可微分多様体と微分幾何学の基礎

Yahata

概要

多様体とは、曲線や曲面といった図形の概念を一般化したものであり、微分幾何学に限らず様々な幾何学の土俵となっている。微分幾何学は、多様体の上で微積分を用いて展開される幾何学であり、一般相対性理論をはじめとして物理学に多くの応用がある。

本稿では可微分多様体および微分幾何学の基礎事項を整理する。第 1 部では可微分多様体の基礎と de Rham コホモロジーについて述べる。内容は [Lee12] を参考にしている。第 2 部ではベクトル束と主ファイバー束の接続について述べる。扱う内容は [小 04] をベースとし、定義などは [Lee18] や [Tu17] を参考にしている。第 3 部では擬 Riemann 多様体と計量について述べる。内容は [Lee18] を参考にしている。

目次

第 I 部

可微分多様体の基礎

第 1 章　層

1.1　前層と層

定義 1.1.1 (前層). X を位相空間とする。$\mathcal{F}$ が X 上の**前層 (presheaf)** であるとは、$\mathcal{F}$ が X の開集合系 $\mathcal{T}$ (これは集合の包含関係を射として圏をなす) から圏 **Set** への反変関手であることをいう。圏 **Set** を **Ring** や R-**Mod** などに取り替えたものはそれぞれ**環の前層 (presheaf of rings)**、**R-代数の前層 (presheaf of R-algebras)** などという。

各 $U \overset{\text{open}}{\subset} X$ に対し、$\mathcal{F}(U)$ の元を **U 上の $\mathcal{F}$ の切断 (section of $\mathcal{F}$ over U)** という。

定義 1.1.2 (層). X を位相空間とする。X 上の前層 $\mathcal{F}$ が**層 (sheaf)** であるとは、$\mathcal{F}$ が次をみたすことをいう: 任意の $U \overset{\text{open}}{\subset} X$ とその開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ($U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$) に対し

(1)　切断の族 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$ であってすべての $i, j \in I$ に対し $s_i = s_j$ on $U_i \cap U_j$ をみたすものが与えられたならば、切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ であってすべての $i \in I$ に対し $s = s_i$ on U_i をみたすものが一意に存在する。

が成り立つ。

定義 1.1.3 (芽と茎). [TODO]

1.2　局所環付き空間

定義 1.2.1 (局所環付き空間). 位相空間 X と X 上の可換 R-代数の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**局所 R-環付き空間 (locally R-ringed space)** であるとは、各 $x \in X$ に対し茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環であることをいう。

第 2 章　多様体

2.1　位相多様体

本稿の主題は可微分多様体であるが、比較のために位相多様体の定義も与えておく。

定義 2.1.1 (位相多様体). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。Hausdorff であって各点が $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な開近傍をもつ位相空間 M を **n 次元位相多様体 (n-dimensional topological manifold)** という。n を M の**次元 (dimension)** といい $\dim M = n$ と書く。

2.2　可微分多様体

可微分多様体を定義する。可微分多様体とは、位相多様体であってアトラスと呼ばれる付加構造を持つもののことである。[TODO] 同値類ではなく？

[TODO] アトラスによる定義と局所環付き空間による定義の関係を書きたい

定義 2.2.1 (アトラス). $n, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。M を n 次元位相多様体とする。族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が M の **C^r 級アトラス (C^r atlas)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1)　各 φ_λ は M の開集合 U_λ から $\mathbb{R}^n$ の開集合の上への同相写像である。
(2)　$\{U_\lambda\}_\lambda$ は M の開被覆になっている。
(3)　任意の $\alpha, \beta \in \Lambda$ に対し合成写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^r 級である。

ここで

- アトラスの元を**チャート (chart)** という。
- φ_λ を**局所座標写像 (local coordinate map)** あるいは**局所座標 (local coordinate)** という。

定義 2.2.2 (可微分構造). [TODO]

定義 2.2.3 (可微分多様体). $n, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。n 次元位相多様体 M が **C^r 級可微分多様体 (C^r differentiable manifold)** あるいは単に **C^r 多様体** であるとは、M の C^r 級アトラス $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられていることをいう [1)]。

定義 2.2.4 (標準的な座標). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$\mathbb{R}^n$ をアトラス $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$ により可微分多様体とみなしたときの局所座標 $\mathrm{id} = (x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の**標準的な座標 (standard coordinate)** という。

1)　文献によってはさらに第 2 可算性やパラコンパクト性を課す場合もある。

注意 2.2.5. 本稿では位相多様体や C^∞ 以外の可微分多様体を扱わないから、以後 C^∞ 多様体や C^∞ アトラスのことを単に多様体やアトラスと呼ぶことにする。

2.3 基本的な多様体

基本的な多様体の例を挙げる。

[TODO]

2.4 C^∞ 関数と C^∞ 写像

[TODO] $\mathbb{R}$ 値 C^∞ 関数は多様体を局所環付き空間と考えたとき自然に付随するものであり、一方 C^∞ 写像は多様体の射だから異なる概念？

定義 2.4.1 (C^∞ 関数). M を n 次元多様体、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。写像 $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ が C^∞ **関数 (smooth function)** であるとは、任意の $p \in M$ に対し、p の属する M のチャート (U, φ) であって $\varphi(U)$ 上 $f \circ \varphi^{-1}$ が C^∞ となるものが存在することをいう。

定義 2.4.2 (C^∞ 写像). [TODO] C^∞ 写像と diffeo

C^∞ 写像の座標表示は具体的な計算を実行する上で不可欠の概念である。

定義 2.4.3 (座標表示). M, N をそれぞれ次元 m, n の多様体、$F\colon M \to N$ を (一般の) 写像とする。このとき各 $p \in M$ と、p の属する M の任意のチャート $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$、および $F(p)$ の属する N の任意のチャート $(V, \psi = (y^1, \ldots, y^n))$ に対し、合成 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$ をチャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ に関する (あるいは座標 $x^1, \ldots, x^m;\ y^1, \ldots, y^n$ に関する) F の**座標表示 (coordinate representation)** という。一般的な記号ではないが、本稿ではこれを $\widehat{F}$ と書くことがある。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\widehat{F}"'] & \psi(V) \end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

2.5 接ベクトル

多様体の接ベクトルは Euclid 空間の幾何学的な接ベクトルの性質を一般化して定義されるが、その方法にはいくつかの流儀があり、どれを定義と考えてどれを性質と考えるかは文献により異なる。

(1) C^∞ 関数の導分としての定義。[Lee12] はこの定義を採用している。同値類を扱わないので具体性が高いというメリットがある。また、写像の微分などが座標によらないことがわかりやすい。短所として、接ベクトルの局所的な性質を示すのに bump 関数を使わなければならないため、解析多様体を扱うには適さない。

(2) C^∞ 関数の芽の導分としての定義。[Tu17] や [松 88] はこの定義を採用している。接ベクトルの局所的な性質を説明するのに便利だが、定義の複雑さが増すという難点がある。

(3) 曲線の同値類としての定義。[Wed16] はこの定義を採用している。この定義では接ベクトルの局所的な性質が明らかである。また、写像の微分の定義や具体的な計算が簡単になるというメリットもある。短所として、接空間にベクトル空間構造が入ることを示すのが難しくなる。

(4) タプルの同値類としての定義。歴史的に最も古く、物理では今でもよく使われている。

ここでは (1) の立場で接ベクトルを定義する。

定義 2.5.1 (導分). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。

(1) $p \in M$ とする。写像 $D \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が **p での導分 (derivation at p)** であるとは、D が次をみたすことをいう:
   (a) D は $\mathbb{R}$-線型である。
   (b) 各 $f, g \in C^\infty(M)$ に対し、
$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g) \tag{2.5.1}$$
   が成り立つ。

(2) 写像 $D \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が**導分 (derivation)** であるとは、D が次をみたすことをいう:
   (a) D は $\mathbb{R}$-線型である。
   (b) 各 $f, g \in A$ に対し、
$$D(fg) = D(f)g + fD(g) \tag{2.5.2}$$
   が成り立つ。

定義 2.5.2 (多様体の接空間). M を多様体、$p \in M$ とする。p での導分全体のなす $\mathbb{R}$-ベクトル空間を T_pM と書き、p における M の**接空間 (tangent space)** と呼ぶ。

2.6 写像の微分

C^∞ 写像の微分を定義する。

定義 2.6.1 (C^∞ 写像の微分). M, N をそれぞれ次元 m, n の多様体、$F \colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。各 $p \in M$ に対し、p における F の**微分 (differential)** $dF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ を
$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F) \quad (v \in T_pM,\ f \in C^\infty(N)) \tag{2.6.1}$$
で定義する (well-defined 性はこのあと示す)。

well-defined 性の証明. $dF_p(v)$ が $F(p)$ における導分であることを示せばよい。[TODO] □

命題 2.6.2 (チェインルール). [TODO]

証明 [TODO] □

A. ベクトル空間の接空間

ベクトル空間を多様体とみなせば、その接空間はもとのベクトル空間と自然に同型となる。

命題 2.6.3 (ベクトル空間とその接空間との自然な同型). V を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間とし、標準的な方法で多

様体とみなす。このとき各 $a \in V$ に対し、写像

$$V \to T_aV, \quad v \mapsto D_v|_a \tag{2.6.2}$$

$$D_v|_a(f) := \frac{d}{dt}f(a+tv)\bigg|_{t=0} \quad (f \in C^\infty(V)) \tag{2.6.3}$$

は、任意の $\mathbb{R}$-ベクトル空間 W と $\mathbb{R}$-線型写像 $L\colon V \to W$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L"'] & T_aV \arrow[d, "dL_a"] \\ W \arrow[r, "\cong"'] & T_{L(a)}W \end{tikzcd} \tag{2.6.4}$$

を可換にする自然な $\mathbb{R}$-線型同型である。

証明 [TODO] □

B. 座標表示を用いた微分の計算

微分を具体的に計算するには座標表示を用いるのが便利である。

命題 2.6.4. M, N をそれぞれ次元 m, n の多様体、$F\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。このとき、各 $p \in M$ と p の属する M の任意のチャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ および $F(p)$ の属する N の任意のチャート $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ に対し

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{F(p)} \tag{2.6.5}$$

が成り立つ。ただし $\widehat{F}$ はチャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ に関する F の座標表示であり、$\widehat{p} := \varphi(p)$ である。

証明 [TODO] □

C. 速度ベクトル

多様体内の C^∞ 曲線を C^∞ 写像の特別な場合とみなせば、その接ベクトルとして速度ベクトルの概念が定義できる。

定義 2.6.5 (速度ベクトル). M を多様体、J を $\mathbb{R}$ の開区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。各 $t_0 \in J$ に対し、γ の $t = t_0$ における**速度ベクトル (velocity vector)** を

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0}\gamma(t) := d\gamma\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0}\right) \tag{2.6.6}$$

で定義する。ただし $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}$ は $J \subset \mathbb{R}$ の標準的な座標 t により定まる $T_{t_0}\mathbb{R}$ の基底 $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}$ のことである。

速度ベクトルを用いて微分の具体的な計算をすることができる。

命題 2.6.6. M, N を多様体、$f\colon M \to N$ を C^∞ 写像、J を $\mathbb{R}$ の開区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。各 $t_0 \in J$ に対し、曲線 $f \circ \gamma$ の $t = t_0$ における速度ベクトルは

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f \circ \gamma(t) = df\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \gamma(t)\right) \tag{2.6.7}$$

で与えられる。

証明 [TODO] □

2.7 埋め込み、はめ込み、沈め込み

本節では、写像の微分からもとの写像の性質を調べることを考える。微分の階数を利用した写像の分類として、はめ込みと埋め込み、沈め込みを定義する。はめ込みと埋め込みは部分多様体の理論と密接に関係している。また、沈め込みは位相空間論における商写像の多様体論における類似になっている。

定義 2.7.1 (はめ込み)**.** C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ が**はめ込み (immersioni)** であるとは、各 $p \in M$ に対し df_p が単射であることをいう。

定義 2.7.2 (埋め込み)**.** C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ が**埋め込み (embedding)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) f ははめ込みである。
(2) f は中への同相写像である。

定義 2.7.3 (沈め込み)**.** C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ が**沈め込み (submersion)** であるとは、各 $p \in M$ に対し df_p が全射であることをいう。

例 2.7.4 (単射はめ込みだが埋め込みでない例)**.** [TODO] 8 の字曲線

A. 普遍性

定理 2.7.5 (埋め込みの普遍性)**.** $i\colon A \to M$ を埋め込みとする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, g\colon N \to M\colon\ C^\infty \text{ with } g(N) \subset A \tag{2.7.1}$$

$$\exists!\, f\colon N \to A\colon C^\infty \quad \text{s.t.} \tag{2.7.2}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & M \\ & A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{2.7.3}$$

証明 [TODO] □

定理 2.7.6 (沈め込みの普遍性)**.** $q\colon M \to N$ を全射かつ沈め込みとする。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, g\colon M \to L\colon\ C^\infty \quad \text{with} \quad q(x) = q(y) \Rightarrow g(x) = g(y) \tag{2.7.4}$$

$$\exists!\, f\colon N \to L\colon C^\infty \quad \text{s.t.} \tag{2.7.5}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & L \\ L \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{2.7.6}$$

証明 [TODO] □

B. 逆関数定理

定理 2.7.7 (逆関数定理)**.** $f\colon M \to N$ を C^∞ 写像、$p \in M$ とする。このとき df_p が全単射ならば、p のある開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と $f(p)$ のある開近傍 $V \overset{\text{open}}{\subset} N$ が存在して $f|_U$ は U から V の上への diffeo となる。

証明 [TODO] □

ランク定理により、行列の階数標準形の C^∞ 写像における類似が成り立つ。

定理 2.7.8 (ランク定理)**.** [TODO]

2.8 部分多様体

部分多様体について述べる。

定義 2.8.1 (部分多様体)**.** M を多様体、$S \subset M$ とする。S が M の**埋め込み部分多様体 (embedded submanifold)** あるいは単に**部分多様体 (submanifold)** であるとは、S が M の部分空間としての位相を持ち、包含写像 $S \hookrightarrow M$ が埋め込みであるような可微分構造を持つことをいう。このとき、$\dim M - \dim S$ を S の**余次元 (codimension)** という。

命題 2.8.2 (開部分多様体)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

命題 2.8.3 (埋め込みの像は部分多様体)**.** M, N を多様体、$F\colon N \to M$ を埋め込み、$S := F(N)$ とおく。S に M の部分空間としての位相を入れると、F が $N \to S$ なる diffeo となるような S の M の部分多様体としての可微分構造がただひとつ存在する。

証明 N の atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ をひとつ選ぶ。F は埋め込みゆえに中への同相だから、$\{(F(U_\alpha),\varphi_\alpha\circ F^{-1})\}$ は S の atlas となる。このとき、N のチャート (U,φ) と S のチャート $(F(U),\varphi\circ F^{-1})$ に関する F の座標表示は恒等写像となるから、F は local diffeo である。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & F(U) \arrow[d, "\varphi\circ F^{-1}"] \\ \varphi(U) \arrow[r, equal] & \varphi(U) \end{tikzcd} \tag{2.8.1}$$

F が全単射であることとあわせて、F は diffeo である。包含写像 $S\hookrightarrow M$ は diffeo $S\to N$ と埋め込み $N\to M$ の合成だから埋め込みである。よって S は M の部分多様体である。一意性は $\mathrm{id}_S = F\circ F^{-1}$ が diffeo となることから従う。 □

定義 2.8.4 (defining map). [TODO]

A. 部分多様体の接空間

部分多様体の接空間は、包含写像の微分によってもとの多様体の接空間の部分空間とみなす。

定義 2.8.5 (部分多様体の接空間).

$$T_pM = d\iota_p(T_pM) \subset T_pN \tag{2.8.2}$$

とみなす。[TODO]

部分多様体の接空間はいくつかの方法で記述できる。

命題 2.8.6 (部分多様体の接空間の defining map による記述).

$$T_pS = \mathrm{Ker}(d\Phi)_p \tag{2.8.3}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

B. 正則点と臨界点

正則点の概念は C^∞ 写像を用いて部分多様体を定義するために有用である。

定義 2.8.7 (正則点と臨界点). M,N を多様体、$f\colon M\to N$ を C^∞ 写像とする。

(1) $p\in M$ において微分 df_p が全射であるとき p を f の**正則点 (regular point)** といい、そうでないとき**臨界点 (critical point)** という。

(2) $q\in N$ において $f^{-1}(q)$ 上の点がすべて正則点であるとき q を f の**正則値 (regular value)** といい、そうでないとき**臨界値 (critical value)** という。

定理 2.8.8 (Regular Level Set Theorem)**.** M, N を多様体、$f\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。$q \in N$ が正則値ならば $f^{-1}(q)$ は M の部分多様体であり、その余次元は N の次元に等しい。

証明 [TODO] □

2.9 境界付き多様体

[TODO] 書く場所はここでいいか？

[TODO] mfd with corners も定義したい

定義 2.9.1 (境界付き多様体)**.** 表記の簡略化のため

$$\mathbb{R}^n_- := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0\} \tag{2.9.1}$$

$$\partial\mathbb{R}^n_- := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \tag{2.9.2}$$

と書くことにする。位相空間 M が n **次元境界付き多様体 (manifold with boundary)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1) M は Hausdorff である。

(2) (M はチャートをもつ) M はチャートの族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda)\}_\lambda$ で被覆される。すなわち、

  (a) 各 φ_λ は M の開集合 U_λ から $\mathbb{R}^n_-$ の開集合 V_λ への同相写像であり、

  (b) $\{U_\lambda\}_\lambda$ は M の開被覆になっている。

(3) (チャートは滑らかに貼りあう) 任意のチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta, V_\beta)$ に対し、合成写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ である。ただし、$\partial\mathbb{R}^n_-$ 上では片側微分を考える。

(4) M はパラコンパクトである。

ここで

- 部分集合

$$\partial M := \bigcup_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\partial\mathbb{R}^n_-) \tag{2.9.3}$$

を M の**境界 (boundary)** とよぶ。

注意 2.9.2 (多様体の境界)**.** 本稿では、基本的に多様体と境界付き多様体の両方を並行的に論じる。そこで、以後とくに断らない限り、境界付き多様体のことも単に多様体と呼ぶことがある。

定義 2.9.3 (閉多様体)**.** M が**閉多様体 (closed manifold)** であるとは、M が境界を持たないコンパクトな多様体であることをいう。

命題 2.9.4 (境界の多様体構造)**.** M を n 次元境界付き多様体、$\partial M \neq \emptyset$、$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の atlas とする。このとき ∂M は $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ を atlas として M の境界を持たない $(n-1)$ 次元部分多様体となる。

証明 [TODO] 局所座標写像が $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}$ への写像となることと張り合わせの滑らかさ □

定義 2.9.5 (境界付き多様体の接空間). [TODO]

