# 目次

# 第 1 章　確率論

## 1　Radon-Nikodým の定理と Hölder の不等式

[TODO] $\sigma$-加法族は省略して書く

**定義 1.1** (絶対連続). $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を可測空間、$\mu, \nu$ を $\mathcal{X}$ 上の測度とする。$\nu$ が $\mu$ に関し**絶対連続 (absolutely continuous)** であるとは、任意の $E \in \mathcal{B}$ に対し $\mu(E) = 0$ ならば $\nu(E) = 0$ が成り立つことをいう。

**定理 1.2** (Radon-NIkodým の定理). $(X, \mathcal{B})$ を可測空間、$\mu$ を $X$ 上の $\sigma$-有限測度、$\nu$ を $X$ 上の測度とする。このとき、$\nu$ が $\mu$ に関して絶対連続であるための必要十分条件は、$\mu$-a.e. $x \in X$ に対し定義された可積分関数 $f$ が存在して

$$\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \quad (E \in \mathcal{B}) \tag{1.1}$$

が成り立つことである。この $f$ を $\mu$ に関する $\nu$ の **Radon-Nikodým 微分 (Radon-Nikodým derivative)** といい、$\dfrac{d\nu}{d\mu}$ と書く。

**証明**　関数族の sup として $f$ を構成する。 □

**命題 1.3** (Hölder の不等式). $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を可測空間、$\mu$ を $\mathcal{X}$ 上の測度とする。$1 < p < \infty$、$q = p(p-1)^{-1}$、$f$ を $p$ 乗 $\mu$-可積分関数、$g$ を $q$ 乗 $\mu$-可積分関数とする。このとき、$fg$ は $\mu$-可積分であり、かつ

$$\int_X |fg| \mu(dx) \le \left( \int_X |f|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q \mu(dx) \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2}$$

が成り立つ。

**証明**　Young の不等式を使う。 □

## 2　確率論の基本事項

### 2.1　確率空間

**定義 2.1** (確率空間). 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ であって

(1)　各 $E \in \mathcal{F}$ に対し $P(E) \ge 0$
(2)　$P(\Omega) = 1$

をみたすものを**確率空間 (probability space)** といい、$P$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度 (probability measure)** あるいは**確率分布 (probability distribution)** という。

**定義 2.2** (確率変数). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ を可測空間とする。可測関数 $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ に値をもつ**確率変数 (random variable; r.v.)** という。

**定義 2.3** (確率変数の確率分布). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ を確率変数とする。このとき、写像

$$P^X\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty), \quad E \mapsto P(X^{-1}(E)) \quad (E \in \mathcal{A}) \tag{2.1}$$

は $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 上の確率測度となる。これを **$X$ の確率分布 (probability distribution of $X$)** という。

$X$ の確率分布が $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 上のある確率分布 $\nu$ に等しいとき、$X$ は **$\nu$ に従う** という。

**定義 2.4** (確率密度関数). $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ を可測空間、$\mu$ を $\mathcal{X}$ 上の $\sigma$-有限測度、$\nu$ を $\mu$ に関し絶対連続な $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 上の確率測度とする。このとき、$\nu$ の $\mu$ に関する Radon-NIkodým 微分 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ を、$\nu$ の**確率密度関数 (probability density function; PDF)** という。

# 3 期待値と分散

**定義 3.1** (ベクトル値関数の積分). $\mathcal{X}$ を可測空間、$V$ を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$p$ を $\mathcal{X}$ 上の確率測度、$f\colon \mathcal{X} \to V$ を可測写像とする。$V$ のある基底 $e^1, \ldots, e^m$ が存在して、この基底に関する $f$ の成分 $f_i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ がすべて $p$-可積分であるとき、$f$ は $p$ に関し**可積分 (integrable)** であるという (well-defined 性はこのあと示す)。

$f$ が $p$-可積分であるとき、$f$ の $p$ に関する**積分 (integral)** を

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\, p(dx) := \left( \int_{\mathcal{X}} f_i(x)\, p(dx) \right) e^i \in V \tag{3.1}$$

で定義する (well-defined 性はこのあと示す)。

ただし $\dim V = 0$ の場合は $f$ は $p$-可積分で $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} f(x)\, p(dx) = 0$ と約束する。

**注意 3.2.** $V = \mathbb{R}$ の場合は $\mathbb{R}$-値関数の通常の積分に一致する。

**well-defined 性の証明.** $f$ が $p$-可積分であるかどうかは $V$ の基底の取り方によらないことを示す。そこで、$e^1, \ldots, e^m$ および $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^m$ をそれぞれ $V$ の基底とし、それぞれの基底に関する $f$ の成分を $f_i$, $\tilde{f}_i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおく。示すべきことは「$\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ がすべて $L^1(\mathcal{X}, p)$ に属するならば $f_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ もすべて $L^1(\mathcal{X}, p)$ に属する」ということである。このことは、$L^1(\mathcal{X}, p)$ が $\mathbb{R}$-ベクトル空間であることと、$f_i$ たちが $\tilde{f}_i$ たちの $\mathbb{R}$-線型結合であることから従う。よって $f$ が $p$-可積分であるかどうかは $V$ の基底の取り方によらない。

次に、$f$ の $p$ に関する積分は $V$ の基底の取り方によらないことを示す。$e^i$, $\tilde{e}^i$ をそれぞれ $V$ の基底とする。いま、ある $a_i^j \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が存在して $f_i = a_i^j \tilde{f}_j$ $(i = 1, \ldots, m)$ および $\tilde{e}^j = a_i^j e^i$ $(j = 1, \ldots, m)$ が成り立っているから、

$$\left( \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}_j\, p(dx) \right) \tilde{e}^j = \left( \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}_j\, p(dx) \right) a_i^j e^i \tag{3.2}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{X}} a_i^j \tilde{f}_j \, p(dx)\right) e^i \quad (\text{積分の } \mathbb{R}\text{-線型性}) \tag{3.3}$$

$$= \left(\int_{\mathcal{X}} f_i \, p(dx)\right) e^i \tag{3.4}$$

が成り立つ。これで積分の well-defined 性も示せた。 □

**定義 3.3** (期待値). $f$ が $p$-可積分であるとき、$f$ の $p$ に関する**期待値 (expected value)** $E_p[f]$ を

$$E_p[f] := \int_{\mathcal{X}} f(x) \, p(dx) \in V \tag{3.5}$$

と定義する。

**補題 3.4** (分散の存在条件). 可測写像 $f\colon \mathcal{X} \to V$ に関し次の 2 条件は同値である:

(1) $f$ および $(f - E_p[f]) \otimes (f - E_p[f])$ が $p$-可積分

(2) $f \otimes f$ が $p$-可積分

この補題の証明には次の事実を用いる。

**事実 3.5.** $\mathcal{Y}$ を可測空間、$\mu$ を $\mathcal{Y}$ 上の有限測度とする。このとき、任意の実数 $1 < p < +\infty$ に対し $L^p(\mathcal{Y}, \mu) \subset L^1(\mathcal{Y}, \mu)$ が成り立つ。

**補題 3.4 の証明.** $\dim V = 0$ の場合は明らかに成り立つ。以後 $\dim V \geq 1$ の場合を考える。$V$ の基底 $e^1, \ldots, e^m$ をひとつ選んで固定し、この基底に関する $f$ の成分を $f_i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいておく。

(1) ⇒(2) $f$ が $p$-可積分であることより $E_p[f] \in V$ が存在するから、これを $a := E_p[f]$ とおき、$V$ の基底 $e^i$ に関する $a$ の成分を $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいておく。示すべきことは、すべての $i, j = 1, \ldots, m$ に対し $f_i f_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ が成り立つことである。そこで次のことに注意する:

(i) $p$ が確率測度であることより $1 \in L^1(\mathcal{X}, p)$ である。

(ii) $f$ が $p$-可積分であることより $f_i \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ である。

(iii) $(f - a) \otimes (f - a)$ が $p$-可積分であることより $(f_i - a_i)(f_j - a_j) = f_i f_j - a_i f_j - a_j f_i + a_i a_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ である。

したがって、$L^1(\mathcal{X}, p)$ が $\mathbb{R}$-ベクトル空間であることとあわせて $f_i f_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が成り立つ。よって $f \otimes f$ は $p$-可積分である。

(2) ⇒(1) まず $f$ が $p$-可積分であることを示す。そのためには、$f_i \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ が成り立つことをいえばよい。いま $f \otimes f$ が $p$-可積分であるから、$f_i f_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が成り立つ。とくにすべての $i = 1, \ldots, m$ に対し $f_i \in L^2(\mathcal{X}, p)$ が成り立つから、事実 3.5 とあわせて $f_i \in L^1(\mathcal{X}, p)$ が成り立つ。よって $f$ は $p$-可積分である。

つぎに $(f - E_p[f]) \otimes (f - E_p[f])$ が $p$-可積分であることを示す。いま $f$ が $p$-可積分であることより $E_p[f] \in V$ が存在するから、これを $a := E_p[f]$ とおき、$V$ の基底 $e^i$ に関する $a$ の成分を $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいておく。示したいことは、$(f_i - a_i)(f_j - a_j) = f_i f_j - a_i f_j - f_i a_j + a_i a_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が成り立

つことである。そこで次のことに注意する:

(i) $p$ が確率測度であることより $1 \in L^1(\mathcal{X}, p)$ である。
(ii) $f$ が $p$-可積分であることより $f_i \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ である。
(iii) $f \otimes f$ が $p$-可積分であることより $f_i f_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ である。

したがって、$L^1(\mathcal{X}, p)$ が $\mathbb{R}$-ベクトル空間であることとあわせて $(f_i - a_i)(f_j - a_j) = f_i f_j - a_i f_j - f_i a_j + a_i a_j \in L^1(\mathcal{X}, p)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ が成り立つ。よって $(f - E_p[f]) \otimes (f - E_p[f])$ は $p$-可積分である。 □

この補題を踏まえて分散を定義する。

**定義 3.6** (分散). $f \otimes f : \mathcal{X} \to V \otimes_{\mathbb{R}} V$ が $p$-可積分であるとき、$f$ の $p$ に関する**分散 (variance)** $V_p[f]$ を

$$V_p[f] := E_p[(f - E_p[f]) \otimes (f - E_p[f])] \in V \otimes V \tag{3.6}$$

と定義する (補題 3.4 よりこれは存在する)。

**例 3.7** (正規分布族の十分統計量の期待値と分散). $\mathcal{X} = \mathbb{R}$、$\lambda$ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし、正規分布族

$$\mathcal{P} := \left\{ P_{(\mu,\sigma^2)}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \lambda(dx) \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0 \right\} \tag{3.7}$$

と $\mathcal{P}$ の実現 $(V, T, \mu)$, $V = \mathbb{R}^2$, $T : \mathcal{X} \to V$, $x \mapsto {}^t(x, x^2)$ を考える。各 $P = P_{(\mu,\sigma^2)} \in \mathcal{P}$ に対し、$T$ の期待値 $E_p[T] \in V$ と分散 $V_p[T] \in V \otimes V$ を求めてみる。ただし、以下 $x, \ldots, x^4$ の $P$ に関する可積分性は仮定する (可積分性は次回示す)。

まず期待値を求める。求めるべきものは、$V = \mathbb{R}^2$ の標準基底を $e_1, e_2$ として

$$E_P[T] = E_P[x]\, e_1 + E_P[x^2]\, e_2 \tag{3.8}$$

である。各成分は $E_P[x] = \mu$, $E_P[x^2] = E_P[(x-\mu)^2] + E_P[x]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \in \mathbb{R}$ と求まるから

$$E_P[T] = \mu\, e_1 + (\sigma^2 + \mu^2)\, e_2 \tag{3.9}$$

である。

次に分散を求める。求めるべきものは

$$V_P[T] = E_P[(T - E_P[T]) \otimes (T - E_P[T])] \tag{3.10}$$

である。これを $V \otimes V$ の基底 $e_i \otimes e_j$ $(i, j = 1, 2)$ に関して成分表示すると

$$\begin{aligned} V_P[T] = {} & E_P[(x-\mu)^2]\, e_1 \otimes e_1 && (3.11)\\ & + E_P[(x-\mu)(x^2 - (\sigma^2 + \mu^2))]\,(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) && (3.12)\\ & + E_P[(x^2 - (\sigma^2 + \mu^2))^2]\, e_2 \otimes e_2 && (3.13) \end{aligned}$$

と表される。そこで原点周りのモーメント $a_3 := E_P[x^3]$, $a_4 := E_P[x^4] \in \mathbb{R}$ とおくと、各成分は

$$E_P[(x-\mu)^2] = \sigma^2 \tag{3.14}$$

$$E_P[(x-\mu)(x^2 - (\sigma^2 + \mu^2))] = a_3 - \mu(\sigma^2 + \mu^2) \tag{3.15}$$

$$E_P[(x^2-(\sigma^2+\mu^2))^2] = a_4-(\sigma^2+\mu^2)^2 \tag{3.16}$$

と求まる。したがって $V_P[T]$ は

$$\begin{aligned} V_P[T] &= \sigma^2\, e_1\otimes e_1 && (3.17)\\ &\quad + (a_3-\mu(\sigma^2+\mu^2))\,(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1) && (3.18)\\ &\quad + (a_4-(\sigma^2+\mu^2)^2)\, e_2\otimes e_2 && (3.19)\end{aligned}$$

と表される。最後に原点周りのモーメント $a_3, a_4$ を具体的に求める。これは期待値周りのモーメントの計算に帰着される。そこで標準正規分布を $P_0 := P_{(0,1)} \in \mathcal{P}$ とおくと、$E_P\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^k\right] = E_{P_0}[x^k]$ $(k=3,4)$ より $E_P[(x-\mu)^k] = \sigma^k E_{P_0}[x^k]$ $(k=3,4)$ が成り立つ。ここで $P_0$ に関する期待値を部分積分などを用いて直接計算すると $E_{P_0}[x^3]=0,\ E_{P_0}[x^4]=3$ となるから、$E_P[(x-\mu)^3]=0,\ E_P[(x-\mu)^4]=3\sigma^4$ を得る。これらを用いて $a_3, a_4$ を計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= E_P[(x-\mu)^3] && (3.20)\\ &= E_P[x^3]-3E_P[x^2]\mu+3E_P[x]\mu^2-\mu^3 && (3.21)\\ &= a_3-3(\sigma^2+\mu^2)\mu+3\mu^3-\mu^3 && (3.22)\\ &= a_3-3\sigma^2\mu-\mu^3 && (3.23)\\ \therefore\ a_3 &= 3\sigma^2\mu+\mu^3 && (3.24)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} 3\sigma^4 &= E_P[(x-\mu)^4] && (3.25)\\ &= E_P[x^4]-4E_P[x^3]\mu+6E_P[x^2]\mu^2-4E_P[x]\mu^3+\mu^4 && (3.26)\\ &= a_4-4a_3\mu+6(\sigma^2+\mu^2)\mu^2-4\mu^4+\mu^4 && (3.27)\\ &= a_4-6\sigma^2\mu^2-\mu^4 && (3.28)\\ \therefore\ a_4 &= 3\sigma^4+6\sigma^2\mu^2+\mu^4 && (3.29)\end{aligned}$$

を得る。これらを $V_P[T]$ の成分表示に代入して

$$\begin{aligned} V_P[T] &= \sigma^2\, e_1\otimes e_1 && (3.30)\\ &\quad + 2\sigma^2\mu\,(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1) && (3.31)\\ &\quad + (4\sigma^2\mu^2+2\sigma^4)\, e_2\otimes e_2 && (3.32)\end{aligned}$$

となる。行列表示は $\begin{bmatrix}\sigma^2 & 2\sigma^2\mu\\ 2\sigma^2\mu & 4\sigma^2\mu^2+2\sigma^4\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ となり、これは対称かつ正定値である。

