振り返りと導入

前回は自然パラメータ空間に Fisher 計量を定義した。本稿では次のことを行う:

- 最小次元実現の間のアファイン変換の一意存在を述べる。
- 指数型分布族 $\mathcal{P}$ 自体に構造を入れる。

$\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族とする。新たな用語として次の 2 つを導入しておく。

定義 0.1 (自然パラメータ付け).

$$P_{(V,T,\mu)} \colon V^\vee \to \mathcal{P}(\mathcal{X}), \quad \theta \mapsto \exp(\langle \theta, T(x) \rangle - \psi(\theta))\, \mu(dx) \tag{0.1}$$

を (V, T, μ) による $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の**自然パラメータ付け (natural parametrization)** という。$P_{(V,T,\mu)}$ を P と略記することがある。

定義 0.2 (真パラメータ空間).

$$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)} := P^{-1}(\mathcal{P}) \tag{0.2}$$

を $\mathcal{P}$ の (V, T, μ) に関する**真パラメータ空間 (strict parameter space)** という。

1　最小次元実現の間のアファイン変換

本節の目標は、最小次元実現の間のアファイン変換の一意存在を述べた定理 1.10 の証明である。本節では、ステートメントを簡潔にするために圏の言葉を用いる。

命題-定義 1.1 ($\mathcal{P}$ の実現とアファイン写像の圏). 次のデータにより圏が定まる:

- 対象: $\mathcal{P}$ の実現 (V, T, μ) 全体
- 射: (V, T, μ) から (V', T', μ') への射は、V から V' への全射アファイン写像 (L, b), $L \in \mathrm{Lin}(V, V')$, $b \in V'$ であって $T'(x) = L(T(x)) + b$ μ-a.e.x をみたすもの
- 合成: アファイン写像の合成 $(L, b)(K, c) = (LK, Lc + b)$

この圏を**$\mathcal{P}$ の実現の圏**と呼び、$\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ と書く。

証明　示すべきことは、射の合成が射であること、恒等射の存在、結合律の 3 点である。射の合成が射であることは、全射と全射の合成が全射であることと、$\mu \ll \mu'$ かつ $\mu' \ll \mu$ が成り立つことより従う。

また、(V, T, μ) の恒等射は明らかに恒等写像 $(\mathrm{id}_V, 0)$ であり、結合律はアファイン写像の合成の結合律より従う。 □

最小次元実現を特徴づける 2 つの条件を導入する。

定義 1.2 (Affine span 条件). $\mathcal{P}$ の実現 (V, T, μ) に関する条件

(1)　$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ を affine span する。

が成り立つとき、(V, T, μ) は **affine span 条件**をみたすという。

命題-定義 1.3 (単射性条件). $\mathcal{P}$ の実現 (V, T, μ) に関する次の条件は同値である:

(1) $P\colon V^\vee \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ は単射である。
(2) $\forall\theta \in V^\vee$ に対し「$\langle\theta, T(x)\rangle = \mathrm{const.}$ μ-a.e.$x \implies \theta = 0$」が成り立つ。
(3) V の任意の真アファイン部分空間 W に対し、「$T(x) \in W$ μ-a.e.x でない」が成り立つ。

これらの条件が成り立つとき、(V, T, μ) は**単射性条件**をみたすという。

証明 (2) $\iff$ (3) は `0502_資料.pdf` の命題 2.2 で示した。(1) $\iff$ (2) は `0523_板書.pdf` に書き留めてある。 □

注意 1.4 (条件をみたさない例). 単射性条件をみたすが affine span 条件をみたさない例として `0425_資料.pdf` の例 4.4 がある。Affine span 条件をみたさないことは後の定理 1.8 から従う。

[TODO] affine span 条件をみたすが単射性条件をみたさない例?

補題 1.5 (基底測度だけを変化させた対象からの射). (V, T, μ') から (V, T, μ) への射が存在する。

証明 $(\mathrm{id}, 0)$ が求める射である。 □

補題 1.6 (基底測度以外を変化させた対象からの射). (V, T, μ) が affine span 条件と単射性条件をみたすならば、任意の対象 (V', T', μ) から (V, T, μ) への射が存在する。

証明 P, P' の右逆写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}$ および $\theta'\colon \mathcal{P} \to \Theta'^{\mathcal{P}}$ をひとつずつ選んでおく。

Step 1: 射 (L, b) の構成　まず (V, T, μ) の affine span 条件より、$V^\vee$ のあるアファイン基底 $a^i \in \Theta^{\mathcal{P}}$ $(i = 0, \dots, m)$ が存在して、$e^i := a^i - a^0$ $(i = 1, \dots, m)$ は $V^\vee$ の基底となる。そこで $p^i := P(a^i) \in \mathcal{P}$ $(i = 0, \dots, m)$ とおき、(L, b) を次のように定める:

$$L\colon V' \to V, \quad t' \mapsto \left\langle \theta'(p^i) - \theta'(p^0), t' \right\rangle e_i \tag{1.1}$$
$$b := \left\{ \psi(\theta(p^i)) - \psi(\theta(p^i)) - \psi(\theta'(p^0)) + \psi(\theta'(p^0)) \right\} e_i \in V \tag{1.2}$$

