

発表時にコメントがあった命題などを整理する。

定義 0.1 (full support). X を位相空間、 μ を X 上の Borel 測度とする。

$$\text{supp } \mu := \left(\bigcup_{\substack{U \subset X \\ U \text{ open} \\ \mu(U)=0}} U \right)^c \quad (0.1)$$

と定める。 μ が **full support** であるとは、 $\text{supp } \mu = X$ であることをいう。

◇ **演習問題 0.1.** $X = \{1, \dots, n\}$ とする。 X 上の full support な確率測度全体の集合 \mathcal{P} は例 3.1 で見たように指数型分布族であるが、 \mathcal{P} は $n-1$ 次元の実現を持つか？

演習問題 0.1 の解答. 答え: 持つ。

$n = 1$ の場合は写像 $T: X \rightarrow \mathbb{R}^0$, $k \mapsto 0$ を十分統計量、数え上げ測度 γ を基底測度として 0 次元の表現を得る。

$n \geq 2$ の場合、各 a_j が $0 < a_j < 1$ をみたすことに注意すれば、

$$P(dk) = \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} (\log a_j) \left(\delta_{jk} + \frac{1}{n-1} \frac{\log a_n}{\log a_j} \delta_{nk} \right) \right) \gamma(dk) \quad (0.2)$$

が成り立つから、 $T: X \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$,

$$T(k) := \begin{bmatrix} \delta_{1k} + \frac{1}{n-1} \frac{\log a_n}{\log a_1} \delta_{nk} \\ \vdots \\ \delta_{(n-1)k} + \frac{1}{n-1} \frac{\log a_n}{\log a_{n-1}} \delta_{nk} \end{bmatrix} \quad (0.3)$$

を十分統計量、数え上げ測度 γ を基底測度として $n-1$ 次元の表現を得る。 □

◇ **演習問題 0.2.** X を可測空間、 \mathcal{P} を X 上の指数型分布族とする。任意の $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ に対し $P_1 \sim P_2$ (互いに絶対連続) が成り立つことを示せ。

演習問題 0.2 の解答. 役割を入れ替えれば逆向きも示せるから、 $P_1 \ll P_2$ のみ示せばよい。 $E \subset X$ を $P_2(E) = 0$ なる可測集合とし、 $P_1(E) = 0$ を示す。 \mathcal{P} の実現 (T, μ) をひとつ選んで固定する。 P_2 に対し定義 2.1 条件 (E3) の $\theta_2 \in \mathbb{R}^m$ をひとつ選ぶ。

$$0 = P_2(E) \quad (0.4)$$

$$= \int_E \frac{dP_2}{d\mu}(x) \mu(dx) \quad (0.5)$$

$$= \int_E e^{\langle \theta_2, T(x) \rangle - \psi(\theta_2)} \mu(dx) \quad (0.6)$$

であるが、被積分関数は μ に関しほとんど至るところ正であることから、 $\mu(E) = 0$ でなければならない¹⁾。よって、 $P_1 \ll \mu$ であることとあわせて $P_1(E) = 0$ が従う。 □

🔗 演習問題 0.3. 正規分布族は 2 より小さい次元の実現を持つか？

演習問題 0.3 の解答. 条件 (as-a), (as-b) を確かめれば, 2 が最小であることがわかる。[TODO]

□

指数型分布族の定義の \mathbb{R}^m を有限次元ベクトル空間 V に置き換えてみる。発表時点では \mathbb{R}^m で十分だと思っていたが、 \mathbb{R}^m の代わりに V を使うことで、議論を簡潔にできるというメリットが指摘によりわかった。

定義 0.2 (指数型分布族). X を可測空間、 $\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ とする。 \mathcal{P} が X 上の指数型分布族 (exponential family) であるとは、次が成り立つことをいう: $\exists (V, T, \mu)$ s.t.

(E0) V は有限次元 \mathbb{R} -ベクトル空間である。

(E1) $T: X \rightarrow V$ は可測写像である。

(E2) μ は X 上の σ -有限測度であり、 $\forall p \in \mathcal{P}$ に対し $p \ll \mu$ をみたす。

(E3) $\forall p \in \mathcal{P}$ に対し、 $\exists \theta \in V^\vee$ s.t.

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in X \quad (0.7)$$

である。ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は自然なペアリング $V^\vee \times V \rightarrow \mathbb{R}$ である。

さらに次のように定める:

- (V, T, μ) を \mathcal{P} の実現 (representation) という。
 - m を (V, T, μ) の次元 (dimension) という。
 - T を (V, T, μ) の十分統計量 (sufficient statistic) という。
 - μ を (V, T, μ) の基底測度 (base measure) という。
- 集合 $\Theta_{(V, T, \mu)}$

$$\Theta_{(V, T, \mu)} := \left\{ \theta \in V^\vee \mid \int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy) < +\infty \right\} \quad (0.8)$$

を (V, T, μ) の自然パラメータ空間 (natural parameter space) という。

- 関数 $\psi: \Theta_{(V, T, \mu)} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(\theta) := \log \int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy) \quad (0.9)$$