**命題 3.8** (期待値・分散とペアリング). $f\colon \mathcal{X}\to V$ を可測写像とする。

(1) $f$ が $p$ に関する期待値を持つならば、任意の $\omega\in V^\vee$ に対し $E_p[\langle\omega, f(x)\rangle] = \langle\omega, E_p[f(x)]\rangle$ が成り立つ。

(2) $f$ が $p$ に関する分散を持つならば、任意の $\omega\in V^\vee$ に対し $\mathrm{Var}_p[\langle\omega, f(x)\rangle] = \langle\omega\otimes\omega, \mathrm{Var}_p[f(x)]\rangle$ が成り立つ。

**証明** (1) $V$ の基底をひとつ選んで固定し、この基底および双対基底に関する $f, \omega$ の成分をそれぞれ $f^i \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ \omega_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, m)$ とおけば、

$$E[\langle \omega, f(x) \rangle] = E[\omega_i f^i(x)] = \omega_i E[f^i(x)] = \langle \omega, E[f(x)] \rangle \tag{3.33}$$

となる。

(2) 表記の簡略化のため $\alpha := E[f] \in V$ とおけば

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\langle \omega, f(x) \rangle] &= E[(\langle \omega, f(x) \rangle - \langle \omega, \alpha \rangle)^2] && (3.34)\\ &= E[\langle \omega, f(x) - \alpha \rangle^2] && (3.35)\\ &= E[\langle \omega \otimes \omega, (f(x) - \alpha)^2 \rangle] && (3.36)\\ &= \langle \omega \otimes \omega, E[(f(x) - \alpha)^2] \rangle && (3.37)\\ &= \langle \omega \otimes \omega, \mathrm{Var}[f(x)] \rangle && (3.38) \end{aligned}$$

となる。 □

**定理 3.9** (分散の半正定値対称性). $f \colon \mathcal{X} \to V$ を可測写像とし、$f$ は $p$ に関する分散を持つとする。このとき、$\mathrm{Var}_p[f] \in V \otimes V$ は対称かつ半正定値である。

**証明** $\mathrm{Var}[f] = E[(f - E[f])^2]$ が対称であることは、写像 $(f - E[f])^2$ が $V \otimes V$ の対称テンソル全体からなるベクトル部分空間に値を持つことから従う。$\mathrm{Var}[f]$ が半正定値であることは、各 $\omega \in V^\vee$ に対し $\mathrm{Var}[f](\omega, \omega) = \langle \omega \otimes \omega, \mathrm{Var}[f] \rangle = \mathrm{Var}[\langle \omega, f(x) \rangle] \geq 0$ より従う。 □

分散が 0 であることの特徴づけを述べておく。

**命題 3.10** (分散が 0 であるための必要十分条件). 可測写像 $f \colon \mathcal{X} \to V$ であって $p$ に関する分散を持つものに関し、次は同値である:

(1) $\mathrm{Var}_p[f] = 0$
(2) $f$ は $p$-a.e. 定数

証明には次の事実を用いる。

**事実 3.11.** $\mathcal{Y}$ を可測空間、$\mu$ を $\mathcal{Y}$ 上の測度とする。このとき、$g \in L^1(\mathcal{Y}, \mu)$ であって $g(y) \geq 0$ $\mu$-a.e. をみたすものに関し、次は同値である:

(1) $\displaystyle\int_{\mathcal{Y}} g(y)\, \mu(dy) = 0$
(2) $g(y) = 0 \quad \mu$-a.e.

□

**命題 3.10 の証明.** $V$ の基底 $e_i\ (i = 1, \ldots, m)$ をひとつ選んで固定し、$f, E[f]$ の成分表示をそれぞれ $f^i \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ および $a^i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, m)$ とおいておく。

(2) ⇒ (1) $f$ が a.e. 定数ならば、$f^i(x) = a^i$ a.e. $(i = 1, \ldots, m)$ したがって $(f^i(x) - a^i)(f^j(x) - a^j) = 0$ a.e. $(i, j =$

$1, \ldots, m)$ である。よって $\displaystyle\int_X (f^i(x) - a^i)(f^j(x) - a^j)\, p(dx) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ だから $\mathrm{Var}[f] = 0$ である。

(1) ⇒(2)　$\mathrm{Var}[f] = 0$ とすると、すべての $i = 1, \ldots, m$ に対し $\displaystyle\int_X (f^i(x) - a^i)^2\, p(dx) = 0$ が成り立つ。よって事実 3.11 より、すべての $i = 1, \ldots, m$ に対し $(f^i(x) - a^i)^2 = 0$ a.e. したがって $f^i(x) = a^i$ a.e. が成り立つ。よって $f$ は a.e. 定数である。 □

# 第 2 章　Hessian

## 1　Hessian

本節では $W$ を $m$ 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)、$U \overset{\text{open}}{\subset} W$ を開部分集合とする。

本節では $U$ 上の $C^\infty$ 関数に対し Hessian を定義したい。そこで、まず $U$ 上にアファイン接続を定義し、それを用いて Hessian を定義する。

### 1.1　$U$ 上のアファイン接続

一般のアファイン接続の平坦性を定義しておく。

**定義 1.1** (平坦アファイン接続). $M$ を多様体、$\nabla$ を $M$ 上のアファイン接続とする。

- $M$ の開部分集合 $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ 上の座標であって、それに関する $\nabla$ の接続係数がすべて $0$ となるものを、$O$ 上の **$\nabla$-アファイン座標 ($\nabla$-affine coordinates)** という。
- 各 $p \in M$ に対し、$p$ のまわりの $\nabla$-アファイン座標が存在するとき、$\nabla$ は $M$ 上**平坦 (flat)** であるという。

今考えている $U$ 上には、次のような平坦アファイン接続が定まる。

**命題-定義 1.2** ($U$ 上の平坦アファイン接続). $U$ 上のアファイン接続 $D\colon \Gamma(TU) \to \Gamma(T^\vee U \otimes TU)$ を、次の規則で well-defined に定めることができる:

- 各 $X \in \Gamma(TU)$ に対し、$W$ の基底が定める $U$ 上の座標 $x^i$ ($i = 1, \ldots, m$) をひとつ選び、
$$DX := dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(T^\vee U \otimes TU) \tag{1.1}$$
と定める。ただし、$X$ の成分表示を $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ とおいた。

さらに、この $D$ は $U$ 上のアファイン接続として平坦である。

**証明**　写像として well-defined であることを一旦認め、先に $\mathbb{R}$-線型性、Leibniz 則、平坦性を確かめる。$D$ の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則は、外微分 $d$ の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則から従う。平坦性は、式 (1.1) で用いた座標 $x^i$ が $D$-アファイン座標となることから従う。最後に、$D$ が写像として well-defined であることを示す。$y^\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) を $W$ の基底が定める $U$ 上の座標とすると、

$$\begin{aligned} dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} &= d\left(X^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right) \otimes \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} &(1.2)\\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} dX^\alpha + X^\alpha \underbrace{d\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)}_{=0}\right) \otimes \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} &(1.3)\end{aligned}$$

$$= dX^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{1.4}$$

となる。ただし「$= 0$」の部分は $x^i$ と $y^\alpha$ の間の座標変換がアファイン変換となることを用いた。これで well-defined 性も示された。 □

## 1.2 Hessian

$U$ 上のアファイン接続 $D$ により、$T^\vee U$ の接続が誘導される。これを用いて Hessian を定義する。

**定義 1.3** (Hessian)**.** $C^\infty$ 関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対し、$f$ の **Hessian** を

$$\operatorname{Hess} f \coloneqq Ddf \in \Gamma(T^\vee U \otimes T^\vee U) \tag{1.5}$$

と定義する。

$D$-アファイン座標を用いると、Hessian の成分表示は簡単な形になる。

**命題 1.4** (Hessian の成分表示)**.** $x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を $U$ 上の $D$-アファイン座標とする。このとき、座標 $x^i$ に関する $\operatorname{Hess} f$ の成分表示は

$$\operatorname{Hess} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j \tag{1.6}$$

となる。とくに $f$ の $C^\infty$ 性より $\operatorname{Hess} f$ は対称テンソルである。

**証明** $(\operatorname{Hess} f)(\partial_i, \partial_j) = \langle D_{\partial_i} df, \partial_j \rangle = \partial_i \langle df, \partial_j \rangle - \langle df, \underbrace{D_{\partial_i} \partial_j}_{=0} \rangle = \partial_i(\partial_j f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ より従う。 □

# 第 3 章　指数型分布族

## 1　指数型分布族

**定義 1.1** (指数型分布族). $\mathcal{X}$ を可測空間、$\varnothing \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ とする。$\mathcal{P}$ が $\mathcal{X}$ 上の**指数型分布族 (exponential family)** であるとは、次が成り立つことをいう: $\exists\,(V, T, \mu)$ s.t.

**(E0)**　$V$ は有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間である。

**(E1)**　$T \colon \mathcal{X} \to V$ は可測写像である。

**(E2)**　$\mu$ は $\mathcal{X}$ 上の $\sigma$-有限測度であり、$\forall\, p \in \mathcal{P}$ に対し $p \ll \mu$ をみたす。

**(E3)**　$\forall\, p \in \mathcal{P}$ に対し、$\exists\, \theta \in V^\vee$ s.t.

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x)\rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{1.1}$$

である。ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は自然なペアリング $V^\vee \times V \to \mathbb{R}$ である。

さらに次のように定める:

- $(V, T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の**実現 (representation)** という。
  - $V$ の次元を $(V, T, \mu)$ の**次元 (dimension)** という。
  - $T$ を $(V, T, \mu)$ の**十分統計量 (sufficient statistic)** という。
  - $\mu$ を $(V, T, \mu)$ の**基底測度 (base measure)** という。
- 集合 $\Theta_{(V,T,\mu)}$

$$\Theta_{(V,T,\mu)} := \left\{ \theta \in V^\vee \;\middle|\; \int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy) < +\infty \right\} \tag{1.2}$$

  を $(V, T, \mu)$ の**自然パラメータ空間 (natural parameter space)** という。
- 関数 $\psi \colon \Theta_{(V,T,\mu)} \to \mathbb{R}$,

$$\psi(\theta) := \log \int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y)\rangle\, \mu(dy) \tag{1.3}$$

  を $(V, T, \mu)$ の**対数分配関数 (log-partition function)** という。

**命題 1.2** (自然パラメータ空間は凸集合). $\Theta_{(T,\mu)}$ は $\mathbb{R}^m$ の凸集合である。[TODO] $V$ に修正

**証明**　表記の簡略化のため $\Theta := \Theta_{(T,\mu)}$ とおく。$\theta, \theta' \in \Theta$, $t \in (0,1)$ とし、$(1-t)\theta + t\theta' \in \Theta$ を示せばよい。そこで $p := \dfrac{1}{1-t}$, $q := \dfrac{1}{t}$ とおくと、$p, q \in (1, +\infty)$ であり、$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = (1-t) + t = 1$ であり、$e^{(1-t)\langle \theta, T(x)\rangle} \in L^p(\mathcal{X}, \mu)$ かつ $e^{t\langle \theta', T(x)\rangle} \in L^q(\mathcal{X}, \mu)$ だから、Hölder の不等式より

$$\int_{\mathcal{X}} e^{\langle (1-t)\theta + t\theta', T(x)\rangle}\, \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} e^{(1-t)\langle \theta, T(x)\rangle} e^{t\langle \theta', T(x)\rangle}\, \mu(dx) \tag{1.4}$$

$$\leq \left( \int_{\mathcal{X}} e^{(1-t)\langle \theta, T(x)\rangle p}\, \mu(dx) \right)^{1/p} \left( \int_{\mathcal{X}} e^{t\langle \theta, T(x)\rangle q}\, \mu(dx) \right)^{1/q} \tag{1.5}$$

$$= \left( \int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(x) \rangle} \mu(dx) \right)^{1/p} \left( \int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(x) \rangle} \mu(dx) \right)^{1/q} \tag{1.6}$$

$$< +\infty \tag{1.7}$$

が成り立つ。したがって $(1-t)\theta + t\theta' \in \Theta$ である。 □

**例 1.3** (有限集合上の確率分布). [TODO] $V$ に修正 $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$、$\gamma$ を $\mathcal{X}$ 上の数え上げ測度とする。$\mathcal{X}$ 上の確率分布全体の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ が $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることを確かめる。$\delta^j$ $(j = 1, \ldots, n)$ を点 $j$ での Dirac 測度とおく。任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対し、

$$P(dk) := \sum_{j=1}^{n} a_j \delta^j(dk), \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \tag{1.8}$$

が成り立つから、$\delta_{jk}$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ を Kronecker のデルタとして

$$P(dk) = \exp\left( \sum_{j=1}^{n} (\log a_j) \delta_{jk} \right) \gamma(dk) \tag{1.9}$$

$$= \exp\left( \sum_{j=1}^{n} \theta_j \delta_{jk} \right) \gamma(dk) \tag{1.10}$$

(ただし $\theta_j := \log a_j$) と表せる。したがって $T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n,\ k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \ldots, \delta_{nk})$ とおけば、$(T, \gamma)$ を実現として $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ は指数型分布族となることがわかる。

**例 1.4** (正規分布族). [TODO] $V$ に修正 $\mathcal{X} = \mathbb{R}$、$\lambda$ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする。$\mathcal{X}$ 上の確率分布の集合

$$\mathcal{P} := \left\{ P_{(\mu,\sigma^2)}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \lambda(dx) \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0 \right\} \tag{1.11}$$

を**正規分布族 (family of normal distributions)** という。このとき $\mathcal{P}$ が $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることを確かめる。任意の $P_{(\mu,\sigma^2)} \in \mathcal{P}$ に対し

$$P_{(\mu,\sigma^2)}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \lambda(dx) \tag{1.12}$$

$$= \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2) - \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2 \right) \lambda(dx) \tag{1.13}$$

$$= \exp\left( \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\sigma^2} & -\frac{1}{2\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2 \right) \lambda(dx) \tag{1.14}$$

$$= \exp\left( \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} + \frac{\theta_1^2}{4\theta_2} - \frac{1}{2}\log\left( -\frac{\pi}{\theta_2} \right) \right) \lambda(dx) \tag{1.15}$$

(ただし $\theta_1 := \frac{\mu}{\sigma^2},\ \theta_2 := -\frac{1}{2\sigma^2}$) が成り立つから、$T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto {}^t(x, x^2)$ とおけば、$(T, \lambda)$ を実現として $\mathcal{P}$ は指数型分布族となることがわかる。

**例 1.5** (Poisson 分布族). [TODO] $V$ に修正 $\mathcal{X} = \mathbb{N}$、$\gamma$ を $\mathbb{N}$ 上の数え上げ測度とする。$\mathcal{X}$ 上の確率分布の集合

$$\mathcal{P} := \left\{ P_\lambda(dk) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \gamma(dk) \;\middle|\; \lambda > 0 \right\} \tag{1.16}$$

を $P_\lambda$ を **Poisson 分布族 (family of Poisson distributions)** という。このとき $\mathcal{P}$ が $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることを確かめる。任意の $P_\lambda \in \mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned} P_\lambda(dk) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \gamma(dk) && (1.17)\\ &= \exp\left(k \log \lambda - \lambda\right) \frac{1}{k!} \gamma(dk) && (1.18)\\ &= \exp\left(\theta k - e^\theta\right) \frac{1}{k!} \gamma(dk) && (1.19) \end{aligned}$$

(ただし $\theta := \log \lambda$) が成り立つから、$T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}, k \mapsto k$ とおけば、$\left(T, \frac{1}{k!}\gamma(dk)\right)$ を実現として $\mathcal{P}$ は指数型分布族となることがわかる。

**定義 1.6** (最小次元実現). 実現 $(V, T, \mu)$ が $\mathcal{P}$ の実現のうちで次元が最小のものであるとき、$(V, T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の**最小次元実現 (minimal representation)** という。

