定めてみる。実はこれが $i \circ j$ から id_{Z_f} への鎖ホモトピーとなっている。

∵

$$\begin{aligned} (\partial \circ s + s \circ \partial)(a, a', b) &= \partial(0, -a, 0) + s(\partial a + a', -\partial a', -f(a') + \partial b) && (5.6.249)\\ &= (-a, \partial a, -f(-a)) + (0, -\partial a - a', 0) && (5.6.250) \end{aligned}$$

$$= (-a, -a', f(a)) \tag{5.6.251}$$

$$\tag{5.6.252}$$

一方

$$(i \circ j - \mathrm{id}_{Z_f})(a, a', b) = (0, 0, f(a) + b) - (a, a', b) \tag{5.6.253}$$

$$= (-a, -a', f(a)) \tag{5.6.254}$$

だから $i \circ j - \mathrm{id}_{Z_f} = \partial \circ s + s \circ \partial$ が成り立つ。 //

よって $i \circ j$ と id_{Z_f} は鎖ホモトピックである。したがって i (と j) は B と Z_f の間の鎖ホモトピー同値である。 □

演習問題 4.6 の解答. まず計算規則を整理しておくと、$(b, (a, b')) \in (C_i)_p = B_{p-1} \oplus (A_{p-1} \oplus B_p)$ に対し

$$\partial(b, (a, b')) = (-\partial b, (-\partial a, -f(a) + \partial b' - b)) \tag{5.6.255}$$

となる。さて、鎖ホモトピー同値写像 $g\colon \Sigma A \to C_i$ および $h\colon C_i \to \Sigma A$ を構成する。天下り的に

$$g_p(a) := ((-1)^{p+1} f(a), ((-1)^p a, 0)) \tag{5.6.256}$$

$$h_p(b, (a, b')) := (-1)^p a \tag{5.6.257}$$

と定めてみる。

(∵) <u>(考察)</u> 次数を考えると g_p の形は

$$g_p(a) = (m_p f(a), (n_p a, 0)) \quad (m_p, n_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.258}$$

くらいしかなく、h_p の形は

$$h_p(b, (a, b')) = k_p a \quad (k_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.259}$$

くらいしかない。g, h が鎖写像となるための係数 m_p, n_p, k_p の条件を考える。まず

$$\partial \circ g_p(a) = \partial(m_p f(a), (n_p a, 0)) \tag{5.6.260}$$

$$= (-\partial(m_p f(a)), (-\partial(n_p a), -f(n_p a) + \partial 0 - m_p f(a))) \tag{5.6.261}$$

$$= (-m_p f(\partial(a)), (-n_p \partial a, -(n_p + m_p) f(a))) \tag{5.6.262}$$

$$g_{p-1} \circ \partial(a) = (m_{p-1} f(\partial(a)), (n_{p-1} \partial a, 0)) \tag{5.6.263}$$

$$\partial \circ h_p(b, (a, b')) = \partial(k_p a) \tag{5.6.264}$$

$$= k_p \partial a \tag{5.6.265}$$

$$h_{p-1} \circ \partial(b, (a, b')) = h_{p-1}(-\partial b, (-\partial a, -f(a) + \partial b' - b)) \tag{5.6.266}$$

$$= k_{p-1}(-\partial b) \tag{5.6.267}$$

$$= -k_{p-1} b \tag{5.6.268}$$

より

$$\begin{cases} n_p + m_p = 0 \\ m_p = -m_{p-1} \\ n_p = -n_{p-1} \\ k_p = -k_{p-1} \end{cases} \tag{5.6.269}$$

が必要である。また、鎖ホモトピー $\{s_p\colon (\Sigma A)_p \to (\Sigma A)_{p+1}\}$ の形は次数を考えると $s_p(a) = 0$ くらいしかないから、$h \circ g$ と $\mathrm{id}_{\Sigma A}$ が鎖ホモトピックであるためには $h \circ g = \mathrm{id}_{\Sigma A}$ でなければならない。そこで、いま h, g の形から

$$h_p \circ g_p(a) = k_p n_p a \tag{5.6.270}$$

だから、

$$k_p n_p = 1 \tag{5.6.271}$$

が必要である。 //

係数の定め方から $\partial \circ g = g \circ \partial,\ \partial \circ h = h \circ \partial$ であり、また各 g_p, h_p は明らかに群準同型だから、g, h は鎖写像になっている。さらに $h \circ g = \mathrm{id}_{\Sigma A}$ も成り立つから、とくに $h \circ g$ と $\mathrm{id}_{\Sigma A}$ は鎖ホモトピックである。したがって、あとは $g \circ h$ と id_{C_i} が鎖ホモトピックであることを示せばよい。そのための鎖ホモトピー $\{t_p\colon (C_i)_p \to (C_i)_{p+1}\}$ の形は次数を考えると

$$t_p(b, (a, b')) = (l_p b', (0, 0)) \quad (l_p \in \mathbb{Z}) \tag{5.6.272}$$

くらいしかない。そこで

$$t_p(b, (a, b')) := (b', (0, 0)) \tag{5.6.273}$$

と定めてみると、

$$\begin{aligned} (\partial \circ t + t \circ \partial)(b, (a, b')) &= \partial(b', (0, 0)) + t(-\partial b, (-\partial a, -f(a) + \partial b' - b)) && (5.6.274) \\ &= (-\partial b', (0, -b')) + (-f(a) + \partial b' - b, (0, 0)) && (5.6.275) \\ &= (-f(a) - b, (0, -b')) && (5.6.276) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} (\partial \circ t + t \circ \partial + \mathrm{id}_{C_i})(b, (a, b')) &= (-f(a), (a, 0)) && (5.6.277) \\ &= g_p \circ h_p(b, (a, b')) && (5.6.278) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって t は $g \circ h$ から id_{C_i} への鎖ホモトピーである。したがって、g, h を鎖ホモトピー同値写像として C_i と ΣA は鎖ホモトピー同値である。 □