定義 2.9.6 (外向き接ベクトル). [TODO] これは内在的な概念か？M を n 次元境界付き多様体、$p \in \partial M$ とする。$v \in T_pM$ が**外向き (outward)** であるとは、p の属するチャート (U, φ) および $\varphi(U)$ 上の局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ をひとつずつ選んで

$$\varphi_{*p}v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{\varphi(p)} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{\varphi(p)} \quad (v_i \in \mathbb{R}) \tag{2.9.4}$$

と表したとき $v_1 > 0$ であることをいう。v が外向きであるかどうかは well-defined に定まる (このあとすぐ示す)。

定義の well-defined 性 [TODO] □

2.10 1 の分割

1 の分割について述べる。1 の分割は、局所的な写像を大域的な写像に拡張するために必須の道具である。

証明 [TODO] □

定義 2.10.1 (1 の分割). M を多様体、$\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ を M の開被覆とする。**$\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割 (partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$)** とは、C^∞ 関数の族 $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ であって次をみたすものをいう:

(1) 各 $\alpha \in A$, $x \in M$ に対し $0 \leq \rho_\alpha(x) \leq 1$ が成り立つ。
(2) 各 $\alpha \in A$ に対し $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$ が成り立つ。
(3) 族 $(\operatorname{supp} \rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ は局所有限である。
(4) 各 $x \in M$ に対し $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) = 1$ が成り立つ。

定理 2.10.2 (1 の分割の存在). M をパラコンパクトな多様体とする。このとき、M の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し、$\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在する。

証明 [TODO] □

1 の分割の応用について述べる。

命題 2.10.3 (bump 関数の存在). [TODO]

証明 [TODO] □

2.11 演習問題

♤ **演習問題 2.1** (幾何学 III 問 1.1.23). M を r 次元多様体とする。このとき TM は M 上のベクトル束であって TM の階数は r となることを示せ。また $(U, \varphi_\alpha = (x^1, \dots, x^r))$, $(V, \varphi_\beta = (y^1, \dots, y^r))$ をチャートとするとき、これらのチャートから定まる局所自明化の間の変換関数は $D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ で与えられることを示せ。

♤ **演習問題 2.2** (幾何学 III 問 1.1.30). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。

(1) $C^\infty(U)$ は自然に $\Gamma_U(U \times \mathbb{R})$ と同一視できることを示せ。
(2) $\mathfrak{X}(U)$ は $C^\infty(U)$-加群であることを示せ。

♤ **演習問題 2.3** (幾何学 III 問 1.1.31). M を多様体、π を TM の射影とする。M 上のゼロ切断を S とおくとき、像 $S(M)$ は M と diffeo であり、逆写像は π で与えられることを示せ。

♤ **演習問題 2.4** (幾何学 III 問 1.1.32). M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をランク r ベクトル束、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ を E の局所自明化とする。各 $v \in \mathbb{R}^r$ に対し $\sigma_v\colon U \to E,\ p \mapsto \psi^{-1}(p, v)$ は $\Gamma_U(E)$ に属することを示せ。

♤ **演習問題 2.5** (幾何学 III 問 1.2.11). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$、$f\colon U \to V$ を C^∞ 写像、U 上の局所座標を $(x^1, \dots, x^n)$、V 上の局所座標を $(y^1, \dots, y^n)$ とする。このとき、これらの局所座標に関する f の座標表示を $(f^1, \dots, f^n)$ とおくと

$$f^* dy^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j \tag{2.11.1}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 2.6** (幾何学 III 問 1.3.9). M を境界付き多様体とする。$\iota\colon \partial M \to M$ を包含写像とする。このとき、∂M 上のベクトル束 $TM|_{\partial M} / \iota_* T(\partial M)$ は自明束であることを示せ。

第 3 章　ベクトル束

この章ではベクトル束について述べる。ベクトル束は、その名の通りベクトル空間を束ねたものである。多様体には接束と呼ばれるベクトル空間が付随しており、微分が関与するあらゆる場面で重要な役割を果たす。

3.1　ベクトル束

定義 3.1.1 (ベクトル束). M を多様体とする。集合 E が M 上の**ランク (rank)** r の**ベクトル束 (vector bundle)** であるとは、E が次をみたすことである：

(1)　E は多様体である。

(2)　(射影) C^∞ 全射 $\pi\colon E \to M$ が与えられている。

(3)　(ファイバー) 各 $x \in M$ に対し $E_x := \pi^{-1}(x)$ は r 次元ベクトル空間である。

(4)　(局所自明化) 各 $x \in M$ に対し、M における x の或る近傍 U がとれて次が成り立つ：

　(a)　diffeo $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ が存在する。

　(b)　$\varphi(y) := \varphi|_{E_y}\colon E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$ は線型写像である [2)]。

ここで、

- E をこのベクトル束の**全空間 (total space)** という。
- E_x を x 上の π の**ファイバー (fiber)** という。
- φ を E の U 上の**局所自明化 (local trivialization)** という。とくに M 上の局所自明化を**大域自明化 (global trivialization)** という。

命題 3.1.2. 上の定義の状況で、図式

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U
\end{tikzcd}
\tag{3.1.1}
$$

は可換である。

証明　$x \in M,\ v \in E_x = \pi^{-1}(x)$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pr}_1 \circ \varphi(v) &= \mathrm{pr}_1 \circ \varphi|_{E_x}(v) && (3.1.2)\\
&= \mathrm{pr}_1(x, w) \quad (w \in \mathbb{R}^r) && (3.1.3)\\
&= x && (3.1.4)\\
&= \pi(v) && (3.1.5)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 □

2)　より強く線型同型であることを必要とする流儀もあるが、同型であることは他の条件とあわせて導かれる。

定義 3.1.3 (自明な束)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ を M 上のベクトル束とする。E が**自明束 (trivial bundle)** であるとは、E の大域自明化が存在することをいう。

例 3.1.4. **直積束 (product bundle)** $E := M \times \mathbb{R}^r$ はベクトル束である。直積束は M 上の局所自明化として $\mathrm{id}_{M\times\mathbb{R}^r}$ をとったものである。したがって直積束は自明な束である。

3.2 束準同型

束準同型の概念を述べる。

定義 3.2.1 (束準同型)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ および $\pi'\colon E' \to M$ を M 上のベクトル束とする。C^∞ 写像 $F\colon E \to E'$ が M 上の**束準同型 (bundle homomorphism)** であるとは、

(1) 次の図式が可換である:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

(2) F の各ファイバーへの制限は $\mathbb{R}$-線型写像である。

をみたすことをいう。F が逆写像 F^{-1} をもち F^{-1} も M 上の束準同型であるとき、F を**束同型 (bundle isomorphism)** という。

定理 3.2.2 (束準同型の特徴付け)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ および $\pi'\colon E' \to M$ を M 上のベクトル束とする。写像 $\mathcal{F}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ に関する次の条件は同値である:

(1) $\mathcal{F}$ は $C^\infty(M)$-線型写像である。

(2) ある束準同型 $F\colon E \to E'$ が存在して $\mathcal{F} = F_\sharp$ が成り立つ。ただし $F_\sharp(\sigma) := F \circ \sigma$ $(\sigma \in \Gamma(E))$ の意味である。

証明 [TODO] □

3.3 切断とフレーム

A. 切断

切断の概念を定義する。

定義 3.3.1 (切断)**.** M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする。

- C^∞ 写像 $\sigma\colon U \to E$ が次の図式を可換にするとき、σ を E の U 上の**切断 (section)** という:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & U \end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

- とくに $x \in U$ に対し $0_{E_x} \in E_x$ を対応させる切断を**ゼロ切断 (zero section)** という。
- E の U 上の切断全体の集合を $\Gamma_U(E)$ あるいは $\Gamma(U;E)$ と書く。

命題 3.3.2 ($\Gamma_U(E)$ の $C^\infty(U)$-加群構造). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$E$ を U 上のベクトル束とする。このとき $\Gamma_U(E)$ は、点ごとの和とスカラー倍によりゼロ切断を零元として $C^\infty(U)$-加群となる。

証明 [TODO] □

一般に切断全体の集合 $\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$-加群として自由ではないが[1]、次の命題により、E が直積束の場合は $\Gamma(E)$ は自由 $C^\infty(M)$-加群となることがわかる。

命題 3.3.3 (直積束の切断と C^∞ 写像の同一視). M を多様体とする。このとき、$C^\infty(M)$-加群の同型 $\Gamma(M \times \mathbb{R}^r) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C^\infty(M)$ が成り立つ。すなわち、直積束 $E = M \times \mathbb{R}^r$ の切断は、M 上の $\mathbb{R}^r$-値 C^∞ 写像と同一視できる。

証明 E の切断 $\sigma\colon M \to M \times \mathbb{R}^r$ は、或る写像 $f\colon M \to \mathbb{R}^r$ を用いて

$$\sigma(x) = (x, f(x)) \tag{3.3.2}$$

と書ける。このとき

$$f = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma \tag{3.3.3}$$

が成り立ち、$\mathrm{pr}_2\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は C^∞ だから、f も C^∞ である。逆に M 上の C^∞ 写像 $f\colon M \to \mathbb{R}^r$ が与えられたとき、$\sigma := \mathrm{id} \times f$ とおけば σ は E の切断である。 □

写像に沿う切断を定義する。

定義 3.3.4 (写像に沿う切断). M, N を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束、$f\colon N \to M$ を C^∞ 曲線とする。C^∞ 写像 $\xi\colon N \to E$ が **f に沿う E の切断 (section along a map)** であるとは、

$$\xi(x) \in E_{f(x)} \quad (\forall x \in N) \tag{3.3.4}$$

が成り立つことをいう。$\xi(x)$ を ξ_x とも書く。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{3.3.5}$$

例 3.3.5. 多様体 M 内の曲線 γ の速度ベクトル場は、曲線 γ に沿う TM の切断である。

1) cf. https://math.stackexchange.com/questions/4052994/smooth-vector-fields-over-the-2-sphere-is-not-a-free-module
ただし、**Serre-Swan の定理 (Serre-Swan theorem)** によれば $\Gamma(E)$ は一般に $C^\infty(M)$-加群として有限生成かつ射影的である。

B. フレーム

フレームの概念を定義する。

定義 3.3.6 (フレーム). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\pi\colon E \to M$ をランク r のベクトル束とする。U 上の E の切断の順序付き組 $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ が U 上の E の**フレーム (frame)** であるとは、

(1) 写像 $\rho\colon U \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U)$,

$$(x, (v_1, \dots, v_r)) \mapsto \sum v_i \sigma_i(x) \tag{3.3.6}$$

(これは C^∞ である) が全単射で、

(2) ρ^{-1} が U 上の局所自明化であること

をいう。

フレームの定義の条件 (2) は確かめるのが難しい。実はもう少し簡単な特徴付けがある。すなわち、フレームとは切断を局所的に $C^\infty(M)$ を成分として成分表示するための基底である。ここで (わかっている人には当たり前かもしれないが)、「局所的 (local)」というのは「座標依存 (coordinate-dependent)」を意味するわけではないことに注意すべきである。フレームの概念は、座標に依存しない (coordinate-free な) 形での具体的な計算や構成を可能にするための強力なツールである。

命題 3.3.7 (フレームの特徴付け). 上の定義の状況で、$(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ がフレームであることと、各 $x \in U$ に対し $\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)$ が E_x の基底となることは同値である。

証明 長いので省略[4]。証明には $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ において逆行列をとる写像が C^∞ であることなどを用いる。 □

注意 3.3.8 (局所自明化とフレームの対応). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\pi\colon E \to M$ をランク r のベクトル束とする。φ を E の U 上の局所自明化とする。切断 $\sigma_1, \dots, \sigma_r\colon U \to \pi^{-1}(U)$ を

$$\sigma_i(x) \coloneqq \varphi^{-1}(x, e_i) \quad (x \in U) \tag{3.3.7}$$

で定めると、フレームの特徴付けより、$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ は E の U 上のフレームとなる。逆に、$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ が E の U 上のフレームならば、フレームの定義より、U 上の局所自明化 φ を

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \sigma_i(x)\right) \coloneqq \left(x, \sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right) \tag{3.3.8}$$

で定めることができる。

定義 3.3.9 (フレームに関する成分表示). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\pi\colon E \to M$ をランク r のベクトル束、$(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ を U 上の E のフレームとする。このときフレームの特徴づけより、U 上の E の切断 ξ は r 個の関

4) cf. [Lee18, p.258]

数 $\xi^i\colon U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, r)$ により

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{r} \xi^i(x)\sigma_i(x) \quad (x \in U) \tag{3.3.9}$$

と表せる。この表示を ξ のフレーム $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ に関する**成分表示 (component representation)** といい、ξ^i をフレーム $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ に関する ξ の**成分関数 (component function)** あるいは単に**成分 (component)** という。

命題 3.3.10 (成分関数の C^∞ 性)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

命題 3.3.11 (直積束ならばフレームがある)**.** M を多様体、E を直積束 $M \times \mathbb{R}^r$ とする。このとき、E の切断

$$\sigma_i(x) := (x, e_i) \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{3.3.10}$$

は M 上のフレームである。

証明 σ_i らは、M 上の局所自明化 $\mathrm{id}_{M\times\mathbb{R}^r}$ を用いて上の注意のように定めた切断だから、M 上のフレームである。 □

命題 3.3.12 (フレームがあれば直積束)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする。M 上のフレーム $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ が存在するならば、E は直積束 $M \times \mathbb{R}^r$ に同型である。

証明 上の注意のように M 上の局所自明化 φ を定めれば、φ は $E \to M \times \mathbb{R}^r$ の diffeo であり、各 $x \in M$ に対し $\varphi(x)\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^r$ は線型同型である。よって φ はベクトル束の同型である。 □

3.4 変換関数

ベクトル束は、次で定義する変換関数によって与えることもできる。

定義 3.4.1 (変換関数)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とすると、ベクトル束の定義より、M の open cover $\{U_\alpha\}$ であって各 α に対し U_α 上の局所自明化 φ_α が存在するものがとれる。

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd} \tag{3.4.1}$$

各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し合成 $\varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta(x)^{-1}\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は線型同型だから、C^∞ 写像

$$\psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r; \mathbb{R}), \quad x \mapsto \varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta(x)^{-1} \tag{3.4.2}$$

が定まる。写像族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を、局所自明化の族 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r\}$ に関するベクトル束 E の**変換関数 (transition function)** という。各要素 $\psi_{\alpha\beta}$ のことも変換関数という。

命題 3.4.2 (変換関数の基本性質)**.** 上の定義の状況で次が成り立つ:

(1) (コサイクル条件)

$$\psi_{\alpha\beta}(x)\circ\psi_{\beta\gamma}(x)=\psi_{\alpha\gamma}(x)\quad(x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma) \tag{3.4.3}$$

(2)

$$\psi_{\alpha\alpha}(x)=I_r \tag{3.4.4}$$

(3)

$$\psi_{\alpha\beta}(x)=\psi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \tag{3.4.5}$$

証明 (1)

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha\beta}(x)\circ\psi_{\beta\gamma}(x)&=\varphi_\alpha(x)\circ\varphi_\beta(x)^{-1}\circ\varphi_\beta(x)\circ\varphi_\gamma(x)^{-1} &(3.4.6)\\ &=\varphi_\alpha(x)\circ\varphi_\gamma(x)^{-1} &(3.4.7)\\ &=\psi_{\alpha\gamma}(x) &(3.4.8)\end{aligned}$$

(2) (1) で $\alpha=\beta=\gamma$ とおけばよい。

(3) (1) で $\alpha=\gamma$ とおいて (2) を用いればよい。 □

3.5 ベクトル束の構成法

ここでは与えられたファイバーの族からベクトル束を構成する方法を考える。素朴な方法としては、まず与えられたファイバーたちの disjoint union に位相と可微分構造を入れて、局所自明化を構成し、それらがベクトル束の公理を満たすことを確かめるというやり方がある。しかし、毎回このようなプロセスを繰り返すのは面倒である。実は以下に示すように、もっと簡単な方法でベクトル束を構成できる。

まずひとつ補題を示す。

補題 3.5.1 (Smooth Manifold Chart Lemma)**.** M を集合とし、M の部分集合上の写像の族 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to\mathbb{R}^n\}_{\alpha\in A}$ であって次をみたすものが与えられているとする:

(i) 各 $\alpha\in A$ に対し、φ_α は U_α から $\mathbb{R}^n$ の開部分集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ への全単射である。

(ii) 各 α,β に対し、集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ および $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ は $\mathbb{R}^n$ の開部分集合である。

(iii) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ ならば、写像

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta) \tag{3.5.1}$$

は C^∞ である。

(iv) 各 $p,q\in M,\ p\neq q$ に対し、p,q の両方を含むような U_α が存在するか、または $p\in U_\alpha,\ q\in U_\beta$ なる disjoint な U_α,U_β が存在する。

このとき、M の多様体構造 (位相も含めて) であって、$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ を atlas とするものが一意に存在する。さらに次の条件

(v) 可算個の U_α で M が被覆される。

が課されているならば、M はパラコンパクトとなる。

証明のスケッチ. 一意性は明らか (位相は atlas を通して開基が構成できることから決まるし、可微分構造は atlas が与えられていることから決まる)。存在を示す。まず位相を入れる。$\varphi_\alpha^{-1}(V)$, $\alpha \in A$, $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ の形の集合全体を開基として位相を入れる (開基となることは (ii), (iii) から従う)。(i) より φ_α らは $\mathbb{R}^n$ の開部分集合との同相を与える。(iv) より Hausdorff 性が従う。(iii) より $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ は atlas となる。(v) より第 2 可算性、ひいてはパラコンパクト性が従う。これで存在がいえた。詳細は [Lee18, p.21] を参照。 □

ベクトル束の構成法の 1 つ目として、局所自明化の族と変換関数を与えることでベクトル束が構成できることを示す。

補題 3.5.2 (Vector Bundle Chart Lemma). M を多様体、$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、各 p に対し r 次元ベクトル空間 E_p が与えられているとする。集合 E を

$$E := \coprod_{p \in M} E_p \tag{3.5.2}$$

とおき、$\pi \colon E \to M$ は E_p の元を p に写す写像とする。さらに次のデータが与えられているとする:

(1) M の open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$
(2) 各 $\alpha \in A$ に対し、全単射 $\Phi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ であって、各 E_p への制限がベクトル空間の同型写像 $E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$ であるもの
(3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ なる各 $\alpha, \beta \in A$ に対し、C^∞ 写像 $\psi_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r; \mathbb{R})$ であって

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \psi_{\alpha\beta}(p)v) \tag{3.5.3}$$

をみたすもの

このとき、E は次をみたすような M 上のベクトル束構造が一意に存在する:

- E は M 上のランク r のベクトル束である。
- 射影は π である。
- $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ は E の局所自明化の族であって、変換関数は $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ である。

注意 3.5.3. この補題は、このあと述べる Vector Bundle Construction Theorem と比べるとファイバーの形を先に指定できるという点で有用である。