**定理 1.7** (「$\theta$ が一意の実現」の存在). [TODO] 「単射性条件」の言葉に修正 $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族とする。このとき、$\mathcal{P}$ の「$\theta$ が一意の実現」が存在する。

**証明**　$(V, T, \mu)$ は $\mathcal{P}$ の実現のうちで次元が最小のものであるとする。$(V, T, \mu)$ の次元 ($m$ とおく) が 0 ならば $V^\vee$ は 1 点集合だから証明は終わる。

以下 $m \geq 1$ の場合を考え、$(V, T, \mu)$ が「$\theta$ が一意の実現」であることを示す。背理法のために $(V, T, \mu)$ が「$\theta$ が一意の実現」でないこと、すなわちある $p_0 \in \mathcal{P}$ および $\theta_0, \theta_0' \in V^\vee$, $\theta_0 \neq \theta_0'$ が存在して

$$\exp\left(\langle \theta_0, T(x) \rangle - \psi(\theta_0)\right) = \frac{dp_0}{d\mu}(x) = \exp\left(\langle \theta_0', T(x) \rangle - \psi(\theta_0')\right) \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{1.20}$$

が成り立つことを仮定する。証明の方針としては、次元 $m-1$ の実現 $(V', T', \mu)$ を具体的に構成することにより、$(V, T, \mu)$ の次元 $m$ が最小であることとの矛盾を導く。

さて、式 (1.20) を整理して

$$\langle \theta_0 - \theta_0', T(x) \rangle = \psi(\theta_0) - \psi(\theta_0') \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{1.21}$$

を得る。表記の簡略化のために $\theta_1 := \theta_0 - \theta_0' \in V^\vee$, $r := \psi(\theta_0) - \psi(\theta_0') \in \mathbb{R}$ とおけば

$$\langle \theta_1, T(x) \rangle = r \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{1.22}$$

を得る。ここで $V' := (\mathbb{R}\theta)^\top = \{v \in V \mid \langle \theta, v \rangle = 0\}$ とおき、次の claim を示す。

**Claim**　ある可測写像 $T'\colon \mathcal{X} \to V'$ および $v_0 \in V$ が存在して $T(x) = T'(x) + v_0$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つ。

$\because$　いま背理法の仮定より $\theta_1 \neq 0$ であるから、$\theta_1$ を延長した $V^\vee$ の基底 $\theta_1, \ldots, \theta_m$ が存在する。このとき、$\theta_1, \ldots, \theta_m$ を双対基底に持つ $V$ の基底 $v_1, \ldots, v_m$ が存在する。この基底 $v_1, \ldots, v_m$ に関する

$T$ の成分表示を $T(x) = \sum_{i=1}^{m} T^i(x)v_i,\ T^i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ とおくと、(1.22) より $T^1(x) = \langle \theta_1, T(x) \rangle = r$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つ。そこで $v_0 := rv_1 \in V$ とおくと $\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0$ ($\mu$-a.e.$x$) が成り立つから、可測写像 $T'\colon \mathcal{X} \to V'$ を

$$T'(x) := \begin{cases} T(x) - v_0 & (\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{1.23}$$

と定めることができる。この $T, v_0$ が求めるものである。 //

$(V', T', \mu)$ が $\mathcal{P}$ の実現であることを示す。定義 1.1 の条件 (E0)-(E2) は明らかに成立しているから、あとは条件 (E3) を確認すればよい。そこで $p \in \mathcal{P}$ とする。いま $(V, T, \mu)$ が $\mathcal{P}$ の実現であることより、ある $\theta \in V^\vee$ が存在して

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y) \rangle\, \mu(dy)} \qquad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \tag{1.24}$$

が成り立つ。$T', v_0$ を用いて式変形すると、$\mu$-a.e.$x$ に対し

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\left(\langle \theta, T(x) \rangle\right)}{\int_{\mathcal{X}} \exp\left(\langle \theta, T(x) \rangle\right) \mu(dy)} \tag{1.25}$$

$$= \frac{\exp\left(\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle\right)}{\int_{\mathcal{X}} \exp\left(\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle\right) \mu(dy)} \tag{1.26}$$

$$= \frac{\exp\left(\langle \theta, T'(x) \rangle\right)}{\int_{\mathcal{X}} \exp\left(\langle \theta, T'(x) \rangle\right) \mu(dy)} \tag{1.27}$$

が成り立つ。したがって $(V', T', \mu)$ は条件 (E3) も満たし、$\mathcal{P}$ の実現であることがいえた。$(V', T', \mu)$ は次元 $m-1$ だから $(V, T, \mu)$ の次元 $m$ の最小性に矛盾する。背理法より $(V, T, \mu)$ は $\mathcal{P}$ の「$\theta$ が一意の実現」である。 □

**定理 1.8** (極小実現の性質). [TODO] $V$ に修正 $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族、$(T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の次元 $m$ の実現とする。このとき、$(T, \mu)$ が極小実現ならば、$\langle u, T(x) \rangle$ が $\mu$-a.e. 定数であるような $u \in \mathbb{R}^m$ は $u = 0$ のみである。

**証明** $(T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の極小実現とする。背理法のため、ある $u \neq 0$ が存在して $\langle u, T(x) \rangle$ が $\mathcal{X}$ 上 $\mu$-a.e. 定数であると仮定しておく。$p \in \mathcal{P}$ とし、定義 1.1 の条件 (E3) の $\theta \in \mathbb{R}^m$ をひとつ選ぶと、

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{e^{\langle \theta, T(x) \rangle}}{\int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(y) \rangle}\, \mu(dy)} \tag{1.28}$$

$$= \frac{e^{\langle \theta, T(x) \rangle}}{\int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(y) \rangle}\, \mu(dy)} \cdot \frac{e^{\langle u, T(x) \rangle}}{e^{\langle u, T(x) \rangle}} \tag{1.29}$$

$$= \frac{e^{\langle \theta + u, T(x) \rangle}}{\int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(y) \rangle} e^{\langle u, T(x) \rangle}\, \mu(dy)} \tag{1.30}$$

$$= \frac{e^{\langle \theta + u, T(x) \rangle}}{\int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta, T(y) \rangle} e^{\langle u, T(y) \rangle}\, \mu(dy)} \tag{1.31}$$

$$= \frac{e^{\langle \theta + u, T(x) \rangle}}{\int_{\mathcal{X}} e^{\langle \theta + u, T(y) \rangle}\, \mu(dy)} \tag{1.32}$$

を得る。したがって $\theta + u$ も定義 1.1 の条件 (E3) を満たすが、いま $u \neq 0$ より $\theta + u \neq \theta$ だから、$(T, \mu)$ が $\mathcal{P}$ の極小実現であることに反する。背理法より定理が示された。 □

**例 1.9** (有限集合上の確率分布族)**.** 例 1.3 の $(T, \gamma)$ は $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の極小実現である。実際、任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対し、$\theta_j$ は $\theta_j = \log P(\{j\})$ $(j = 1, \ldots, n)$ として一意に決まる。

**命題 1.10.** [TODO] 上の命題とあわせる $(V, T, \mu)$ に関する次の条件は同値である:

(1) $\langle \theta, T(x) \rangle$ が $\mathcal{X}$ 上 $\mu$-a.e. 定数であるような $\theta \in V^\vee$ は $\theta = 0$ のみである。
(2) 各 $p \in \mathcal{P}$ に対し、定義 1.1 の条件 (E3) をみたす $\theta \in V^\vee$ はただひとつである。

**証明** (2) ⇒(1)　前回示した。

(1) ⇒(2)　$\theta, \theta' \in V^\vee$ が定義 1.1 の条件 (E3) をみたすとすると、

$$e^{\langle \theta, T(x) \rangle - \psi(\theta)} = \frac{dp}{d\mu}(x) = e^{\langle \theta', T(x) \rangle - \psi(\theta')} \qquad \mu\text{-a.e.} x \in \mathcal{X} \tag{1.33}$$

が成り立つ。式を整理して

$$\langle \theta - \theta', T(x) \rangle = \psi(\theta) - \psi(\theta') \qquad \mu\text{-a.e.} x \in \mathcal{X} \tag{1.34}$$

が成り立つ。したがって (1) より $\theta = \theta'$ である。 □

## 2　対数分配関数

[TODO] 一般化した命題を使って証明を修正する

本節では $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族、$(V, T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の次元 $m$ の実現、$\Theta \subset V^\vee$ を自然パラメータ空間、$\psi \colon \Theta \to \mathbb{R}$ を対数分配関数とする。$V^\vee$ における $\Theta$ の内部を $\Theta^\circ$ と書くことにする。さらに関数 $h \colon \mathcal{X} \times \Theta \to \mathbb{R}$ および $\lambda \colon \Theta \to \mathbb{R}$ を

$$h(x, \theta) := e^{\langle \theta, T(x) \rangle} \qquad ((x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta) \tag{2.1}$$

$$\lambda(\theta) := \int_{\mathcal{X}} h(x, \theta)\, \mu(dx) \quad (\theta \in \Theta) \tag{2.2}$$

と定める (つまり $\psi(\theta) = \log \lambda(\theta)$ である)。

本節の目標は次の定理を示すことである。

**定理 2.1** ($\lambda$ と $\psi$ の $C^\infty$ 性と積分記号下の微分)**.** $\varphi = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \colon \Theta^\circ \to \mathbb{R}^m$ を $\Theta^\circ$ 上のチャートとする。このとき、任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ に対し、

$$\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} \lambda(\theta) = \int_{\mathcal{X}} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} h(x, \theta)\, \mu(dx) \quad (\theta \in \Theta^\circ) \tag{2.3}$$

が成り立つ ($\partial_i$ は $\dfrac{\partial}{\partial \theta_i} \in \Gamma(T\Theta^\circ)$ の略記)。ただし、左辺の微分可能性および右辺の可積分性も定理の主張に含まれる。とくに $\lambda$ および $\psi$ は $\Theta^\circ$ 上の $C^\infty$ 関数である。

定理 2.1 の証明には次の事実を用いる。

**事実 2.2** (積分記号下の微分). $\mathcal{Y}$ を可測空間、$\nu$ を $\mathcal{Y}$ 上の測度、$I \subset \mathbb{R}$ を開区間、$f\colon \mathcal{Y} \times I \to \mathbb{R}$ を

(i) 各 $t \in I$ に対し $f(\cdot, t)\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ が可測
(ii) 各 $y \in \mathcal{Y}$ に対し $f(y, \cdot)\colon I \to \mathbb{R}$ が微分可能

をみたす関数とする。このとき、$f$ に関する条件

(1) 各 $t \in I$ に対し $f(\cdot, t) \in L^1(\mathcal{Y}, \nu)$ である。
(2) ある $\nu$-可積分関数 $\Phi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ が存在し、すべての $t' \in I$ に対し $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(y, t')\right| \leq \Phi(y)$ a.e.$y$ である。

が成り立つならば、関数 $I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \displaystyle\int_{\mathcal{Y}} f(y,t)\,\nu(dy)$ は微分可能で、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{Y}} f(y,t)\,\nu(dy) = \int_{\mathcal{Y}} \frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\,\nu(dy) \tag{2.4}$$

が成り立つ。 □

定理 2.1 の証明において最も重要なステップは、事実 2.2 の前提が満たされることの確認である。そのための補題を次に示す。

**補題 2.3** (優関数の存在). $e^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を $V^\vee$ の基底とし、この基底が定める $\Theta^\circ$ 上のチャートを $\varphi = (\theta_1, \ldots, \theta_m)\colon \Theta^\circ \to \mathbb{R}^m$ とおく。このとき、任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ に対し、次が成り立つ:

(1) 任意の $\theta \in \Theta^\circ$ に対し、関数 $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} h(\cdot, \theta)\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ は $L^1(\mathcal{X}, \mu)$ に属する。
(2) 任意の $\theta \in \Theta^\circ$ に対し、$\Theta^\circ$ における $\theta$ のある近傍 $U$ と、ある $\mu$-可積分関数 $\Phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が存在し、すべての $\theta' \in U$ に対し $\left|\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} h(x, \theta')\right| \leq \Phi(x)$ a.e.$x$ が成り立つ。

**証明**　(1) は (2) より直ちに従うから、(2) を示す。そこで $\theta \in \Theta^\circ$ を任意とする。補題の主張は座標 $\theta_1, \ldots, \theta_m$ を平行移動して考えても等価だから、点 $\theta$ の座標は $\varphi(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^m$ であるとしてよい。

Step 1: $U$ の構成　$\varepsilon > 0$ を十分小さく選び、$\mathbb{R}^m$ 内の閉立方体

$$A_{2\varepsilon} := \prod_{i=1}^m [-2\varepsilon, 2\varepsilon] \quad A_\varepsilon := \prod_{i=1}^m [-\varepsilon, \varepsilon] \tag{2.5}$$

が $\varphi(\Theta^\circ)$ に含まれるようにしておく。すると $U := \varphi^{-1}(\operatorname{Int} A_\varepsilon) \subset \varphi(\Theta^\circ)$ は $\theta$ の近傍となるが、これが求める $U$ の条件を満たすことを示す。

Step 2: $h$ の座標表示　まず具体的な計算のために $h$ の座標表示を求める。いま各 $\theta' \in U$ に対し

$$h(x, \theta') = \exp\langle \theta', T(x)\rangle = \exp\langle \theta_i(\theta') e^i, T(x)\rangle = \exp\left(\theta_i(\theta') T^i(x)\right) \tag{2.6}$$

が成り立っている。ただし $T^i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle e^i, T(x)\rangle$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいた。したがって

$$\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} h(x, \theta') = T^{i_1}(x) \cdots T^{i_k}(x) \exp\left(\theta_i(\theta') T^i(x)\right) \tag{2.7}$$

と表せることがわかる。

Step 3: $\Phi$ の構成　$\Phi$ を構成するため、式 (2.7) の絶対値を上から評価する。表記の簡略化のため

$t' := (t'_1, \dots, t'_m) := \varphi(\theta') \in \mathbb{R}^m$ とおいておく。まず $\frac{k+1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k+1} = 1$ より

$$\left| T^{i_1}(x) \cdots T^{i_k}(x) \exp\left(\sum_{i=1}^m t'_i T^i(x)\right)\right| = \left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right)^k \left(\prod_{\alpha=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1} |T^{i_\alpha}(x)|\right) \exp\left(\sum_{i=1}^m t'_i T^i(x)\right) \tag{2.8}$$

であり、$\prod$ の部分を評価すると

$$\prod_{\alpha=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1}|T^{i_\alpha}(x)| \le \prod_{\alpha=1}^k \left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{k+1}T^{i_\alpha}(x)\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k+1}T^{i_\alpha}(x)\right)\right) \quad (\because s \le e^s + e^{-s} \ (s \in \mathbb{R})) \tag{2.9}$$

$$= \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^k} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1}\sigma_\alpha T^{i_\alpha}(x)\right) \quad (\because \text{式の展開}) \tag{2.10}$$

(ただし $\sigma_\alpha$ は $\sigma$ の第 $\alpha$ 成分) となるから、式 (2.8) と式 (2.10) を合わせて

$$(2.8) \le C \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^k} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1}\sigma_\alpha T^{i_\alpha}(x)\right) \exp\left(\sum_{i=1}^m t'_i T^i(x)\right) \tag{2.11}$$

$$= C \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^k} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^k \frac{\varepsilon}{k+1}\sigma_\alpha T^{i_\alpha}(x) + \sum_{i=1}^m t'_i T^i(x)\right) \tag{2.12}$$

となる。ただし $C := \left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right)^k \in \mathbb{R}_{>0}$ とおいた。ここで最終行の exp の中身について、各 $i = 1, \dots, m$ に対し $T^i(x)$ の係数を評価することで、ある $t'' \in A_{2\varepsilon}$ が存在して

$$(2.12) = C \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^k} \exp\left(\sum_{i=1}^m t''_i T^i(x)\right) = 2^k C \exp\left(\sum_{i=1}^m t''_i T^i(x)\right) \tag{2.13}$$