演習問題 4.7 の解答. $I \times I$ 上の同値関係 $\sim$ を $(x, 0) \sim (x, 1),\ (0, y) \sim (1, y)$ により生成されるものと定め、標準射影 $I \times I \to (I \times I)/\sim$ を π とおき、$T^2 = S^1 \times S^1$ を同相写像

$$(I \times I)/\sim \to T^2, \quad \pi(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \tag{5.6.279}$$

により $(I\times I)/\sim$ と同一視する。$\varepsilon>0$ を十分小さく (たとえば $\varepsilon=1/10$ などと) とり、$X_0, X_1\subset T^2$ を

$$X_0 \coloneqq \pi(I\times([0,1/2+\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,1])) \tag{5.6.280}$$

$$X_1 \coloneqq \pi(I\times([0,\varepsilon]\cup[1/2-\varepsilon,1])) \tag{5.6.281}$$

とおく。包含写像に名前をつけて

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\ X_0\cap X_1 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_0\cup X_1 = T^2 \\ & X_1 \arrow[ur, "j_1"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.282}$$

とおくと、$T^2=\operatorname{Int}X_0\cup\operatorname{Int}X_1$ が成り立つことから Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{p+1}(T^2) \arrow[dll, rounded corners] & \\ H_p(X_0\cap X_1) \arrow[r, "(i_{0*},-i_{1*})"] & H_p(X_0)\oplus H_p(X_1) \arrow[r, "j_{0*}+j_{1*}"] & H_p(T^2) \arrow[dll, rounded corners] \\ H_{p-1}(X_0\cap X_1) \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd} \tag{5.6.283}$$

を得る。

$p=0$ の場合、T^2 の弧状連結性より $H_p(T^2)\cong\mathbb{Z}$ である。

$p\geq 3$ の場合を考える。$X_0\cap X_1$ は弧状連結成分

$$W_0 \coloneqq \pi(I\times([0,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,1])),\quad W_1 \coloneqq \pi(I\times[1/2-\varepsilon,1/2+\varepsilon]) \tag{5.6.284}$$

への直和分解 $X_0\cap X_1 = W_0\sqcup W_1$ を持つから $H_q(X_0\cap X_1)\cong H_q(W_0)\oplus H_q(W_1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。よって $H_q(X_0\cap X_1)\cong H_q(S^1)\oplus H_q(S^1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。

> $\because$ W_0 は写像 $S^1\approx\pi(I\times\{0\})\hookrightarrow W_0$ をホモトピー同値写像として $S^1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} W_0$ だから $H_q(S^1)\cong H_q(W_0)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。ただし、$\pi(I\times\{0\})\hookrightarrow W_0$ がホモトピー同値写像であることは J. H. C. Whitehead の補題を用いて具体的にホモトピーを構成すればわかる。同様に $H_q(S^1)\cong H_q(W_1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ も成り立つ。 //

したがって、S^1 のホモロジー群を既知として完全列

$$\underbrace{H_p(X_0)\oplus H_p(X_1)}_{\cong 0} \longrightarrow H_p(T^2) \longrightarrow \underbrace{H_{p-1}(X_0\cap X_1)}_{\cong 0} \tag{5.6.285}$$

を得る。よって $p\geq 3$ のとき $H_p(T^2)\cong 0$ である。

$p=2$ の場合を考える。いま

$$\underbrace{H_2(X_0)\oplus H_2(X_1)}_{\cong 0} \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow H_1(X_0\cap X_1) \xrightarrow{(i_{0*},-i_{1*})} H_1(X_0)\oplus H_1(X_1) \tag{5.6.286}$$

が完全列、したがって

$$0 \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \mathrm{Ker}(i_{0*}, -i_{1*}) \longrightarrow 0 \tag{5.6.287}$$

が完全列だから $H_2(T^2) \cong \mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*})$ である。そこで $\mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*})$ を具体的に求める。そのために $H_1(X_0 \cap X_1)$ および $H_1(X_0) \oplus H_1(X_1)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底を考える。ループ $\sigma_0, \sigma_1 \colon I \to X_0 \cap X_1$ を

$$\sigma_0(t) \coloneqq \pi(t, 0), \quad \sigma_1(t) \coloneqq \pi(t, 1/2) \tag{5.6.288}$$

で定めると、ループをサイクルとみなして $[\sigma_0], [\sigma_1]$ は $H_1(X_0 \cap X_1) = H_1(W_0 \sqcup H_1)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる。