証明のスケッチ. まず E に多様体構造を入れる。Φ_α らと M の atlas を用いて E の atlas となるべき写像族を構成し、Smooth Manifold Chart Lemma の条件を確かめればよい。うまく構成することで条件 (i), (ii), (iii), (iv) はおのずと満たされる [TODO] もうちょっとちゃんと書く。M の第 2 可算性から (v) も従う。つぎにベクトル束構造を考える。上で構成した atlas は、Φ_α らの座標表示が恒等写像になるという条件もみたしているとしてよい (最初からそのように構成する)。このようにして Φ_α らは局所自明化となり、π は C^∞ となることが確認できる。これで存在がいえた。一意性は、与えられた Φ_α らが diffeo であるという条件から従う。詳細は [Lee] p.253 を参照。 □

次に、上の補題の主張を強めて、コサイクル条件をみたす変換関数からベクトル束を構成できることを示す。具体的には、局所的な直積束たちを、変換関数を用いて貼り合わせてベクトル束を構成する。

定理 3.5.4 (Vector Bundle Construction Theorem). M を多様体、$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の open cover とし、C^∞ 写像の族 $\psi = \{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$,

$$\psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r;\mathbb{R}) \tag{3.5.4}$$

であってコサイクル条件

$$\psi_{\alpha\beta}(x)\circ\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \quad (x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \tag{3.5.5}$$

をみたすものが与えられているとする。このとき、集合 $\coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^r_\alpha)$ ($\mathbb{R}^r_\alpha$ は $\mathbb{R}^r$ のコピー) 上に次のように同値関係を定めることができる:

$$(\alpha,(x,\xi)) \sim (\beta,(y,\eta)) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \xi = \psi_{\alpha\beta}(x)\eta \end{cases} \tag{3.5.6}$$

さらにこのとき、集合 E を

$$E := \left(\coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^r_\alpha)\right)\Big/\sim \tag{3.5.7}$$

とおくと、次を満たすような M 上のベクトル束構造が一意に存在する:

- E は M 上のランク r のベクトル束である。
- 射影は $E \to M$, $[(x,\xi)] \mapsto x$ である。
- E のある局所自明化の族 $\{\Phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r\}$ が存在して、変換関数は $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ である。

証明 同値関係であることは変換関数の基本性質から明らか。また、一意性は $\mathrm{id}\colon E \to E$ がベクトル束の同型を与えることから明らか。存在を示すために Vector Bundle Chart Lemma の条件を確認する。

Step 1 写像 $\pi\colon E \to M$ を

$$[(\alpha,(x,\xi))] \mapsto x \tag{3.5.8}$$

で定める。同値関係 $\sim$ の定義よりこれは well-defined である。

Step 2 各 $p \in M$ に対し $E_p := \pi^{-1}(p)$ とおく。E_p に r 次元ベクトル空間の構造を定義したい。そこで、$p \in U_\alpha$ なる α をひとつ選んで α_p とおく。すると同値関係 $\sim$ の定義より明らかに、各 $\xi \in E_p$ に対し

$$\xi = [(\alpha_p,(p,v))] \tag{3.5.9}$$

をみたす $v \in \mathbb{R}^r_{\alpha_p}$ が一意に定まる。これにより写像 $E_p \to \mathbb{R}^r_{\alpha_p}$ が定まる。この写像は逆写像 $v \mapsto [(\alpha_p,(p,v))]$ を持つから全単射である。そこで、この 1:1 対応 $E_p \leftrightarrow \mathbb{R}^r_{\alpha_p}$ を用いて、E_p に r 次元ベクトル空間の構造を定める。

Step 3 各 $\alpha \in A$ に対し、写像 $\Phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を次のように定める。まず、各 $\xi \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対し $p := \pi(\xi)$ とおき、さらに Step 2 で導入した全単射から

$$E_p \to \mathbb{R}^r_{\alpha_p} \quad \to \mathbb{R}^r_\alpha \qquad\qquad \to \mathbb{R}^r \tag{3.5.10}$$

$$\xi \mapsto (\alpha_p, v) \mapsto (\alpha, \psi_{\alpha\alpha_p}(p)v) \mapsto \psi_{\alpha\alpha_p}(p)v \tag{3.5.11}$$

という 1:1 対応が得られることを用いて $\Phi_\alpha(\xi) \coloneqq (p, \psi_{\alpha\alpha_p}(p)v)$ と定める。Φ_α は逆写像

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U_\alpha), \quad (p, w) \mapsto [(\alpha, (p, w))] \tag{3.5.12}$$

を持つから全単射である。また、各 $p \in U_\alpha$ に対し、E_p のベクトル空間の構造の定め方より、Φ_α の E_p への制限は $E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$ の線型同型である。

Step 4　各 $\alpha, \beta \in A$ と $(p, v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$ に対し

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) &= \Phi_\alpha[(\beta, (p, v))] &(3.5.13)\\
&= \Phi_\alpha[(\beta, (p, \psi_{\beta\alpha}(p)\psi_{\alpha\beta}(p)v))] &(3.5.14)\\
&= \Phi_\alpha[(\alpha, (p, \psi_{\alpha\beta}(p)v))] &(3.5.15)\\
&= (p, \psi_{\alpha\beta}(p)v) &(3.5.16)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

Step 5　Vector Bundle Chart Lemma より、E は次をみたすような M 上のベクトル束構造をただひとつ持つ:

- E は M 上のランク r のベクトル束である。
- 射影は $\pi \colon E \to M,\ [(x, \xi)] \mapsto x$ である。
- $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ は E の局所自明化の族である。

さらに Step 4 の議論より、C^∞ 写像の族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ に対する E の変換関数であることもわかる。 □

例 3.5.5 (The Möbius Bundle). [TODO] cf. [Lee] p.251 問題 8.1

3.6 代数的構成

[TODO] 変換関数によらない構成でも定義したい cf. [Tu] [TODO] 直積もある？

定義 3.6.1 (部分ベクトル束). M を多様体、$\pi \colon E \to M,\ \pi' \colon E' \to M$ をベクトル束とする。E' が E の**部分ベクトル束 (vector subbundle)** であるとは、

(1) E' は E の部分多様体で、
(2) $\pi' = \pi|_{E'}$ で、
(3) 各 $x \in M$ に対し $\pi'^{-1}(x)$ が $\pi^{-1}(x)$ の部分ベクトル空間

が成り立つことである。これは包含写像 $E' \hookrightarrow E$ が M 上の束準同型であることと同値である。

定義 3.6.2 (商ベクトル束). M を多様体、$\pi \colon E \to M$ を M 上のランク r のベクトル束、$\pi' \colon E' \to M$ を E のランク s の部分ベクトル束とする。このとき、M の open cover $\{U_\alpha\}$ であって、各 α に対し U_α 上の E のフレーム $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ が存在するようなものがとれる。$\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ は U_α 上の E' のフレームであるとしてよい。そこで、

$\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ から定まる局所自明化を用いて変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を定義すると、

$$\psi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \psi'_{\alpha\beta} & * \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \tag{3.6.1}$$

の形になる。そこで、open cover $\{U_\alpha\}$ と C^∞ 写像の族 $\{\psi''_{\alpha\beta}\}$ により定まる M 上のベクトル束を E/E' と書き、**商ベクトル束 (quotient vector bundle)** と呼ぶ。

定義 3.6.3 (直交部分ベクトル束)**.** 上の定義でさらに E に内積が与えられているとき、Gram-Schmidt の直交化法により変換関数を

$$\psi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \psi'_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi''_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \tag{3.6.2}$$

の形にすることができる。そこで、open cover $\{U_\alpha\}$ と C^∞ 写像の族 $\{\psi''_{\alpha\beta}\}$ により定まる M 上のベクトル束を $E'^{\perp}$ と書き、**直交部分ベクトル束** と呼ぶ。

定義 3.6.4 (代数的構成)**.** M を多様体、$\pi\colon E \to M$ および $\pi'\colon E' \to M$ を M 上のランク r のベクトル束とする。さらに、$\{\psi_{\alpha\beta}\}$, $\{\psi'_{\alpha\beta}\}$ をそれぞれ open cover $\{U_\alpha\}$, $\{U'_\alpha\}$ に対する E, E' の変換関数とする。各点 $x \in M$ 上のファイバーをそれぞれ

$$E_x \oplus E'_x,\ E_x \otimes E'_x,\ E^*_x,\ \Lambda^k E_x,\ S^k E_x \tag{3.6.3}$$

と定めた全空間をそれぞれ

$$E \oplus E',\ E \otimes E',\ E^*,\ \Lambda^k E,\ S^k E \tag{3.6.4}$$

と表す。このとき、次のように変換関数を与えることで、上の全空間に M 上のベクトル束の構造が入る:

- $E \oplus E'$ の変換関数は
$$\psi_{\alpha\beta} \oplus \psi'_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \psi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi'_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \tag{3.6.5}$$
で与えられる。
- $E \otimes E'$ の変換関数は
$$\psi_{\alpha\beta} \otimes \psi'_{\alpha\beta} \quad (\text{Hadamard 積}) \tag{3.6.6}$$
で与えられる。
- E^* の変換関数は $\{{}^t\psi^{-1}_{\alpha\beta}\}$ で与えられる。
- $\Lambda^k E$ の変換関数は $\{\Lambda^k \psi_{\alpha\beta}\}$ で与えられる。$k = r$ のときはとくに $\{\det \psi_{\alpha\beta}\}$ で与えられる。

定義 3.6.5 (引き戻し束)**.** M, M' を多様体、$\pi\colon E \to M$ をランク r ベクトル束、$f\colon M' \to M$ を C^∞ 写像とする。このとき

$$E' := \{(x', \xi) \in M' \times E \colon f(x') = \pi(\xi)\}, \quad \pi'(x', \xi) := x' \tag{3.6.7}$$

とおくと、$\pi'\colon E' \to M'$ は M' 上のランク r ベクトル束となる (このあと示す)。これを E の f による**引き戻し**

束 (pullback bundle) といい、f^*E あるいは $f^{-1}E$ と書く。

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{3.6.8}$$

直感的には、$x' \in M'$ 上のファイバーとして $f(x')$ 上の E のファイバーをとることで E' を構成するイメージである (数式っぽく書けば $\coprod_{x' \in M'} E_{f(x')}$ というイメージ)。

命題 3.6.6 (引き戻し束はベクトル束). 上の定義の状況で、f^*E はランク r ベクトル束である。

証明　$E' = f^*E$ と書くことにする。E' が $M' \times E$ の部分多様体であることは認めることにする[5)]。すると π' は C^∞ 全射である。つぎに局所自明性の条件を確かめる。E は $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ 上の局所自明化 φ を持つとする。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U \end{tikzcd} \tag{3.6.9}$$

ここで、C^∞ 写像 $\psi\colon E' \to f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^r$ を

$$(x', \xi) \mapsto (x', \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(\xi)) \tag{3.6.10}$$

で定めると、これは $f^{-1}(U)$ 上の局所自明化である。実際、

$$f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^r \to E', \quad (x', v) \mapsto (x', \varphi^{-1}(f(x'), v)) \tag{3.6.11}$$

が C^∞ 逆写像を与えるから ψ は diffeo であり、また各 $x' \in f^{-1}(U)$, $\xi \in E'_{x'}$ に対し

$$\psi(x')\colon (x', \xi) \mapsto (x', \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(f(x'))(\xi)) \tag{3.6.12}$$

$$(x', \varphi(f(x'))^{-1}(f(x'), v)) \leftarrow\!\shortmid (x', v) \tag{3.6.13}$$

が線型同型を与えるから、ψ は $f^{-1}(U)$ 上の局所自明化である。最後に、$\psi(x')$ が x' によらず $\mathbb{R}^r$ との線型同型を与えることから f^*E のファイバーはすべて r 次元ベクトル空間である。したがってファイバーの条件もみたされることがわかった。 □

定理 3.6.7 (引き戻し束の普遍性). [TODO]

証明　[TODO] □

命題 3.6.8 (写像に沿う切断と引き戻し束). M, N を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束、$f\colon N \to M$ を C^∞ 写像とする。このとき、引き戻し束 f^*E の切断は f に沿う E の切断に他ならない。

5) cf. https://math.stackexchange.com/questions/2194589/pullback-bundle-over-a-smooth-manifold

証明 [TODO] □

例 3.6.9 (法束). $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ を n 次元部分多様体とする。$\mathbb{R}^{n+k}$ の接ベクトル束 $T\mathbb{R}^{n+k}$ は直積束 $T\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}$ である。包含写像 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ の微分により

$$TM \overset{\text{submfd}}{\subset} T\mathbb{R}^{n+k}|_M \tag{3.6.14}$$

が成り立つ [6] から、TM は $T\mathbb{R}^{n+k}|_M$ の部分ベクトル束である。その直交ベクトル束 $T^\perp M$ を M の**法束 (normal bundle)** といい、

$$T\mathbb{R}^{n+k}|_M = TM \oplus T^\perp M \tag{3.6.15}$$

が成り立つ。

例 3.6.10 (Gauss 写像). M が $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面で、M の単位法ベクトル場 ν がとれるとき、ν を $M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の C^∞ 写像と考えて、これを **Gauss 写像 (Gauss map)** という。このとき

$$TM = \nu^*(TS^n) \tag{3.6.16}$$

が成り立つ。直感的には、M の接ベクトルとして S^n の接ベクトルを使うようなイメージである。

3.7 対称積束と外積束

ベクトル束の対称積と外積を定義する。

[TODO] 他とのつながりを明確にしたい

定義 3.7.1 (対称積束と外積束). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$E$ を M のベクトル束とする。$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。

- 各 $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in E_p^{\otimes s}$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ に対し

$$\sigma\alpha := \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(s)} \tag{3.7.1}$$

  と定める。一般の α に対しては $\mathbb{R}$-線型に拡張する [7]。

- 集合

$$S^s(E) := \coprod_{p \in M} \{\alpha \in E_p^{\otimes s} \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_s \text{ に対し } \sigma\alpha = \alpha\} \tag{3.7.2}$$

  にベクトル束の構造を入れたものを E の s 次の**対称積 (symmetric product)** という。

- $S^s(E)$ の元を**対称テンソル (symmetric tensor)** といい、$\Gamma_U(S^s(E))$ の元を**対称テンソル場 (symmetric tensor field)** という。

- 集合

$$A^s(E) := \coprod_{p \in M} \{\alpha \in E_p^{\otimes s} \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_s \text{ に対し } \sigma\alpha = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha\} \tag{3.7.3}$$

6) cf. 幾何学 I 補題 6.9

にベクトル束の構造を入れたものを E の s 次の**交代積 (alternating product)** あるいは**外積 (exterior product)** という。という。$A^s(E)$ を $\bigwedge^s E$ と書くこともある。

- $A^s(E)$ の元を**交代テンソル (alternating tensor)** といい、$\Gamma_U(A^s(E))$ の元を**交代テンソル場 (alternating tensor field)** という。

3.8 テンソル場の縮約

定義 3.8.1 (テンソル場の縮約). $E \to M$ をランク r ベクトル束、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。以下、切断の定義域はすべて U 上で考える。

$$T^{p,q}E := \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{p \text{ times}} \otimes \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{q \text{ times}} \quad (p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{3.8.1}$$

と書くことにする。$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、各 $0 \leq k \leq p,\ 0 \leq l \leq q$ に対し写像 $\mathrm{tr}_l^k \colon \Gamma(T^{p,q}E) \to \Gamma(T^{p-1,q-1}E)$ を次のように定める: $S \in \Gamma(T^{p,q}M)$ が任意に与えられたとする。E の局所フレーム $(e_1, \ldots, e_r)$ をとり、双対フレームを $(e^1, \ldots, e^r)$ とする。S を局所的に

$$S = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ j_1 \ldots j_q}} S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \tag{3.8.2}$$

と表示し、

$$\mathrm{tr}_l^k S := \sum_{\substack{i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_p \\ j_1 \ldots \widehat{j_l} \ldots j_q \\ m}} S^{i_1 \ldots \overset{k}{\overbrace{m}} \ldots i_r}_{j_1 \ldots \underset{l}{\underbrace{m}} \ldots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{i_k}} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e^{j_l}} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} \tag{3.8.3}$$

$$\in \Gamma(T^{p-1,q-1}E) \tag{3.8.4}$$

と定める。この写像 tr_l^k をテンソル場の**縮約 (contraction)** あるいは**トレース (trace)** という。k, l の組が明らかな場合、添字を省略して単に tr と書くことが多い。tr は定義から明らかに $C^\infty(U)$-線型写像である。

注意 3.8.2. 上の定義の状況で、とくに $\omega \in \Gamma_U(E^*),\ \xi \in \Gamma_U(E)$ に対し

$$\mathrm{tr}(\omega \otimes \xi) = \langle \omega, \xi \rangle \tag{3.8.5}$$

が成り立ち、$g \in \Gamma_U(E^* \otimes E^*),\ \xi, \eta \in \Gamma_U(E)$ に対し

$$\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(g \otimes \xi \otimes \eta) = g(\xi, \eta) \tag{3.8.6}$$

が成り立つことが直接計算によりわかる。

3.9 接束

最も重要なベクトル束の例として接束を定義する。

7) 成分関数の添字を取り替えるわけではないことに注意。たとえば $\sigma = (1\,2)$ のとき $\sigma(f_{12} dx^1 \otimes dx^2) = f_{12} dx^2 \otimes dx^1$ である。

定義 3.9.1 (接束)**.** [TODO]

例 3.9.2 (接束はベクトル束)**.** M を r 次元多様体、$\pi\colon TM \to M$ を接ベクトル束とする。TM がランク r の M 上のベクトル束であることを確かめる。ベクトル束の定義 (1)-(3) は接ベクトル束の定義より明らかに満たされるから、あとは局所自明化の条件を確かめればよい。各 $x \in M$ に対し、x の属する M のチャート $\varphi = (x^1, \dots, x^r)\colon U \to \mathbb{R}^r$ をとる。写像

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r, \quad (p, v) \mapsto (p, (d\varphi)_p(v)) = (p, (dx^1)_p(v), \dots, (dx^r)_p(v)) \tag{3.9.1}$$

を考える。Φ が局所自明化の条件 (4-b) をみたすことは明らかだから、(4-a) を確かめる。TM のチャート $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^r, (p, v) \mapsto (\varphi(p), (d\varphi)_p(v))$ を使えば

$$\begin{tikzcd} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^r \\ \pi^{-1}(U) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[u, "\varphi\times\mathrm{id}"', "\cong"] \end{tikzcd} \tag{3.9.2}$$

は可換だから、Φ は diffeo である。よって (4-a) をみたす。

接束のフレームとして最も重要なのが座標により定まるフレームである。

定義 3.9.3 (座標フレーム)**.** M を r 次元多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$x^1, \dots, x^r$ を U 上の座標とする。このとき、U 上の TM のフレーム $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^r}$ を座標 $x^1, \dots, x^r$ に関する**座標フレーム (coordinate frame)** という。

