

発表中にコメントがあった事柄を整理する。

各 $\omega \in V^\vee$ に対し、 $\langle \omega, f \rangle$ を f の ω の向きの成分、 $\text{Var}[\langle \omega, f \rangle]$ を f の ω の向きの分散と呼ぶことにすれば、次の命題が成り立つ。

命題 0.1. (1) f の分散が 0 であることと、すべての $\omega \in V^\vee$ に対し f の ω の向きの分散が 0 であることは同値である。
 (2) $\omega \in V^\vee$ に関し、 f の ω の向きの分散が 0 であることと、 f の ω の向きの成分が a.e. 定数であることは同値である。
 (3) f が a.e. 定数であることと、すべての $\omega \in V^\vee$ に対し f の ω の向きの成分が a.e. 定数であることは同値である。

証明 [TODO]

□

$\text{Var}[f]$ を行列とみなせば、 f の ω の向きの分散が 0 であることは次のように理解できる。

命題 0.2. V の基底を固定することで $\text{Var}[f] \in M_m(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}^m$ とみなせば、 $\text{Var}[\langle \omega, f \rangle] = 0$ であることと、 $\text{Var}[f]\omega = 0$ であることは同値である。

補題 0.3. $A \in M_m(\mathbb{R})$ を半正定値対称行列とする¹⁾。このとき、 $v \in \mathbb{R}^m$ に関し $v^t A v = 0$ であることと、 $A v = 0$ であることは同値である。

証明 [TODO]

□

命題の証明. [TODO]

□

条件 A はアファイン部分空間の言葉で特徴づけることができる。

命題 0.4. 実現 (V, T, μ) に関し次は同値である:

- (1) (V, T, μ) は条件 A をみたす。
- (2) T の像が V をほとんど affine span する [TODO] 定義?。

証明 [TODO]

□

定義 0.5.

$$\Theta'_{(V, T, \mu)} := \{\theta \in \Theta_{(V, T, \mu)} \mid P_\theta \in \mathcal{P}\} \quad (0.1)$$

を \mathcal{P} の実現 (V, T, μ) の真のパラメータ空間 (strict parameter space) と呼ぶ。

1) 半正定値性を除いた場合の反例としては $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がある。

命題-定義 0.6. 指数型分布族 \mathcal{P} に関し、次は同値である:

- (1) ある最小次元実現 (V, T, μ) に対し、 $\Theta'_{(V, T, \mu)}$ は V^\vee で開である。
- (2) すべての最小次元実現 (V, T, μ) に対し、 $\Theta'_{(V, T, \mu)}$ は V^\vee で開である。

\mathcal{P} がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、 \mathcal{P} は**開 (open)** であるという。

証明 [TODO]

□

命題 0.7. (V, T, μ) を \mathcal{P} の最小次元実現とする。このとき、写像 $\Theta'_{(V, T, \mu)} \rightarrow \mathcal{P}$, $\theta \mapsto P_\theta$ は全単射である。

証明 全射性は Θ' の定義より従う。単射性は [0502_資料.pdf](#) の命題 2.2(2) より従う。

□

命題-定義 0.8. \mathcal{P} は開であるとする。 \mathcal{P} の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、上の命題の全単射により \mathcal{P} 上に多様体構造と平坦アファイン接続を定めることができる。この多様体構造および平坦アファイン接続は最小次元実現のとり方によらない。これを \mathcal{P} の**自然な多様体構造**および**自然な平坦アファイン接続**と呼ぶ。

証明 [TODO] cf. [BN78, Lem. 8.1]. ちなみに [BN70] の証明は RN 微分の a.e. 一致の扱いに誤りがあるらしい

□

命題-定義 0.9 (\mathcal{P} の Fisher 計量). \mathcal{P} は開であるとする。 \mathcal{P} の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、 $\Theta'_{(V, T, \mu)}$ 上の Fisher 計量を \mathcal{P} 上の Riemann 計量とみなすことができる。この計量は最小次元実現のとり方によらない。これを \mathcal{P} の**Fisher 計量**と呼ぶ。

証明 [TODO]

□

命題 0.10. 条件 A が成り立つことと $\text{Hess } \psi$ が正定値であることは同値である。

証明 [TODO]

□

定義 0.11 (スコア関数).

$$p: \Theta \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, x) \mapsto \exp(\langle \theta, T(x) \rangle - \psi(\theta)) \quad (0.2)$$

$$l: \Theta \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta, x) \mapsto \log p(\theta, x) \quad (0.3)$$

$$dl: \Theta \times X \rightarrow V, \quad (\theta, x) \mapsto dl_\theta \quad (0.4)$$

$$dl^2: \Theta \times X \rightarrow V \otimes V, \quad (\theta, x) \mapsto dl_\theta^2 \quad (0.5)$$

$$E[dl^2]: \Theta \rightarrow V \otimes V, \quad \theta \mapsto E_{P_\theta}[dl^2] \quad (0.6)$$

ただし dl の値域が V であるのは、各 θ ごとに $dl_\theta \in T_\theta^\vee \Theta$ を $V^{\vee\vee} = V$ の元とみなしている。

命題 0.12.

$$E[dl^2] = \text{Hess } \psi \quad (0.7)$$

証明 [TODO]

□

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).