∵ 包含写像 $k_i \colon W_i \hookrightarrow W_0 \sqcup W_1$ $(i = 0, 1)$ により同型 $k_{0*} + k_{1*} \colon H_1(W_0) \oplus H_1(W_1) \xrightarrow{\sim} H_1(W_0 \sqcup W_1)$ が誘導されるから、$[\sigma_0], [\sigma_1]$ が $H_1(W_0 \sqcup W_1)$ の基底であることを示すには、σ_0, σ_1 をそれぞれ W_0, W_1 内のループとみなして $[\sigma_0], [\sigma_1]$ がそれぞれ $H_1(W_0), H_1(W_1)$ の基底であることを示せばよい。いまホモトピー同値写像 $S^1 \approx \pi(I \times \{0\}) \hookrightarrow W_0$ により同型 $H_1(S^1) \cong H_1(W_0)$ が誘導されるが、この同型により $[\sigma_0]$ は $[\sigma] \in H_1(S^1)$, $\sigma(t) \coloneqq e^{2\pi i t}$ に対応する。そこで $[\sigma]$ が $H_1(S^1)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底であることをいえばよいが、Hurewicz 準同型による同型対応により $[\sigma]$ を基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ の元とみなして考えれば基底であることがわかる。よって $[\sigma_0]$ は $H_1(W_0)$ の基底である。同様に $[\sigma_1]$ は $H_1(W_1)$ の基底である。 //

この基底を i_{0*} で送ると $[i_0 \circ \sigma_0], [i_0 \circ \sigma_1] \in H_1(X_0)$ を得るが、これらは互いに一致し、$H_1(X_0)$ の基底となる。

∵ まず $[i_0 \circ \sigma_0]$ が $H_1(X_0)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となることを示す。いまホモトピー同値写像 $S^1 \approx \pi(I \times \{0\}) \hookrightarrow X_0$ により同型 $H_1(S^1) \cong H_1(X_0)$ が誘導されるが、この同型により $[i_0 \circ \sigma_0]$ は $[\sigma] \in H_1(S^1), \sigma(t) \coloneqq e^{2\pi i t}$ に対応する。そこで $[\sigma]$ が $H_1(S^1)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底であることをいえばよいが、Hurewicz 準同型による同型対応により $[\sigma]$ を基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ の元とみなして考えれば基底であることがわかる。よって $[i_0 \circ \sigma_0]$ は $H_1(X_0)$ の基底である。

つぎに $[i_0 \circ \sigma_0] = [i_0 \circ \sigma_1]$ を示す。そこで X_0 内の 2-単体 $\alpha, \beta \colon \Delta^2 \to X_0$ を

- $\alpha' \colon \Delta^2 \to I \times I$ を

$$e_0 \mapsto (0, 0), \quad e_1 \mapsto (1, 0), \quad e_2 \mapsto (1, 1/2) \tag{5.6.289}$$

なるアファイン写像として $\alpha \coloneqq \pi \circ \alpha'$

- $\beta' \colon \Delta^2 \to I \times I$ を

$$e_0 \mapsto (0, 0), \quad e_1 \mapsto (1, 1/2), \quad e_2 \mapsto (0, 1) \tag{5.6.290}$$

なるアファイン写像として $\beta \coloneqq \pi \circ \beta'$

と定めれば、直接計算により $\partial(\alpha + \beta)$ は $i_0 \circ \sigma_0 - i_0 \circ \sigma_1$ とホモローグである。よって $[i_0 \circ \sigma_0] = [i_0 \circ \sigma_1]$ である。 //

同様に i_{1*} で送ると $[i_1 \circ \sigma_0] = [i_1 \circ \sigma_1] \in H_1(X_1)$ は $H_1(X_1)$ の基底となる。さて、$H_1(X_0 \cap X_1)$ の基底 $[\sigma_0], [\sigma_1]$ と $H_1(X_0) \oplus H_1(X_1)$ の基底 $[i_0 \circ \sigma_0], [i_1 \circ \sigma_0]$ に関する $(i_{0*}, -i_{1*})$ の行列表示は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ となる。したがって $\mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*}) = \langle [\sigma_0] - [\sigma_1] \rangle \cong \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,(i_{0*}, -i_{1*}) = \langle [i_0 \circ \sigma_0] - [i_1 \circ \sigma_0] \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。よって $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

$p = 1$ の場合を考える。いま

$$H_1(X_0) \oplus H_1(X_1) \xrightarrow{j_{0*} + j_{1*}} H_1(T^2) \longrightarrow H_0(X_0 \cap X_1) \xrightarrow{(i_{0*}, -i_{1*})} H_0(X_0) \oplus H_0(X_1) \tag{5.6.291}$$

が完全列、したがって

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,(j_{0*} + j_{1*}) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*}) \longrightarrow 0 \tag{5.6.292}$$

が完全列である。ただし準同型定理より

$$\mathrm{Im}\,(j_{0*} + j_{1*}) \cong (H_1(X_0) \oplus H_1(X_1))/\mathrm{Ker}\,(j_{0*} + j_{1*}) \tag{5.6.293}$$

$$= (H_1(X_0) \oplus H_1(X_1))/\mathrm{Im}\,(i_{0*}, -i_{1*}) \tag{5.6.294}$$

$$= (H_1(X_0) \oplus H_1(X_1))/\langle [i_0 \circ \sigma_0] - [i_1 \circ \sigma_0] \rangle \tag{5.6.295}$$

である。この右辺は $\mathbb{Z}$ と同型である。実際、群準同型 $H_1(X_0) \oplus H_1(X_1) \to \mathbb{Z}$, $[i_0 \circ \sigma_0] \mapsto 1$, $[i_1 \circ \sigma_0] \mapsto 1$ に準同型定理を用いて同型が誘導される。したがって完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*}) \longrightarrow 0 \tag{5.6.296}$$