と表せることがわかる。そこで $|t''_i| \le 2\varepsilon \ (i = 1, \dots, m)$ より

$$(2.13) \le 2^k C \prod_{i=1}^m \left(\exp\left(2\varepsilon T^i(x)\right) + \exp\left(-2\varepsilon T^i(x)\right)\right) \tag{2.14}$$

$$= 2^k C \sum_{\tau \in \{\pm 1\}^m} \exp\left(\sum_{i=1}^m 2\varepsilon \tau_i T^i(x)\right) \tag{2.15}$$

を得る。この右辺は ($t'$ によらないから) $\theta'$ によらない $\mathcal{X}$ 上の関数であり、また $\sum$ の各項が $2\varepsilon\tau \in A_{2\varepsilon}$ ゆえに $\mu$-可積分だから式全体も $\mu$-可積分である。したがってこれが求める優関数である。 □

目標の定理 2.1 を証明する。

**定理 2.1 の証明.** 定理 2.1 のステートメントで与えられているチャート $\varphi = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ は ($V^\vee$ の基底が定めるものとは限らない) 任意のものであるが、実は定理の主張を示すには、$V^\vee$ の基底をひとつ選び、その基底が定めるチャート $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\theta}_1, \dots, \widetilde{\theta}_m)$ に対して定理の主張を示せば十分である。その理由は次である:

- 式 (2.3) の左辺の微分可能性は、$\lambda$ が $C^\infty$ であればよいから、チャート $\widetilde{\varphi}$ で考えれば十分。
- 式 (2.3) の右辺の可積分性および式 (2.3) の等号の成立については、Leibniz 則より、$\lambda$ の $\widetilde{\theta}_1, \dots, \widetilde{\theta}_m$ に関する $k$ 回偏導関数が、$\lambda$ の $\theta_1, \dots, \theta_m$ に関する $k$ 回以下の偏導関数たちの ($x$ によらない) $C^\infty(\Theta^\circ)$-係数の線型結合に書けることから従う。

そこで、以降 $\varphi$ は $V^\vee$ の基底が定めるチャートとする。

補題 2.3 (1) より、式 (2.3) の右辺の可積分性はわかっている。よって、残りの示すべきことは

(i) 式 (2.3) の左辺の微分可能性

(ii) 式 (2.3) の等号の成立

の 2 点である。

まず $k=1, i_k=1$ の場合に (i), (ii) が成り立つことを示す。そのためには、$t=(t_1,\dots,t_m)\in\varphi(\Theta^\circ)$ を任意に固定したとき、$t_1$ を含む $\mathbb{R}$ の十分小さな開区間 $I$ が存在して、関数

$$g\colon \mathcal{X}\times I\to\mathbb{R},\quad (x,s)\mapsto h(x,\varphi^{-1}(s,t_2,\dots,t_m)) \tag{2.16}$$

が事実 2.2 の仮定 (1), (2) をみたすことをいえばよい。

いま $\varphi^{-1}(t)\in\Theta^\circ$ だから、補題 2.3(2) のいう $\Theta^\circ$ における $\varphi^{-1}(t)$ の近傍 $U$ と $\mu$-可積分関数 $\Phi\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ が存在する。このとき $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ における $t$ の近傍となるから、$t_1$ を含む $\mathbb{R}$ の十分小さな開区間 $I$ が存在して

$$I\times\{t_2\}\times\cdots\times\{t_m\}\subset\varphi(U) \tag{2.17}$$

が成り立つ。この $I$ を用いて定まる関数 $g$ が事実 2.2 の仮定 (1), (2) をみたすことを確認する。

まず補題 2.3 の結果 (1) より、$g$ は事実 2.2 の仮定 (1) をみたす。また補題 2.3 の結果 (2) より、$g$ は事実 2.2 の仮定 (2) をみたす。したがって $k=1, i_k=1$ の場合について (i),(ii) が示された。

同様にして $i_k=2,\dots,m$ の場合についても示される。以降、$k$ に関する帰納法で、すべての $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ および $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,m\}$ に対して示される。これで定理の証明が完了した。 □

定理 2.1 から次の系が従う。

**系 2.4.** $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\colon\Theta^\circ\to\mathbb{R}^m$ を $V^\vee$ の基底が定めるチャートとする。また、各 $\theta\in\Theta$ に対し、$\mathcal{X}$ 上の確率測度 $P_\theta$ を $P_\theta(dx)=e^{\langle\theta,T(x)\rangle-\psi(\theta)}\mu(dx)$ と定める。このとき、任意の $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,m\}$ に対し、

$$E_{P_\theta}[T^{i_k}(x)\cdots T^{i_1}(x)]=\frac{\partial_{i_k}\cdots\partial_{i_1}\lambda(\theta)}{\lambda(\theta)}\quad(\theta\in\Theta^\circ) \tag{2.18}$$

が成り立つ。ただし、左辺の期待値の存在も系の主張に含まれる。 □

## 3 Fisher 計量

**定義 3.1** (条件 A). [TODO] 単射性条件の言葉に修正 $\mathcal{P}$ の実現 $(V,T,\mu)$ に関する次の条件を、**条件 A** と呼ぶことにする。

**(条件 A)** $\langle\theta,T(x)\rangle$ が $\mathcal{X}$ 上 $\mu$-a.e. 定数であるような $\theta\in V^\vee$ は $\theta=0$ のみである。

Fisher 計量を定義する。

**命題-定義 3.2** (Fisher 計量). $\psi$ を $\Theta^\circ$ 上の $C^\infty$ 関数とみなすと、各 $\theta\in\Theta^\circ$ に対し $(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta\in T^{(0,2)}_\theta\Theta^\circ$ は $\mathrm{Var}_{P_\theta}[T]$ に一致する。さらに $(V,T,\mu)$ が条件 A をみたすならば、$\mathrm{Hess}\,\psi$ は正定値である。

したがって $(V,T,\mu)$ が条件 A をみたすとき、$\mathrm{Hess}\,\psi$ は $\Theta^\circ$ 上の Riemann 計量となり、これを $\psi$ の定める

**Fisher 計量 (Fisher metric)** という。

**証明** まず $(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta = \mathrm{Var}_{P_\theta}[T]$ $(\theta \in \Theta^\circ)$ を示す。$\Theta^\circ$ 上の $D$-アファイン座標 $\theta^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ をひとつ選ぶと、命題 1.4 より、座標 $\theta^i$ に関する $\mathrm{Hess}\,\psi$ の成分表示は $\mathrm{Hess}\,\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^i\partial\theta^j} d\theta^i \otimes d\theta^j$ となる。ここで前回 (`0516_資料.pdf`) の系 2.4 より

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^i\partial\theta^j}(\theta) = \partial_i\partial_j \log\lambda(\theta) \tag{3.1}$$

$$= \partial_i\left(\frac{\partial_j\lambda(\theta)}{\lambda(\theta)}\right) \tag{3.2}$$

$$= \frac{\partial_i\partial_j\lambda(\theta)}{\lambda(\theta)} - \frac{\partial_i\lambda(\theta)\partial_j\lambda(\theta)}{\lambda(\theta)^2} \tag{3.3}$$

$$= E[T^i(x)T^j(x)] - E[T^i(x)]E[T^j(x)] \tag{3.4}$$

$$= E[(T^i(x) - E[T^i(x)])(T^j(x) - E[T^j(x)])] \tag{3.5}$$

を得る。ただし $E[\cdot]$ は $P_\theta$ に関する期待値 $E_{P_\theta}[\cdot]$ の略記である。したがって $\mathrm{Hess}_\theta\,\psi = \mathrm{Var}_{P_\theta}[T]$ が成り立つ。

次に、$(V, T, \mu)$ が条件 A をみたすとし、$\mathrm{Hess}\,\psi$ が正定値であることを示す。すなわち、各 $\theta \in \Theta^\circ$ に対し $(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta$ が正定値であることを示す。そのためには各 $u \in V^\vee$ に対し「$(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta(u, u) = 0$ ならば $u = 0$」を示せばよいが、上で示したことと命題 3.8 より

$$(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta(u, u) = (\mathrm{Var}_{P_\theta}[T])(u, u) = \langle u \otimes u, \mathrm{Var}_{P_\theta}[T]\rangle = \mathrm{Var}_{P_\theta}[\langle u, T(x)\rangle] \tag{3.6}$$

と式変形できるから、$(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta(u, u) = 0$ ならば命題 3.10 より $\langle u, T(x)\rangle$ は a.e. 定数であり、したがって条件 A より $u = 0$ となる。よって $(\mathrm{Hess}\,\psi)_\theta$ は正定値である。したがって $\mathrm{Hess}\,\psi$ は正定値である。 □

# 4 最小次元実現

本節の目標は、最小次元実現の間のアファイン変換の一意存在を述べた定理 4.12 の証明である。本節では、定理などのステートメントを簡潔にするために圏の言葉を用いる。

**命題-定義 4.1.** 次のデータにより圏が定まる:

- 対象: $\mathcal{P}$ の実現 $(V, T, \mu)$ 全体
- 射: $(V, T, \mu)$ から $(V', T', \mu')$ への射は、$V$ から $V'$ への全射アファイン写像 $(L, b)$ $(L \in \mathrm{Lin}(V, V'),\ b \in V')$ であって $T'(x) = L(T(x)) + b$ $\mu$-a.e.$x$ をみたすもの
- 合成: アファイン写像の合成 $(L, b) \circ (K, c) = (LK, Lc + b)$

この圏を $\mathbf{C}_\mathcal{P}$ と書く。

**証明** 示すべきことは、射の合成が射であること、恒等射の存在、結合律の 3 点である。射の合成が射であることは、全射と全射の合成が全射であることと、$\mu$ と $\mu'$ が互いに絶対連続であることから従う。また、$(V, T, \mu)$ の恒等射は明らかに恒等写像 $(\mathrm{id}_V, 0)$ であり、結合律はアファイン写像の合成の結合律より従う。 □

最小次元実現を特徴づける 2 つの条件を導入する。

**命題-定義 4.2** (条件 A)**.** $\mathcal{P}$ の実現 $(V, T, \mu)$ に関する次の条件は同値である:

(1) $P\colon \Theta \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ は単射である。
(2) $\forall \theta \in V^\vee$ に対し「$\langle \theta, T(x) \rangle = \text{const.}\ \mu\text{-a.e.}x \implies \theta = 0$」が成り立つ。
(3) $V$ の任意の真アファイン部分空間 $W$ に対し、「$T(x) \in W\ \mu\text{-a.e.}x$ でない」が成り立つ。

これらの条件が成り立つとき、$(V, T, \mu)$ は**条件 A** をみたすという。

**証明** (1) $\iff$ (2) は `0502_資料.pdf` の命題 2.2 で示した。(2) $\iff$ (3) は `0523_コメント.pdf` の命題 0.4 に記した。 □

**定義 4.3** (条件 B)**.** $\mathcal{P}$ の実現 $(V, T, \mu)$ に関する条件

(1) $\Theta^{\mathcal{P}}$ は $V^\vee$ を affine span する。

が成り立つとき、$(V, T, \mu)$ は**条件 B** をみたすという。

条件 A は射の一意性を保証する。

**命題 4.4** (条件 A をみたす対象からの射の一意性)**.** $(V, T, \mu), (V', T', \mu')$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とする。このとき、$(V, T, \mu)$ が条件 A をみたすならば、$(V, T, \mu)$ から $(V', T', \mu')$ への射は一意である。

**証明** $(L, b), (K, c)$ を $(V, T, \mu)$ から $(V', T', \mu')$ への射とする。射の定義より

$$\begin{cases} T'(x) = L(T(x)) + b & \mu\text{-a.e.}x \\ T'(x) = K(T(x)) + c & \mu\text{-a.e.}x \end{cases} \tag{4.1}$$

が成り立つから、2 式を合わせて

$$(K - L)(T(x)) = b - c \qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.2}$$

となる。そこで基底を固定して成分ごとに $(V, T, \mu)$ の条件 A(2) を適用すれば、$K = L$ を得る。よって上式で $K = L$ として $b = c\ \mu$-a.e. したがって $b = c$ を得る。以上より $(L, b) = (K, c)$ である。 □

射が存在するための十分条件を調べる。

**命題 4.5** (条件 A, B をみたす対象への射の存在)**.** $(V, T, \mu)$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とする。このとき、$(V, T, \mu)$ が 条件 A と条件 B をみたすならば、任意の対象$\cancel{(V, T, \mu)}(V', T', \mu')$ から $(V, T, \mu)$ への射が存在する。

この命題の証明には次の補題を用いる。

**補題 4.6.** $(V, T, \mu), (V', T', \mu')$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とし、$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}$ および $\theta'\colon \mathcal{P} \to \Theta'^{\mathcal{P}}$ を $P, P'$ の右逆写像とする。

このとき、任意の $p, q \in \mathcal{P}$ に対し、

$$\begin{aligned}&\langle \theta(p) - \theta(q), T(x)\rangle - \psi(\theta(p)) + \psi(\theta(q)) \\ &= \langle \theta'(p) - \theta'(q), T'(x)\rangle - \psi'(\theta'(p)) + \psi'(\theta'(q))\end{aligned} \qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.3}$$

が成り立つ。

**証明** $p, q \in \mathcal{P}$ を任意とすると、指数型分布族の定義と $\mu, \mu'$ が互いに絶対連続であることより、$\mu$-a.e.$x$ に対し

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\mu}(x) &= \exp(\langle \theta(p), T(x)\rangle - \psi(\theta(p))), & \frac{dp}{d\mu'}(x) &= \exp(\langle \theta'(p), T'(x)\rangle - \psi'(\theta'(p))) \\ \frac{dq}{d\mu}(x) &= \exp(\langle \theta(q), T(x)\rangle - \psi(\theta(q))), & \frac{dq}{d\mu'}(x) &= \exp(\langle \theta'(q), T'(x)\rangle - \psi'(\theta'(q)))\end{aligned} \tag{4.4}$$

が成り立つ。さらに $p, q$ が互いに絶対連続であることから、$\mu$-a.e.$x$ に対し

$$\frac{dp}{dq}(x) = \frac{dp}{d\mu}(x) \bigg/ \frac{dq}{d\mu}(x) = \exp\{\langle \theta(p) - \theta(q), T(x)\rangle - \psi(\theta(p)) + \psi(\theta(q))\} \tag{4.5}$$

$$\frac{dp}{dq}(x) = \frac{dp}{d\mu'}(x) \bigg/ \frac{dq}{d\mu'}(x) = \exp\{\langle \theta'(p) - \theta'(q), T'(x)\rangle - \psi'(\theta'(p)) + \psi'(\theta'(q))\} \tag{4.6}$$

が成り立つ。log をとって補題の主張の等式を得る。 □

**命題 4.5 の証明** Step 0: $V, V^\vee$ の基底を選ぶ　$(V, T, \mu)$ の条件 B より、$V^\vee$ のあるアファイン基底 $a^i \in \Theta^{\mathcal{P}}$ $(i = 0, \ldots, m)$ が存在する。そこで $e^i := a^i - a^0 \in V^\vee$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおくとこれは $V^\vee$ の基底である。さらに $e^i$ の双対基底を $V$ の元と同一視したものを $e_i \in V$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいておく。

Step 1: 射 $(L, b)$ の構成　$P, P'$ の右逆写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}$ および $\theta'\colon \mathcal{P} \to \Theta'^{\mathcal{P}}$ をひとつずつ選んで $p^i := P(a^i) \in \mathcal{P}$ $(i = 0, \ldots, m)$ とおき、$(L, b)$ を次のように定める:

$$L\colon V' \to V, \quad t' \mapsto \left\langle \theta'(p^i) - \theta'(p^0), t' \right\rangle e_i \tag{4.7}$$

$$b := \left\{\psi(\theta(p^i)) - \psi(\theta(p^0)) - \psi'(\theta'(p^0)) + \psi'(\theta'(p^0))\right\} e_i \in V \tag{4.8}$$