示すべきことは、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$T(x) = L(T'(x)) + b \quad \mu\text{-a.e.}x \tag{1.3}$$

が成り立つことと、(L, b) が全射となることである。

Step 2: $T(x) = L(T'(x)) + b$ の証明　指数型分布族の定義より、任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し、ある μ-零集合 $N_p \subset \mathcal{X}$ が存在して

$$\exp(\langle\theta(p), T(x)\rangle - \psi(\theta(p))) = \frac{dp}{d\mu}(x) = \exp(\langle\theta'(p), T'(x)\rangle - \psi'(\theta'(p))) \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus N_p) \tag{1.4}$$

$$\therefore \qquad \langle\theta(p), T(x)\rangle - \langle\theta'(p), T'(x)\rangle = \psi(\theta(p)) - \psi'(\theta'(p)) \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus N_p) \tag{1.5}$$

が成り立つ。とくに各 $i = 0, \dots, m$ に対し

$$\left\langle\theta(p^i), T(x)\right\rangle - \left\langle\theta'(p^i), T'(x)\right\rangle = \psi(\theta(p^i)) - \psi'(\theta'(p^i)) \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus N_{p^i}) \tag{1.6}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} &\left\langle\theta(p^i) - \theta(p^0), T(x)\right\rangle - \left\langle\theta'(p^i) - \theta'(p^0), T'(x)\right\rangle \\ &= \psi(\theta(p^i)) - \psi'(\theta'(p^i)) - \psi(\theta(p^0)) + \psi'(\theta'(p^0)) \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus (N_{p^0} \cup N_{p^i})) \end{aligned} \tag{1.7}$$

となる。ここで (V, T, μ) の単射性条件より $\theta(p^i) = \theta(P(a^i)) = a^i$ が成り立つから、上の式より

$$\begin{aligned} \left\langle e^i, T(x)\right\rangle = &\left\langle\theta'(p^i) - \theta'(p^0), T'(x)\right\rangle \\ &+ \psi(\theta(p^i)) - \psi'(\theta'(p^i)) - \psi(\theta(p^0)) + \psi'(\theta'(p^0)) \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus (N_{p^0} \cup N_{p^i})) \end{aligned} \tag{1.8}$$

したがって

$$T(x) = L(T'(x)) + b \qquad (x \in \mathcal{X} \setminus (N_{p^0} \cup \cdots \cup N_{p^m})) \tag{1.9}$$

が成り立つ。これで Step 2 が完了した。

Step 3: (L, b) が全射であることの証明　L が全射であることをいえばよい。もし L が全射でなかったとすると、$T(x) = L(T'(x)) + b \in \operatorname{Im} L + b$ が p-a.e.x すなわち μ-a.e.x に対し成り立つことになるが、$\operatorname{Im} L + b$ は V の真アファイン部分空間だから (V, T, μ) の単射性条件に反する。したがって L は全射である。 □

補題 1.7 (2 条件をみたす対象への射). (V, T, μ) が affine span 条件と単射性条件をみたすならば、任意の対象 (V', T', μ') から (V, T, μ) への射が存在する。

証明　上の 2 つの補題より存在する 2 つの射 $(V', T', \mu') \to (V', T', \mu) \to (V, T, \mu)$ を合成すればよい。 □

定理 1.8 (最小次元実現の特徴づけ). $\mathcal{P}$ の実現 (V, T, μ) に関する次の条件は同値である:

(1) (V, T, μ) は $\mathcal{P}$ の最小次元実現である。
(2) (V, T, μ) は単射性条件と affine span 条件をみたす。

証明　(1) ⇒(2)　以前示した。[TODO] affine span 条件は示してない?

(2) ⇒(1)　(V, T, μ) が単射性条件と affine span 条件をみたすとする。$\mathcal{P}$ の任意の実現 (V', T', μ') に対し、補題 1.7 より全射線型写像 $L : V' \to V$ が存在するから、$\dim V \leq \dim V'$ である。したがって V は $\mathcal{P}$ の最小次元実現である。 □

補題 1.9 (自然パラメータの変換). (V, T, μ) が affine span 条件と単射性条件をみたし、(V', T', μ') が単射性条件をみたすならば、射 $(L, b)\colon (V', T', \mu') \to (V, T, \mu)$ がただひとつ存在して

$$\theta'(p) = {}^tL(\theta(p)) \qquad (\forall p \in \mathcal{P}) \tag{1.10}$$

が成り立つ。ただし写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ および $\theta'\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ は P, P' の逆写像である。