を得る。ここで完全列

$$H_1(T^2) \longrightarrow \underbrace{H_0(X_0 \cap X_1)}_{\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \xrightarrow{(i_{0*}, -i_{1*})} \underbrace{H_0(X_0) \oplus H_0(X_1)}_{\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_0(T^2)}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{5.6.297}$$

より $\mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*}) \cong \mathbb{Z}$ である (補題 4.1.4 を 2 回用いる)。したがって完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{5.6.298}$$

を得る。$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ 加群として射影的だからこの完全列は分裂し、$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を得る。

以上をまとめて

$$H_p(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (p = 1) \\ \mathbb{Z} & (p = 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.299}$$

を得る。 □

演習問題 4.8 の解答. 標準射影 $I \times I \to K$ を π とおく。$\varepsilon > 0$ を十分小さく (たとえば $\varepsilon = 1/10$ などと) とり、$X_0, X_1 \subset K$ を

$$X_0 \coloneqq \pi([1/4 - \varepsilon, 3/4 + \varepsilon], \times I) \tag{5.6.300}$$

$$X_1 \coloneqq \pi(([0, 1/4 + \varepsilon] \cup [3/4 + \varepsilon, 1]) \times I) \tag{5.6.301}$$

とおく。包含写像に名前をつけて

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\ X_0 \cap X_1 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_0 \cup X_1 = K \\ & X_1 \arrow[ur, "j_1"'] & \end{tikzcd} \tag{5.6.302}$$

とおくと、$K=\mathrm{Int}\,X_0\cup\mathrm{Int}\,X_1,\ X_0\cap X_1\neq\varnothing$ が成り立つことから被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_{p+1}(K) \arrow[dll, rounded corners] \\ \widetilde{H}_p(X_0\cap X_1) \arrow[r, "(i_{0*},-i_{1*})"] & \widetilde{H}_p(X_0)\oplus\widetilde{H}_p(X_1) \arrow[r, "j_{0*}+j_{1*}"] & \widetilde{H}_p(K) \arrow[dll, rounded corners] \\ \widetilde{H}_{p-1}(X_0\cap X_1) \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd} \tag{5.6.303}$$

を得る。

非被約ホモロジーについて状況を整理しておく。$X_0\cap X_1$ は弧状連結成分

$$W_0 := \pi([1/4-\varepsilon,1/4+\varepsilon]\times I),\quad W_1 := \pi([3/4-\varepsilon,3/4+\varepsilon]\times I) \tag{5.6.304}$$

への直和分解 $X_0\cap X_1 = W_0\sqcup W_1$ を持つから $H_q(X_0\cap X_1)=H_q(W_0)\oplus H_q(W_1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。さらに W_0,W_1 はそれぞれ S^1 とホモトピー同値だから $H_q(W_0)\cong H_q(S^1),\ H_q(W_1)\cong H_q(S^1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ であり、これらの同型により S^1 内のループ $\sigma\colon I\to S^1,\ t\mapsto e^{2\pi it}$ のホモロジー類 $[\sigma]\in H_1(S^1)$ は W_0,W_1 内のループ

$$\sigma_0\colon I\to W_0,\ t\mapsto\pi(1/4,t),\quad \sigma_1\colon I\to W_1,\ t\mapsto\pi(3/4,1-t) \tag{5.6.305}$$

のホモロジー類 $[\sigma_0]\in H_1(W_0),\ [\sigma_1]\in H_1(W_1)$ にそれぞれ対応するとしてよい。一方、X_0,X_1 もそれぞれ S^1 とホモトピー同値だから $H_q(X_0)\cong H_q(S^1),\ H_q(X_1)\cong H_q(S^1)$ $(\forall q\in\mathbb{Z})$ であり、これらの同型により $[\sigma]\in H_1(S^1)$ は $[i_0\circ\sigma_0]\in H_1(X_0),\ [i_1\circ\sigma_1]\in H_1(X_1)$ にそれぞれ対応するとしてよい。

$p=0$ の場合、K の弧状連結性より $H_0(K)\cong\mathbb{Z}$ である。

$p\geq 3$ の場合を考える。系列

$$\underbrace{\widetilde{H}_p(X_0)\oplus\widetilde{H}_p(X_1)}_{\substack{=H_p(X_0)\oplus H_p(X_1)\\ \cong H_p(S^1)\oplus H_p(S^1)\\ =0}} \longrightarrow H_p(K) \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(X_0\cap X_1)}_{\substack{=H_p(X_0\cap X_1)\\ =H_p(W_0)\oplus H_p(W_1)\\ \cong H_p(S^1)\oplus H_p(S^1)\\ =0}} \tag{5.6.306}$$

は完全列である。したがって $H_p(K)=0$ である。

$p=2$ の場合を考える。いま系列

$$0\longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_2(K)}_{=H_2(K)} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_1(X_0\cap X_1)}_{\substack{=H_1(X_0\cap X_1)\\ =H_1(W_0)\oplus H_1(W_1)\\ \cong H_1(S^1)\oplus H_1(S^1)\\ \cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}} \xrightarrow{(i_{0*},-i_{1*})} \underbrace{\widetilde{H}_1(X_0)\oplus\widetilde{H}_1(X_1)}_{\substack{=H_1(X_0)\oplus H_1(X_1)\\ \cong H_1(S^1)\oplus H_1(S^1)\\ \cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}} \tag{5.6.307}$$

