1 振り返りと導入

- 期待値パラメータ空間

2 Fisher 計量

例 2.1 (正規分布族). [TODO] ちゃんと書く $\mathcal{P}$ を $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上の正規分布族とし、実現 (V, T, μ) を $V = \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, x^2)$, $\mu = \lambda$ とおく。これは条件 A をみたす。

自然パラメータ空間は $\Theta = \Theta^\circ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。

対数分配関数は

$$\psi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{2.1}$$

である。ただし $\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ とおいた。よって

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\sigma^3}d\sigma \qquad (2.2)\\ &= -\frac{\theta^1}{2\theta^2}d\theta^1 + \left(-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{4(\theta^2)^2}\right)d\theta^2 \qquad (2.3)\\ \operatorname{Hess}\psi &= Dd\psi \qquad (2.4)\\ &= \left(-\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2\right)d\theta^1 + \left(\frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^1 + \left(\frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3}\right)d\theta^2\right)d\theta^2 \qquad (2.5)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \qquad (2.6) \end{aligned}$$

である。Fisher 計量 $g := \operatorname{Hess}\psi$ から定まる Levi-Civita 接続 $\nabla^{(g)}$ の、座標 μ, σ に関する接続係数を求めてみる。

$$\Gamma^{(g)1}{}_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(g)1}{}_{12} = \Gamma^{(g)1}{}_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)1}{}_{22} = 0, \tag{2.7}$$

$$\Gamma^{(g)2}{}_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)2}{}_{12} = \Gamma^{(g)2}{}_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(g)2}{}_{22} = -\frac{1}{\sigma} \tag{2.8}$$

測地線の方程式は

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \frac{1}{2y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

である。これを直接解くのは少し大変である。その代わりに、既知の Riemann 多様体との間の等長同型を利用して測地線を求める。(Θ, g) は、上半平面 H に計量 $\breve{g} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2y^2}$ を入れた Riemann 多様体との間に等長同型 $(\Theta, g) \to (H, \breve{g})$, $(x, y) \mapsto (x, \sqrt{2}y)$ を持つ。Levi-Civita 接続に関する測地線は等長同型で保たれるから、$(H, \breve{g})$ の測地線を求めればよい。$(H, \breve{g})$ の測地線は、y 軸に平行な直線と x 軸上に中心を持つ半円で尽くされることが知られている。これらを等長同型で写して、(Θ, g) の測地線として y 軸に平行な直線と x 軸上に長軸を持つ半楕円が得られる。

3 期待値パラメータ空間

指数型分布族の話題に戻る。以降、本節では $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族、(V, T, ν) を $\mathcal{P}$ の実現、$\Theta := \Theta_{(V,T,\nu)}$ を (V, T, ν) の自然パラメータ空間とする。

定義 3.1 (期待値パラメータ空間). 集合 $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$

$$\mathcal{M}_{(V,T,\nu)} \coloneqq \left\{\mu \in V \mid \exists\, p \colon \mathcal{X} \text{ 上の確率分布 s.t. } p \ll \nu,\ E_p[T] = \mu\right\} \tag{3.1}$$

を (V, T, ν) の**期待値パラメータ空間 (mean parameter space)** という。

期待値パラメータ空間 $\mathcal{M}$ は、$\mathcal{P}$ に属する確率分布に関する T の期待値をすべて含んでいる (一般には真に含んでいる)。

命題 3.2. $\mu \in V$ がある $p \in \mathcal{P}$ に関する T の期待値ならば (すなわち $\mu = E_p[T]$ ならば)、μ は $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ に属する。

証明 [TODO] □

命題 3.3 ($\mathcal{M}$ は凸集合). $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ は V の凸集合である。

証明 [TODO] □

4 今後の予定

- KL ダイバージェンス
- Fisher 計量
- アファイン接続

5 参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).