を (V, T, μ) の対数分配関数 (log-partition function) という。

上の定義に基づいて次の定理を書き直してみる (ただし発表時の修正を踏襲し、「極小実現」の語は「 θ が一意の実現」に置き換えてある)。証明の主な変更点としては、 \mathbb{R}^m を V に置き換えたことによってノルムが使えなくなるため、かわりに annihilated を使うようになっている。証明は [Yos, Lemma 21] を参考にした。

定理 0.3 (「 θ が一意の実現」の存在). X を可測空間、 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ を X 上の指数型分布族とする。このとき、 \mathcal{P} の「 θ が一意の実現」が存在する。

1) ほとんど至るところ正の値をとる関数 $f > 0$ に対し $X = f^{-1}((1, +\infty] \cup (1/2, 1] \cup \dots \cup (1/n, 1/(n-1)] \cup \dots)$ と表せることを使って示せる。

証明 (V, T, μ) は \mathcal{P} の実現のうちで次元が最小のものであるとする。 (V, T, μ) の次元 (m とおく) が 0 ならば V^\vee は 1 点集合だから証明は終わる。

以下 $m \geq 1$ の場合を考え、 (V, T, μ) が「 θ が一意の実現」であることを示す。背理法のために (V, T, μ) が「 θ が一意の実現」でないこと、すなわちある $p_0 \in \mathcal{P}$ および $\theta_0, \theta'_0 \in V^\vee$, $\theta_0 \neq \theta'_0$ が存在して

$$\exp(\langle \theta_0, T(x) \rangle - \psi(\theta_0)) = \frac{dp_0}{d\mu}(x) = \exp(\langle \theta'_0, T(x) \rangle - \psi(\theta'_0)) \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.10)$$

が成り立つことを仮定する。証明の方針としては、次元 $m-1$ の実現 (V', T', μ) を具体的に構成することにより、 (V, T, μ) の次元 m が最小であることとの矛盾を導く。

さて、式 (0.10) を整理して

$$\langle \theta_0 - \theta'_0, T(x) \rangle = \psi(\theta_0) - \psi(\theta'_0) \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.11)$$

を得る。表記の簡略化のために $\theta_1 := \theta_0 - \theta'_0 \in V^\vee$, $r := \psi(\theta_0) - \psi(\theta'_0) \in \mathbb{R}$ とおけば

$$\langle \theta_1, T(x) \rangle = r \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.12)$$

を得る。ここで $V' := (\mathbb{R}\theta)^\perp = \{v \in V \mid \langle \theta, v \rangle = 0\}$ とおき、次の claim を示す。

Claim ある可測写像 $T': \mathcal{X} \rightarrow V'$ および $v_0 \in V$ が存在して $T(x) = T'(x) + v_0$ (μ -a.e. x) が成り立つ。

(\because) いま背理法の仮定より $\theta_1 \neq 0$ であるから、 θ_1 を延長した V^\vee の基底 $\theta_1, \dots, \theta_m$ が存在する。このとき、 $\theta_1, \dots, \theta_m$ を双対基底に持つ V の基底 v_1, \dots, v_m が存在する。この基底 v_1, \dots, v_m に関する T の成分表示を $T(x) = \sum_{i=1}^m T^i(x) v_i$, $T^i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ とおくと、(0.12) より $T^1(x) = \langle \theta_1, T(x) \rangle = r$ (μ -a.e. x) が成り立つ。そこで $v_0 := r v_1 \in V$ とおくと $\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0$ (μ -a.e. x) が成り立つから、可測写像 $T': \mathcal{X} \rightarrow V'$ を

$$T'(x) := \begin{cases} T(x) - v_0 & (\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (0.13)$$

と定めることができる。この T, v_0 が求めるものである。 //

(V', T', μ) が \mathcal{P} の実現であることを示す。定義 0.2 の条件 (E0)-(E2) は明らかに成立しているから、あとは条件 (E3) を確認すればよい。そこで $p \in \mathcal{P}$ とする。いま (V, T, μ) が \mathcal{P} の実現であることより、ある $\theta \in V^\vee$ が存在して

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp(\langle \theta, T(x) \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T(y) \rangle) \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.14)$$

が成り立つ。 T', v_0 を用いて式変形すると、 μ -a.e. x に対し

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp(\langle \theta, T(x) \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T(y) \rangle) \mu(dy)} \quad (0.15)$$

$$= \frac{\exp(\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T'(y) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle) \mu(dy)} \quad (0.16)$$

$$= \frac{\exp(\langle \theta, T'(x) \rangle)}{\int_{\mathcal{X}} \exp(\langle \theta, T'(y) \rangle) \mu(dy)} \quad (0.17)$$

が成り立つ。したがって (V', T', μ) は条件 (E3) も満たし、 \mathcal{P} の実現であることがいえた。 (V', T', μ) は次元 $m-1$ だから (V, T, μ) の次元 m の最小性に矛盾する。背理法より (V, T, μ) は \mathcal{P} の「 θ が一意の実現」である。

□

1 参考文献

[Yos] Taro Yoshino, **bn1970.pdf**, Dropbox.