注意 3.9.4 (座標表示と座標フレームに関する成分表示)**.** ひとつ術語の用法に関する注意を述べておく。本稿で「座標表示」といえば C^∞ 写像を引き戻して座標空間からの写像とみなしたものを指すのであった。文献によっては、この意味での「座標表示」とはまた別に「座標フレームに関する (ベクトル場などの) 成分表示」も「座標表示」と呼んでいる場合がある。しかしこれらは明確に異なる概念であるから、混乱を避けるために本稿ではそれぞれ「座標表示」「座標フレームに関する成分表示」と呼び分けることにする。

3.10 演習問題

♤ **演習問題 3.1** (幾何学 III 演習問題 1 1.7). $\mathbb{C}^2$ の部分集合 E を

$$E := \{(z,u) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1,\ u \in \mathbb{R}\sqrt{z}\} \tag{3.10.1}$$

で定め、部分多様体の構造を入れる (**メビウスの帯 (Möbius band)**)。さらに写像 $\pi\colon E \to S^1$ を

$$\pi(z,u) := z \tag{3.10.2}$$

で定める。また、各 $z \in S^1$ に対し S^1 の部分集合 U_z を

$$U_z := \{w \in S^1 \mid |\arg(w/z)| < \pi/6\} \tag{3.10.3}$$

とおく。このとき、写像 $\psi_z\colon \pi^{-1}(U_z) \to U_z \times \mathbb{R}$

$$\psi_z(w,v) := \left(w, \frac{v}{\sqrt{w}} \exp(\operatorname{Re} w)\right) \tag{3.10.4}$$

は U_z 上の局所自明化であることを示せ。また、$\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}$ を求めよ。

♤ **演習問題 3.2** (幾何学 III 演習問題 1 1.8). (x,y,z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし、$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ を

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \tag{3.10.5}$$

により定める。また、(u,v) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標、$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を単位円周とする。最後に $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\pi(x,y,z) := \left(\frac{x+yz}{1+z^2}, \frac{y-xz}{1+z^2}\right) \tag{3.10.6}$$

により定める。

(1) $(x,y,z) \in \Sigma$ ならば $\pi(x,y,z) \in S^1$ が成り立つことを示せ。
(2) $(u,v) \in S^1$ とする。$F_{(u,v)} = \pi^{-1}(u,v)$ とおくと $F_{(u,v)} \subset \Sigma$ であることを示せ。また、$F_{(u,v)}$ をなるべく簡潔に表せ。
(3) π の Σ への制限を π_Σ とおく。このとき、微分同相写像 $\varphi\colon \Sigma \to S^1 \times \mathbb{R}$ であって図式

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_\Sigma"'] & S^1 \times \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ S^1 \arrow[r, equal] & S^1 \end{tikzcd} \tag{3.10.7}$$

が可換となるようなものをひとつ挙げよ。

♤ **演習問題 3.3** (幾何学 III 演習問題 1.13). (1) $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ を示せ。
(2) M をメビウスの帯とする。$TM \not\cong M \times \mathbb{R}^2$ を示せ。

第 4 章　ベクトル場と反変テンソル場

[TODO] pointwise に計算できるか否かをもっと丁寧に書きたい

接束の切断としてベクトル場を導入する。ベクトル場には Lie 括弧と呼ばれる演算が定まる。また、ベクトル場の一般化として反変テンソル場を定義する。反変テンソル場には押し出しと呼ばれる演算が定まる。

4.1　ベクトル場

ベクトル場は多様体の接束の切断である。

定義 4.1.1 (ベクトル場). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。$\Gamma_U(TM)$ の元を U 上の**ベクトル場 (vector field)** という。$\Gamma_U(TM)$ を $\mathfrak{X}(U)$ とも書く。

M 上のベクトル場は、次の定義のもとで $\mathbb{R}$-代数 $C^\infty(M)$ 上の導分と 1:1 に対応する。

定義 4.1.2 (導分としてのベクトル場). [TODO]

4.2　押し出し

微分同相写像によってベクトル場の押し出しが定義できる。

定義 4.2.1 (押し出し). M, N を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$、$F\colon M \to N$ を微分同相写像とする。このとき N 上のベクトル場 F_*X を

$$(F_*X)_q := (F_*)_{F^{-q}(q)} X_{F^{-q}(q)} \quad (q \in N) \tag{4.2.1}$$

で定義することができる。F_*X を F による X の**押し出し (pushforward)** という。

4.3　Lie 括弧

Lie 括弧を定義する。

定義 4.3.1 (Lie 括弧). M を多様体、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする。X と Y の **Lie 括弧 (Lie bracket)** という作用素 $[X, Y]$ を

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \quad (f \in C^\infty(M)) \tag{4.3.1}$$

で定める。$[X, Y]$ は $\mathfrak{X}(M)$ に属する (このあと示す)。

証明　[TODO] □

Lie 括弧の座標フレームに関する成分表示を求めよう。この成分表示は直接計算しようとすると式変形の途中で 2 階導関数が現れるが、最終的にはキャンセルされる。そこで式変形の最終形を命題として述べておくことにする。

命題 4.3.2 (Lie 括弧の座標フレームに関する成分表示).

$$[X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{4.3.2}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

4.4 積分曲線とフロー

ベクトル場を用いて積分曲線の概念を定義できる。

定義 4.4.1 (積分曲線). M を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$ とする。C^∞ 写像 $c\colon (a,b) \to M$ が X の**積分曲線 (integral curve)** であるとは、すべての $t_0 \in (a,b)$ に対し

$$\left.\frac{d}{dt} c(t)\right|_{t=t_0} = X_{c(t)} \tag{4.4.1}$$

が成り立つことをいう。

定義 4.4.2 (フロー). M を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$ とする。

- 部分集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ であって

$$\mathcal{D} = \bigcup_{p \in M} (0 \text{ を含む開区間}) \tag{4.4.2}$$

の形であるものを M の**フロードメイン**という。

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ をフロードメインとする。C^∞ 写像 $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ であって次をみたすものを M 上の**フロー**という:
  (1) $\theta(0,p) = p$ $(\forall p \in M)$
  (2) 定義される範囲で $\theta(t, \theta(s,p)) = \theta(t+s, p)$

  t を固定した写像 $p \mapsto \theta(t,p)$ を θ_t とも書く [8]。

- $\theta\colon \mathcal{D} \to M$ をフローとする。$\left.\frac{d}{dt}\theta(t,p)\right|_{t=0} = X_p$ $(p \in M)$ が成り立つとき、θ を **X の生成するフロー** あるいは単に **X のフロー** という [9]。

ベクトル場の生成するフローは、時間微分に関する常微分方程式の初期値問題の解である。したがって、常微分方程式の初期値問題の解の一意存在定理が適用できる。

定理 4.4.3 (フローの基本定理). [TODO]

指数写像を導入する。まず予備的考察として、Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ から Lie 群 $GL(n,\mathbb{R})$ への指数写像は、通常の冪級数 exp として定義される。これを一般の Lie 群に対し拡張したい。[TODO] どういうモチベーション？

定義 4.4.4 (指数写像). [TODO]

8) θ_t は、多様体 M 全体を時刻 t だけ "スライド" させる写像である。

9) X のフローは **1 パラメータ局所変換群 (1-parameter group of local transformation)** と呼ばれることもあるが、X が完備でない限り群作用とはならないから紛らわしい用語である。

4.5 反変テンソル場

定義 4.5.1 (反変テンソル場). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。U 上の $(TM)^{\otimes r}$ の切断を U 上の**反変テンソル場 (contravariant tensor field)** という [10)]。

反変テンソル場の座標フレームに関する成分表示は次のように書ける。

命題 4.5.2 (反変テンソル場の座標フレームに関する成分表示). 座標 $x^1, \ldots, x^m$ のもとで

$$X = \sum_{i_1,\ldots,i_s} X^{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \tag{4.5.1}$$

と表せる。各 $X^{i_1 \ldots i_s}$ を X の**成分関数 (component function)** という。

証明 [TODO] □

10) ここでの「反変」という語は圏論的な「反変」とは全く関係がない。

4.6 演習問題

♤ **演習問題 4.1** (東大数理 2006B). $\mathbb{R}^2$ の単位ベクトルを $e_1 = (0,1), e_2 = (1,0)$ として $\Gamma = \{me_1 + ne_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ とおく。$T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ に商空間としての可微分多様体の構造を入れ、$\omega = dx \wedge dy$ を T 上の微分形式とみなす。ここで (x, y) は $\mathbb{R}^2$ の座標である。

(1) T 上のベクトル場 $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ について、T 上の滑らかな実数値関数 H で、すべての T 上のベクトル場 Y に対して $\omega(X, Y) = dH(Y)$ をみたすものは存在しないことを示せ。

(2) T 上の滑らかなベクトル場

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.6.1}$$

の生成する 1 パラメータ変換群 (フロー) φ_t が、$\varphi_t^*\omega = \omega$ を満たすための条件を、$a(x,y), b(x,y)$ で表せ。

(3) 上の (2) の条件を満たす T 上のベクトル場 $a(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ で、$a(x,y), b(x,y)$ が定数関数ではないものの例を挙げよ。

第 5 章　コベクトル場と共変テンソル場

ベクトル場の双対概念としてコベクトル場を導入し、コベクトル場の一般化として共変テンソル場を定義する。共変テンソル場に対して定まる演算として引き戻しと内部積を導入する。共変テンソル場の特別な場合としては対称テンソル場と微分形式という重要な概念があるが、それらの解説はあとの章に回し、ここでは一般的な性質について述べる。

5.1　コベクトル場

定義 5.1.1 (余接束). M を多様体とする。M の**余接束 (cotangent bundle)** とは、$\coprod_{p\in M} T_p^*M$ に"適当"[TODO] にチャートを設定して C^∞ 多様体にしたものをいう。

定義 5.1.2 (コベクトル場). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。$\Gamma_U(T^*M)$ の元を U 上の**コベクトル場 (covector field)** という。

5.2　共変テンソル場

定義 5.2.1 (共変テンソル場). [TODO]

共変テンソル場の座標フレームに関する成分表示は次のように書ける。

命題 5.2.2 (共変テンソル場の座標フレームに関する成分表示). 座標 $x^1, \ldots, x^m$ のもとで

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_s} \omega_{i_1\ldots i_s}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s} \tag{5.2.1}$$

と表せる。

証明　[TODO] □

5.3　引き戻し

共変テンソル場には C^∞ 写像による引き戻しが定義できる。これは反変テンソル場にはない特徴である。

定義 5.3.1 (共変テンソル場の引き戻し). M, N を多様体、$F\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。

- 各 $p \in M$, $\alpha \in T^{0,s}_{F(p)}N$ に対し、α の F による**点ごとの引き戻し (pointwise pullback)** $dF_p^*\alpha \in T_p^{0,s}M$ を

$$dF_p^*\alpha(v_1, \ldots, v_s) := \alpha(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_s)) \quad (v_1, \ldots, v_s \in T_pM) \tag{5.3.1}$$

で定める [11)]。

- 各 $\omega \in \Gamma(T^{0,s}N)$ に対し、ω の F による**引き戻し (pullback)** $F^*\omega \in \Gamma(T^{0,s}M)$ を

$$(F^*\omega)_p := dF_p^*(\omega_{F(p)}) \tag{5.3.2}$$

すなわち

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_s) := \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_s)) \quad (v_1, \dots, v_s \in T_pM) \tag{5.3.3}$$

で定める。

命題 5.3.2 (引き戻しの基本性質). $F\colon M \to N$ と $G\colon N \to P$ を C^∞ 写像、B を N 上の共変テンソル場、$f\colon N \to \mathbb{R}$ を実数値関数とする。

(a) $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$

(b) $(G \circ F)^*B = F^*(G^*B)$

(c) $\mathrm{id}_N^*B = B$

[TODO]

証明 [TODO] □

共変テンソル場の引き戻しの座標フレームに関する成分表示は次の命題で与えられる。

命題 5.3.3 (引き戻しの座標フレームに関する成分表示). M, N を多様体、$F\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。$V \overset{\text{open}}{\subset} N$ とし、$U := f^{-1}(V)$ とおく。$\omega \in \Gamma_V(T^{0,k}N)$ の座標フレームに関する成分表示を

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}\, dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_k} \tag{5.3.4}$$

とすると、$F^*\omega \in \Gamma_U(T^{0,k}M)$ の成分表示は

$$F^*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{i_k} \circ F) \tag{5.3.5}$$

となる。

証明 [TODO] □

5.4 内部積

内部積を定義する。

定義 5.4.1 (内部積). M を多様体、$p \in M$ とする。$v \in T_pM$, $\alpha \in T_p^{0,s}M$ に対し、v と α の**内部積 (internal**

11) 点ごとの引き戻し $dF_p^*\alpha$ は線型写像 $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ の双対写像 $dF_p^*\colon T_{F(p)}^*N \to T_p^*M$ によって α を写したかのような雰囲気だが、一般に α は $T_{F(p)}^*N$ の元ではなく $T_{F(p)}^{0,s}N$ の元だから混同してはいけない。ただし $s = 1$ の場合はこれらの概念は一致する。

product) $\iota_v \alpha \in T_p^{0,s-1}M$ を

$$\iota_X \alpha(v_1, \ldots, v_{s-1}) \coloneqq \omega(v, v_1, \ldots, v_{s-1}) \quad (v_1, \ldots, v_{s-1} \in T_pM) \tag{5.4.1}$$

で定める。切断にたいしても同様に定める。とくに α が対称的 (resp. 交代的) ならば $\iota_v \alpha$ も対称的 (resp. 交代的) である。

例 5.4.2. $X = a\dfrac{\partial}{\partial p} + b\dfrac{\partial}{\partial q}$, $\omega = dp \wedge dq$ のとき

$$\iota_X \omega = a\,dq - b\,dp \tag{5.4.2}$$

[TODO]

第 6 章　混合テンソル場

反変テンソル場と共変テンソル場を混合した混合テンソル場を考え、Lie 微分とよばれる演算を定義する。

6.1　混合テンソル場

[TODO] 何に使う？

定義 6.1.1 (混合テンソル場). [TODO]

6.2　Lie 微分

ベクトル場とそれにより生成されるフローについてはすでに定義した。フローを用いて、ベクトル場に沿うテンソル場の方向微分にあたる概念を導入しよう。すなわち、混合テンソル場に対する Lie 微分を定義する。[TODO] 共変微分との関係？

定義 6.2.1 (Lie 微分). [TODO] well-defined 性？M を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$、$\theta\colon \mathcal{D} \to M$ を X のフローとする。各テンソル場 $\omega \in \Gamma(T^{r,s}M)$ に対し、ω の X による **Lie 微分 (Lie derivative)** $L_X\omega \in \Gamma(T^{r,s}M)$ を

$$
\begin{aligned}
(L_X\omega)_p &:= \lim_{t\to 0}\frac{(\theta_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} && (6.2.1)\\
&= \frac{d}{dt}(\theta_t^*\omega)_p\Big|_{t=0} && (6.2.2)
\end{aligned}
$$

で定める。ただし $(\theta_t^*\omega)_p$ の意味は、$T_p^{r,s}M$ の基底に対し

$$
\begin{aligned}
&(\theta_t^*(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_s))_p && (6.2.3)\\
&:= d(\theta_t^{-1})_p v_1\otimes\cdots\otimes d(\theta_t^{-1})_p v_r\otimes d(\theta_t)_p^*\alpha_1\otimes\cdots\otimes d(\theta_t)_p^*\alpha_s && (6.2.4)
\end{aligned}
$$

と定めて $\mathbb{R}$-線型に拡張したものである [12] 。

ベクトル場 X による Lie 微分は定義に基づいて計算しようとすると X のフローを考えなければならないが、以下に挙げるようないくつかのケースではフローを持ち出すことなく、X 自身や Lie 括弧を用いて Lie 微分を計算することができる。

命題 6.2.2 (関数やベクトル場の Lie 微分). M を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$ とする。

(1)　$f \in C^\infty(M)$ に対し

$$L_X(f) = X(f) \tag{6.2.5}$$

が成り立つ。

(2)　$Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$L_X(Y) = [X, Y]\ (= -L_Y(X)) \tag{6.2.6}$$

12)　$(\theta_t^*\omega)_p$ は、時刻 t だけ先の接空間に住んでいる接ベクトルをフローに沿って時刻 0 に戻してくることで無理やり ω_p と差をとれるようにしたものというイメージである。

が成り立つ。

証明 [TODO] □

命題 6.2.3 (共変テンソル場の Lie 微分の計算公式). M を多様体、$X \in \mathfrak{X}(M)$ とする。$\omega \in \Gamma(T^{0,s}M)$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_s) = X(\omega(X_1, \ldots, X_s)) \tag{6.2.7}$$

$$- \sum_{i=1}^{s} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_s) \tag{6.2.8}$$

が成り立つ。同じことだが、上の命題より

$$(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_s) = L_X(\omega(X_1, \ldots, X_s)) \tag{6.2.9}$$

$$- \sum_{i=1}^{s} \omega(X_1, \ldots, L_X(X_i), \ldots, X_s) \tag{6.2.10}$$

とも書ける。

証明 [TODO] □

Lie 微分はテンソル積に関して導分の性質を持つ。

命題 6.2.4 (テンソル積に関する Lie 微分の導分性). M を多様体、ω, μ を M 上のテンソル場とする。このとき次が成り立つ:

(1) $L_X(\omega \otimes \mu) = (L_X\omega) \otimes \mu + \omega \otimes (L_X\mu)$

証明 [TODO] □

命題 6.2.5. M を多様体、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Gamma(T^{0,s}M)$ とする。次が成り立つ:

(1) $\iota_{[X,Y]}\omega = [L_X, \iota_Y]\omega$

(2) $L_{[X,Y]}\omega = [L_X, L_Y]\omega$

証明 [TODO] □

定義 6.2.6 (フローに関する不変性). [TODO]

第 7 章　対称テンソル場と計量

この章では対称テンソル場を定義し、その重要な応用として計量を導入する。

7.1　対称テンソル場

定義 7.1.1 (対称テンソル場). [TODO] ベクトル束のところで定義したものを使えばよい？

7.2　対称積

対称積を定義する。

定義 7.2.1 (対称テンソル場の対称積). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。$r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(1 \leq i \leq k)$, $r = r_1 + \cdots + r_k$ とし、$\omega_i \in \Gamma_U(S^{r_i}(T^*M))$ $(1 \leq i \leq k)$ とする。U 上の r 次対称テンソル場

$$(\omega_1 \odot \cdots \odot \omega_k)_p := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sigma(\omega_{1p} \otimes \cdots \otimes \omega_{kp}) \quad (p \in U) \tag{7.2.1}$$

を $\omega_1, \ldots, \omega_k$ の**対称積 (symmetric product)** という。$\omega_1 \odot \cdots \odot \omega_k$ を $\mathrm{Sym}(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ と書くこともある。

注意 7.2.2. 対称積は可換かつ結合的である (問題 8.4)。

Lie 微分は対称積に関して導分の性質を持つ。

命題 7.2.3 (対称積に関する Lie 微分の導分性). M を多様体、ω, μ を M 上の対称テンソル場とする。このとき次が成り立つ:

(1) $L_X(\omega \odot \mu) = (L_X\omega) \odot \mu + \omega \odot (L_X\mu)$

証明 [TODO] □

7.3　計量

定義 7.3.1 (計量). M を多様体、E を M 上のベクトル束とする。

- $\Gamma_M(S^2(E^*))$ の元を E 上の 2 次**対称形式 (symmetric form)** という。$E = TM$ の場合は M 上の 2 次対称形式ともいう。
- E 上の 2 次対称形式 g について、各 $p \in M$ に対し g_p が E_p 上の対称双線型形式として非退化であるとき、g は**非退化 (non-degenerate)** であるという。
- E 上の非退化 2 次対称形式を E の**計量 (metric)** という。$E = TM$ の場合は M の計量ともいう。

- g_p の 2 次形式としての符号が $p \in M$ によらず一定であるとき、p をひとつ選んで

$$\operatorname{sgn} g \coloneqq \operatorname{sgn} g_p \tag{7.3.1}$$

と定め、これを g の**符号 (sign)** という。

符号の様子にしたがっていくつかの計量には特別な名前がついている。

定義 7.3.2 (計量の例)**.** M を多様体、E を M 上のランク r ベクトル束とする。

- $\operatorname{sgn} g = (s, t)$, $s + t = r$ のとき、g を**擬 Riemann 計量 (pseudo-Riemannian metric)** という。
- $\operatorname{sgn} g = (r, 0)$ のとき、g を **Riemann 計量 (Riemannian metric)** という。
- $\operatorname{sgn} g = (1, r-1)$ のとき、g を **Lorentz 計量 (Lorentzian metric)** という。

C^∞ 写像がはめ込みならば、計量の引き戻しもまた計量となる。計量の引き戻しが計量とならない例は問題 11.1 で扱っている。

命題 7.3.3 (引き戻し計量)**.** M, N を多様体、g を M の計量とする。C^∞ 写像 $f\colon N \to (M, g)$ がはめ込みであるとき、引き戻し f^*g は N の計量となる。これを g の f による**引き戻し計量 (pullback metric)** という。

証明 [TODO] □

第 8 章　交代テンソル場と微分形式

[TODO] 外積代数と Hodge 双対の話をどこかに書きたい。内部積も結局外積代数上で使うことが目的？

この章では、微分幾何学に必要不可欠な概念のひとつである微分形式を導入する。身も蓋もない言い方をすれば、微分形式というのは交代テンソル場のことである。しかしこれだけでは微分形式の重要性は全く見えてこない。微分形式に基づいて多様体の向き付けや積分、de Rham コホモロジーなどの重要な理論が展開されることが徐々に明らかになるであろう。この章では微分形式に対する演算として外積と外微分を定義する。

8.1　微分形式

定義 8.1.1 (微分形式)**.** M を m 次元多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。

- $\Gamma_U(\bigwedge^s(T^*M))$ の元を U 上の**微分 s-形式 (differential s-form)** あるいは単に s **形式**という。$\Gamma_U(\bigwedge^s(T^*M))$ を $\Omega^s(U)$ とも書く。
- $s = 0$ のとき、形式的に $\Omega^0(U) := C^\infty(U)$ と定める。
- $s = \dim M$ のとき、s-形式を**最高次形式 (top-degree form)** という。

注意 8.1.2. 上で定義した微分形式は $\mathbb{R}$-値だが、これはベクトル値に一般化できる。これについては 13.1 節 で論じる。

微分形式の座標フレームに関する成分表示は、交代性を用いて次のように書ける。

命題 8.1.3 (微分形式の座標フレームに関する成分表示)**.** 座標 $x^1, \ldots, x^m$ のもとで

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_s} \omega_{i_1\ldots i_s}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}, \quad \text{各 } \omega_{i_1\ldots i_s} \text{ は添字に関し交代的} \tag{8.1.1}$$

あるいは

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_s} \omega_{i_1\ldots i_s}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s} \tag{8.1.2}$$

の形に表せる。[TODO]

証明　[TODO] □

8.2　外積

微分形式に対して外積を定義する。

定義 8.2.1 (微分形式の外積)**.** M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。$\omega \in \Omega^r(U)$, $\mu \in \Omega^s(U)$ とする。U 上の $r+s$ 次微

分形式

$$(\omega \wedge \mu)_p(v_1, \dots, v_{r+s}) := \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \mu_p(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \tag{8.2.1}$$

$$= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \mathrm{sgn}(\sigma) (\omega \otimes \mu)_p(\sigma(v_1, \dots, v_{r+s})) \tag{8.2.2}$$

を ω と μ の**外積 (exterior product)** あるいは **wedge 積 (wedge product)** という。

注意 8.2.2. とくに $r = s = 1$ の場合

$$\omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1) \tag{8.2.3}$$

となる。

注意 8.2.3. 微分形式の外積の定義は対称積と似ているが、以下の点で異なる:

- 対称積は k 項演算として定義されたが、外積は 2 項演算として定義される。
- 係数が $1/(r+s)!$ の形ではなく $1/(r!s!)$ の形である (ただし、前者で定義する流儀もある)。
- 置換 σ の作用の仕方は $\sigma(\omega \otimes \mu)$ の形ではなく、引き戻し $\sigma^*(\omega \otimes \mu)$ の形である。[TODO] 本質的に何が違う？

外積は次の性質を持つ。

命題 8.2.4 (外積の基本性質). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。

(1) $\omega \in \Omega^r(U)$, $\mu \in \Omega^s(U)$ に対し

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega \tag{8.2.4}$$

が成り立つ。

(2) $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(U)$ に対し

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)} \tag{8.2.5}$$

が成り立つ。したがって

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j)) \tag{8.2.6}$$

である。

証明 cf. [Lee12, p.356] □

外積は、これまでに導入したテンソル場の演算と非常に相性が良い。まず引き戻しは外積と交換する。

命題 8.2.5 (引き戻しと外積の関係). $F\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。微分形式 ω, η に対し

$$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta) \tag{8.2.7}$$

が成り立つ。[TODO] 定義域とかはどうなる？

証明 [TODO] □

次に述べる最高次形式の引き戻し公式は、通常の積分における変数変換公式のようなものであり、積分を具体的に計算するための重要なツールのひとつである。

命題 8.2.6 (最高次形式の引き戻し公式). M, N を n 次元多様体、$F\colon M \to N$ を C^∞ 写像、$(x^i), (y^j)$ をそれぞれ $U \overset{\text{open}}{\subset} M, V \overset{\text{open}}{\subset} N$ 上の局所座標とする。このとき、V 上の任意の連続関数 u に対し、$U \cap F^{-1}(V)$ 上で

$$F^*(u\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (u \circ F)(\det JF)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{8.2.8}$$

が成り立つ。[TODO] 連続関数でいいのか？

証明 cf. [Lee12, p.361] □

内部積は外積に関して反導分の性質を持つ。

命題 8.2.7 (外積に関する内部積の反導分性). M を多様体、$p \in M$, $v \in T_pM$ とする。交代テンソル $\omega \in \bigwedge^r T_p^*M$, $\mu \in \bigwedge^s T_p^*M$ に対し

$$\iota_v(\omega \wedge \mu) = (\iota_v\omega) \wedge \mu + (-1)^r \omega \wedge (\iota_v\mu) \tag{8.2.9}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

Lie 微分は外積に関して導分の性質を持つ (反導分ではないことに注意)。

命題 8.2.8 (外積に関する Lie 微分の導分性). M を多様体、ω, μ を M 上の微分形式とする。このとき次が成り立つ:

(1) $L_X(\omega \wedge \mu) = (L_X\omega) \wedge \mu + \omega \wedge (L_X\mu)$

証明 [TODO] □

8.3 外微分

微分形式全体の空間 $\Omega^*(M)$ に外微分とよばれる演算を定義する。外微分を境界作用素として $\Omega^*(M)$ はチェイン複体となるが[1)]、このことは 11.1 節 で詳しく論じる。

定義 8.3.1 (外微分). M を多様体とする。次をみたす写像の族 $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ $(k \geq 0)$ がただひとつ存在し（証明略）、d を**外微分 (exterior derivative)** という。

(1) d は $\mathbb{R}$-線型写像である。

(2) (anti-derivation 性) $\omega \in \Omega^k(M)$ と $\eta \in \Omega^l(M)$ に対し

$$d(\omega \wedge \eta) := d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \tag{8.3.1}$$

が成り立つ。

(3) $d \circ d = 0$ である。

(4) $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ に対し df は f の微分に一致し、$df(X) = Xf$ が成り立つ。

外微分の座標フレームに関する成分表示は次のようになる。

命題 8.3.2 (外微分の座標フレームに関する成分表示). M を多様体、$\omega \in \Omega^k(M)$ とする。ω の座標フレームに関する成分表示を

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{8.3.2}$$

とすると、$d\omega$ は

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{8.3.3}$$

となる。

証明 [TODO] □

外微分はベクトル場と Lie 括弧で記述できる。共変テンソル場の Lie 微分の公式 (命題 6.2.3) と似ているが、外微分の場合は各項に符号が付くことに注意。

命題 8.3.3 (外微分とベクトル場の計算公式). M を多様体、$\omega \in \Omega^r(M)$ とする。$X_0, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$d\omega(X_0, \ldots, X_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)) \tag{8.3.4}$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r) \tag{8.3.5}$$

が成り立つ[14)]。

1) より詳しくいえば、$\Omega^*(M)$ は wedge 積により次数付き代数となり、さらに外微分により DG 代数 (differential graded algebra) となる。DG 代数はチェイン複体の構造を持つから、とくにチェイン複体となる。

14) この関係式を $d\omega$ の定義とする流儀もあるが、その場合は $d\omega$ が (ベクトル場ではなく) ベクトルをとるとはどういうことなのか well-defined に定義する必要がある。

注意 8.3.4. とくに $r=1$ のとき

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \tag{8.3.6}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

外微分も、外積と同様にこれまでに導入したテンソル場の演算と非常に相性が良い。まず引き戻しは外積と交換する。

命題 8.3.5 (外微分と引き戻しの関係 (外微分の自然性)). $F\colon M \to N$ を C^∞ 写像とする。このとき、N 上の微分形式 ω に対し

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \tag{8.3.7}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

外微分と Lie 微分、内部積を関係付ける重要な公式が次の Cartan's Homotopy Formula である。

定理 8.3.6 (Cartan's Homotopy Formula). M を多様体、$\omega \in \Omega^r(M)$ とする。このとき

$$L_X\omega = (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)\omega \tag{8.3.8}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

上の定理から次の系が従う。すなわち、外微分と Lie 微分は互いに交換可能である。

系 8.3.7. 上の命題の状況で

$$L_X \circ d(\omega) = d \circ L_X(\omega) \tag{8.3.9}$$

が成り立つ。□

系 8.3.8. 上の命題の状況でさらに ω が閉形式ならば、$L_X\omega$ は完全形式である。□

8.4 演習問題

♤ **演習問題 8.1** ([Lee] 10-1). $\pi\colon E \to S^1$ を Möbius bundle とする。

(1) E は商写像 $q\colon \mathbb{R}^2 \to E$ が smooth covering map となるような smooth structure をただひとつ持つことを示せ。

(2) $\pi\colon E \to S^1$ は smooth rank-1 vector bundle であることを示せ。

(3) $\pi\colon E \to S^1$ は trivial bundle でないことを示せ。

♤ **演習問題 8.2** (幾何学 III 演習問題 1.2). $f\colon M \to M$ を微分同相写像とする。このとき、$X \in \mathfrak{X}(M)$ について $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$f_*X(p) = f_{*p}X(p) \tag{8.4.1}$$

により定まることを示せ。

♤ **演習問題 8.3** (幾何学 III 問 2.1.8). M を多様体、$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を TM の局所自明化の族とする。このとき、$\{(U_\alpha, \psi_\alpha^{\otimes r} \otimes (\psi_\alpha^*)^{\otimes s})\}$ は $T^{r,s}M$ の局所自明化の族であって、変換関数は $\rho_{\beta\alpha}^{\otimes r} \otimes ({}^t\rho_{\beta\alpha}^{-1})^{\otimes s}$ で与えられることを示せ。

♤ **演習問題 8.4** (幾何学 III 問 2.2.5). M を多様体とし、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。ω, μ, ν を U 上の対称テンソル場とするとき

$$\omega \odot \mu = \mu \odot \omega, \quad (\omega \odot \mu) \odot \nu = \omega \odot (\mu \odot \nu) \tag{8.4.2}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 8.5** (幾何学 III 問 2.2.6). M を多様体とし、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。

(1) U 上の $(0, k)$-テンソル場 ω に対し

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\,\omega) = \mathrm{Sym}\,\omega \tag{8.4.3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) U 上の対称テンソル場 μ に対し

$$\mathrm{Sym}\,\mu = \mu \tag{8.4.4}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 8.6** (幾何学 III 問 2.2.10). M を多様体とし、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とする。$\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(U)$ に対し

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)} \tag{8.4.5}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 8.7** (幾何学 III 問 2.2.11). M を n 次元多様体とする。次を示せ:

(1) $\mathrm{rank} \bigwedge^n T^*M = 1$ である。

(2) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の atlas とし、$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha n}$ とするとき、$dx_{\alpha 1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha n}$ は U_α 上の $\bigwedge^n T^*M$ の自明化であって、U_α から U_β への変換関数は $\det \rho_{\beta\alpha}^{-1}$ で表される。

♤ **演習問題 8.8** (幾何学 III 問 3.3.3). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とし、$\omega \in \Gamma_U(S^r(T^*M))$, $\mu \in \Gamma_U(S^s(T^*M))$ とする。このとき

$$\iota_v(\omega \odot \mu) = \frac{1}{r+s}(r(\iota_v\omega) \odot \mu + s\omega \odot (\iota_v\mu)) \quad (v \in TM) \tag{8.4.6}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 8.9** (幾何学 III 問 3.4.1). M を多様体とし、$f, g\colon M \to M$ を diffeo とする。

$$(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega) \quad (\omega \in T^{r,s}M) \tag{8.4.7}$$

が成り立つことを示せ。

♤ **演習問題 8.10** (幾何学 III 問 3.4.8). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。

(1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し $\exp A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ が成り立つことを示せ。

(2) $t, s \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対し $F(t,s) := \exp(-sB)\exp(-tA)\exp(sB)\exp(tA)$ とおくとき

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} F(t,s), \quad \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} F(t,s) \tag{8.4.8}$$

を直接求め、いずれも Lie 括弧積 $[B, A]$ に等しいことを示せ。

♤ **演習問題 8.11** (幾何学 III 問 3.4.10). M を多様体、$\omega \in \Omega^r(M)$ とする。$X_0, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$d\omega(X_0, \dots, X_r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k L_{X_k} \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_r) \tag{8.4.9}$$

が成り立つことを示せ。

第 9 章　向き

多様体の向きについて定義する。多様体の向きは、次章で多様体上での積分を定義するにあたり不可欠な概念である。向きに関する用語の定義は微妙で捉えがたいところがあって難しい。

9.1　ベクトル空間の向き

この章の後半では多様体の向きを接空間の向きに基づいて決める。そこで、まずベクトル空間の向きを定義する。

定義 9.1.1 (ベクトル空間の向き). V を 1 次元以上のベクトル空間とする。V の順序基底全体の集合上の同値関係 $\sim$ を

$$B \sim B' \quad :\Leftrightarrow \quad B \text{ から } B' \text{ への基底の変換行列の行列式が正} \tag{9.1.1}$$

と定める。この同値関係に関する同値類を V のベクトル空間としての**向き (orientation)** という。

定義から明らかに V の向きはちょうど 2 通り存在する。そこで O, O' を V の向きとして次のように用語を定める:

- $O = O'$ のとき、O は O' と**同じ向き**であるという。
- $O \neq O'$ のとき、O は O' と**異なる向き** あるいは**逆の向き** であるという。

V の順序基底 B, B' に対しても同様に用語を定める。

ベクトル空間の向きは 0 でない最高次の線型形式により定めることができる。

命題 9.1.2 (最高次の線型形式により定まる向き). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$V$ を r 次元ベクトル空間、$\omega \in \bigwedge^r V^*$, $\omega \neq 0$ とする。このとき、V の順序基底 B, B' に関し $B \sim B'$ であることと $\omega(B)/\omega(B') > 0$ であることとは同値である。したがってとくに $\omega \neq 0$ が与えられたとき $\omega(B) > 0$ となる順序基底 B をひとつ選ぶことで V の向きが well-defined に決まる。

証明　[TODO] □

定義 9.1.3 (向きづけられたベクトル空間). V を 1 次元以上のベクトル空間とする。V が**向きづけられた (oriented)** ベクトル空間であるとは、V の向きがひとつ与えられていることをいう。この向きを V の**正の向き (positive orientation)** といい、正の向きと逆の向きを**負の向き (negative orientation)** という。

$\mathbb{R}^r$ には標準的な向きが存在する。

定義 9.1.4 (標準的な向き). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。$\mathbb{R}^r$ の標準基底により定まる向きを $\mathbb{R}^r$ の**標準的な向き (standard orientation)** という。

定義 9.1.5 (向きを保つ線型写像). $(V, O), (V', O')$ を向きづけられた 1 次元以上のベクトル空間とする。線型写像 $f\colon V \to V'$ がベクトル空間の**向きを保つ (orientation-preserving)** とは、順序基底 $B \in O$, $B' \in O'$ をひとつずつ選んだとき f の B, B' に関する行列表示の行列式が正であることをいう。これは B, B' の選び方によらず well-defined である。

同様に、行列式が負になるとき**向きを反転する (orientation-reversing)** という。

9.2 ベクトル束の向き

ベクトル束の向きを定義する。ベクトル束の向きとは、各ファイバーへの"連続的"な向きの割り当てに他ならない。

定義 9.2.1 (ベクトル束の向き [15]). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$E \to M$ をランク r のベクトル束とする。E のベクトル束としての**向き (orientation)** とは、各 $x \in M$ に対し E_x の (ベクトル空間としての) 向き O_x を割り当てる対応 O であって次をみたすものをいう:

(1) 各 $x \in M$ に対し、x のある開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の E のある局所自明化 $\varphi\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^r$ が存在して、各 $x' \in U$ に対し線型写像 $\varphi(x')\colon E_{x'} \to \{x'\} \times \mathbb{R}^r$ は向きを保つ。ただし $E_{x'}$ は $O_{x'}$ で向きづけられているとし、右辺は $\mathbb{R}^r$ の標準的な向きを考える。

E の向き O, O' がすべての $x \in M$ に対し E_x の同じ向きを割り当てるとき、O, O' は**同じ向き**であるといい、同じ向きでないとき**異なる向き**であるという。