示すべきことは、~~すべての $p \in \mathcal{P}$ に対し~~

$$T(x) = L(T'(x)) + b \quad \mu'\text{-a.e.}x \tag{4.9}$$

が成り立つことと、$(L, b)$ が全射となることである。

Step 2: $T(x) = L(T'(x)) + b$ の証明　各 $i = 1, \ldots, m$ に対し、補題 4.6 より

$$\begin{aligned}&\left\langle \theta(p^i) - \theta(p^0), T(x)\right\rangle - \psi(\theta(p^i)) + \psi(\theta(p^0)) \\ &= \left\langle \theta'(p^i) - \theta'(p^0), T'(x)\right\rangle - \psi'(\theta'(p^i)) + \psi'(\theta'(p^0))\end{aligned} \qquad \mu'\text{-a.e.}x \tag{4.10}$$

となる。ここで $(V, T, \mu)$ の条件 A (1) より $\theta(p^i) = a^i$ が成り立つから、(4.10) より

$$\begin{aligned}\left\langle a^i - a^0, T(x)\right\rangle &= \left\langle \theta'(p^i) - \theta'(p^0), T'(x)\right\rangle \\ &\quad + \psi(\theta(p^i)) - \psi(\theta(p^0)) - \psi'(\theta'(p^i)) + \psi'(\theta'(p^0)) \qquad \mu'\text{-a.e.}x\end{aligned} \tag{4.11}$$

したがって

$$T(x) = L(T'(x)) + b \qquad \mu'\text{-a.e.}x \tag{4.12}$$

が成り立つ。

Step 3: $(L, b)$ が全射であることの証明　$L$ が全射であることをいえばよい。もし $L$ が全射でなかったとすると、$T(x) = L(T'(x)) + b \in \operatorname{Im} L + b$ が $\mu'$-a.e.$x$ したがって $\mu$-a.e.$x$ に対し成り立つことになるが、$\operatorname{Im} L + b$ は $V$ の真アファイン部分空間だから $(V, T, \mu)$ の条件 A (3) に反する。したがって $L$ は全射である。 □

各条件をみたさない場合にも、射が存在する。

**補題 4.7** (条件 A をみたさない対象からの射の存在). $(V, T, \mu)$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とする。このとき、$(V, T, \mu)$ が条件 A をみたさないならば、$(V, T, \mu)$ よりも次元の小さいある対象 $(V', T', \mu')$ への射 $(V, T, \mu) \to (V', T', \mu')$ が存在する。

**証明**　末尾の付録に記した。 □

**補題 4.8** (条件 B をみたさない対象からの射の存在). $(V, T, \mu)$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とする。このとき、$(V, T, \mu)$ が条件 B をみたさないならば、$(V, T, \mu)$ よりも次元の小さいある対象 $(V', T', \mu')$ への射 $(V, T, \mu) \to (V', T', \mu')$ が存在する。

**証明**　末尾の付録に記した。 □

以上の補題を用いて最小次元実現の特徴づけが得られる。

**定理 4.9** (最小次元実現の特徴づけ). $\mathcal{P}$ の実現 $(V, T, \mu)$ に関する次の条件は同値である:

(1)　$(V, T, \mu)$ は $\mathcal{P}$ の最小次元実現である。
(2)　$(V, T, \mu)$ は条件 A と条件 B をみたす。

**証明**　(1) ⇒(2)　最小次元実現 $(V, T, \mu)$ が条件 A, B のいずれかをみたさなかったとすると、補題 4.7, 4.8 よりとくに $(V, T, \mu)$ よりも次元の小さい実現が存在することになり、矛盾が従う。

(2) ⇒(1)　$(V, T, \mu)$ が条件 A と条件 B をみたすとする。$\mathcal{P}$ の任意の実現 $(V', T', \mu')$ に対し、命題 4.5 より全射線型写像 $L : V' \to V$ が存在するから、$\dim V \leq \dim V'$ である。したがって $V$ は $\mathcal{P}$ の最小次元実現である。 □

**例 4.10** (正規分布族の最小次元実現). 定理 4.9 により、`0425_資料.pdf` の例 3.2 でみた正規分布族の例は最小次元実現であることがわかる。実際、$T(x) = {}^t(x, x^2)$ の像は $\mathbb{R}^2$ のいかなる真アファイン部分空間にも a.e. で含まれることはないから、条件 A (3) が成り立つ。また、$\Theta^{\mathcal{P}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ となることから条件 B も成り立つ。

本節の目標の定理を示す。

**定理 4.11** (最小次元実現の間のアファイン変換). $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ がともに最小次元実現ならば、$(V,T,\mu)$ から $(V',T',\mu')$ への射 $(L,b)$ がただひとつ存在する。さらに、$L$ は線型同型写像である。

**証明**　命題 4.4, 4.5 より、射 $(L,b)\colon (V,T,\mu)\to(V',T',\mu')$ はただひとつ存在する。また、命題 4.5 より存在する射 $(V',T',\mu')\to(V,T,\mu)$ をひとつ選んで $(K,c)$ とおくと、合成射 $(K,c)\circ(L,b)$, $(L,b)\circ(K,c)$ は命題 4.4 より恒等射 $(\mathrm{id}_V,0)$, $(\mathrm{id}_{V'},0)$ に一致する。したがって $L$ は線型同型写像である。 □

同じことを圏の言葉を使わずに言い換えると次のようになる。

**定理 4.12** (最小次元実現の間のアファイン変換). $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ を $\mathbf{C}_{\mathcal{P}}$ の対象とする。このとき、$(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ がともに最小次元実現ならば、全射線型写像 $L: V\to V'$ とベクトル $b\in V'$ であって

$$\cancel{T(x)=L(T'(x))+b}\quad T'(x)=L(T(x))+b\qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.13}$$

をみたすものがただひとつ存在する。さらに、$L$ は線型同型写像である。 □

**系 4.13** (自然パラメータの変換). 上の定理の状況で、さらに $\theta^0\in V^\vee$ であって

$$\cancel{\theta'(p)={}^tL(\theta(p))+\theta^0}\quad \theta(p)={}^tL(\theta'(p))+\theta^0\qquad (\forall p\in\mathcal{P}) \tag{4.14}$$

をみたすものがただひとつ存在する。ただし写像 $\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta^{\mathcal{P}}$ および $\theta'\colon\mathcal{P}\to\Theta'^{\mathcal{P}}$ は $P,P'$ の $\Theta^{\mathcal{P}},\Theta'^{\mathcal{P}}$ 上への制限の逆写像である。

**証明**　Step 1: 一意性　$\theta^0$ が $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ に対し一意であることは $L,\theta,\theta'$ の一意性より明らかである。

Step 2: 存在　$q\in\mathcal{P}$ をひとつ選んで $\theta^0:=-{}^tL(\theta(q))+\theta'(q)\in V^\vee$ と定め、この $\theta^0$ が (4.14) をみたすことを示せばよい。そこで $p\in\mathcal{P}$ を任意とすると、補題 4.6 より

$$\begin{aligned}&\langle\theta(p)-\theta(q),T(x)\rangle-\psi(\theta(p))+\psi(\theta(q))\\&=\langle\theta'(p)-\theta'(q),T'(x)\rangle-\psi'(\theta'(p))+\psi'(\theta'(q))\end{aligned}\qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.15}$$

が成り立ち、さらに (4.13) より

$$\begin{aligned}&\langle\theta(p)-\theta(q),L(T(x))+b\rangle-\psi(\theta(p))+\psi(\theta(q))\\&=\langle\theta'(p)-\theta'(q),T'(x)\rangle-\psi'(\theta'(p))+\psi'(\theta'(q))\end{aligned}\qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.16}$$

が成り立つから、式を整理して

$$\begin{aligned}&\left\langle {}^tL(\theta(p)-\theta(q))-(\theta'(p)-\theta'(q)),T'(x)\right\rangle\\&=-\langle\theta(p)-\theta(q),b\rangle+\psi(\theta(p))-\psi(\theta(q))-\psi'(\theta'(p))+\psi'(\theta'(q))\end{aligned}\qquad \mu\text{-a.e.}x \tag{4.17}$$

となる。この右辺は $x$ によらないから、$(V',T',\mu')$ の条件 A (2) より

$${}^tL(\theta(p)-\theta(q))-\theta'(p)-\theta'(q)=0 \tag{4.18}$$

$$\therefore\qquad {}^tL(\theta(p))-\theta'(p)={}^tL(\theta(q))-\theta'(q)=-\theta^0 \tag{4.19}$$

$$\therefore \qquad {}^tL(\theta(p)) + \theta^0 = \theta'(p) \tag{4.20}$$

が成り立つ。$p \in \mathcal{P}$ は任意であったから、(4.14) の成立が示された。 □

# 5 Amari-Chentsov テンソルと $\alpha$-接続

## 5.1 多様体構造と平坦アファイン接続

**命題-定義 5.1** ($\mathcal{P}$ が開であること)**.** 指数型分布族 $\mathcal{P}$ に関し、次は同値である:

(1) ある最小次元実現 $(V, T, \mu)$ に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。
(2) すべての最小次元実現 $(V, T, \mu)$ に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。

$\mathcal{P}$ がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、$\mathcal{P}$ は**開 (open)** であるという。

**証明** (1) ⇒ (2) は、`0606_資料.pdf` 系 1.13 より、最小次元実現の真パラメータ空間がアファイン変換で写り合うことから従う。(2) ⇒ (1) は最小次元実現が存在することから従う。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ は開とする。

**命題-定義 5.2** ($\mathcal{P}$ の自然な多様体構造)**.** $\mathcal{P}$ 上の多様体構造 $\mathcal{U}$ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 $(V, T, \mu)$ に対し、$\mathcal{U}$ は全単射 $\theta_{(V,T,\mu)}$ により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様体構造に一致する。

この $\mathcal{U}$ を $\mathcal{P}$ の**自然な多様体構造**という。

**証明** Step 1: $\mathcal{U}$ の一意性 $\mathcal{U}$ の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで $\mathcal{U}$ が決まるから、$\mathcal{U}$ は一意である。

Step 2: $\mathcal{U}$ の存在 最小次元実現 $(V, T, \mu)$ をひとつ選び、$\theta \coloneqq \theta_{(V,T,\mu)}$ とおき、$\theta$ により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様体構造を $\mathcal{U}$ とおく。この $\mathcal{U}$ が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、$(V', T', \mu')$ を最小次元実現とし、$\theta' \coloneqq \theta_{(V',T',\mu')}$ とおき、$\mathcal{U}'$ を $\theta'$ により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様体構造とするとき、恒等写像 $\mathrm{id}\colon (\mathcal{P}, \mathcal{U}) \to (\mathcal{P}, \mathcal{U}')$ が微分同相となることである。これは図式

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}, \mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\theta"'] & (\mathcal{P}, \mathcal{U}') \arrow[d, "\theta'"] \\ \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)} \arrow[r, "F"'] & \Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')} \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

の可換性と、$\theta, \theta', F$ が微分同相であることから従う。ただし $F$ とは、`0606_資料.pdf` 系 1.13 より一意に存在するアファイン変換 $V^\vee \to V'^\vee$ の制限である。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に自然な多様体構造が定まっているものとする。

**命題-定義 5.3** ($\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続). $\mathcal{P}$ 上の平坦アファイン接続 $\nabla$ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 $(V, T, \mu)$ に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$ とおくと、$\nabla$ は $\nabla = \theta^*_{(V,T,\mu)}\widetilde{\nabla}$ をみたす。

この $\nabla$ を $\mathcal{P}$ 上の**自然な平坦アファイン接続**という。

証明には次の補題を用いる。

**補題 5.4** (アファイン変換によるアファイン接続の引き戻し). $V, V'$ を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$F\colon V \to V'$ をアファイン変換、$\nabla, \nabla'$ をそれぞれ $V, V'$ 上の標準的な平坦アファイン接続とする。このとき $F^*\nabla' = \nabla$ が成り立つ。

**証明**　資料末尾の付録に記した。 □

**命題-定義 5.3 の証明**　Step 1: $\nabla$ の一意性　$\nabla$ の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで $\nabla$ が決まるから、$\nabla$ は一意である。

Step 2: $\nabla$ の存在　最小次元実現 $(V, T, \mu)$ をひとつ選び、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$、$\nabla := \theta^*\widetilde{\nabla}$ と定める。この $\nabla$ が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、$(V', T', \mu')$ を最小次元実現とし、$\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}'$ とおくとき、$\theta^*\widetilde{\nabla} = \theta'^*\widetilde{\nabla}'$ が成り立つことである。そこで、`0606_資料.pdf` 系 1.13 より一意に存在するアファイン変換 $V^\vee \to V'^\vee$ を $F$ とおくと、

$$\theta'^*\widetilde{\nabla}' = \theta^* F^* \widetilde{\nabla}' \quad (F \text{ と } \theta, \theta' \text{ の関係}) \tag{5.2}$$

$$= \theta^*\widetilde{\nabla} \quad (\text{補題 } 5.4) \tag{5.3}$$

が成り立つ。したがって $\theta^*\widetilde{\nabla} = \theta'^*\widetilde{\nabla}'$ が示された。よって $\nabla$ は命題-定義の主張の条件をみたす。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に自然な平坦アファイン接続 $\nabla$ が定まっているものとする。

## 5.2 Fisher 計量

**命題-定義 5.5** ($\mathcal{P}$ 上の Fisher 計量). $\mathcal{P}$ 上の Riemann 計量 $g$ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 $(V, T, \mu)$ に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおくと、$g = \theta^*_{(V,T,\mu)}\widetilde{g}$ が成り立つ。

これを $\mathcal{P}$ 上の **Fisher 計量**という。

証明には次の補題を用いる。

**補題 5.6.** $(V,T,\mu),(V',T',\mu')$ を $\mathcal{P}$ の最小次元実現とし、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$, $\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$ とおき、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$, $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の Fisher 計量をそれぞれ $g, g'$ とおき、`0606_資料.pdf` 定理 1.12 より一意に存在する線型同型写像 $V \to V'$ を $L$ とおく。このとき、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = (L \otimes L)(g'_{\theta'(p)})$ が成り立つ。

**証明**　$L$ は $T'(x) = L(T(x)) + \mathrm{const.}$ $\mu$-a.e.$x$ をみたし、また各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = \mathrm{Var}_p[T]$, $g'_{\theta'(p)} = \mathrm{Var}_p[T']$ が成り立つから、期待値と分散のペアリングの命題 (`0523_資料.pdf` 命題 1.1) と同様の議論により補題の主張の等式が成り立つ。 □

**命題-定義 5.5 の証明**　Step 1: $g$ の一意性　$g$ の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで $g$ が決まるから、$g$ は一意である。

Step 2: $g$ の存在　最小次元実現 $(V,T,\mu)$ をひとつ選び、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量を $\tilde{g}$ とおき、$g := \theta^*\tilde{g}$ と定める。この $g$ が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、$(V',T',\mu')$ を最小次元実現とし、$\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の Fisher 計量を $\tilde{g}'$ とおいて、$\theta^* g = \theta'^* g'$ が成り立つことである。そこで `0606_資料.pdf` 定理 1.12 より一意に存在する線型同型写像 $V \to V'$ を $L$ とおくと、各 $p \in \mathcal{P}$, $u, v \in T_p\mathcal{P}$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\theta^* g)_p(u,v) &= g_{\theta(p)}(d\theta_p(u), d\theta_p(v)) && (5.4)\\
&= \left\langle g_{\theta(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle && (5.5)\\
&= \left\langle (L\otimes L) g'_{\theta'(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle \quad (\text{補題 } 5.6) && (5.6)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, {}^tL \circ d\theta_p(u) \otimes {}^tL \circ d\theta_p(v) \right\rangle && (5.7)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d({}^tL \circ \theta)_p(u) \otimes d({}^tL \circ \theta)_p(v) \right\rangle && (5.8)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d\theta'_p(u) \otimes d\theta'_p(v) \right\rangle \quad (L \text{ と } \theta, \theta' \text{ の関係}) && (5.9)\\
&= g'_p(d\theta'_p(u), d\theta'_p(v)) && (5.10)\\
&= (\theta'^* g')_p(u,v) && (5.11)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって $\theta^* g = \theta'^* g'$ が示された。よって $g$ は命題-定義の主張の条件をみたす。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に Fisher 計量 $g$ が定まっているものとする。