は完全列である。ただし同型 $\mathbb{Z}\cong H_1(S^1)$ は $1\in\mathbb{Z}$ を $[\sigma]\in H_1(S^1)$ に対応させるものとする。$(i_{0*},-i_{1*})$ を $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ なる写像とみなして完全列

$$0\longrightarrow H_2(K)\longrightarrow \mathrm{Ker}\,(i_{0*},-i_{1*})\longrightarrow 0 \tag{5.6.308}$$

を得る。ここで $(i_{0*},-i_{1*})$ は

$$(a,b)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \tag{5.6.309}$$

$$\overset{\sim}{\mapsto} \quad (a[\sigma], b[\sigma]) \in H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \tag{5.6.310}$$

$$\overset{\sim}{\mapsto} \quad a[\sigma_0] + b[\sigma_1] \in H_1(W_0) \oplus H_1(W_1) \tag{5.6.311}$$

$$\overset{(i_{0*}, -i_{1*})}{\mapsto} (a[i_0 \circ \sigma_0] + b[i_0 \circ \sigma_1], -a[i_1 \circ \sigma_0] - b[i_1 \circ \sigma_1]) \tag{5.6.312}$$

$$= ((a-b)[i_0 \circ \sigma_0], (-a-b)[i_1 \circ \sigma_1]) \in H_1(X_0) \oplus H_1(X_1) \tag{5.6.313}$$

$$\overset{\sim}{\mapsto} \quad ((a-b)[\sigma], (-a-b)[\sigma]) \in H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \tag{5.6.314}$$

$$\overset{\sim}{\mapsto} \quad (a-b, -a-b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{5.6.315}$$

なる写像である。ただし (5.6.313) の変形では $[i_0 \circ \sigma_0] = -[i_0 \circ \sigma_1]$, $[i_1 \circ \sigma_0] = [i_1 \circ \sigma_1]$ であることを用いた。よって $\mathrm{Ker}\,(i_{0*}, -i_{1*}) = 0$、したがって $H_2(K) = 0$ である。

$p = 1$ の場合を考える。いま系列

$$\underbrace{\widetilde{H}_1(X_0 \cap X_1)}_{\substack{=H_1(X_0 \cap X_1) \\ =H_1(W_0)\oplus H_1(W_1) \\ \cong H_1(S^1)\oplus H_1(S^1) \\ \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}} \xrightarrow{(i_{0*}, -i_{1*})} \underbrace{\widetilde{H}_2(X_0) \oplus \widetilde{H}_2(X_1)}_{\substack{=H_1(X_0)\oplus H_1(X_1) \\ \cong H_1(S^1)\oplus H_1(S^1) \\ \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}} \xrightarrow{j_{0*}+j_{1*}} \underbrace{\widetilde{H}_1(K)}_{=H_1(K)} \xrightarrow{\partial_*} \underbrace{\widetilde{H}_0(X_0 \cap X_1)}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_0 X_0 \oplus \widetilde{H}_0 X_1}_{=0} \tag{5.6.316}$$

は完全列である (∂_* は連結準同型)。よって完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(j_{0*} + j_{1*}) = \mathrm{Ker}\,\partial_* \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{5.6.317}$$

を得る。そこで $\mathrm{Im}(j_{0*} + j_{1*})$ を求める。まず準同型定理より

$$\mathrm{Im}(j_{0*} + j_{1*}) \cong (H_1(X_0) \oplus H_1(X_1))/\mathrm{Ker}(j_{0*} + j_{1*}) \tag{5.6.318}$$

$$\cong (H_1(X_0) \oplus H_1(X_1))/\mathrm{Im}(i_{0*}, -i_{1*}) \tag{5.6.319}$$

$$\cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Im}(i_{0*}, -i_{1*}) \tag{5.6.320}$$

である。ただし最後の同型は $(i_{0*}, -i_{1*})$ を $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ なる写像とみなしている。ここで前段落の結果より $\mathrm{Im}(i_{0*}, -i_{1*}) = \{(a-b, -a-b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ であり、これは $x + y$ が偶数であるような元 $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 全体の集合に他ならない。したがって群準同型 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto (x + y) + 2\mathbb{Z}$ に対し準同型定理を用いて $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Im}(i_{0*}, -i_{1*}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を得る。したがって完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{5.6.321}$$

を得る。よって $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ となる。

以上をまとめて

$$H_p(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & (p = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.322}$$

を得る。 □

演習問題 4.9 の解答. $\mathbb{C}$ 内の単位開円板を B^2、単位閉円板を D^2 とおき、$\mathbb{R}P^2$ を $S^1 \subset D^2$ 上の対蹠点を同一視して得られる D^2 の商空間とみなし、標準射影 $D^2 \to \mathbb{R}P^2$ を π とおく。さらに $X_0 := \pi(D^2 \setminus \{0\})$, $X_1 := \pi(B^2)$

とおく。B^2 は π に関し saturated だから $X_0 \cap X_1 = \pi(B^2 \setminus \{0\})$ であり、また B^2 および $B^2 \setminus \{0\}$ は π に関し saturated な D^2 の開部分集合だからそれぞれ恒等写像により同相 $X_1 \approx B^2$ および $X_0 \cap X_1 \approx B^2 \setminus \{0\}$ が誘導される。