各ファイバーの向きを保つ局所自明化を整合的であるという。

定義 9.2.2 (整合的な局所自明化). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$E \to M$ をランク r のベクトル束、O を E の向きとする。局所自明化 (U, φ) が向き O と**整合的** であるとは、すべての $x \in U$ に対し線型写像 $\varphi(x)\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^r$ が向きを保つことをいう。ただし E_x は O_x で向きづけられているとし、右辺は $\mathbb{R}^r$ の標準的な向きを考える。

ベクトル空間の場合と異なり、一般にベクトル束は向きを持つとは限らない。

定義 9.2.3 (ベクトル束の向きづけ可能性). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$E \to M$ をランク r のベクトル束とする。E がベクトル束として**向きづけ可能 (orientable)** であるとは、E のベクトル束としての向きが少なくともひとつ存在することをいう。E が向きづけ可能でないとき、E は**向きづけ不可能 (nonorientable)** であるという。

定義 9.2.4 (向きづけられたベクトル束). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$E \to M$ をランク r のベクトル束とする。E が**向き付けられた (oriented)** ベクトル束であるとは、E の向きがひとつ与えられていることをいう。

E の向きづけ可能性は様々な方法で特徴付けることができる。

定理 9.2.5 (ベクトル束の向きづけ可能性の特徴付け). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$M$ をパラコンパクトな多様体、$\pi\colon E \to M$ をランク r ベクトル束とする。このとき次は同値である:

15) この定義は [MS74] に依った。

(1) E はベクトル束として向きづけ可能である。

(2) $\bigcup U_\alpha = M$ なる E の局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在し、これにより定まる変換関数 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ について

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \text{に対し} \quad \det \varphi_{\alpha\beta} > 0 \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta) \tag{9.2.1}$$

が成り立つ。

(3) $\bigwedge^r E$ は自明束である [16]。

(4) $\bigwedge^r E^*$ は自明束である。

(5) nonvanishing な $\bigwedge^r E^*$ の大域切断が存在する。

ただし切断 ω が **nonvanishing** であるとは、定義域の各点 x に対し「ω_x は零写像でない」が成り立つことをいう。

証明 (1) ⇒(2) 明らか。

(2) ⇒(1) 各 $x \in M$ に対し、x の属するチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ をひとつ選んで線型写像 $\varphi(x)^{-1} \colon \{x\}\times\mathbb{R}^r \to E_x$ が向きを保つように E_x の向きを定めればよい。これは $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の選び方によらず well-defined である。

(3) ⇒ (2) [TODO] 書き直す

(2) ⇒ (3) [TODO] ここでパラコンパクト性を用いる

(3) ⇔ (4) $\bigwedge^r E$ が自明であることと $\bigwedge^r E^*$ が自明であることとは同値である。[TODO] 本当に？

(4) ⇔ (5) nonvanishing な $\bigwedge^r E^*$ の大域切断は $\bigwedge^r E^*$ の大域フレームに他ならない。したがって、そのような大域切断が存在することは $\bigwedge^r E^*$ が自明束であることと同値である。

[TODO] □

定理 9.2.5 の証明によれば、局所自明化の族を与えることでベクトル束を向きづけできることがわかる。

定義 9.2.6 (局所自明化の族が定める向き). 局所自明化の族 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が定理 9.2.5 の (2) の条件をみたすとき、$\mathcal{U}$ は E に**向きを定める** という。さらにこのとき、定理 9.2.5 の (2) の証明のようにして定まる E の向きを **$\mathcal{U}$ の定める E の向き** という。

[TODO] self-contained に書く

9.3 多様体の向き

多様体の向きは接束のベクトル束としての向きとして定義される。

定義 9.3.1 (多様体の向き). M を多様体とする。TM の向きを M の多様体としての**向き (orientation)** という。M の多様体としての向きに関する用語は TM のベクトル束としての向きに関する用語を援用して定義する。

多様体に向きが定まると、それぞれのチャートが多様体の向きと整合的かどうかという概念が定義できる。

16) 最高次の外冪束 $\bigwedge^r E$ は**行列式直線束 (determinant line bundle)** と呼ばれる。cf. 問題 8.7

定義 9.3.2 (整合的なチャート)**.** M を r 次元多様体、O を TM の向きとする。M のチャート (U,φ) が向き O と **整合的** であるとは、各 $x \in U$ に対し線型写像 $d\varphi_x \colon T_xM \to \{x\} \times \mathbb{R}^r$ が向きを保つことをいう。ただし T_xM は O_x で向きづけられているとし、右辺は $\mathbb{R}^r$ の標準的な向きを考える。

多様体の向きづけ可能性は座標変換の Jacobi 行列を用いて特徴付けることができる。

命題 9.3.3 (多様体の向きづけ可能性の特徴付け)**.** M を多様体とする。次は同値である:

(1) M は多様体として向きづけ可能である。

(2) M のあるアトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在して、これにより定まる変換関数 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ について

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \text{に対し} \quad \det D\varphi_{\alpha\beta} > 0 \quad \text{on } \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{9.3.1}$$

が成り立つ。

証明 M のアトラスと TM の局所自明化の族の対応から明らか。 □

ベクトル束の場合と同様に、上の命題のようなアトラスを与えることで多様体を向きづけできることがわかる。

定義 9.3.4 (アトラスが定める向き)**.** アトラス $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が上の命題の (2) の条件をみたすとき、$\mathcal{U}$ は M に**向きを定める** という。さらにこのとき、上の命題の証明のようにして定まる M の向きを **$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ の定める $\boldsymbol{M}$ の向き** という。

また、体積形式とよばれる微分形式でも多様体を向きづけることができる。

定義 9.3.5 (体積形式)**.** M を向きづけられた多様体とする。M 上の nonvanishing な最高次形式を M の**体積形式 (volume form)** といい、$d\mathrm{vol}$ や vol と書く。

定義 9.3.6 (体積形式が定める向き)**.** M を向きづけ可能な n 次元多様体、ω を M の体積形式とする。このとき、次のようにして M に向きを定めることができる。

各 U_α が連結であるような TM の局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ をひとつ選び、$(E_{\alpha 1}, \ldots, E_{\alpha n})$ を φ_α により定まる TM の局所フレームとする。このとき、連結性より各 U_α 上で $s_\alpha := \omega(E_{\alpha 1}, \ldots, E_{\alpha n})$ の値はつねに正またはつねに負である。そこで

$$(B_{\alpha 1}, \ldots, B_{\alpha n}) := \begin{cases} (E_{\alpha 1}, E_{\alpha 2}, \ldots, E_{\alpha n}) & (s_\alpha > 0) \\ (-E_{\alpha 1}, E_{\alpha 2}, \ldots, E_{\alpha n}) & (s_\alpha < 0) \end{cases} \tag{9.3.2}$$

とおき、各 $x \in U_\alpha$ に対し E_x の順序基底 $(B_{\alpha 1}(x), \ldots, B_{\alpha n}(x))$ により定まる向きを割り当てることで TM に向きを定める。これで M の多様体としての向きが定まった。この向きは局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ の選び方によらず well-defined である。

このように定まる M の向きを **$\boldsymbol{\omega}$ の定める $\boldsymbol{M}$ の向き** という。

微分が全単射な C^∞ 写像は接空間の基底を基底に写すから、向きを保つ C^∞ 写像という概念が定義できる。

定義 9.3.7 (向きを保つはめ込み)**.** $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$M, N$ を向きづけられた r 次元多様体、$f \colon M \to N$ をはめ込みとする。

- f が**向きを保つ (orientation-preserving)** とは、各 $p \in M$ に対し線型写像 $df_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が向きを保つことをいう。
- f が**向きを反転する (orientation-reversing)** とは、各 $p \in M$ に対し線型写像 $df_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が向きを反転することをいう。

開部分多様体など、余次元 0 の部分多様体には自然に向きが定まる。

定義 9.3.8 (余次元 0 の部分多様体に自然に定まる向き)**.** [TODO]

境界付き多様体の境界には自然なやり方で向きが定まる。

定義 9.3.9 (境界としての向き)**.** M を n 次元境界付き多様体とし、M はアトラス $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ により向きづけられているとする。

(1) $\mathbb{R}^n_-$ の標準的な座標を $x = (x^1, \ldots, x^n)$ とおく。このとき、$\partial\mathbb{R}^n_-$ のアトラス $\{(\partial\mathbb{R}^n_-, \ (x^2, \ldots, x^n))\}$ は $\partial\mathbb{R}^n_-$ に向きを定める。この向きを **$\mathbb{R}^n_-$ の境界としての $\partial\mathbb{R}^n_-$ の向き**という。

(2) ∂M のアトラス $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を

$$V_\alpha \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \partial\mathbb{R}^n_-) \tag{9.3.3}$$

$$\psi_\alpha \coloneqq \varphi_\alpha|_{V_\alpha} \tag{9.3.4}$$

で定めると、これは ∂M に向きを定める。これを **M の境界としての ∂M の向き** という。

証明 [TODO] □

9.4 演習問題

♤ **演習問題 9.1** (幾何学 III 問 4.1.6)**.** 次を示せ:

(1) 自明束はベクトル束として向きづけ可能である。

(2) $\pi\colon E \to S^1$ を Möbius 束とするとき E は向きづけ不可能であることを示せ。

♤ **演習問題 9.2** (幾何学 III 問 4.1.7)**.** ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ が向きづけ可能ならば双対束 $\pi^*\colon E^* \to M$ も向きづけ可能であることを示せ。

♤ **演習問題 9.3** (幾何学 III 問 5.2.6)**.** M を多様体とする。M が連結かつ向きづけ可能ならば向きはちょうど 2 通りあることを示せ。

♤ **演習問題 9.4** (幾何学 III 演習問題 2 1.2)**.** M, N を次元の等しい多様体とし、いずれも向きづけられているとする。はめ込み $f\colon M \to N$ が向きを保つことと、任意の $p \in M$ について p の周りの M の向きと整合的なチャート (U, φ) を $f|_U$ が埋め込みであるように選んだとき、$f(p)$ の周りの座標近傍 $(f(U), \varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})$ が N の向きと整合的であることは同値であることを示せ。

♤ **演習問題 9.5** (東大数理 2006B)**.** 3 次元ユークリッド空間内の単位球面を考える。単位球面上の円全体の集合を M とする。ただし、単位球面上の円とは、3 次元ユークリッド空間内の平面と単位球面との共通部分で、空集合でも 1 点でもないものである。以下、n 次元実射影空間を $\mathbb{R}P^n$ であらわす。

(1) M から 2 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^2$ への全射を具体的に一つ構成せよ。全射であることも示せ。

(2) M から 3 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ への単射で、像が $\mathbb{R}P^3$ の開集合となるものを具体的に一つ構成せよ。単射で、像が開集合であることも示せ。

(3) M に (2) の対応で与えられる $\mathbb{R}P^3$ の開集合としての微分可能多様体の構造を考える。M は向き付け可能であるかどうか理由とともに述べよ。

第 10 章　多様体上の積分

多様体上の積分を定義する。

10.1　積分

多様体上での積分として、コンパクト台をもつ最高次形式の積分を定義する。

A.　積分の定義と基本性質

まず Euclid 空間における最高次形式の積分を定義する。これが一般の多様体における積分の定義の基礎となる。

定義 10.1.1 (コンパクト台を持つ最高次形式の積分 (Euclid 空間)). $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標を $x = (x_1, \dots, x_n)$、ω をコンパクト台を持つ $\mathbb{R}^n$ 上の最高次形式とする。このとき ω は

$$\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{10.1.1}$$

の形に一意的に表せる。さて、$\operatorname{supp}\omega \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] =: I$ なる多重有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}^n$ をひとつ選び、ω の $\mathbb{R}^n$ 上の**積分 (integration)** を

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_I f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n \tag{10.1.2}$$

で定義する。ただし、右辺は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度に関する積分である。このとき $\int_{\mathbb{R}^n} \omega$ の値は I の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

[TODO] Lebesgue 積分で定義するならわざわざ多重有界閉区間を持ち出さずとも可測集合 $\operatorname{supp}\omega$ 上の積分で定義すればよいのでは？

証明　[TODO] □

Euclid 空間の最高次形式の積分は向きを保つ/反転する微分同相に関し次の性質を持つ。

命題 10.1.2. $U, V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$、$\omega$ を V 上のコンパクト台をもつ最高次形式とする。このとき、$G\colon U \to V$ を向きを保つ微分同相とすると

$$\int_V \omega = \int_U G^*\omega \tag{10.1.3}$$

が成り立ち、$G\colon U \to V$ を向きを反転する微分同相とすると

$$\int_V \omega = -\int_U G^*\omega \tag{10.1.4}$$

が成り立つ。

証明　[TODO] □

Euclid 空間の最高次形式の積分を用いて多様体上の最高次形式の積分を定義する。

定義 10.1.3 (コンパクト台を持つ最高次形式の積分 (多様体)). M を向きづけられた n 次元多様体、ω をコンパクト台を持つ M 上の最高次形式とする。さて、M の向きと整合的な有限個のチャートの族 $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ であって $\operatorname{supp}\omega = \bigcup_i U_i$ なるものをひとつ選び、さらに $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_i\}_i$ をひとつ選ぶ。ω の M 上の**積分 (integration)** を

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega) \tag{10.1.5}$$

で定義する。ただし、$(\varphi_i^{-1})^*(\rho_i\omega)$ は定義域の外での値を 0 とおくことで $\mathbb{R}^n$ 上まで拡張する。このとき、$\int_M \omega$ の値は $\mathcal{U}$ や $\{\rho_i\}$ の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

証明 [TODO] □

最高次形式の積分は次の性質を持つ。

命題 10.1.4 (積分の基本性質). M, N を向きづけられた n 次元多様体、ω, η を M 上のコンパクト台をもつ最高次形式とする。このとき次が成り立つ:

(1) (線型性) $a, b \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta \tag{10.1.6}$$

が成り立つ。

(2) (向きの反転) M と反対の向きを持つ多様体を $-M$ と書くことにすれば

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega \tag{10.1.7}$$

が成り立つ。

(3) (正値性) ω が常に正の向きの体積形式 [TODO] とは？ならば

$$\int_M \omega > 0 \tag{10.1.8}$$

が成り立つ。

(4) (微分同相不変性; Diffeomorphism Invariance) $F\colon N \to M$ を向きを保つ微分同相とすると

$$\int_M \omega = \int_N F^*\omega \tag{10.1.9}$$

が成り立ち、$F\colon N \to M$ を向きを反転する微分同相とすると

$$\int_M \omega = -\int_N F^*\omega \tag{10.1.10}$$

が成り立つ。

証明 [TODO]

(4) $F\colon N \to M$ を向きを保つ微分同相とする。まず $\operatorname{supp}\omega$ が M の向きと整合的なひとつのチャート (U,φ) に含まれる場合を考えておく。このとき $(F^{-1}(U), \varphi\circ F)$ は N の向きと整合的なチャートである。

∵ 実際、各 $x \in F^{-1}(U)$ に対し $d(\varphi\circ F)_x = d\varphi_{F(x)} \circ dF_x$ は向きを保つ。なぜならば、φ が M の向きと整合的なチャートゆえに $d\varphi_{F(x)}$ は向きを保ち、また F が向きを保つ微分同相ゆえに dF_x も向きを保つからである。 //

また $\operatorname{supp} F^*\omega \subset F^{-1}(U)$ である。

∵ $x \notin F^{-1}(U) \implies F(x) \notin U \implies F(x) \notin \operatorname{supp}\omega \implies \omega_{F(x)} = 0 \implies (F^*\omega)_x = 0$ //

よって

$$\int_{F^{-1}(U)} F^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} ((\varphi\circ F)^{-1})^* F^*\omega \quad (\because \text{[TODO] 1 の分割をどうとった?}) \tag{10.1.11}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*(F^{-1})^* F^*\omega \tag{10.1.12}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*\omega \tag{10.1.13}$$

$$= \int_U \omega \quad (\because \text{[TODO] 1 の分割をどうとった?}) \tag{10.1.14}$$

が成り立つ。

さて、M の向きと整合的な有限個のチャートの族 $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ であって $\operatorname{supp}\omega = \bigcup_i U_i$ なるものをひとつ選び、さらに $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_i\}_i$ をひとつ選ぶ。すると

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i\omega) \quad (\because \text{定義 10.1.3}) \tag{10.1.15}$$

$$= \sum_i \int_{U_i} \rho_i\omega \quad (\because \text{定義 10.1.3}) \tag{10.1.16}$$

$$= \sum_i \int_{F^{-1}(U_i)} F^*(\rho_i\omega) \quad (\because \text{前段落の議論}) \tag{10.1.17}$$

$$= \sum_i \int_{F^{-1}(U_i)} \rho_i\circ F\, F^*\omega \quad (\because \text{引き戻しの定義}) \tag{10.1.18}$$

$$= \int_N F^*\omega \quad (\because \text{定義 10.1.3}) \tag{10.1.19}$$

を得る。ただし最後の式変形では $\{\rho_i \circ F\}_i$ が $\operatorname{supp} F^*\omega$ の開被覆 $\{F^{-1}(U_i)\}_i$ に従属する 1 の分割であることを用いた。

F が向きを反転する場合は、$\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を向きを反転する微分同相として $(F^{-1}(U), \sigma\circ\varphi\circ F)$ が N の向きと整合的なチャートとなるから、命題 10.1.2 より式 (10.1.11) の部分で符号が反転して最終的に $\int_m \omega = -\int_N F^*\omega$ が得られる。 □

命題 10.1.5 (Integration Over Parametrizations). [TODO]

証明 省略 □

例 10.1.6 (積分計算の例)**.** [TODO] cf. [Lee] p.409

B. 線積分

線積分は $\mathbb{R}$ の有界閉区間上の微分形式の積分である。

定義 10.1.7 (線積分)**.** [TODO] 直接の場合と曲線で引き戻した場合

定義 10.1.8 (区分的に C^∞ な曲線)**.** M を多様体、$J = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$、$\gamma \colon J \to M$ を連続写像とする。γ が**区分的に C^∞ な曲線 (piecewise smooth curve)** であるとは、$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ なる $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と C^∞ 曲線 $\gamma_i \colon [t_{i-1}, t_i] \to M$ $(1 \leq i \leq k)$ が存在し

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & (t \in [t_0, t_1]) \\ \gamma_2(t) & (t \in [t_1, t_2]) \\ \cdots & \\ \gamma_k(t) & (t \in [t_{k-1}, t_k]) \end{cases} \tag{10.1.20}$$

が成り立つことをいう。

C. 関数の積分

体積形式を用いれば、多様体上で関数の積分ができるようになる。

定義 10.1.9 (体積形式による積分)**.** [TODO]

定義 10.1.10 (体積)**.** M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとし、$\mu \in \Omega^n(M)$ を体積形式とする。このとき、μ に関する M の**体積 (volume)** を

$$\mathrm{vol}_\mu(M) := \int_M \mu \tag{10.1.21}$$

で定める。

10.2 Poincaré の補題

定義 10.2.1 (閉形式と完全形式)**.** M を多様体、$\omega \in A^p(M)$ とする。

- ω が $d\omega = 0$ をみたすとき、ω は**閉 (closed)** であるという。
- M 上の $(p-1)$-形式 θ が存在して $\omega = d\theta$ と書けるとき、ω は**完全 (exact)** であるという。