## 5.3 Amari-Chentsov テンソルと $\alpha$-接続

**定義 5.7** (Amari-Chentsov テンソル)**.** $\mathcal{P}$ 上の $(0,3)$-テンソル場 $S$ を $S := \nabla g$ で定め、これを $\mathcal{P}$ 上の **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** という。また、$\mathcal{P}$ 上の $(1,2)$-テンソル場 $A$ を次の関係式により定める:

$$g(A(X,Y),Z) = S(X,Y,Z) \quad (\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{P})) \tag{5.12}$$

以降、「Amari-Chentsov テンソル」を「AC テンソル」と略記することがある。

以降、本節では $\mathcal{P}$ に Amari-Chentsov テンソル $S$ が定まっているものとする。

**命題 5.8** (AC テンソルの成分). $(V, T, \mu)$ を $\mathcal{P}$ の最小次元実現、$\Theta^{\mathcal{P}} := \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$, $\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$(V, T, \mu)$ の対数分配関数を $\psi$ とおく。このとき、$\mathcal{P}$ 上の任意の $\nabla$-アファイン座標 $x := (x^1, \ldots, x^m)\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}^m$ に対し、$\varphi := (\varphi^1, \ldots, \varphi^m) := x \circ \theta^{-1}\colon \Theta^{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^m$ とおくと、$S$ の成分は

$$S_{ijk}(p) = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \partial \varphi^k}(\theta(p)) = E_p\left[(T_i - E_p[T_i])(T_j - E_p[T_j])(T_k - E_p[T_k])\right] \tag{5.13}$$

をみたす。ただし $T_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ とは、同一視 $V = V^{\vee\vee} = T^{\vee}_{\theta(p)}\Theta^{\mathcal{P}}$ により $d\varphi^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を $V$ の基底とみなしたときの $T$ の成分である。

**証明** 左側の等号と右側の等号についてそれぞれ示す。

Step 1: 左側の等号 $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$ とおき、$\psi$ の定める $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (5.14)\\
&= \left(\left(\theta^*\widetilde{\nabla}\right)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\theta^*\widetilde{g})\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (5.15)\\
&= \left(\theta_*^{-1}\left(\widetilde{\nabla}_{\theta_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\widetilde{g}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (5.16)\\
&= \left(\widetilde{\nabla}_{\theta_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\widetilde{g}\right)\left(d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) && (5.17)\\
&= \left(\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}}\widetilde{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k}\right) && (5.18)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^l \partial \varphi^n}\right) d\varphi^l d\varphi^n\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \frac{\partial}{\partial \varphi^k}\right) \quad (\varphi \text{ は } \widetilde{\nabla}\text{-アファイン座標}) && (5.19)\\
&= \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \partial \varphi^k} && (5.20)
\end{aligned}$$

となるから、命題の主張の左側の等号が従う。

Step 2: 右側の等号 「$E_p$」の下付きの $p$ を省略して書けば、直接計算より

$$\begin{aligned}
&E[(T_i - E[T_i])(T_j - E[T_j])(T_k - E[T_k])] && (5.21)\\
&= E[T_iT_jT_k] - E[T_i]E[T_jT_k] - E[T_j]E[T_kT_i] - E[T_k]E[T_iT_j] + 2E[T_i]E[T_j]E[T_k] && (5.22)
\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、$\lambda := \exp\psi$ とおき、$\dfrac{\partial}{\partial \varphi^i}$ を $\partial_i$ と略記すれば、直接計算より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \partial \varphi^k} &= \partial_i\partial_j\partial_k \log\lambda && (5.23)\\
&= \frac{\partial_i\partial_j\partial_k\lambda}{\lambda} - \frac{(\partial_i\lambda)(\partial_j\partial_k\lambda)}{\lambda^2} - \frac{(\partial_j\lambda)(\partial_k\partial_i\lambda)}{\lambda^2} - \frac{(\partial_k\lambda)(\partial_i\partial_j\lambda)}{\lambda^2} + 2\frac{(\partial_i\lambda)(\partial_j\lambda)(\partial_k\lambda)}{\lambda^3} && (5.24)
\end{aligned}$$

が成り立つ。この右辺を `0516_資料.pdf` 系 2.4 により期待値の形で表せば式 (5.22) に一致するから、命題の主張の右側の等号が従う。 □

**定義 5.9** ($\alpha$-接続). $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。$\mathcal{P}$ 上のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を次の関係式により定める:

$$g(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) = g(\nabla^{(g)}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} S(X, Y, Z) \qquad (X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{P})) \tag{5.25}$$

この $\nabla^{(\alpha)}$ を $(g, S)$ の定める **$\alpha$-接続 ($\alpha$-connection)** という。とくに $\alpha = 1, -1$ の場合をそれぞれ **e-接続 (e-connection)**、**m-接続 (m-connection)** という。

**命題 5.10** ($\nabla^{(g)}, \nabla^{(\alpha)}$ の AC テンソルによる表示). $\mathcal{P}$ 上の任意の $\nabla$-アファイン座標に関し、$\nabla^{(g)}$ および $\nabla^{(\alpha)}$ の接続係数は次をみたす:

(1)

$$\Gamma^{(g)}{}^k_{ij} = \frac{1}{2} A^k_{ij}, \quad \Gamma^{(g)}{}_{ijk} = \frac{1}{2} S_{ijk} \tag{5.26}$$

(2) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$\Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ij} = \frac{1-\alpha}{2} A^k_{ij}, \quad \Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk} = \frac{1-\alpha}{2} S_{ijk} \tag{5.27}$$

とくに $\alpha = 1$ のとき $\Gamma^{(1)}{}^k_{ij} = 0,\ \Gamma^{(1)}{}_{ijk} = 0$ である。

**証明** (1) (5.26) の左側の等式は

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(g)}{}^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{kl} \left( \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right) && (5.28)\\
&= \frac{1}{2} g^{kl} \left( S_{ijl} + S_{jli} - S_{lij} \right) \quad (\text{命題 } 5.8) && (5.29)\\
&= \frac{1}{2} g^{kl} S_{ijl} && (5.30)\\
&= \frac{1}{2} A^k_{ij} && (5.31)
\end{aligned}$$

より従う。$g$ で添字を下げて (5.26) の右側の等式も従う。

(2) $\alpha$-接続の定義より $\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk} = \Gamma^{(g)}{}_{ijk} - \frac{\alpha}{2} S_{ijk}$ だから、(1) とあわせて (5.27) の左側の等式が従う。$g$ で添字を下げて (5.26) の右側の等式も従う。 □

**命題 5.11** (捩率と曲率の AC テンソルによる表示). $\mathcal{P}$ 上の任意の $\nabla$-アファイン座標に関し、$\nabla^{(\alpha)}$ の捩率テンソル $T^{(\alpha)}$ および (1,3)-曲率テンソル $R^{(\alpha)}$ の成分表示は次をみたす:

(1) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$T^{(\alpha)}{}^k_{ij} = 0 \tag{5.32}$$

(2) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$R^{(\alpha)}{}^l_{ijk} = \frac{1-\alpha}{2} \left( \partial_i A^l_{jk} - \partial_j A^l_{ik} \right) + \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^2 \left( A^m_{jk} A^l_{im} - A^m_{ik} A^l_{jm} \right) \tag{5.33}$$

とくに $\alpha = 1$ のとき $R^{(1)}{}^l_{ijk} = 0$ である。

**証明** (1)

$$T^{(\alpha)}{}_{ij} = \Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ij} - \Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ji} \tag{5.34}$$

$$= \frac{1-\alpha}{2}A^k_{ij} - \frac{1-\alpha}{2}A^k_{ji} \quad (\text{命題 } 5.10(2)) \tag{5.35}$$

$$= 0 \quad (A^k_{ij} = A^k_{ji}) \tag{5.36}$$

より従う。

(2)

$$R^{(\alpha)}{}^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^{(\alpha)}{}^l_{jk} - \partial_j \Gamma^{(\alpha)}{}^l_{ik} + \Gamma^{(\alpha)}{}^m_{jk}\Gamma^{(\alpha)}{}^l_{im} - \Gamma^{(\alpha)}{}^m_{ik}\Gamma^{(\alpha)}{}^l_{jm} \tag{5.37}$$

$$= \frac{1-\alpha}{2}\left(\partial_i A^l_{jk} - \partial_j A^l_{ik}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \left(A^m_{jk}A^l_{im} - A^m_{ik}A^l_{jm}\right) \quad (\text{命題 } 5.10(2)) \tag{5.38}$$

より従う。 □

# 6 具体例

## 6.1 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族

本節では、有限集合上の full support な確率分布の族について、$\alpha$-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

**設定 6.1** (有限集合上の full support な確率分布の族). $\mathcal{X} := \{1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, 0 < p_i < 1 \ (i = 1, \dots, n) \right\} \tag{6.1}$$

とおく。ただし $\delta^i$ は 1 点 $i \in \mathcal{X}$ での Dirac 測度である。これが $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることは `0425_資料.pdf` 例 3.1 で確かめた。

**命題 6.2** (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認).

(1) $(V, T, \gamma)$ を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$V := \mathbb{R}^{n-1}, \tag{6.2}$$

$$T \colon \mathcal{X} \to V, \quad k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \dots, \delta_{(n-1)k}), \tag{6.3}$$

$$\gamma \colon \text{数え上げ測度} \tag{6.4}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi \colon \widetilde{\Theta} \to \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp\theta^i\right)$ となる。

(3) 写像 $P := P_{(V,T,\gamma)} \colon \widetilde{\Theta} \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ は次をみたす:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1}\exp\theta^i}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\exp\theta^i)\delta^i + \delta^n\right) \tag{6.5}$$

(4) $\Theta = \widetilde{\Theta} = V^\vee$ が成り立つ。

(5) 次の写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は $P$ の逆写像である:

$$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \mapsto \left(\log \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \log \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) \tag{6.6}$$

(6) $(V, T, \gamma)$ は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

**証明** (1) $(V, T, \gamma)$ が実現であることは 0425_コメント.pdf 演習問題 0.1 に記した。

(2) 対数分配関数の定義より

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= \log \int_{\mathcal{X}} \exp \langle \theta, T(k) \rangle \; \gamma(dk) &(6.7)\\ &= \log \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} \theta^j \delta_{ji}\right) &(6.8)\\ &= \log\left(\sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i + 1\right) &(6.9)\end{aligned}$$

である。

(3) $P$ の定義より

$$\begin{aligned}P(\theta) &= \exp(\langle \theta, T(k) \rangle - \psi(\theta))\gamma &(6.10)\\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta^i \delta_{ik}\right)\gamma &(6.11)\\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i}\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i)\delta^i + \delta^n\right) &(6.12)\end{aligned}$$

である。

(4) 可積分性を考えると明らかに $\widetilde{\Theta} = V^\vee$ である。また $P$ が (3) のように表せることから $P(\widetilde{\Theta}) \subset \mathcal{P}$ がわかる。したがって $V^\vee = \widetilde{\Theta} \subset P^{-1}(\mathcal{P}) = \Theta$ である。よって $\Theta = \widetilde{\Theta} = V^\vee$ である。

(5) $P \circ \theta$, $\theta \circ P$ を直接計算すれば確かめられる。

(6) 最小次元実現の特徴づけを確かめればよい。条件 A(3) が成り立つことは、いま $V$ の任意のアファイン部分空間に対し「$T(x) \in W$ $\gamma$-a.e.$x$」と「$T(x) \in W$ $\forall x$」が同値であることから明らか。条件 B が成り立つことは $\Theta = V^\vee$ よりわかる。 □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を $\nabla$、Fisher 計量を $g$、$(0,3), (1,2)$ 型の Amari-Chentsov テンソルをそれぞれ $S, A$ とおく。また、$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は多様体 $\mathcal{P}$ の座標とみなす。

**注意 6.3** ($\mathcal{P}$ の 2 通りの位相 & 多様体構造)**.** $\mathcal{P}$ 上の位相 & 多様体構造として、$\mathcal{X}$ 上の符号付き測度全体のなすベクトル空間 $\mathcal{S}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{R}^n$ の部分多様体としてのものと、指数型分布族としての自然なものの 2 通りを考えられるが、これらは互いに一致する。なぜならば、いずれの位相 & 多様体構造に関しても写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は微分同相写像だからである。

**命題 6.4** (Fisher 計量の成分). 座標 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ に関する Fisher 計量 $g$ の成分は

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} p_i - p_i p_j \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j = 1, \dots, n-1) \tag{6.13}$$

となる。

**証明**　微分同相写像 $\theta$ により $g$ を $\Theta$ 上のテンソル場とみなして計算すれば、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= (\mathrm{Var}_p[T])(e^i, e^j) && (6.14)\\ &= E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])] && (6.15)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} - p_i)(\delta_{jk} - p_j) p_k && (6.16)\\ &= \delta_{ij} p_i - p_i p_j && (6.17) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

**命題 6.5** (AC テンソルの成分). 座標 $\theta$ に関する AC テンソル $S$ の成分は

$$S_{ijk}(p) = p_i \delta_{ij} \delta_{jk} - p_i p_k \delta_{ij} - p_i p_j \delta_{jk} - p_j p_k \delta_{ik} + 2 p_i p_j p_k \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j, k = 1, \dots, n-1) \tag{6.18}$$

となる。

**証明**　前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.9 を用いると

$$S_{ijk}(p) = E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])(T^k - E_p[T^k])] \tag{6.19}$$

となるから、命題 6.4 と同様に直接計算して命題の主張の等式が得られる。 □

以降、$n = 3$ の場合を考える。

**命題 6.6** ($n = 3$ での $g, S, A$ の計算). 座標 $\theta$ に関し、$g$ の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})_{i,j} = \frac{1}{p_3} \begin{pmatrix} \dfrac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

となる。$S$ の成分は

$$\begin{aligned} S_{111} &= p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3, && (6.21)\\ S_{112} = S_{121} = S_{211} &= -p_1 p_2 + 2p_1^2 p_2, && (6.22)\\ S_{122} = S_{212} = S_{221} &= -p_1 p_2 + 2p_1 p_2^2, && (6.23)\\ S_{222} &= p_2 - 3p_2^2 + 2p_2^3 && (6.24) \end{aligned}$$

となる。$A$ の成分は

$$A_{11}{}^{1} = 1 - 2p_1, \qquad A_{11}{}^{2} = 0 \tag{6.25}$$

$$A_{12}{}^{1} = A_{21}{}^{1} = -p_2, \qquad A_{12}{}^{2} = A_{21}{}^{2} = -p_1 \tag{6.26}$$
$$A_{22}{}^{1} = 0, \qquad A_{22}{}^{2} = 1 - 2p_2 \tag{6.27}$$

となる。

**証明**　$g$ の行列表示は命題 6.4 よりわかる。その逆行列は直接計算よりわかる。$S$ の成分は命題 6.5 よりわかる。$A$ の成分は「$A_{ij}{}^{k} = g^{kl}S_{ijl}$」を用いて求める。具体的には以下の行列を直接計算すればわかる:

$$\begin{pmatrix} A_{11}{}^{1} & A_{12}{}^{1} & A_{22}{}^{1} \\ A_{11}{}^{2} & A_{12}{}^{2} & A_{22}{}^{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_3}\begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1}+1 & 1 \\ 1 & \frac{p_3}{p_2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{111} & S_{121} & S_{221} \\ S_{112} & S_{122} & S_{222} \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