ここで X_0 は写像

$$f\colon X_0 \to S^1, \quad \pi(re^{2\pi it}) \mapsto e^{4\pi it} \quad (r > 0,\ t \in \mathbb{R}) \tag{5.6.323}$$

$$g\colon S^1 \to X_0, \quad e^{2\pi it} \mapsto \pi(e^{\pi it}) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.6.324}$$

を互いに逆なホモトピー同値写像として S^1 とホモトピー同値となることを示す。f, g が連続写像として well-defined であることは π の定義から従う。$f \circ g(e^{2\pi it}) = f(\pi(e^{\pi it})) = e^{2\pi it}$ より $f \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$ である。また $g \circ f(\pi(re^{2\pi it})) = g(e^{4\pi it}) = \pi(e^{2\pi it})$ だから、$D^2 \setminus \{0\}$ の点を長さ 1 に規格化するホモトピーを J. H. C. Whitehead の補題により X_0 に誘導すれば $g \circ f \sim \mathrm{id}_{X_0}$ である。よって f, g がホモトピー同値写像となることが示せた。

ホモロジーを計算する。$X_0 \cup X_1 = \mathbb{R}P^2,\ X_0 \cap X_1 \neq \varnothing$ だから被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列を得て、$X_0 \cap X_1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1,\ X_0 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1,\ X_1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} *$ および $\mathbb{R}P^2$ が弧状連結であることとあわせて

p	$\widetilde{H}_p(X_0 \cap X_1)$	$\widetilde{H}_p(X_0) \oplus \widetilde{H}_p(X_1)$	$\widetilde{H}_p(\mathbb{R}P^2)$
p	0	0	$H_p(\mathbb{R}P^2)$
$p-1$	0	0	$H_{p-1}(\mathbb{R}P^2)$
$\vdots$			
2	0	0	$H_2(\mathbb{R}P^2)$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$H_1(\mathbb{R}P^2)$
0	0	0	0

を得る。標準包含 $i\colon X_0 \cap X_1 \to X_0$ により誘導される準同型 $i_*\colon \widetilde{H}_1(X_0 \cap X_1) \to \widetilde{H}_1(X_0)$ を計算する。冒頭で定めたホモトピー同値写像 f とホモトピー同値写像

$$h\colon S^1 \to X_0 \cap X_1, \quad e^{2\pi it} \mapsto \pi\left(\frac{1}{2}e^{2\pi it}\right) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.6.325}$$

を考え、連続写像 $f \circ i \circ h\colon S^1 \to S^1$ の写像度を求める。それぞれの写像の定義より

$$f \circ i \circ h(e^{2\pi it}) = f \circ \pi\left(\frac{1}{2}e^{2\pi it}\right) = e^{4\pi it} \tag{5.6.326}$$

だから $\deg(f \circ i \circ h) = 2$ である。したがって $\operatorname{Ker} i_* = 0,\ \operatorname{Im} i_* = 2\mathbb{Z}$ を得る。よって

$$H_p(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (p = 1) \\ 0 & (p \geq 2) \end{cases} \tag{5.6.327}$$

を得る。 □

演習問題 4.10 の解答. 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$H_p(\mathbb{C}P^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0, 2, \ldots, 2k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.328}$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

$k = 0$ の場合は $\mathbb{C}P^0 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times = *$ より明らか。

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、$k-1$ での成立を仮定して k での成立を示す。$P \coloneqq [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{C}P^k$、$X_0 \coloneqq \mathbb{C}P^k \setminus \{P\}$、$X_1 \coloneqq \mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$ とおく。ただし $\mathbb{C}P^{k-1}$ は埋め込み $[z_0 : \cdots : z_{k-1}] \mapsto [z_0 : \cdots : z_{k-1} : 0]$ により $\mathbb{C}P^k$ の部分空間とみなしている。このとき $X_0 \cap X_1 \neq \varnothing$ である。また $\mathbb{C}P^k = \operatorname{Int} X_0 \cup \operatorname{Int} X_1$ が成り立つ。

> ∵ 明らかに $\mathbb{C}P^k = X_0 \cup X_1$ だから X_0, X_1 が open in $\mathbb{C}P^k$ であることをいえば十分。まず $\mathbb{C}P^k$ は Hausdorff だから $X_0 = \mathbb{C}P^k \setminus \{P\}$ は open in $\mathbb{C}P^k$ である。一方、埋め込み $\mathbb{C}P^{k-1} \to \mathbb{C}P^k$ を ι、商写像 $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^k$ を π とおくと $\iota(\mathbb{C}P^{k-1}) = \pi((\mathbb{C}^k \times \{0\}) \cap (\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}))$ であるが、$(\mathbb{C}^k \times \{0\}) \cap (\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\})$ は closed in $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ であり、π は位相群の作用に関する商写像ゆえに閉写像なので $\iota(\mathbb{C}P^{k-1})$ は closed in $\mathbb{C}P^k$、したがって $X_1 = \mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$ は open in $\mathbb{C}P^k$ である。 //