外微分作用素の性質により $dd\theta = 0$ だから、完全形式は閉形式である。

補題 10.2.2 (ホモトピー作用素 K). M を多様体とし、単位区間 I を境界をもつ多様体とみなす。写像 j_0, j_1 を

$$j_0 \colon M \to I \times M, \quad x \mapsto (0, x) \tag{10.2.1}$$

$$j_1 \colon M \to I \times M, \quad x \mapsto (1, x) \tag{10.2.2}$$

とおく。各 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し写像 $K \colon A^{p+1}(I \times M) \to A^p(M)$ を次のように定める:

(1) $I \times M$ の局所座標を $(t, x^1, \ldots, x^n)$ とおく [17]。

(2) $\omega \in A^{p+1}(I \times M)$ は、いずれも dt を含まない $(p+1)$-形式 ω_1 と p-形式 ω_2 により

$$\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2 \tag{10.2.3}$$

と一意的に表せる。

(3) $K\omega$ を

$$K\omega := \int_0^1 dt\, \omega_2 \tag{10.2.4}$$

で定める。すなわち、ω_2 を

$$\omega_2 = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(t, x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.5}$$

と表したとき

$$K\omega := \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\int_0^1 a_{i_1 \ldots i_p}(t, x)\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.6}$$

と定める [18]。

このとき

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^* \omega - j_0^* \omega \quad (\omega \in A^{p+1}(I \times M),\ p \geq 0) \tag{10.2.7}$$

が成り立つ [19]。

証明　添字を簡素化して

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_{p+1}} a_{j_1 \ldots j_{p+1}}(t, x)\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}} + \sum_{h_1 < \cdots < h_p} a_{h_1 \ldots h_p}(t, x)\, dt \wedge dx^{h_1} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p} \tag{10.2.8}$$

$$= \sum_J a_J(t, x)\, dx^J + \sum_H a_H(t, x)\, dt \wedge dx^H \tag{10.2.9}$$

と書く (第 1 項、第 2 項をそれぞれ ω_1, $dt \wedge \omega_2$ とおく)。K の $\mathbb{R}$-線型性より

$$K(d\omega) = K\left(\sum_J da_J \wedge dx^J + \sum_H da_H \wedge dt \wedge dx^H \right) \tag{10.2.10}$$

17)　もう少し正確には、I の chart $t \colon U_I \to \mathbb{R}_-$ と M の chart $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) \colon U_M \to \mathbb{R}^n$ を用いた $I \times M$ の chart $t \times \varphi = (\tau, y^1, \ldots, y^n) \colon U_I \times U_M \to \mathbb{R}^{1+n}$ を、同じ記号で $(\tau, y^1, \ldots, y^n) = (t, x^1, \ldots, x^n)$ と書いたものである。

18)　積分 $\int_0^1 a(t, x)\, dt$ は微分形式 $a(t, x)\, dt$ の積分であるが、I の chart $t \colon U_I \to \mathbb{R}$ として普通の包含写像をとれば Euclid 空間での普通の積分とみなすことができる。

19)　補題のような K をチェイン写像 $j_0^*, j_1^* \colon A^*(M) \to A^*(M)$ の間の**チェインホモトピー (chain homotopy)** という。

$$= K\left(\sum_J \frac{\partial a_J}{\partial t}\,dt\wedge dx^J + \sum_J\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x^i}\,dx^i\wedge dx^J - \sum_H\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,dt\wedge dx^i\wedge dx^H\right) \tag{10.2.11}$$

$$= \sum_J a_J(1,x)\,dx^J - \sum_J a_J(0,x)\,dx^J - \sum_H\sum_{i=1}^n\left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,dt\right)dx^i\wedge dx^H \tag{10.2.12}$$

および

$$d(K\omega) = d\left(\sum_H\left(\int_0^1 a_H(t,x)\,dt\right)dx^H\right) \tag{10.2.13}$$

$$= \sum_H d\left(\int_0^1 a_H(t,x)\,dt\right)\wedge dx^H \tag{10.2.14}$$

$$= \sum_H\sum_{i=1}^n\left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,dt\right)dx^i\wedge dx^H \tag{10.2.15}$$

が成り立つ。したがって

$$K(d\omega)+d(K\omega) = \sum_J a_J(1,x)\,dx^J - \sum_J a_J(0,x)\,dx^J \tag{10.2.16}$$

$$= j_1^*\omega_1 - j_0^*\omega_1 \tag{10.2.17}$$

$$= j_1^*\omega - j_0^*\omega \tag{10.2.18}$$

である。

∵ $j_0^*\omega$ について

$$j_0^*\omega = j_0^*\omega_1 + \underbrace{d(j_0^*t)}_{j_0^*t=t\circ j_0=\text{const. より } 0}\wedge j_0^*\omega_2 \tag{10.2.19}$$

$$= j_0^*\omega_1 \tag{10.2.20}$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_{p+1}} a_{j_1\ldots j_{p+1}}(0,x)\,d(j_0^*x^1)\wedge\cdots\wedge d(j_0^*x^n) \tag{10.2.21}$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_{p+1}} a_{j_1\ldots j_{p+1}}(0,x)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \tag{10.2.22}$$

ただし最後の変形では $I\times M$ 上の関数としての x^j を M 上の関数としての x^j に引き戻した。$j_1^*\omega$ も同様。 //

□

定理 10.2.3 (Poincaré の補題). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を可縮とする。U 上の閉形式は完全形式である。すなわち、$\omega\in A^{p+1}(U)$ が $d\omega=0$ をみたすならば、或る $\theta\in A^p(U)$ が存在して $\omega=d\theta$ が成り立つ。

証明 可縮性より、(連続) ホモトピー $\varphi\colon I\times U\to U$ と 1 点 $x_0\in U$ が存在して

$$\varphi(1,x)=x,\quad \varphi(0,x)=x_0 \tag{10.2.23}$$

が成り立つ。図式で書けば

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, shift left, "j_1"] \arrow[r, shift right, "j_0"'] \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{id}_U"] \arrow[rr, bend right=60, "c_{x_0}"'] & I \times U \arrow[r, "\varphi"] & U
\end{tikzcd} \tag{10.2.24}
$$

である。このとき、φ は C^∞ であるとしてよい[20]。よって

$$j_1^* \varphi^* \omega = (\varphi \circ j_1)^* \omega = (\mathrm{id}_U)^* \omega = \omega \tag{10.2.25}$$

$$j_0^* \varphi^* \omega = (\varphi \circ j_0)^* \omega = (c_{x_0})^* \omega = 0 \tag{10.2.26}$$

である。

$\because$ $x \in U$ と $v_1, \dots, v_{p+1} \in T_x U$ に対し

$$((\mathrm{id}_U)^* \omega)_x (v_1, \dots, v_{p+1}) = \omega_x ((\mathrm{id}_U)_{*x}(v_1), \dots) \tag{10.2.27}$$

$$= \omega_x (\mathrm{id}_{T_x U}(v_1), \dots) \tag{10.2.28}$$

$$= \omega_x (v_1, \dots) \tag{10.2.29}$$

$$((c_{x_0})^* \omega)_x (v_1, \dots, v_{p+1}) = \omega_x ((c_{x_0})_{*x}(v_1), \dots) \tag{10.2.30}$$

$$= \omega_x (0, \dots) \tag{10.2.31}$$

$$= 0 \tag{10.2.32}$$

より成り立つ。 //

補題より

$$Kd(\varphi^* \omega) + d(K \varphi^* \omega) = \omega \tag{10.2.33}$$

であるが、いま $d\omega = 0$ の仮定より $d(\varphi^* \omega) = \varphi^* d\omega = 0$ だから、K の $\mathbb{R}$-線型性より $Kd(\varphi^* \omega) = 0$ である。したがって

$$\underbrace{d(K \varphi^* \omega)}_{\theta} = \omega \tag{10.2.34}$$

が成り立つ。 □

系 10.2.4 (Poincaré の補題 (星型領域の場合)). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を星型領域とする。$\omega \in A^{p+1}(U)$ が閉形式ならば Poincaré の補題より $d\theta = \omega$ なる $\theta \in A^p(U)$ が上の証明のように構成できるが、θ は

$$\theta = \frac{1}{p!} \sum_{i_0, \dots, i_p} \left(\int_0^1 a_{i_0 \dots i_p}(tx) t^p \, dt \right) x^{i_0} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.35}$$

と具体的に書ける。ただし、ω の局所座標表示を

$$\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0, \dots, i_p} a_{i_0 \dots i_p}(x) \, dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.36}$$

20) U 内の C^∞ なホモトピーがとれることの証明には Whitney の近似定理を用いる。cf. [Lee p.142]

とした。

証明 $\theta = K(\varphi^*\omega)$ なので右辺を計算すればよい。まず U は星型だから、定理の証明の $\varphi\colon I \times U \to U$ として

$$\varphi(t, x) = tx \tag{10.2.37}$$

がとれる。これは明らかに C^∞ である。引き戻しの局所座標表示の公式から

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0,\dots,i_p} a_{i_0\dots i_p}(tx) \bigwedge_{k=0}^{p} d(\varphi^* x^{i_k}) \tag{10.2.38}$$

である。ここで、外積の各項について

$$d(\varphi^* x^i) = d(x^i \circ \varphi) = d(tx^i) = t\,dx^i + x^i dt \tag{10.2.39}$$

だから、$dt \wedge dt = 0$ に注意すれば

$$\bigwedge_{k=0}^{p} d(\varphi^* dx^{i_k}) = t\,dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge t\,dx^{i_p} \tag{10.2.40}$$

$$+ x^{i_0} dt \wedge \cdots \wedge t\,dx^{i_p} \tag{10.2.41}$$

$$+ \cdots \tag{10.2.42}$$

$$+ t\,dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge x^{i_p} dt \tag{10.2.43}$$

と展開できる。そこで

$$((10.2.38)) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0,\dots,i_p} a_{i_0\dots i_p}(tx) t^{p+1}\, dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.44}$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{i_0,\dots,i_p} a_{i_0\dots i_p}(tx) t^p x^{i_k}\, dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge \overset{\smile}{\underset{}{dt}}{}^{k} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.45}$$

dt を左に移動し、さらに $a_{i_0\dots i_p}$ の交代性を用いて

$$= (\text{第 } 1 \text{ 項}) \tag{10.2.46}$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{i_0,\dots,i_p} a_{i_k i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_p}(tx) t^p x^{i_k}\, dt \wedge dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{10.2.47}$$

内側の総和について添字を取り替えて

$$= (\text{第 } 1 \text{ 項}) \tag{10.2.48}$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p} \sum_{j_0,\dots,j_p} a_{j_0\dots j_p}(tx) t^p x^{j_0}\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{10.2.49}$$

$$= (\text{第 } 1 \text{ 項}) \tag{10.2.50}$$

$$+ \frac{1}{p!} \sum_{j_0,\dots,j_p} a_{j_0\dots j_p}(tx) t^p x^{j_0}\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{10.2.51}$$

となる。したがって K の定義より

$$\theta = K(\varphi^*\omega) = \frac{1}{p!} \sum_{j_0,\dots,j_p} \left(\int_0^1 a_{j_0\dots j_p}(tx) t^p\, dt \right) x^{j_0}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \tag{10.2.52}$$

を得る。 □

10.3 Stokes の定理

定理 10.3.1. M をコンパクトかつ向きづけられた n 次元多様体、$\iota\colon \partial M \to M$ を包含写像とし、∂M には M の境界としての向きを入れる。このとき、任意の $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ に対し

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega = \int_M d\omega \tag{10.3.1}$$

が成り立つ。

注意 10.3.2. Stokes の定理は $\partial M = \varnothing$ の場合も成り立つ。

証明 [TODO] □

命題 10.3.3 (閉形式の積分の C^∞ ホモトピー不変性). M を多様体、η を M 上の k 次閉形式、K をコンパクトかつ向きづけられた k 次元多様体、$\varphi\colon K \to M$, $\psi\colon K \to M$ を互いに C^∞ ホモトピックな C^∞ 写像とする。このとき $\displaystyle\int_K \varphi^* \eta = \int_K \psi^* \eta$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

10.4 演習問題

♤ **演習問題 10.1** ([Lee] 16-2). $T^2 := S^1 \times S^1 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1\}$ を考える。T^2 には S^1 の標準的な向きから定まる product orientation が入っているとする。次の ω に対し $\displaystyle\int_{T^2} \omega$ を計算せよ。

$$\omega = xyz dw \wedge dy \tag{10.4.1}$$

♤ **演習問題 10.2** (幾何学 III 演習問題 2 2.3). M を向きづけられた n 次元多様体、$\varphi\colon I \to I$ を微分同相写像とする。[TODO]

♤ **演習問題 10.3.** (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とする。また、$\mathbb{R}^3$ には標準的な向きを入れる。さて、$D \subset \mathbb{R}^3$ を

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 100\} \tag{10.4.2}$$

と定める。D には $\mathbb{R}^3$ の向きから自然に定まる向きを入れる。また、∂D には D の境界としての向きを入れる。$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ 上の 2 形式 ω を

$$\omega := \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \tag{10.4.3}$$

により定めるとき、$\displaystyle\int_{\partial D} \omega$ を求めよ。

第 11 章　de Rham コホモロジーと Čech コホモロジー

11.1　de Rham コホモロジー

de Rham コホモロジーを定義する。

定義 11.1.1 (de Rham コホモロジー群). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$M$ を多様体とし、M 上の p-形式を考える。

- 閉じた p-形式全体のなす $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\operatorname{Ker} d^p$ を $Z^p(M)$ と書く。
- 完全な p-形式全体のなす $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\operatorname{Im} d^{p-1}$ を $B^p(M)$ と書く。
- 商ベクトル空間 $H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M)$ を M の p 次の **de Rham コホモロジー群 (de Rham cohomology group)** という。

注意 11.1.2. de Rham コホモロジーの言葉で Poincaré の補題を言い換えると

$U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ が可縮ならば $H^p(U) = 0$ $(p \geq 1)$ である。

となる。

命題 11.1.3 (0 次 de Rham コホモロジーと連結成分). M を k 個の連結成分をもつ n 次元多様体とする。このとき $H^0_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}^k$ が成り立つ。

証明　$\omega \in Z^0_{\mathrm{dR}}(M) = H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ とする。ω は $d\omega = 0$ なる $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ の元である。局所座標で表せば

$$0 = d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x^i} dx^i \tag{11.1.1}$$

より $\dfrac{\partial \omega}{\partial x^i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ が従う。したがって ω は局所定数である。よって ω は M の各連結成分上で定数であり、$H^0_{\mathrm{dR}}(M)$ から $\mathbb{R}^k$ への全単射、より強く $\mathbb{R}$-線型同型を得る。 □

定義 11.1.4 (de Rham コホモロジー環). 上の定義の状況を引き継ぐ。

- 直和ベクトル空間

$$A(M) := \bigoplus_{p \geq 0} A^p(M) \tag{11.1.2}$$

には積を外積 $\wedge$、単位元を定値写像 $1 \in A^0(M)$ として環の構造が入り、$\mathbb{R}$-代数となる。

- 直和ベクトル空間

$$Z(M) := \bigoplus_{p \geq 0} Z^p(M) \tag{11.1.3}$$

は外微分と外積の関係 $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta \pm \omega \wedge d\eta$ から明らかに $A(M)$ の部分環となる。

- 直和ベクトル空間

$$B(M) := \bigoplus_{p \geq 0} B^p(M) \tag{11.1.4}$$

は $Z(M)$ の両側イデアルとなる。実際、同じ公式から

$$\omega = d\theta \in B(M),\ \eta \in Z(M) \quad \Longrightarrow \quad \omega \wedge \eta = d\theta \wedge \eta = d(\theta \wedge \eta) \mp \theta \wedge \cancelto{0}{d\eta} \tag{11.1.5}$$

が成り立つ (左からの積も同様)。

- 以上により得られる $\mathbb{R}$-多元環

$$H(M) := Z(M)/B(M) \tag{11.1.6}$$

を **de Rham コホモロジー環 (de Rham cohomology ring)** という。

- $H(M)$ に誘導される積を

$$\alpha \cup \beta := [\omega \wedge \eta] \quad (\alpha = [\omega],\ \beta = [\eta] \in H(M)) \tag{11.1.7}$$

と書いて、α, β の**カップ積 (cup product)** という。

A. コンパクト台の de Rham コホモロジー

コンパクト台の de Rham コホモロジーを定義する。

定義 11.1.5 (コンパクト台の de Rham コホモロジー). M を多様体とする。各 $p \geq 0$ に対し

$$\Omega_c^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \operatorname{supp} \omega \text{ はコンパクト}\} \tag{11.1.8}$$

とおくと、$(\Omega_c^p(M), d)$ はチェイン複体となる。このチェイン複体に関するホモロジー群を $H_{\mathrm{dR},c}^p(M)$ と書き、M の**コンパクト台の de Rham コホモロジー (de Rham cohomology with compact support)** という。

命題 11.1.6. M は連結かつ境界をもたない n 次元多様体で向きづけられているものとする。このとき自然な $\mathbb{R}$-線型写像

$$\int_M : H_{\mathrm{dR},c}^n(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega \tag{11.1.9}$$

が定まり、さらにこれは同型である。

証明 well-defined 性は Stokes の定理から従う。[TODO] 全単射性は 2 つの補題を用いる □

命題 11.1.7 (0 次 de Rham コホモロジー (コンパクト台 ver.)). M を連結かつ境界を持たない n 次元多様体で向きづけられているものとする。このとき次が成り立つ:

(1) M がコンパクトならば $H_c^0(M) \cong \mathbb{R}$

(2) M がコンパクトでないならば $H_c^0(M) = 0$

証明 (1) は通常の de Rham コホモロジーの 0 次の場合である。

(2) を示す。$\omega \in \Omega_c^0(M),\ d\omega = 0$ とする。ω は局所定数だから、M の連結性より ω は M 上定数である。一方 $\operatorname{supp}\omega$ はコンパクトだから ω の値が 0 である点が存在しなければならない。したがって $\omega = 0$ である。

□

B. 基本コホモロジー類

定義 11.1.8 (基本コホモロジー類). M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとし、体積形式 $\mu \in \Omega^n(M)$ をひとつえらんで

$$[M] := \frac{1}{\mathrm{vol}_\mu(M)}[\mu] \in H^n(M) \tag{11.1.10}$$

と定め、これを M の**基本コホモロジー類** という。

補題 11.1.9. M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとする。このとき、$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^{n-p}(M)\times H^p(M)\to\mathbb{R}$ を $\langle[\omega],[\alpha]\rangle := \int_M \omega\wedge\alpha$ で定めると $\langle[M],1\rangle = 1$ が成り立つ。

