第 1 章　統計的多様体

1　双対構造

定義 1.1 (双対構造). M を多様体とする。M 上の Riemann 計量 g とアファイン接続 ∇, ∇^* の組 (g, ∇, ∇^*) が M 上の**双対構造 (dualistic structure)** であるとは、すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \tag{1.1}$$

が成り立つことをいう。このとき、∇, ∇^* はそれぞれ g に関する ∇^*, ∇ の**双対接続 (dual connection)** であるという。

さらに ∇, ∇^* がいずれも M 上平坦であるとき、(g, ∇, ∇^*) は**双対平坦 (dually flat)** であるという。双対平坦な双対構造を**双対平坦構造 (dually flat structure)** という。

命題 1.2 (双対接続の存在と一意性). M を多様体、g を M 上の Riemann 計量、∇ を M 上のアファイン接続とする。このとき、g に関する ∇ の双対接続がただひとつ存在する。

証明　一意性は g の非退化性より明らか。以下、存在を示す。まず、$X, Z \in \mathfrak{X}(TM)$ を固定すると写像 $\mathfrak{X}(TM) \to C^\infty(M)$, $Y \mapsto X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z)$ は $C^\infty(M)$-線型だから $\Omega^1(M)$ に属する。これを g で添字を上げて得られるベクトル場を $\nabla^*_X Z$ と記すことにすれば、$\nabla^*_X Z$ は目的の式をみたす。ここまでで、目的の式をみたす写像 $\nabla^* \colon \Gamma(TM) \to \mathrm{Map}(\Gamma(TM), \Gamma(TM))$ が得られた。∇^* の像が $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(TM), \Gamma(TM)) = \Gamma(T^\vee M \otimes TM)$ に属することは、各 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $\nabla^* Z$ の $C^\infty(M)$-線型性を確かめればよく、すぐにわかる。あとは ∇^* の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則を確かめればよいが、これらも ∇^* の定め方から明らか。よって存在が示された。 □

定義 1.3 (双対アファイン座標). (g, ∇, ∇^*) を M 上の双対構造とする。∇-アファイン座標 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ と ∇^*-アファイン座標 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ の組 (θ, η) が (g, ∇, ∇^*) に関する**双対アファイン座標 (dual affine coordinate)** であるとは、

$$g(\partial_i, \partial^j) = \delta_i^j \qquad (\forall i, j) \tag{1.2}$$

が成り立つことをいう。ただし $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial \theta^i}$, $\partial^i := \dfrac{\partial}{\partial \eta_i}$ である。