一般に $\mathbb{C}P^k$ から 1 点を除いた空間は $\mathbb{C}P^{k-1}$ とホモトピー同値だから $X_0 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} \mathbb{C}P^{k-1}$ である。また、写像 $[z_0 : \cdots : z_k] \mapsto (z_0/z_k, \ldots, z_{k-1}/z_k)$ により同相 $X_1 \approx \mathbb{C}^k$ が成り立つ。さらにこの同相写像を $X_0 \cap X_1$ 上に制限して $X_0 \cap X_1 \approx \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^{2k-1}$ となる。したがって被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{p+1}(\mathbb{C}P^k) \\ \hookrightarrow \widetilde{H}_p(S^{2k-1}) \longrightarrow \widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbb{C}^k) \longrightarrow \widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^k) \\ \hookrightarrow \widetilde{H}_{p-1}(S^{2k-1}) \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{5.6.329}$$

を得る。

$p = 0$ の場合、$\mathbb{C}P^k$ の弧状連結性より $H_0(\mathbb{C}P^k) \cong \mathbb{Z}$ である。

$p \geq 1$ かつ $p \neq 2k-1$ かつ $p \neq 2k$ の場合、完全列

$$\underbrace{\widetilde{H}_p(S^{2k-1})}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbb{C}^k)}_{\substack{\cong \widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ = H_p(\mathbb{C}P^{k-1})}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^k)}_{= H_p(\mathbb{C}P^k)} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{p-1}(S^{2k-1})}_{=0} \tag{5.6.330}$$

より $H_p(\mathbb{C}P^k) \cong H_p(\mathbb{C}P^{k-1})$ が成り立つ。

$p \geq 1$ かつ $p = 2k-1$ の場合、完全列

$$\underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbb{C}^k)}_{\substack{\cong \widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ = H_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ =0}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^k)}_{= H_p(\mathbb{C}P^k)} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{p-1}(S^{2k-1})}_{=0} \tag{5.6.331}$$

より $H_p(\mathbb{C}P^k) = 0$ が成り立つ。

$p \geq 1$ かつ $p = 2k$ の場合、完全列

$$\underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \oplus \widetilde{H}_p(\mathbb{C}^k)}_{\substack{\cong \widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ = H_p(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ =0}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(\mathbb{C}P^k)}_{=H_p(\mathbb{C}P^k)} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{p-1}(S^{2k-1})}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{C}P^{k-1}) \oplus \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{C}^k)}_{\substack{\cong \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ = H_{p-1}(\mathbb{C}P^{k-1}) \\ =0}} \tag{5.6.332}$$

より $H_p(\mathbb{C}P^k) \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。これで帰納法が完成した。 □

演習問題 4.11 の解答. $n \geq 1$ で考える。$\mathbb{R}^{n+1}$ における中心 $(0, \ldots, 0, \pm 1)$、半径 1 の球面をそれぞれ $A_\pm$ とおき、$X := A_+ \cup A_-$ とおく。S^n/S^{n-1} は X と同相である。

∵ [TODO] //

したがって X のホモロジー群を求めればよい。そこで

$$X_0 := X \setminus \{(0, \ldots, 0, -2)\}, \quad X_1 := X \setminus \{(0, \ldots, 0, 2)\} \tag{5.6.333}$$

とおく。$X = \operatorname{Int} X_0 \cup \operatorname{Int} X_1$ かつ $X_0 \cap X_1 \neq \varnothing$ であり、$X_0 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} A_+ \approx S^n$, $X_1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} A_- \approx S^n$, $X_0 \cap X_1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} *$ である。したがって被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{p+1}(X) \\ \hookrightarrow 0 \longrightarrow \widetilde{H}_p(S^n) \oplus \widetilde{H}_p(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X) \\ \hookrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{5.6.334}$$

を得る。

$p = 0$ の場合、X の弧状連結性より $H_p(X) \cong \mathbb{Z}$ である。

$p \geq 1$ かつ $p = n$ の場合、完全列

$$0 \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(S^n) \oplus \widetilde{H}_p(S^n)}_{\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(X)}_{=H_p(X)} \longrightarrow 0 \tag{5.6.335}$$

より $H_p(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が成り立つ。

$p \geq 1$ かつ $p \neq n$ の場合、完全列

$$\underbrace{\widetilde{H}_p(S^n) \oplus \widetilde{H}_p(S^n)}_{=0} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(X)}_{=H_p(X)} \longrightarrow 0 \tag{5.6.336}$$

より $H_p(X) = 0$ が成り立つ。

以上をまとめて

$$H_p(S^n/S^{n-1}) \cong H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (p = n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.337}$$

を得る。 □

演習問題 4.12 の解答. Y は円周 $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ をふくらませて得られる中身の詰まったトーラス、すなわち

$$Y \coloneqq \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \mid (r-1)^2 + z^2 < 1/4\} \tag{5.6.338}$$

とおく。$Y \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1$ である。

∵ ホモトピー

$$H\colon Y \times I \to Y, \quad \left(\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix}, t \right) \mapsto \begin{bmatrix} (1-t+tr)\cos\theta \\ (1-t+tr)\sin\theta \\ tz \end{bmatrix} \tag{5.6.339}$$

により S^1 は Y の変形レトラクトとなる。 //

また $X \cap Y = Y \setminus S^1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} T^2$ である。

∵ [TODO] //

さらに $\mathbb{R}^3$ は可縮だから $\mathbb{R}^3 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} *$ である。したがって被約ホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow \widetilde{H}_p(T^2) \longrightarrow \widetilde{H}_p(X) \oplus \widetilde{H}_p(S^1) \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow \widetilde{H}_{p-1}(T^2) \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{5.6.340}$$

