振り返りと導入

- [TODO]

1 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族

本節では、有限集合上の full support な確率分布の族について、Fisher 計量や Amari-Chentsov テンソルなどを計算してみる。

設定 1.1 (有限集合上の full support な確率分布の族). $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ p = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, 0 < p_i < 1 \ (i = 1, \ldots, n),\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\} \tag{1.1}$$

とおく。ただし δ^i は 1 点 $i \in \mathcal{X}$ での Dirac 測度である。`0425_資料.pdf` 例 3.1 でみたように $\mathcal{P}$ は $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族である。

まず $\mathcal{P}$ が開であることを確かめる。

命題 1.2 (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認).

(1) (V, T, μ) を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の最小次元実現となる:

$$V = \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.2}$$

$$T \colon \mathcal{X} \to V, \quad k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \ldots, \delta_{(n-1)k}), \tag{1.3}$$

$$\mu = \gamma \quad (\text{数え上げ測度}) \tag{1.4}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi \colon \Theta_{(V,T,\mu)} \to \mathbb{R}$ は

$$\psi(\theta) = \log\left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \exp \theta^l\right) \tag{1.5}$$

となる。

(3) 写像 $P := P_{(V,T,\mu)} \colon \Theta_{(V,T,\mu)} \to \mathcal{P}$ は

$$\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}) \mapsto \exp\left(\langle \theta, T(k) \rangle - \psi(\theta)\right) \cdot \gamma = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^{n-1} \exp \theta^l} \sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i) \delta^i \tag{1.6}$$

となる。

(4) 次の写像 θ は P の逆写像である:

$$\theta \colon \mathcal{P} \to \Theta_{(V,T,\mu)}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \mapsto \left(\log \frac{p_i}{p_n}\right)_{i=1}^{n-1} \tag{1.7}$$

となる。

(5) $\mathcal{P}$ の (V, T, μ) に関する真パラメータ空間 $\Theta^{\mathcal{P}}$ は $\Theta^{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^{n-1}$ となり、したがって $\mathcal{P}$ は開である。

証明 Step 1: (V,T,μ) が最小次元実現であること　条件 A(3) は T の定義から明らか。条件 B の成立は $p_i = \dfrac{\exp\theta^i}{\lambda(\theta)}$ と表せることからわかる。

Step 2: P と θ が互いに逆写像であること　[TODO]

Step 3: $\Theta^{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^{n-1}$ であること　[TODO] □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を ∇、Fisher 計量を g とおく。また、$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}$ は多様体 $\mathcal{P}$ 上の座標とみなす。

命題 1.3 (Fisher 計量の成分). 座標 θ に関する Fisher 計量 g の成分は

$$g_{ij} = p_i\delta_{ij} - p_ip_j \tag{1.8}$$

となる。

証明 ψ の定める (V,T,μ) 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおく。g は定義より $g = \theta^*\widetilde{g}$ をみたすから、座標 θ に関する g の成分は [TODO] □

命題 1.4 (AC テンソルの成分). 座標 θ に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{ijk} = p_i\delta_{ij}\delta_{jk} - p_ip_k\delta_{ij} - p_ip_j\delta_{jk} - p_jp_k\delta_{ik} + 2p_ip_jp_k \tag{1.9}$$

となる。

証明 [TODO] □

以降、$n = 3$ の場合を考える。

命題 1.5 ($n = 3$ での g, S, A の計算). 座標 θ に関し、g の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1 - p_1^2 & -p_1p_2 \\ -p_2p_1 & p_2 - p_2^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})_{i,j} = \frac{1}{p_3}\begin{pmatrix} \dfrac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

となる。S の成分は

$$S_{111} = p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3, \tag{1.11}$$
$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = -p_1p_2 + 2p_1^2p_2, \tag{1.12}$$
$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = -p_1p_2 + 2p_1p_2^2, \tag{1.13}$$
$$S_{222} = p_2 - 3p_2^2 + 2p_2^3 \tag{1.14}$$

