発表中にコメントがあった事柄を整理する。

各 $\omega \in V^\vee$ に対し、$\langle \omega, f \rangle$ を **f の ω の向きの成分**、$\mathrm{Var}[\langle \omega, f \rangle]$ を **f の ω の向きの分散**と呼ぶことにすれば、次の命題が成り立つ。

命題 0.1.
(1) f の分散が 0 であることと、すべての $\omega \in V^\vee$ に対し f の ω の向きの分散が 0 であることとは同値である。
(2) $\omega \in V^\vee$ に関し、f の ω の向きの分散が 0 であることと、f の ω の向きの成分が a.e. 定数であることとは同値である。
(3) f が a.e. 定数であることと、すべての $\omega \in V^\vee$ に対し f の ω の向きの成分が a.e. 定数であることとは同値である。

証明 [TODO] □

$\mathrm{Var}[f]$ を行列とみなせば、f の ω の向きの分散が 0 であることは次のように理解できる。

命題 0.2. V の基底を固定することで $\mathrm{Var}[f] \in M_m(\mathbb{R})$, $\omega \in \mathbb{R}^m$ とみなせば、$\mathrm{Var}[\langle \omega, f \rangle] = 0$ であることと、$\mathrm{Var}[f]\omega = 0$ であることとは同値である。

補題 0.3. $A \in M_m(\mathbb{R})$ を半正定値対称行列とする [1)]。このとき、$v \in \mathbb{R}^m$ に関し ${}^t v A v = 0$ であることと、$Av = 0$ であることとは同値である。

証明 [TODO] □

命題の証明. [TODO] □

条件 A はアファイン部分空間の言葉で特徴づけることができる。

命題 0.4. 実現 (V, T, μ) に関し次は同値である:

(1) (V, T, μ) は条件 A をみたす。
(2) V の任意の真アファイン部分空間 W に対し、「$T(x) \in W$ μ-a.e.x でない」が成り立つ。

証明 (1) ⇒(2) 対偶を示す。(2) の否定より、ある真ベクトル部分空間 $W \subsetneq V$ および $b \in T(\mathcal{X})$ が存在して $T(x) \in W + b$ μ-a.e.x が成り立つ。すると $W^\perp \subset V^\vee$ は空でないから、ある $\theta \in W^\perp$, $\theta \neq 0$ が存在する。よって $\langle \theta, T(x) \rangle = \langle \theta, T(x) - b \rangle + \langle \theta, b \rangle = \langle \theta, b \rangle$ μ-a.e.x となり、(1) の否定が従う。

(2) ⇒(1) 対偶を示す。(1) の否定より、ある $\theta \in V^\vee$, $\theta \neq 0$ および $c \in \mathbb{R}$ が存在して $\langle \theta, T(x) \rangle = c$ μ-a.e.x が成り立つ。そこで $A := \{ v \in V \mid \langle \theta, v \rangle = c \}$ とおけば、A は V の真アファイン部分空間であり、$T(x) \in A$ μ-a.e.x が成り立つから、(2) の否定が従う。 □

1) 半正定値性を除いた場合の反例としては $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がある。

定義 0.5.

$$\Theta'_{(V,T,\mu)} := \{\theta \in \Theta_{(V,T,\mu)} \mid P_\theta \in \mathcal{P}\} \tag{0.1}$$

を $\mathcal{P}$ の実現 (V,T,μ) の**真のパラメータ空間 (strict parameter space)** と呼ぶ。

命題 0.6. (V,T,μ) を $\mathcal{P}$ の最小次元実現とする。このとき、写像 $\Theta'_{(V,T,\mu)} \to \mathcal{P},\ \theta \mapsto P_\theta$ は全単射である。

証明 全射性は Θ' の定義より従う。単射性は `0502_資料.pdf` の命題 2.2(2) より従う。 □

命題-定義 0.7. 指数型分布族 $\mathcal{P}$ に関し、次は同値である:

(1) ある最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta'_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。
(2) すべての最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta'_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。

$\mathcal{P}$ がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、$\mathcal{P}$ は**開 (open)** であるという。

証明 [TODO] □

命題-定義 0.8. $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V,T,μ) をひとつ選ぶと、上の命題の全単射により $\mathcal{P}$ 上に多様体構造と平坦アファイン接続を定めることができる。この多様体構造および平坦アファイン接続は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ の**自然な多様体構造**および**自然な平坦アファイン接続**と呼ぶ。

証明 [TODO] cf. [BN78, Lem. 8.1]. ちなみに [BN70] の証明は RN 微分の a.e. 一致の扱いに誤りがあるらしい □

命題-定義 0.9 ($\mathcal{P}$ の Fisher 計量)**.** $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V,T,μ) をひとつ選ぶと、$\Theta'_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量を $\mathcal{P}$ 上の Riemann 計量とみなすことができる。この計量は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ の **Fisher 計量**と呼ぶ。

証明 [TODO] □

命題 0.10. 条件 A が成り立つことと $\operatorname{Hess}\psi$ が正定値であることとは同値である。

証明 [TODO] □

定義 0.11 (スコア関数)**.**

$$p\colon \Theta \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad (\theta, x) \mapsto \exp(\langle \theta, T(x)\rangle - \psi(\theta)) \tag{0.2}$$

$$l\colon \Theta \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad (\theta, x) \mapsto \log p(\theta, x) \tag{0.3}$$

$$dl\colon \Theta \times \mathcal{X} \to V, \qquad (\theta, x) \mapsto dl_\theta \tag{0.4}$$

$$dl^2 \colon \Theta \times \mathcal{X} \to V \otimes V, \quad (\theta, x) \mapsto dl_\theta^2 \tag{0.5}$$

$$E[dl^2] \colon \Theta \to V \otimes V, \quad \theta \mapsto E_{P_\theta}[dl^2] \tag{0.6}$$

ただし dl の値域が V であるのは、各 θ ごとに $dl_\theta \in T_\theta^\vee \Theta$ を $V^{\vee\vee} = V$ の元とみなしている。

命題 0.12.

$$E[dl^2] = \operatorname{Hess} \psi \tag{0.7}$$

証明 [TODO] □

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).