を得る。

$p = 0$ の場合、X の弧状連結性より $H_p(X) \cong \mathbb{Z}$ である。

$p = 1$ の場合、完全列

$$0 \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(T^2)}_{\substack{=H_p(T^2) \\ \cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(X) \oplus \widetilde{H}_p(S^1)}_{\cong H_p(X)\oplus\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{5.6.341}$$

より $H_p(X) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を得る。有限生成アーベル群の構造定理より $H_p(X) \cong \mathbb{Z}$ である。

$p \geq 2$ の場合、完全列

$$0 \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(T^2)}_{=H_p(T^2)} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_p(X) \oplus \widetilde{H}_p(S^1)}_{\cong H_p(X)} \longrightarrow 0 \tag{5.6.342}$$

より

$$H_p(X) \cong H_p(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 2) \\ 0 & (p \geq 3) \end{cases} \tag{5.6.343}$$

を得る。

以上をまとめて

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0, 1, 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5.6.344}$$

を得る。 □

演習問題 4.13 の解答. [TODO] □

演習問題 4.14 の解答. [TODO] □

演習問題 4.16 の解答. 補題 4.5.5 □

演習問題 4.17 の解答. 対偶を示す。f が全射でないとするとある $q \in S^n$ が存在して $\operatorname{Im} f \subset S^n \setminus \{q\}$ である。そこで f の値域を制限した写像を $F\colon S^n \to S^n \setminus \{q\}$ とおくと可換図式

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F"'] & S^n \\ & S^n \setminus \{q\} \underset{\text{h.e.}}{\simeq} \mathbb{R}^n \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5.6.345}$$

を得る。よって

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "F_*"'] & H_n(S^n) \\ & H_n(\mathbb{R}^n) = 0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5.6.346}$$

を得るから f_* は $[S^n]$ を 0 に写す。よって f の写像度は 0 である。これで対偶が示せた。 □

演習問題 5.3 の解答. K は $(0,y) \sim (1, 1-y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ により生成される $I \times I$ 上の同値関係 $\sim$ による商空間と考え、商写像 $I \times I \to K$ を π とおく。以下 $X := K$ と書く。X の胞体分割を

$$X = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2 \tag{5.6.347}$$

$$e^0 := \{\pi(0,0)\} \tag{5.6.348}$$

$$e^1_1 := \pi(\mathring{I} \times \{0\}) \tag{5.6.349}$$

$$e^1_2 := \pi(\{0\} \times \mathring{I}) \tag{5.6.350}$$

$$e^2 := \pi(\mathring{I} \times \mathring{I}) \tag{5.6.351}$$

で与えることができる。セル e^k_i の特性写像を $\varphi^k_i\colon D^k \to X^k \subset X$ とおく。上の胞体分割より、チェイン複体

$$0 \longrightarrow \underbrace{C_2(X)}_{\cong\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_2} \underbrace{C_1(X)}_{\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{C_0(X)}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{5.6.352}$$

を得る。

ホモロジーを求めるために境界写像を計算する。∂_1 を考える。

$$\partial_1 e^1_1 = e^0 - e^0 = 0 \tag{5.6.353}$$

$$\partial_1 e^1_2 = e^0 - e^0 = 0 \tag{5.6.354}$$

だから $\partial_1 = 0$ である。

∂_2 を考える。空間対の射 $(X^1, X^0) \twoheadrightarrow (X^1/(X^0 \cup e^1_2), *) \to (S^1, *)$ を π^1_1 とおき $[e^2 : e^1_1] = \deg(\pi^1_1 \circ \varphi^2|_{S^1})$ を求める。ここで特性写像 φ^2 は $S^1 \subset D^2$ 上の点を次のように写すものとしてよい。すなわち、φ^2 は S^1 上の点を

$\partial(I \times I)$ 上の点に反時計回りに等間隔に写し、さらに π で写すものとする。すると S^1 の適当な鏡映 r に対し

$$\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1} \circ r = \pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1} \tag{5.6.355}$$

が成り立つ。よって $[e^2 : e_1^1] = \deg(\pi_1^1 \circ \varphi^2|_{S^1}) = 0$ である。

つぎに空間対の射 $(X^1, X^0) \twoheadrightarrow (X^1/(X^0 \cup e_1^1), *) \to (S^1, *)$ を π_2^1 とおき $[e^2 : e_2^1] = \deg(\pi_2^1 \circ \varphi^2|_{S^1})$ を求める。

[TODO] 写像度の局所化が必要 $\square$

演習問題 5.4 の解答. [TODO] $\square$

演習問題 5.5 の解答. [TODO] $\square$

演習問題 5.6 の解答. [TODO] $\square$

参考文献

[Hat02] Allen Hatcher, **Algebraic topology**, Cambridge, 2002.

[Lee10] John. M. Lee, **Introduction to topological manifolds**, Springer, 2010.

[Rot98] Joseph J. Rotman, **An introduction to algebraic topology**, Springer, 1998.

[川 01] 雄二郎 川又, **射影空間の幾何学**, 朝倉書店, 2001.

[河 22] 響矢 河澄, **トポロジーの基礎 上**, 東京大学出版会, 2022.

記号一覧

索引