第 1 章　Hessian

1　Hessian

本節では W を m 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)、$U \overset{\text{open}}{\subset} W$ を開部分集合とする。

本節では U 上の C^∞ 関数に対し Hessian を定義したい。そこで、まず U 上にアファイン接続を定義し、それを用いて Hessian を定義する。

1.1　U 上のアファイン接続

一般のアファイン接続の平坦性を定義しておく。

定義 1.1 (平坦アファイン接続)**.** M を多様体、∇ を M 上のアファイン接続とする。

- M の開部分集合 $O \overset{\text{open}}{\subset} M$ 上の座標であって、それに関する ∇ の接続係数がすべて 0 となるものを、O 上の **∇-アファイン座標 (∇-affine coordinates)** という。
- 各 $p \in M$ に対し、p のまわりの ∇-アファイン座標が存在するとき、∇ は M 上**平坦 (flat)** であるという。

今考えている U 上には、次のような平坦アファイン接続が定まる。

命題-定義 1.2 (U 上の平坦アファイン接続)**.** U 上のアファイン接続 $D\colon \Gamma(TU) \to \Gamma(T^\vee U \otimes TU)$ を、次の規則で well-defined に定めることができる:

- 各 $X \in \Gamma(TU)$ に対し、W の基底が定める U 上の座標 x^i ($i = 1, \ldots, m$) をひとつ選び、
$$DX := dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(T^\vee U \otimes TU) \tag{1.1}$$
と定める。ただし、X の成分表示を $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ とおいた。

さらに、この D は U 上のアファイン接続として平坦である。

証明　写像として well-defined であることを一旦認め、先に $\mathbb{R}$-線型性、Leibniz 則、平坦性を確かめる。D の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則は、外微分 d の $\mathbb{R}$-線型性と Leibniz 則から従う。平坦性は、式 (1.1) で用いた座標 x^i が D-アファイン座標となることから従う。最後に、D が写像として well-defined であることを示す。y^α ($\alpha = 1, \ldots, m$) を W の基底が定める U 上の座標とすると、

$$dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = d\left(X^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right) \otimes \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{1.2}$$
$$= \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} dX^\alpha + X^\alpha \underbrace{d\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)}_{=0}\right) \otimes \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{1.3}$$

$$= dX^{\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \tag{1.4}$$

となる。ただし「$=0$」の部分は x^i と y^{α} の間の座標変換がアファイン変換となることを用いた。これで well-defined 性も示された。 □

1.2 Hessian

U 上のアファイン接続 D により、$T^{\vee}U$ の接続が誘導される。これを用いて Hessian を定義する。

定義 1.3 (Hessian)**.** C^{∞} 関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対し、f の **Hessian** を

$$\operatorname{Hess} f := Ddf \in \Gamma(T^{\vee}U \otimes T^{\vee}U) \tag{1.5}$$

と定義する。

D-アファイン座標を用いると、Hessian の成分表示は簡単な形になる。

命題 1.4 (Hessian の成分表示)**.** x^i $(i = 1, \ldots, m)$ を U 上の D-アファイン座標とする。このとき、座標 x^i に関する $\operatorname{Hess} f$ の成分表示は

$$\operatorname{Hess} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i \otimes dx^j \tag{1.6}$$

となる。とくに f の C^{∞} 性より $\operatorname{Hess} f$ は対称テンソルである。

証明 $(\operatorname{Hess} f)(\partial_i, \partial_j) = \langle D_{\partial_i} df, \partial_j \rangle = \partial_i \langle df, \partial_j \rangle - \langle df, \underbrace{D_{\partial_i}\partial_j}_{=0} \rangle = \partial_i(\partial_j f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ より従う。 □