証明 上の証明の続きで、すべての $x \in \mathcal{X} \setminus N$ に対し

$$\langle \theta(p), L(T'(x)) + b \rangle - \langle \theta'(p), T'(x) \rangle = \psi(\theta(p)) - \psi'(\theta'(p)) \tag{1.11}$$

$$\therefore \quad \langle {}^tL(\theta(p)), T'(x) \rangle - \langle \theta'(p), T'(x) \rangle = \psi(\theta(p)) - \psi'(\theta'(p)) - \langle \theta(p), b \rangle \tag{1.12}$$

$$\therefore \quad \langle {}^tL(\theta(p)) - \theta'(p), T'(x) \rangle = \psi(\theta(p)) - \psi'(\theta'(p)) - \langle \theta(p), b \rangle \tag{1.13}$$

が成り立つ。(V',T',μ) の単射性条件より ${}^tL(\theta(p)) = \theta'(p)$ が成り立つ。

(V,T,μ) の affine span 条件より、${}^tL$ による $V^\vee$ の基底の写り方が決まるから、${}^tL$ したがって L は $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ に対し一意に決まる。 □

定理 1.10 (最小次元実現の間のアファイン変換)**.** $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ がともに最小次元実現ならば、同型射 $(V,T,\mu) \to (V',T',\mu')$ がただひとつ存在する。

証明 上の系から存在する射 $(L,b)\colon (V',T',\mu') \to (V,T,\mu)$ および $(K,c)\colon (V,T,\mu) \to (V',T',\mu')$ について、(K,c) が (L,b) の逆射であることを示せばよい。いま $V^\vee$ の基底 e^i $(i = 1,\dots,m)$ に対し ${}^tL\,{}^tKe'^i = e'^i$ が成り立つから、${}^tL$ は全射かつ単射なので線型同型写像である。したがって L も線型同型写像であり、圏 $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の射の定義から (L,b) は (K,c) を逆射とする同型射である。 □

注意 1.11 (正規分布族の最小次元実現)**.** `0425_資料.pdf` の例 3.2 でみた正規分布族の例は最小次元実現である。単射性条件は、(θ_1,θ_2) が異なれば平均か分散の少なくとも一方が異なることになり、異なる確率分布を与えることからわかる。Affine span 条件も明らか。

2 指数型分布族の構造

$\mathcal{P}$ には自然な多様体構造が定まることをみる。

命題-定義 2.1. 指数型分布族 $\mathcal{P}$ に関し、次は同値である:

(1) ある最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。
(2) すべての最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。

$\mathcal{P}$ がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、$\mathcal{P}$ は**開 (open)** であるという。

証明 (1) ⇒ (2) は定理 1.10 より従う。(2) ⇒ (1) は最小次元実現が存在することから従う。 □

命題-定義 2.2. $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V,T,μ) をひとつ選ぶと、自然パラメータ付け P により、$\mathcal{P}$ 上に多様体構造と平坦アファイン接続を定めることができる。この多様体構造および平坦アファイン接続は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ の**自然な多様体構造**および**自然な平坦アファイン接続**と呼ぶ。

証明 下の図式の可換性と、P^{-1}, P'^{-1} が diffeo. であること、${}^tL$ が線型同型であることから従う。

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}, \mathcal{U}_{(V,T,\mu)}) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & (\mathcal{P}, \mathcal{U}_{(V',T',\mu')}) \\ {\scriptstyle P^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P'^{-1}} \\ \Theta^{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\quad {}^tL \quad} & \Theta'^{\mathcal{P}} \end{array} \tag{2.1}$$

□

命題-定義 2.3 ($\mathcal{P}$ の Fisher 計量). $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量 g を θ で引き戻して $\mathcal{P}$ 上の Riemann 計量 $\theta^* g$ が定まる。この計量は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ 上の **Fisher 計量**と呼ぶ。

証明 期待値と分散のペアリングの命題と同様の議論により、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = (L \otimes L) g'_{\theta'(p)}$ が成り立つ。

示すべきことは $\theta^* g = \theta'^* g'$ が成り立つことである。各 $p \in \mathcal{P}$, $u, v \in T_p\mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned}
(\theta^* g)_p(u, v) &= g_{\theta(p)}(d\theta_p(u), d\theta_p(v)) && (2.2)\\
&= \left\langle g_{\theta(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle && (2.3)\\
&= \left\langle (L \otimes L) g'_{\theta'(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle && (2.4)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, {}^tL \circ d\theta_p(u) \otimes {}^tL \circ d\theta_p(v) \right\rangle && (2.5)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d({}^tL \circ \theta)_p(u) \otimes d({}^tL \circ \theta)_p(v) \right\rangle && (2.6)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d\theta'_p(u) \otimes d\theta'_p(v) \right\rangle && (2.7)\\
&= g'_p(d\theta'_p(u), d\theta'_p(v)) && (2.8)\\
&= (\theta'^* g')_p(u, v) && (2.9)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

今後の予定

- Amari-Chentsov テンソルを定義する。
- 正規分布族の場合の具体的な計算を行う (Fisher 計量、Levi-Civita 接続、測地線など)。

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[Yos] Taro Yoshino, **bn1970.pdf**, Dropbox.