fuga

第 1 章　トーラス上の Fourier 変換

1.1　Fourier Coefficients and Summation Methods

定義 1.1.1 (Fourier 係数). $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。各 $n \geq 0$ に対し

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{1.1.1}$$

を f の**第 n Fourier 係数**という。

定義 1.1.2 (Fourier 部分和). $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。各 $N \geq 0$ に対し

$$S_N(f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int} \tag{1.1.2}$$

を f の**第 N Fourier 部分和**という。

次の定理は、Fourier 変換/逆変換に対する反転公式の、Fourier 係数/級数に対する類似物である。

定理 1.1.3. $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ ならば、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{T} \tag{1.1.3}$$

が成り立つ。

証明.　省略 □

1.2　Fourier Transform of L^2 functions

1.3　Trigonometric Series

第 2 章　$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換

2.1　Fourier 変換の基本性質

定義 2.1.1 (Fourier 変換). $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。$\mathbb{R}$ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{2.1.1}$$

で定義し、これを f の **Fourier 変換 (Fourier transform)** という。$\widehat{f}$ を $f^\wedge$ とも書く。$\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$ とおき、$\mathbb{R}, \widehat{\mathbb{R}}$ の座標をそれぞれ x, ξ で表すことが多い。

命題 2.1.2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し、$\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上一様連続である。

証明.

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}) dx \right| && (2.1.2)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-i\eta x} - 1| dx && (2.1.3)\\
&\leq 2\|f\|_1 && (2.1.4)\\
&< \infty && (2.1.5)
\end{aligned}$$

より、(2.1.3) は $\eta \in \widehat{\mathbb{R}}$ に関し可積分であり、優収束定理より $\eta \to 0$ で 0 に収束する。 □

命題 2.1.3. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}\times\mathcal{F}"] \arrow[d, "\text{たたみ込み}"'] & C_0(\mathbb{R}) \times C_0(\mathbb{R}) \arrow[d, "\text{各点での積}"] \\
L^1(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & C_0(\mathbb{R})
\end{tikzcd} \tag{2.1.6}$$

ただし、$C_0(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であって $|x| \to \infty$ で 0 に収束するもの全体の集合である。

証明.　省略 □

2.2　The Dirichlet and Fejér Kernels

$\mathbb{T}$ の場合と同様に Dirichlet 核と Fejér 核を定義する。

定義 2.2.1 (Dirichlet 核). ℝ 上の関数の族

$$D_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi x} d\xi \quad (\lambda > 0) \tag{2.2.1}$$

を **Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)** という。

命題 2.2.2.

$$D_\lambda(x) = \frac{\sin \lambda x}{\pi x} \quad (x \neq 0) \tag{2.2.2}$$

証明. 省略 □

定義 2.2.3 (Fejér 核). ℝ 上の関数の族

$$K_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) e^{i\xi x} d\xi \quad (\lambda > 0) \tag{2.2.3}$$

を **Fejér 核 (Fejér kernel)** という。

命題 2.2.4.

$$K_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin(\lambda x/2)}{\lambda x/2}\right)^2 \quad (x \neq 0) \tag{2.2.4}$$

証明. 省略 □

定義 2.2.5 (総和核). 次をみたす $L^1(\mathbb{R})$ の元の族 $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ を ℝ 上の**総和核 (summability kernel)** という：

(1) $\forall \lambda > 0$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)dx = 1$

(2) $\exists C > 0$ が存在して、$\forall \lambda > 0$ に対し $\|k_\lambda\|_1 \geq C$

(3) $\forall \delta > 0$ に対し、$\lambda \to \infty$ で $\displaystyle\int_{|x|\geq\delta} |k_\lambda(x)|dx \to 0$

例 2.2.6.

- Dirichlet 核は ℝ 上の総和核ではない。
- Fejér 核は ℝ 上の総和核である。

総和核のたたみ込みにより、関数の近似が得られる。

定理 2.2.7. $\{k_\lambda(x)\}_{\lambda>0}$ を ℝ 上の総和核とする。このとき、

(1) ℝ 上の関数 f が有界かつ一様連続ならば、$\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に ℝ 上一様収束する。

(2) $1 \leq p < \infty$ と $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対し、$\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に L^p 収束する。

証明. 省略 □

定理 2.2.8 (Riemann-Lebesgue の補題). 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し、$|\xi| \to \infty$ で $\widehat{f}(\xi) \to 0$