□

**命題 6.7** ($n = 3$ での測地線方程式). 各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、座標 $\theta$ に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\ddot{\theta}^1 = -\frac{1-\alpha}{2}\left(\left(1 - \frac{2\exp\theta^1}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\right)(\dot{\theta}^1)^2 - \frac{2\exp\theta^2}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\right) \tag{6.29}$$
$$\ddot{\theta}^2 = -\frac{1-\alpha}{2}\left(-\frac{2\exp\theta^1}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2 + \left(1 - \frac{2\exp\theta^2}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\right)(\dot{\theta}^2)^2\right) \tag{6.30}$$

となる。とくに $\alpha = 1$ のとき

$$\ddot{\theta}^1 = 0, \quad \ddot{\theta}^2 = 0 \tag{6.31}$$

である。

**証明**　測地線の方程式

$$\ddot{\theta}^k = -\Gamma^k_{ij}\dot{\theta}^i\dot{\theta}^j \tag{6.32}$$

に、前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.11 の等式 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} = \frac{1-\alpha}{2}A_{ij}{}^{k}$ を代入して得られる。 □

$\alpha \neq 1$ の場合に上の測地線方程式を解くのは難しいように思う。数値計算の結果を資料末尾の付録に載せた。

## 6.2　具体例: 正規分布族

本節では、正規分布族について、$\alpha$-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

**設定 6.8** (正規分布族). $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\lambda(dx) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \right\} \tag{6.33}$$

とおく。これが $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることは `0425_資料.pdf` 例 3.2 で確かめた。

以降、次の事実をしばしば用いる:

**事実 6.9.** 次の 2 つの写像は互いに逆な $C^\infty$ 写像である:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0},\qquad (\mu,\sigma)\mapsto\left(\frac{\mu}{\sigma^2},-\frac{1}{2\sigma^2}\right),\tag{6.34}$$

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0},\qquad (\theta^1,\theta^2)\mapsto\left(-\frac{\theta^1}{2\theta^2},\sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}\right)\tag{6.35}$$

□

**命題 6.10** (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認)**.**

(1) $(V,T,\lambda)$ を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$V=\mathbb{R}^2,\tag{6.36}$$

$$T\colon\mathcal{X}\to V,\quad x\mapsto {}^t(x,x^2),\tag{6.37}$$

$$\lambda\colon \text{Lebesgue 測度}.\tag{6.38}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi\colon\widetilde{\Theta}\to\mathbb{R}$ は $\psi(\theta)=-\dfrac{(\theta^1)^2}{4\theta^2}-\dfrac{1}{2}\log(-\theta^2)+\dfrac{1}{2}\log\pi$ となる。

(3) $\Theta=\widetilde{\Theta}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ が成り立つ。

(4) 次の写像 $\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta$ は $P\coloneqq P_{(V,T,\lambda)}$ の逆写像である:

$$\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta,\quad p\mapsto\left(\frac{E_p[x]}{\mathrm{Var}_p[x]},-\frac{1}{2\,\mathrm{Var}_p[x]}\right)\tag{6.39}$$

(5) $(V,T,\lambda)$ は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

**証明** (1) 実現であることは `0425_資料.pdf` 例 3.2 で確かめた。

(2) 対数分配関数の定義から直接計算よりわかる。

(3) $\theta^2\geq 0$ だと $\exp\left(\theta^1x+\theta^2x^2-\psi(\theta)\right)$ は積分可能でないから $\Theta\subset\widetilde{\Theta}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ である。逆に写像 $P\coloneqq P_{(V,T,\lambda)}$ について、すべての $p\in P(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})$ は $p(dx)=\exp(\theta^1x+\theta^2x^2-\psi(\theta))\lambda(dx)$ $(\exists(\theta^1,\theta^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})$ と表せるから、$(\mu,\sigma)\coloneqq\left(-\dfrac{\theta^1}{2\theta^2},\sqrt{-\dfrac{1}{2\theta^2}}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ とおけば $p(dx)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\lambda(dx)$ と表せることになり $p\in\mathcal{P}$ がわかる。したがって $P(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})\subset\mathcal{P}$ をみたすから $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}\subset P^{-1}(\mathcal{P})=\Theta$ である。よって $\Theta=\widetilde{\Theta}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ である。

(4) $(\theta^1,\theta^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ と $(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ の対応に注意すれば直接計算よりわかる。

(5) 最小次元実現の特徴づけの条件 A(3) と条件 B が成り立つことから、最小次元実現であることがわかる。 □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を $\nabla$、Fisher 計量を $g$、$(0,3),(1,2)$ 型の Amari-Chentsov テンソルをそれぞれ $S,A$ とおく。また、$\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta$ は多様体 $\mathcal{P}$ の座標とみなす。

**命題 6.11.** 座標 $(\mu, \sigma)$ に関する $g$ の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix} \tag{6.40}$$

となる。

**証明** 微分同相写像 $\theta$ により $g$ を $\Theta$ 上のテンソル場とみなして計算する。座標 $(\theta^1, \theta^2)$ と座標 $(\mu, \sigma)$ の間の座標変換が $\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ および $\mu = -\frac{\theta^1}{2\theta^2}$, $\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}$ であることに注意すると

$$d\mu = -\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2, \qquad d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-3/2}d\theta^2, \tag{6.41}$$

$$d\theta^1 = \frac{1}{\sigma^2}d\mu - \frac{2\mu}{\sigma^3}d\sigma, \qquad d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^3}d\sigma, \tag{6.42}$$

さらに

$$(d\theta^1)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(d\mu)^2 - \frac{\mu}{\sigma^5}d\mu d\sigma + \frac{4\mu^2}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \tag{6.43}$$

$$d\theta^1 d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^5}d\mu d\sigma - \frac{2\mu}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \tag{6.44}$$

$$(d\theta^2)^2 = \frac{1}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \tag{6.45}$$

である。したがって、$\Theta$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $D$ とおくと

$$Dd\mu = \frac{1}{(\theta^2)^2}d\theta^1 d\theta^2 - \frac{\theta^1}{(\theta^2)^3}(d\theta^2)^2 = \frac{4}{\sigma}d\mu d\sigma, \tag{6.46}$$

$$Dd\sigma = \frac{3}{4\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-5/2}(d\theta^2)^2 = \frac{3}{\sigma}(d\sigma)^2 \tag{6.47}$$

である。よって

$$d\psi = \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma, \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}\psi &= Dd\psi \qquad (6.49) \\ &= d\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)d\mu + \frac{\mu}{\sigma^2}Dd\mu + d\left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)Dd\sigma \qquad (6.50) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \qquad (6.51) \end{aligned}$$

である。これより命題の主張が従う。 □

**命題 6.12** (AC テンソルの成分)**.** 座標 $(\mu, \sigma)$ に関する AC テンソル $S$ の成分は

$$S_{111} = 0 \tag{6.52}$$

$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = \frac{2}{\sigma^3} \tag{6.53}$$

$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = 0 \tag{6.54}$$

$$S_{222} = \frac{8}{\sigma^3} \tag{6.55}$$

である。座標 $(\mu, \sigma)$ に関する $A$ の成分は

$$A_{11}{}^1 = 0, \qquad A_{11}{}^2 = \frac{1}{\sigma}, \tag{6.56}$$

$$A_{12}{}^1 = A_{21}{}^1 = \frac{2}{\sigma}, \qquad A_{12}{}^2 = A_{21}{}^2 = 0, \tag{6.57}$$

$$A_{22}{}^1 = 0, \qquad A_{22}{}^2 = \frac{4}{\sigma} \tag{6.58}$$

である。

**証明**　微分同相写像 $\theta$ により $S, A$ を $\Theta$ 上のテンソル場とみなして計算する。$\Theta$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $D$ とおくと

$$DDd\psi = D\left(\frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2\right) \tag{6.59}$$

$$= -\frac{2}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{1}{\sigma^2}D(d\mu)^2 - \frac{4}{\sigma^3}(d\sigma)^3 + \frac{2}{\sigma^2}D(d\sigma)^2 \tag{6.60}$$

ここで

$$D(d\mu)^2 = 2d\mu D d\mu = \frac{8}{\sigma}(d\mu)^2 d\sigma, \tag{6.61}$$

$$D(d\sigma)^2 = 2d\sigma D d\sigma = \frac{6}{\sigma}(d\sigma)^3 \tag{6.62}$$

だから

$$DDd\psi = \frac{6}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{8}{\sigma^3}(d\sigma)^3 \tag{6.63}$$

である。これより命題の主張の式が得られる。$A$ の成分は「$A_{ij}{}^k = g^{kl}S_{ijl}$」を用いて直接計算より得られる。

□

**命題 6.13** (接続係数).

(1)　座標 $(\mu, \sigma)$ に関する $\nabla^g$ の接続係数は

$$\Gamma^{g\,1}_{11} = 0, \qquad \Gamma^{g\,1}_{12} = \Gamma^{g\,1}_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{g\,1}_{22} = 0, \tag{6.64}$$

$$\Gamma^{g\,2}_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{g\,2}_{12} = \Gamma^{g\,2}_{21} = 0, \qquad \Gamma^{g\,2}_{22} = -\frac{1}{\sigma} \tag{6.65}$$

である。

(2)　座標 $(\mu, \sigma)$ に関する $\nabla^{(\alpha)}$ の接続係数は

$$\Gamma^{(\alpha)1}_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)1}_{12} = \Gamma^{(\alpha)1}_{21} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)1}_{22} = 0, \tag{6.66}$$

$$\Gamma^{(\alpha)2}_{11} = \frac{1-\alpha}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)2}_{12} = \Gamma^{(\alpha)2}_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)2}_{22} = -\frac{1+2\alpha}{\sigma} \tag{6.67}$$

である。

**証明** $\Gamma^g$ は ${\Gamma^g}_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$ を直接計算することで得られる。$\Gamma^{(\alpha)}$ は ${\Gamma^{(\alpha)}}_{ij}^{k} = {\Gamma^g}_{ij}^{k} - \frac{\alpha}{2}{A_{ij}}^k$ より得られる。 □

**命題 6.14** (測地線方程式). $(\mu, \sigma)$ 座標に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \dfrac{2(1+\alpha)}{\sigma}\dot{\mu}\dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \dfrac{1-\alpha}{2\sigma}\dot{\mu}^2 - \dfrac{1+2\alpha}{\sigma}\dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{6.68}$$

である。とくに $\alpha = 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \dfrac{2}{\sigma}\dot{\mu}\dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \dfrac{1}{2\sigma}\dot{\mu}^2 - \dfrac{1}{\sigma}\dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{6.69}$$

である。

**証明** 測地線の方程式「$\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$」に接続係数を代入して得られる。 □

**命題 6.15.** $\nabla^g$-測地線の像は、楕円

$$\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = r^2 \qquad (x_0 \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_{>0}) \tag{6.70}$$

の一部または $y$ 軸に平行な直線の一部である。

**証明** [1] 測地線の方程式

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma}\dot{\mu}\dot{\sigma} = 0, \tag{6.71}$$

$$\ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma}\dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma}\dot{\sigma}^2 = 0 \tag{6.72}$$

を変形していく。

$\dot{\mu} = 0$ の場合は $\mu = \text{const.}$ ゆえに測地線は $y$ 軸に平行な直線の一部である。

以下、$\dot{\mu} \neq 0$ の場合を考える。(6.71) の両辺を $\dot{\mu}$ で割って

$$\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} - 2\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0 \tag{6.73}$$

これより $\log \dot{\mu} = 2 \log \sigma + \text{const.}$ したがって

$$\dot{\mu} = k\sigma^2 \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{6.74}$$

である。一方、$\nabla^g$ は $g$ の Levi-Civita 接続であるから、測地線の速度ベクトルの $g$ に関する大きさは一定、すなわち

$$\frac{\dot{\mu}^2 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = r^2 \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{6.75}$$

である。(6.75) に (6.74) を代入して

$$\frac{k^2\sigma^4 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = a^2 \tag{6.76}$$

$$\dot{\sigma} = \pm\sigma\sqrt{\frac{a^2 - k^2\sigma^2}{2}} \tag{6.77}$$

を得る。これと (6.74) より

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\sigma}} = \frac{k\sigma^2}{\pm\sigma\sqrt{\frac{a^2-k^2\sigma^2}{2}}} \tag{6.78}$$

$$= \mp\frac{\sqrt{2}|a|}{k}\frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma^2}} \tag{6.79}$$

$$\therefore \mu = \mp\frac{\sqrt{2}|a|}{k}\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma^2} + \mu_0 \qquad (\mu_0 \in \mathbb{R}) \tag{6.80}$$

を得る。よって

$$(\mu - \mu_0)^2 = \frac{2a^2}{k^2} - 2\sigma^2 \tag{6.81}$$

$r := \dfrac{a}{k}$ とおいて整理すれば

$$\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sigma^2 = r^2 \tag{6.82}$$

が得られる。 □

## 7 双対構造

**定義 7.1** (双対構造)**.** $M$ を多様体とする。$M$ 上の Riemann 計量 $g$ とアファイン接続 $\nabla, \nabla^*$ の組 $(g, \nabla, \nabla^*)$ が $M$ 上の**双対構造 (dualistic structure)** であるとは、すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \tag{7.1}$$

が成り立つことをいう。このとき、$\nabla, \nabla^*$ はそれぞれ $g$ に関する $\nabla^*, \nabla$ の**双対接続 (dual connection)** であるという。

さらに $\nabla, \nabla^*$ がいずれも $M$ 上平坦であるとき、$(g, \nabla, \nabla^*)$ は**双対平坦 (dually flat)** であるという。双対平坦な双対構造を**双対平坦構造 (dually flat structure)** という。

**命題 7.2** (双対接続の存在と一意性)**.** $M$ を多様体、$g$ を $M$ 上の Riemann 計量、$\nabla$ を $M$ 上のアファイン接続とする。このとき、$g$ に関する $\nabla$ の双対接続がただひとつ存在する。

**証明** 証明は付録に記した。 □

指数型分布族の $\alpha$-接続について考える。以降、$\mathcal{P}$ を可測空間 $\mathcal{X}$ 上の open な指数型分布族、$\nabla$ を $\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続、$g$ を $\mathcal{P}$ 上の Fisher 計量、$S, A$ をそれぞれ $(0,3), (1,2)$ 型の Amari-Chentsov テンソル、$\nabla^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ を $\alpha$-接続とする。

1) 証明の流れは [Tu17, Chap.3 14.4] を参考にした。

**命題 7.3** (曲率の AC テンソルによる表示)**.** $\alpha \in \mathbb{R}$、$R^{(\alpha)}$ を $\nabla^{(\alpha)}$ の $(1,3)$-曲率テンソルとする。このとき、$\mathcal{P}$ の任意の $\nabla$-アファイン座標に関し、$R^{(\alpha)}$ の成分は

$$R^{(\alpha)}{}_{ijk}{}^{l} = -\frac{1-\alpha^2}{4}\left(A_{jk}{}^{m}A_{im}{}^{l} - A_{ik}{}^{m}A_{jm}{}^{l}\right) \tag{7.2}$$

となる。

**証明** 0613_資料.pdf 命題 1.12 の式

$$R^{(\alpha)}{}_{ijk}{}^{l} = \frac{1-\alpha}{2}\left(\partial_i A_{jk}{}^{l} - \partial_j A_{ik}{}^{l}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\left(A_{jk}{}^{m}A_{im}{}^{l} - A_{ik}{}^{m}A_{jm}{}^{l}\right) \tag{7.3}$$

を変形する。

$$\begin{aligned}\partial_i A_{jk}{}^{l} - \partial_j A_{ik}{}^{l} &= \partial_i(g^{la}S_{jka}) - \partial_j(g^{la}S_{ika}) &(7.4)\\ &= \partial_i(g^{la})S_{jka} + g^{la}\partial_i S_{jka} - \partial_j(g^{la})S_{ika} - g^{la}\partial_j S_{ika} &(7.5)\\ &= \partial_i(g^{la})S_{jka} - \partial_j(g^{la})S_{ika} &(7.6)\end{aligned}$$

である。右辺第 1 項について、$0 = \partial_i\delta^l_m = \partial_i(g^{la}g_{ma}) = \partial_i(g^{la})g_{ma} + g^{lb}\partial_i(g_{mb})$ より $\partial_i(g^{la}) = -g^{ma}g^{lb}\partial_i(g_{mb})$ だから

$$\begin{aligned}\partial_i(g^{la})S_{jka} &= -g^{ma}g^{lb}\partial_i(g_{mb})S_{jka} &(7.7)\\ &= -g^{ma}g^{lb}S_{imb}S_{jka} &(7.8)\\ &= -A_{im}{}^{l}A_{jk}{}^{m} &(7.9)\end{aligned}$$

同様にして

$$\partial_j(g^{la})S_{ika} = -A_{jm}{}^{l}A_{ik}{}^{m} \tag{7.10}$$

を得る。したがって $\partial_i A_{jk}{}^{l} - \partial_j A_{ik}{}^{l} = -A_{im}{}^{l}A_{jk}{}^{m} + A_{jm}{}^{l}A_{ik}{}^{m}$ だから

$$R^{(\alpha)}{}_{ijk}{}^{l} = \left(-\frac{1-\alpha}{2} + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right)\left(A_{jk}{}^{m}A_{im}{}^{l} - A_{ik}{}^{m}A_{jm}{}^{l}\right) = -\frac{1-\alpha^2}{4}\left(A_{jk}{}^{m}A_{im}{}^{l} - A_{ik}{}^{m}A_{jm}{}^{l}\right) \tag{7.11}$$

となる。 □

**系 7.4.**

(1) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $R^{(\alpha)} = (1-\alpha^2)R^{(0)} = R^{(-\alpha)}$.