となる。A の成分は

$$A^1_{11} = 1 - 2p_1, \qquad A^2_{11} = 0 \tag{1.15}$$
$$A^1_{12} = A^1_{21} = -p_2, \qquad A^2_{12} = A^2_{21} = -p_1 \tag{1.16}$$

$$A^1_{22} = -p_1, \qquad A^2_{22} = 1 - 2p_2 \tag{1.17}$$

となる。

証明 [TODO] □

命題 1.6 ($n = 3$ での測地線方程式). 各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、座標 θ に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\ddot{\theta}^1 = \frac{1-\alpha}{2}\left((1-2p_1)\dot{\theta^1}^2 - 2p_2\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2 - p_1\dot{\theta^2}^2\right) \tag{1.18}$$

$$\ddot{\theta}^2 = \frac{1-\alpha}{2}\left(-2p_1\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2 + (1-2p_2)\dot{\theta^2}^2\right) \tag{1.19}$$

となる。とくに $\alpha = 1$ のとき

$$\ddot{\theta}^1 = 0, \quad \ddot{\theta}^2 = 0 \tag{1.20}$$

である。

証明 $\Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ij} = \dfrac{1-\alpha}{2}A^k_{ij}$ であることより従う。 □

$\alpha \neq 1$ の場合に上の測地線方程式を解くのは難しい (ように思う)。

2 具体例: 正規分布族

例 2.1 (正規分布族). [TODO] ちゃんと書く $\mathcal{P}$ を $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上の正規分布族とし、実現 (V, T, μ) を $V = \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, x^2)$, $\mu = \lambda$ とおく。これは条件 A, B をみたす。真パラメータ空間は $\Theta^{\mathcal{P}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。この実現に関する対数分配関数は

$$\psi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{2.1}$$

である。ただし $\theta^1 = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$ とおいた (したがって $\mu = -\dfrac{\theta^1}{2\theta^2}$, $\sigma = \sqrt{-\dfrac{1}{2\theta^2}}$)。よって Fisher 計量 $g = \operatorname{Hess}\psi$ を計算すると

$$d\psi = \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{\sigma^3}d\sigma \tag{2.2}$$

$$= -\frac{\theta^1}{2\theta^2}d\theta^1 + \left(-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{4(\theta^2)^2}\right)d\theta^2 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Hess}\psi = Dd\psi \tag{2.4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2\right)d\theta^1 + \left(\frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^1 + \left(\frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3}\right)d\theta^2\right)d\theta^2 \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \tag{2.6}$$

となる。AC テンソルは

$$? \tag{2.7}$$

となる。Levi-Civita 接続 $\nabla^{(g)}$ の、座標 μ, σ に関する接続係数を求めてみる (自然パラメータ座標に関するもの

ではないことに注意)。

$$\Gamma^{(g)}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(g)}{}^1_{12} = \Gamma^{(g)}{}^1_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)}{}^1_{22} = 0, \tag{2.8}$$

$$\Gamma^{(g)}{}^2_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(g)}{}^2_{12} = \Gamma^{(g)}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(g)}{}^2_{22} = -\frac{1}{\sigma} \tag{2.9}$$

測地線の方程式は

$$\begin{cases} x'' - \dfrac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \dfrac{1}{2y}(x')^2 - \dfrac{1}{y}(y')^2 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

である。これを直接解くのは少し大変である。その代わりに、既知の Riemann 多様体との間の等長同型を利用して測地線を求める。(Θ, g) は、上半平面 H に計量 $\breve{g} = \dfrac{(dx)^2 + (dy)^2}{2y^2}$ を入れた Riemann 多様体との間に等長同型 $(\Theta, g) \to (H, \breve{g})$, $(x, y) \mapsto (x, \sqrt{2}y)$ を持つ。Levi-Civita 接続に関する測地線は等長同型で保たれるから、$(H, \breve{g})$ の測地線を求めればよい。$(H, \breve{g})$ の測地線は、y 軸に平行な直線と x 軸上に中心を持つ半円で尽くされることが知られている。これらを等長同型で写して、(Θ, g) の測地線として y 軸に平行な直線と x 軸上に長軸を持つ半楕円が得られる。

今後の予定

- [TODO]

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).