証明. 省略 □

Fejér 核を用いて次の定理が示せる。Fejér 核を用いた証明は $\mathbb{T}$ の場合と似ている。

定理 2.2.9 (反転公式). $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし、$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ と仮定する。このとき、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \tag{2.2.5}$$

が成り立つ。

証明. 省略 □

2.3 Relations to Fourier Transform on $\mathbb{T}$

Fourier 係数と Fourier 変換の関連をみる。

定理 2.3.1 (各点収束性). [TODO]

証明. 省略 □

2.4 Periodization

定義 2.4.1 (周期化). $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。$\mathbb{T}$ 上の関数

$$F(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi k) \tag{2.4.1}$$

を f の**周期化 (periodization)** という。

定理 2.4.2 (Poisson の和公式). [TODO]

証明. 省略 □

例 2.4.3 (Fejér 核). [TODO]

例 2.4.4 (Dirichlet 核). [TODO]

2.5 Schwartz Functions

$\mathbb{R}^d$ での話題に移る。

定義 2.5.1 (Fourier 変換)**.** $f \in L^d(\mathbb{R})$ とする。ℝ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^d) \tag{2.5.1}$$

で定義し、これを f の **Fourier 変換 (Fourier transform)** という。

定義 2.5.2 (急減少)**.** $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f が**急減少**であるとは、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $|x| \to \infty$ で $f(x) = o(|x|^{-k})$ となることをいう。

定義 2.5.3 (Schwartz 急減少関数)**.** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする。f が **Schwartz 急減少関数 (Schwartz function)** であるとは、任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha f$ が急減少であることをいう。$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbb{R}^d$ 上の Schwartz 急減少関数全体の集合を表す。

命題 2.5.4. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\partial_x^\alpha"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\xi^\alpha\times"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "x^\alpha\times"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{S} \end{tikzcd} \tag{2.5.2}$$

証明. 省略 □

定理 2.5.5 (反転公式)**.** $f \in L^d(\mathbb{R})$ とし、$\widehat{f} \in L^d(\mathbb{R})$ と仮定する。このとき、

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d \tag{2.5.3}$$

が成り立つ。

証明. 省略 □

定理 2.5.6 (Planchrel の定理)**.** [TODO]

証明. 省略 □

2.6 Some Partial Differential Equations

第 3 章　Distributions

3.1　Distributions

Distributions の定義と具体例を与える。

定義 3.1.1 (テスト関数). $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とおく。$\mathcal{D}$ の元を**テスト関数 (test function)** という。

定義 3.1.2 ($\mathcal{D}$ の位相). [TODO]

定義 3.1.3 (超関数). $\mathcal{D}$ の位相的双対空間を $\mathcal{D}'$ と書き、$\mathcal{D}'$ の元を**超関数 (distribution)** という。$T \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}$ に対し $T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi \rangle$ とも書く。

例 3.1.4 (局所可積分関数). [TODO]

命題 3.1.5 (変分法の基本補題). [TODO]

証明.　省略 □

例 3.1.6 (Dirac のデルタ). [TODO]

例 3.1.7 (波動方程式). [TODO]

例 3.1.8 (Poisson 方程式). [TODO]

3.2　Differentiation of Distributions

定義 3.2.1 (超関数の微分). $T \in \mathcal{D}'$ と多重指数 α に対し、$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$ を

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}) \tag{3.2.1}$$

と定義する（ことができる）。

例 3.2.2 (Heaviside 関数). [TODO]

定理 3.2.3 (2 次元 Laplace 方程式の基本解)**.** $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数

$$E(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log|x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

は Laplacian Δ の基本解である。

証明. $\Delta T_E = \delta$ すなわち $\langle \Delta T_E, \varphi \rangle = \varphi(0)$ $(\varphi \in \mathcal{D})$ を示せばよい。積分の形で書けば

$$\int_{\mathbb{R}^2} E(x,y)\Delta\varphi(x,y)\,dxdy = \varphi(0,0) \tag{3.2.3}$$

である。ここで $\varepsilon > 0$ とし、

$$\Omega := \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\} \tag{3.2.4}$$

とおく。Ω 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega := \varphi_x E\,dy \tag{3.2.5}$$

で定める。ω は compactly supported だから、Stokes の定理より

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{3.2.6}$$

が成り立つ。[TODO] □

3.3 Convolutions

3.4 Distributions with Compact Support

3.5 Tempered Distributions

Tempered distributions の Fourier 変換の基本性質を確かめる。