(2) 次は同値:

　(a) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、$\nabla^{(\alpha)}$ は平坦である。

　(b) ある $\alpha \neq \pm 1$ が存在し、$\nabla^{(\alpha)}$ は平坦である。

**証明** (1) 命題 7.3 より明らか。

(2) まず (1) より次は同値である:

(a)′ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $R^{(\alpha)} = 0$.

(b)′ $\exists \alpha \neq \pm 1$ s.t. $R^{(\alpha)} = 0$.

さらに $\alpha$-接続はすべて torsion-free だから、曲率が 0 であることと平坦であることは同値である。 □

**定理 7.5** ($\alpha$-接続による双対構造). 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、3 つ組 $(g, \nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ は $\mathcal{P}$ 上の双対構造となる。さらに、$\alpha = \pm 1$ ならば $(g, \nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)})$ は双対平坦である。

**証明**　双対構造であることは、すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{P})$ に対し

$$g(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) + g(Y, \nabla^{(-\alpha)}_X Z) = g(\nabla^g_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} S(X, Y, Z) + g(Y, \nabla^g_X Z) + \frac{\alpha}{2} S(X, Z, Y) \tag{7.12}$$

$$= g(\nabla^g_X Y, Z) + g(Y, \nabla^g_X Z) \tag{7.13}$$

$$= X(g(Y, Z)) \tag{7.14}$$

より従う。$\alpha = \pm 1$ で双対平坦となることは系 7.4 よりわかる。 □

# 8　Legendre 変換

**定義 8.1** (Legendre 変換). $U \subset W$ を開集合、$f : U \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 関数であって $\nabla f : U \to W^\vee$ が単射であるものとする。関数

$$f^\vee : U' \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \left\langle (\nabla f)^{-1}(y), y \right\rangle - f((\nabla f)^{-1}(y)) \quad \text{where} \quad U' := \nabla f(U) \tag{8.1}$$

を $f$ の **Legendre 変換 (Legendre transform)** という。

**例 8.2** (Legendre 変換の例). 前回 (`0704_資料.pdf`) 扱った具体例について対数分配関数の Legendre 変換を計算してみる。

- Bernoulli 分布族 (i.e. 2 元集合上の full support な確率分布の族):　対数分配関数は $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \log(1 + \exp\theta)$ であった。よって $\nabla\psi(\theta) = \dfrac{\exp\theta}{1 + \exp\theta}$ であり、$(\nabla\psi)^{-1}(\eta) = \log\eta - \log(1 - \eta)$ である。したがって $\psi^\vee(\eta) = \eta\log\eta + (1 - \eta)\log(1 - \eta)$ である。
- 正規分布族:　対数分配関数は $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto -\dfrac{(\theta^1)^2}{4\theta^2} - \dfrac{1}{2}\log(-\theta^2) + \dfrac{1}{2}\log\pi$ であった。よって $\nabla\psi(\theta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\theta^1}{2\theta^2} & \dfrac{(\theta^1)^2}{4(\theta^2)^2} - \dfrac{1}{2\theta^2} \end{pmatrix}$ であり、$(\nabla\psi)^{-1}(\eta) = \dfrac{1}{\eta_2 - (\eta_1)^2}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ である。よって $\psi^\vee(\eta) = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \log 2\pi + \log(\eta_2 - (\eta_1)^2)\right)$ である。

本稿では、とくに次の状況を考えることになる。

**命題 8.3.** $U \subset W$ を凸開集合、$f : U \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 関数であって $\operatorname{Hess} f$ が $U$ 上各点で (対称であることも含む意味で) 正定値であるものとする。このとき、次が成り立つ:

(1)　$\nabla f$ は局所微分同相である。とくに $U' := \nabla f(U)$ は $W^\vee$ の開集合である。
(2)　$\nabla f : U \to U'$ は微分同相である。とくに $\nabla f$ は単射である。

したがって $f^\vee$ が定義でき、$f^\vee$ は次をみたす:

(3) $f^\vee \colon U' \to \mathbb{R}$ は $C^\infty$ 関数である。

(4) $\nabla f^\vee = (\nabla f)^{-1}$ が成り立つ。とくに $\nabla f^\vee$ は単射である。

(5) 各 $y \in U'$ に対し $(\operatorname{Hess} f^\vee)_y = ((\operatorname{Hess} f)_x)^{-1}$ が成り立つ (ただし $x := (\nabla f)^{-1}(y)$)。とくに $(\operatorname{Hess} f^\vee)_y$ は正定値である。

**証明** (1) 命題の仮定より $\operatorname{Hess} f$ は $U$ 上各点で正定値だから、$\nabla f$ の微分は各点で線型同型である。したがって $\nabla f$ は局所微分同相であり、とくに開写像である。よって $U' = \nabla f(U)$ は $W^\vee$ の開集合である。

(2) $u, \widetilde{u} \in U,\ u \neq \widetilde{u}$ を固定し、$[0,1]$ を含む $\mathbb{R}$ の開区間 $I$ であって、すべての $t \in I$ に対し $(1-t)u + t\widetilde{u}$ が $U$ に属するようなものをひとつ選ぶ ($U$ は $W$ の凸開集合だからこれは可能)。さらに $\varphi \colon I \to U,\ t \mapsto f((1-t)u + t\widetilde{u})$ と定めると、平均値定理より、ある $\tau \in (0,1)$ が存在して

$$\langle \nabla f(\widetilde{u}) - \nabla f(u), \widetilde{u} - u \rangle = \varphi'(1) - \varphi'(0) \tag{8.2}$$
$$= \varphi''(\tau) \qquad \text{(平均値定理)} \tag{8.3}$$
$$= \left\langle (\operatorname{Hess} f)_{(1-\tau)u+\tau\widetilde{u}}, (\widetilde{u} - u)^2 \right\rangle \tag{8.4}$$
$$> 0 \qquad (\operatorname{Hess} f \text{ は正定値}) \tag{8.5}$$

が成り立つ。よって $\nabla f(\widetilde{u}) \neq \nabla f(u)$ である。したがって $\nabla f$ は単射である。このことと (1) より $\nabla f \colon U \to U'$ は微分同相である。

(3) $\nabla f \colon U \to U'$ が微分同相ゆえに $(\nabla f)^{-1} \colon U' \to U$ は $C^\infty$ だから、$f^\vee$ は $C^\infty$ 関数である。

(4) $f^\vee$ の定義式を $\nabla$ で微分すると、すべての $y \in U'$ に対し

$$(\nabla f^\vee)(y) = (\nabla f)^{-1}(y) + \left\langle y, \nabla(\nabla f)^{-1}(y) \right\rangle - \left\langle (\nabla f)((\nabla f)^{-1}(y)), \nabla(\nabla f)^{-1}(y) \right\rangle = (\nabla f)^{-1}(y) \tag{8.6}$$

が成り立つ。よって $(\nabla f)^{-1} = \nabla f^\vee$ である。

(5) (4) より

$$(\operatorname{Hess} f^\vee)_y = d(\nabla f^\vee)_y \tag{8.7}$$
$$= d((\nabla f)^{-1})_y \tag{8.8}$$
$$= (d(\nabla f)_x)^{-1} \tag{8.9}$$
$$= ((\operatorname{Hess} f)_x)^{-1} \tag{8.10}$$

となる。 □

**系 8.4** (Legendre 変換の対合性)**.** $f^{\vee\vee} = f$.

**証明** Legendre 変換の定義より、すべての $x \in U$ に対し

$$f^{\vee\vee}(x) = \left\langle x, (\nabla f^\vee)^{-1}(x) \right\rangle - f^\vee((\nabla f^\vee)^{-1}(x)) \tag{8.11}$$
$$= \langle x, \nabla f(x) \rangle - f^\vee(\nabla f(x)) \qquad (\nabla f^\vee = (\nabla f)^{-1}) \tag{8.12}$$
$$= \langle x, \nabla f(x) \rangle - \left( \left\langle \nabla f(x), (\nabla f)^{-1}(\nabla f(x)) \right\rangle - f((\nabla f)^{-1}(\nabla f(x))) \right) \tag{8.13}$$

$$= f(x) \tag{8.14}$$

が成り立つ。よって $f^{\vee\vee} = f$ である。 □

# 9 期待値パラメータ

**命題-定義 9.1** (期待値パラメータ空間). 集合

$$\mathcal{M} := \left\{ E_p[T] \in V \mid p \in \mathcal{P} \right\} \tag{9.1}$$

は $V$ の開部分多様体となり、写像 $\eta \colon \mathcal{P} \to \mathcal{M},\ p \mapsto E_p[T]$ は微分同相写像となる。

$\mathcal{M}$ を $(V, T, \mu)$ に関する $\mathcal{P}$ の**期待値パラメータ空間 (mean parameter space)** といい、$\eta$ を $(V, T, \mu)$ に関する $\mathcal{P}$ 上の**期待値パラメータ座標 (mean parameter coordinates)** という。

この証明には次の 2 つの事実を使う。

**事実 9.2** ($\psi$ の微分は十分統計量の期待値). 写像 $\nabla\psi \colon \Theta \to V^{\vee\vee} = V$ は

$$(\nabla\psi)(\theta(p)) = \eta(p) \qquad (p \in \mathcal{P}) \tag{9.2}$$

をみたす。したがって $\mathcal{M} = \nabla\psi(\Theta)$ である。 □

**事実 9.3.** 位相ベクトル空間の凸集合の内部は凸集合である。 □

**命題-定義 9.1 の証明** まず $\mathcal{M}$ が $V$ の開部分多様体となることを示す。$\psi$ を $\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta}$ 上の関数とみなすと、事実 9.3 とあわせて $\psi$ は命題 8.3 の前提をみたすから、命題 8.3 (1) より $\nabla\psi \colon \mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta} \to V^{\vee\vee} = V$ は局所微分同相、とくに開写像でもある。したがって $\nabla\psi(\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta})$ は $V$ の開部分多様体となる。さらに $\Theta$ は $\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta}$ の開集合だから、$\nabla\psi(\Theta)$ は $\nabla\psi(\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta})$ の開部分多様体となる。このことと事実 9.2 より、$\mathcal{M} = \nabla\psi(\Theta)$ は $\nabla\psi(\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta})$ の開部分多様体となり、とくに $V$ の開部分多様体となる。

次に $\eta$ が微分同相写像であることを示す。命題 8.3 (2) より $\nabla\psi$ は $\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta}$ から $\nabla\psi(\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta})$ への微分同相だから、部分多様体への制限により $\nabla\psi$ は $\Theta$ から $\mathcal{M}$ への微分同相を与える。したがって写像 $\eta = (\nabla\psi) \circ \theta \colon \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ は微分同相である。 □

以降、$\psi|_{\mathrm{Int}\,\widetilde{\Theta}}$ の Legendre 変換を $\mathcal{M}$ 上に制限したものを $\phi$ と書くことにする。

**定理 9.4** (自然パラメータ座標と期待値パラメータ座標の関係). 関数 $\psi \colon \Theta \to \mathbb{R}$ および $\phi \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ と、$\mathcal{P}$ 上の自然パラメータ座標 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ および期待値パラメータ座標 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ に関し次が成り立つ:

(1)
$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta^i}(\theta(p)) = \eta_i(p), \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\eta_i}(\eta(p)) = \theta^i(p) \qquad (p \in \mathcal{P}). \tag{9.3}$$

(2) $g$ の $\theta$-座標に関する成分は

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j}(\theta(p)) = \frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i}(p), \qquad g^{ij}(p) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta(p)) = \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j}(p) \qquad (p \in \mathcal{P}) \tag{9.4}$$

をみたす。

(3) $\delta_i^j$ を Kronecker のデルタとして

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right) = \delta_i^j \tag{9.5}$$

が成り立つ。

**証明** (1) 事実 9.2 より $\nabla\psi \circ \theta = \eta$ であることと、命題 8.3 (4) より $\nabla\phi = (\nabla\psi)^{-1}$ であることから従う。

(2) $g$ の定義および命題 8.3 (5) より従う。

(3)

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial \theta^k}{\partial \eta_j}\frac{\partial}{\partial \theta^k}\right) = g_{ik}\frac{\partial \theta^k}{\partial \eta_j} = g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \tag{9.6}$$

□

**定理 9.5.** 期待値パラメータ座標は $\mathcal{P}$ 上の $\nabla^{(-1)}$-アファイン座標である。

**証明** $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial \theta^i}$, $\partial^i = \dfrac{\partial}{\partial \eta_i}$ と略記すれば、上の定理の (3) より

$$0 = \partial^i \delta_k^j = g\left(\nabla^{(1)}_{\partial^i}\partial_k, \partial^j\right) + g\left(\partial_k, \nabla^{(1)}_{\partial^i}\partial^j\right) \tag{9.7}$$

だから

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(-1)}{}^{ij}_{k} &= g\left(\partial_k, \nabla^{(-1)}_{\partial^i}\partial^j\right) && (9.8)\\
&= -g\left(\nabla^{(1)}_{\partial^i}\partial_k, \partial^j\right) && (9.9)\\
&= -\frac{\partial \theta^l}{\partial \eta_i} g\left(\nabla^{(1)}_{\partial_l}\partial_k, \partial^j\right) && (9.10)\\
&= -\frac{\partial \theta^l}{\partial \eta_i}\Gamma^{(1)}{}^{j}_{lk} && (9.11)\\
&= 0 \qquad (\Gamma^{(1)}{}^{j}_{lk} = 0) && (9.12)
\end{aligned}$$

となる。 □

# 参考文献


[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[Tu17] Loring W. Tu, **Differential geometry**, Springer, 2017.

# 記号一覧

# 索引