証明 基本コホモロジー類の定義より明らか。 □

11.2 Čech コホモロジー

Čech コホモロジーを定義する。本節で述べる de Rham の定理は、Čech コホモロジーが de Rham コホモロジーと同型であることを主張する驚くべき定理である。de Rham コホモロジーは大域的なデータ (= 微分形式) により定義されるため具体的な計算には不便であるが、Čech コホモロジーは局所的なデータにより定義されるため計算しやすいという利点がある。この意味で、de Rham の定理は de Rham コホモロジーの具体的計算のために重要な役割を果たす。

定義 11.2.1 (Čech コホモロジー). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$X$ を位相空間とし、X は局所有限で可縮な開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を持つとする [21)] 。

- $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p} \neq \varnothing$ のとき、順序組 $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$ を Čech の ***p*-次元単体 (*p*-simplex)** と呼ぶ。
- 順序組 $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$ を実数 $c_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ に対応させる写像 c であって交代性

$$c_{\alpha_0\ldots\alpha_i\ldots\alpha_j\ldots\alpha_p} = -c_{\alpha_0\ldots\alpha_j\ldots\alpha_i\ldots\alpha_p} \tag{11.2.1}$$

をみたすものを Čech の ***p*-次元双対鎖 (*p*-cochain)** と呼ぶ。

- 各 $p \geq 0$ に対し、p-cochain の全体の集合は普通の和とスカラー倍を演算、零写像を零ベクトルとして $\mathbb{R}$-ベクトル空間となる。これを

$$C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \tag{11.2.2}$$

と書く。

- 写像 $\delta = \delta^p : C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ を

$$(\delta c)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j c_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_j}\ldots\alpha_{p+1}} \tag{11.2.3}$$

と定め、これを**双対境界作用素 (coboundary operator)** という。これは明らかに $\mathbb{R}$-線型写像であり、また具体的計算により $\delta\circ\delta = 0$ をみたすこともわかる。

- 商ベクトル空間

$$H^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) := \begin{cases} \operatorname{Ker}\delta^p/\operatorname{Im}\delta^{p-1} & (p\geq 1) \\ \operatorname{Ker}\delta^p & (p=0) \end{cases} \tag{11.2.4}$$

を被覆 $\mathfrak{U}$ に関する **Čech コホモロジー群 (Čech cohomology group)** という。

定義 11.2.2. $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。上の定義で $c_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ を $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$ 上の q-形式 $\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ に取り替えたものを考え、$C^q(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, $H^q(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ のかわりに $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)$, $H^q(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)$ と書く (ここでは $\mathscr{A}^q$ 自体には特に意味はない[22])。$H^q(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)$ を被覆 $\mathfrak{U}$ に関する**層 $\mathscr{A}^q$ を係数にもつ Čech コホモロジー群 (Čech cohomology groups with sheaf coefficients $\mathscr{A}^q$)** という。

補題 11.2.3. $p\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、M を多様体とする。M は局所有限な開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を持つとし、$\{\rho_\alpha\}$ をそれに対応する 1 の分割とする。写像 $L\colon C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)\to C^{p-1}(M,\mathscr{A}^q)$ を

$$(L\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} := \sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} \quad (\omega=(\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p})\in C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)) \tag{11.2.5}$$

と定める。ただし各 $\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$ は定義域外での値を 0 と定めて $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$ 上の微分形式と考える。このとき

$$\delta(L\omega)+L(\delta\omega)=\omega \quad (\omega=(\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p})\in C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q)) \tag{11.2.6}$$

が成り立つ。

注意 11.2.4. この議論は $\mathscr{A}^q$ を $\mathbb{R}$ に取り替えた場合に対しては適用できない。それは $\rho_\alpha c_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$ がもはや定数ではないからである。

証明 省略。定義に従って計算すればよい。 □

次の補題により、層係数 Čech コホモロジーは微分形式の空間 $A(M)$ と関連付けられる。

補題 11.2.5. M を多様体とし、M は局所有限な開被覆 $\mathfrak{U}$ を持つとする。このとき各 $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$H^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q) = \begin{cases} 0 & (p\geq 1) \\ A^q(M) & (p=0) \end{cases} \tag{11.2.7}$$

が成り立つ。

21) 開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が**可縮 (contractible)** であるとは、$\mathfrak{U}$ の任意の有限個の元 $U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_p}$ の交わりが空または可縮であることをいう。可縮な開被覆を **good cover** ともいう。パラコンパクトな多様体は可縮な開被覆を持つことが知られているらしい。[TODO] 局所有限「かつ」可縮にとれるか？

22) $\mathscr{A}^q$ は X 上のアーベル群の層である。

証明 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

$p \geq 1$ のとき　$\omega \in \operatorname{Ker}\delta^p$ とする。すると $\delta\omega = 0$ だから上の補題より $\delta(L\omega) = \omega$ となる。よって $\omega \in \operatorname{Im}\delta^{p-1}$ である。したがって $\operatorname{Ker}\delta^p = \operatorname{Im}\delta^{p-1}$、よって $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^q) = 0$ である。

$p = 0$ のとき　$\omega \in H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^q)$ $(= \operatorname{Ker}\delta_0)$ とする。すると $\delta\omega = 0$ である。すなわち任意の $\alpha_0, \alpha_1 \in A$, $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \neq \varnothing$ に対し

$$0 = (\delta\omega)_{\alpha_0\alpha_1} = \omega_{\alpha_1} - \omega_{\alpha_0} \quad \text{i.e.} \quad \omega_{\alpha_0} = \omega_{\alpha_1} \quad \text{on} \quad U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \tag{11.2.8}$$

が成り立つ。したがって、ω_α $(\alpha \in A)$ は互いに貼りあって M 上の q-形式を定める。この対応は $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型 $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^q) \cong A^q(M)$ を与える。 □

定理 11.2.6 (de Rham の定理). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$M$ を多様体とし、M は局所有限で可縮な開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をもつとする。このとき、Čech コホモロジー群 $H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ と de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ の間に自然な[23] 同型対応が存在する。

A. Weil の証明のスケッチ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^1) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
C^{p}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{p}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^1) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^1) & \xrightarrow{d} & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & & & \delta\uparrow \\
C^{0}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{0}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{0}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^1) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & C^{0}(\mathfrak{U},\mathscr{A}^p)
\end{array} \tag{11.2.9}$$

(i は実数を定値写像とみなす写像)

$p \geq 0$ とする。同型写像 $H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \to H^p(M)$ を構成する。そこで

$$[c] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}), \quad c \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \tag{11.2.10}$$

とする。c から始めて

$$\begin{array}{ccc}
\cdot & \xrightarrow{i \text{ or } d} & \cdot \\
 & & \Big\downarrow \text{補題 11.2.5} \\
 & & \cdot
\end{array} \tag{11.2.11}$$

の向きに順繰りに元を選んでいくと、最終的に $\omega^{(0,p)} \in C^0(M, \mathscr{A}^p)$ が得られる。$\omega^{(0,p)}$ は $Z^p(M)$ の元と同一視できる。このようにして、$[c] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ を $[\omega^{(0,p)}] \in H^p(M)$ に対応させる。この写像は well-defined で、準同型になっている。補題 11.2.5 を使うところで $\mathfrak{U}$ の局所有限性を用いた。逆写像の構成は以下のように行う。まず

$$[\omega] \in H^p(M), \quad \omega \in Z^p(M) \tag{11.2.12}$$

23) 自然とは？

とする。ω は $C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^p)$ の元と同一視できる。ω から始めて

$$\begin{tikzcd} \cdot & \\ \cdot \arrow[u, "\delta"] & \cdot \arrow[l, "\text{Poincaré}"'] \end{tikzcd} \tag{11.2.13}$$

の向きに順繰りに元を選んでいくと、最終的に $c \in C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ が得られる。このようにして、$[\omega] \in H^p(M)$ を $[c] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ に対応させる。Poincaré の補題を使うところで $\mathfrak{U}$ の可縮性を用いた。 $\square$

上で de Rham コホモロジーと Čech コホモロジーの間の同型対応をみたが、実は de Rham コホモロジーと *smooth* 特異コホモロジーの間にも同型が成り立つ。

注意 11.2.7 (de Rham コホモロジーと特異コホモロジー)**.** M をパラコンパクトな多様体とする。p 次元 C^∞ 特異単体 $\sigma\colon \Delta^p \to M$ と $\omega \in A^p(M)$ に対し

$$\int_\sigma \omega \coloneqq \int_{\Delta^p} \sigma^* \omega \tag{11.2.14}$$

と定義する。これにより $\mathbb{R}$-双線型写像

$$Z^p_{\mathrm{dR}}(M) \times Z_{\mathrm{sing},p}(M) \to \mathbb{R} \tag{11.2.15}$$

が定まる (定義域を単体からチェインへ $\mathbb{R}$-線型に拡張した後、サイクルに制限した)。すなわち

$$Z^p_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Z_{\mathrm{sing},p}(M), \mathbb{R}) \tag{11.2.16}$$

が定まる。このとき Stokes の定理を用いて

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\mathrm{sing},p}(M), \mathbb{R}) = H^p_{\mathrm{sing}}(M) \tag{11.2.17}$$

が誘導され、これは $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型を与える (cf. [Lee p.480])。

11.3 演習問題

♤ **演習問題 11.1** (幾何学 III 問 2.3.6). M, N を多様体、$f\colon M \to N$ を C^∞ 写像とし、g を N の計量とする。

(1) f^*g が M の計量ならば $\dim M \leq \dim N$ であることを示せ。

(2) 逆は成り立たないことを示せ。

(3) f が diffeo ならば、f^*g は M の計量であって、$\operatorname{sgn} f^*g$ が定まり $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ となることを示せ。

第 12 章　Lie 群

この章では Lie 群とその Lie 代数について述べる。物理学では Lie 群は多様体へ作用する変換の集合としてよく現れる。

12.1　Lie 群の基本概念

定義 12.1.1 (Lie 群)**.** 多様体 G が次をみたすとき、G を **Lie 群 (lie group)** という。

(1)　G は群である。
(2)　積 $\mu\colon G\times G\to G$ と逆元 $i\colon G\to G$ は C^∞ である。

例 12.1.2 (Lie 群の例)**.** [TODO]

定義 12.1.3 (Lie 群準同型)**.** G,H を Lie 群とする。C^∞ 写像 $f\colon G\to H$ が群準同型でもあるとき、f を **Lie 群準同型 (Lie group homomorphism)** という。

例 12.1.4 (Lie 群準同型の例)**.** [TODO]

12.2　Lie 群の作用

A.　Lie 群の作用

位相空間への位相群の連続作用が考えられるのと同様に、多様体への Lie 群の C^∞ 作用が考えられる。

定義 12.2.1 (C^∞ 作用)**.** M を多様体、G を Lie 群とする。G の M への左からの群作用が **C^∞ 作用 (smooth action)** であるとは、写像

$$G\times M\to M,\quad (g,x)\mapsto gx \tag{12.2.1}$$

が C^∞ であることをいう [24)]。右作用についても同様に定義される。

12.3　Lie 群の接束

Lie 群の接束について考える。とくに Lie 群の単位元における接空間は重要である。

A.　左不変性

ベクトル場の左不変性を定義する。

24)　C^∞ 作用の定義を表現 $G\to\mathrm{Aut}(M)$ が C^∞ であることとする流儀もあるが、その場合 $\mathrm{Aut}(M)$ の多様体構造を考えなければならず、無限次元の場合に面倒である。

定義 12.3.1 (左不変ベクトル場)**.** G を Lie 群とする。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が**左不変 (left-invariant)** であるとは、すべての $g \in G$ に対し図式

$$
\begin{tikzcd}
TG \arrow[r, "d(L_g)"] & TG \\
G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "L_g"'] & G \arrow[u, "X"']
\end{tikzcd}
\tag{12.3.1}
$$

が可換となることをいう。

共変テンソル場にも左不変性を定義することができる。

定義 12.3.2 (左不変共変テンソル場)**.** G を Lie 群とする。G 上の共変テンソル場 A が**左不変 (left-invariant)** であるとは、すべての $g \in G$ に対し

$$L_g^* A = A \tag{12.3.2}$$

が成り立つことをいう。

補題 12.3.3. G を Lie 群とする。$X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ を左不変ベクトル場とすると、次が成り立つ:

(1) 各 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $aX + bY$ は左不変ベクトル場である。
(2) $[X, Y]$ は左不変ベクトル場である。

証明 幾何学 I で扱ったので省略。 □

命題 12.3.4 (TG は Lie 群)**.** G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ $\mu\colon G \times G \to G,\ \iota\colon G \to G$ とする。TG は $d\mu\colon TG \times TG \to TG,\ d\iota\colon TG \to TG$ によって Lie 群となる。ただし、$d\mu$ の定義域について $T(G \times G) \cong TG \times TG$ の同一視をしている。

証明 省略 □

注意 12.3.5. 上の命題の状況で、$G, \mathfrak{g}$ はいずれも TG の部分群 [TODO] Lie 部分群？と同一視できることに注意する。実際、G は zero section $g \mapsto (g, 0)$ により TG に埋め込まれ、$\mathfrak{g}$ は $A \mapsto (e, A_e)$ により TG に埋め込まれる。

命題 12.3.6 (TG 上の演算)**.** G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ μ, ι とする。このとき、各 $p, q \in G$ と $u \in T_pG,\ v \in T_qG$ に対し

$$(d\mu)_{(p,q)}(u, v) = (dR_q)_p(u) + (dL_p)_q(v) \tag{12.3.3}$$

$$(d\iota)_p(u) = -(dR_{p^{-1}})_1 (dL_{p^{-1}})_p(u) \tag{12.3.4}$$

が成り立つ。

証明 省略 □

系 12.3.7 (T_1G 上の演算)**.** 上の命題の状況で、各 $u, v \in T_1G$ に対し

$$(d\mu)_{(1,1)}(u, v) = u + v \tag{12.3.5}$$
$$(d\iota)_1(u) = -u \tag{12.3.6}$$

が成り立つ。

証明 明らか。 □

B. Lie 代数

多様体の接空間は、多様体の"線型モデル"であった。同様に、Lie 群の Lie 代数は Lie 群の"線型モデル"である。

[TODO] 単位元以外のところでも線型モデルになっているのか？

[TODO] 一般的な Lie 代数の定義

定義 12.3.8 (Lie 群の Lie 代数)**.** G を Lie 群とする。G 上の左不変ベクトル場全体の集合に交換子括弧を入れたものは Lie 代数となる。これを $\mathrm{Lie}(G)$ と書き、**G の Lie 代数 (Lie algebra of G)** と呼ぶ。

次の命題により、$\mathrm{Lie}(G)$ は G の単位元における接空間 T_eG と同一視できる。

命題 12.3.9 ($\mathrm{Lie}(G)$ は T_eG と同型)**.** G を Lie 群とする。評価写像 $\varepsilon\colon \mathrm{Lie}(G) \to T_eG$ はベクトル空間の同型である。

証明 cf. [Lee] p.191 □

例 12.3.10 (Lie 群の Lie 代数の例)**.** [TODO]

C. Maurer-Cartan 形式

[TODO] どういうモチベーション？

Maurer-Cartan 形式を定義する。

定義 12.3.11 (Maurer-Cartan 形式)**.** G を Lie 群とする。G 上の $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式 θ を

$$\theta_s(u) = s^{-1}u \quad (s \in G,\ u \in T_sG) \tag{12.3.7}$$

で定義する。θ を **Maurer-Cartan 形式 (Maurer-Cartan form)** という。

Maurer-Cartan 形式は左不変である。

命題 12.3.12 (Maurer-Cartan 形式の左不変性)**.** G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ μ, ι とする。Maurer-Cartan 形式 θ は左不変である。

証明 $g, s \in G,\ u \in T_sG$ とする。まず

$$\theta_s(u) = s^{-1}u \tag{12.3.8}$$
$$= (s, 0)^{-1}(s, u) \tag{12.3.9}$$
$$= (s^{-1}, 0)(s, u) \tag{12.3.10}$$
$$= (1, (dR_s)_{s^{-1}}(0) + (dL_{s^{-1}})_s(u)) \tag{12.3.11}$$
$$= (1, (dL_{s^{-1}})_s(u)) \tag{12.3.12}$$

である。また、L_g による引き戻しは

$$(L_g^*\theta)_s(u) = \theta_{gs}((dL_g)_s(u)) \tag{12.3.13}$$
$$= (gs)^{-1}(dL_g)_s(u) \tag{12.3.14}$$
$$= (gs, 0)^{-1}(gs, (dL_g)_s(u)) \tag{12.3.15}$$
$$= ((gs)^{-1}, 0)(gs, (dL_g)_s(u)) \tag{12.3.16}$$
$$= (1, (dR_{gs})_{(gs)^{-1}}(0) + (dL_{(gs)^{-1}})_{gs}((dL_g)_s(u))) \tag{12.3.17}$$
$$= (1, (dL_{(gs)^{-1}})_{gs}(dL_g)_s(u)) \tag{12.3.18}$$
$$= (1, (dL_{s^{-1}})_s(u)) \tag{12.3.19}$$

をみたす。したがって $L_g^*\theta = \theta$ だから θ は左不変である。 □

実は逆も成り立つ。すなわち、$\mathfrak{g}$ 値の左不変 1 形式は Maurer-Cartan 形式である。

命題 12.3.13. [TODO]

証明 [TODO] □

D. 随伴表現

[TODO] なぜここに書いてある？

定義 12.3.14 (随伴表現)**.** G を Lie 群とする。

- $g \in G$ の共役作用 $G \to G$ を c_g とおくとき、単位元 e における c_g の微分 $(d(c_g))_e \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\mathrm{Ad}(g)$ と書く。このとき、$\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ を ***G* の随伴表現 (adjoint representation of *G*)** という。
- 写像 $\mathrm{ad}(X)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を
$$\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y] \tag{12.3.20}$$
で定める。このとき、$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を **$\mathfrak{g}$ の随伴表現 (adjoint representation of $\mathfrak{g}$)** という。

E. 接束上に誘導される作用

Lie 群の作用 (とくに Lie 群の演算も含む) から誘導される接束上の作用を具体的に計算するために便利な公式を与えておく。

補題 12.3.15 ("全微分"の公式)**.** M, G を多様体とし、C^∞ 写像 $\alpha\colon M\times G\to M$ が与えられているとし、各 $x\in M,\ g\in G$ に対し

$$L_x\colon G\to M,\quad g\mapsto \alpha(x,g) \tag{12.3.21}$$

$$R_g\colon M\to M,\quad x\mapsto \alpha(x,g) \tag{12.3.22}$$

と定める。このとき、$d\alpha\colon TM\times TG\to TM$ は

$$d\alpha((x,u),(g,v)) = (\alpha(x,g), d(L_x)v + d(R_g)u)\quad ((x,u)\in TM,\ (g,v)\in TG) \tag{12.3.23}$$

をみたす。ただし、$TM\times TG\cong T(M\times G)$ の同一視のもとで $d\alpha$ は $TM\times TG$ 上の写像とみなしており、また本来 $d(L_x)_g$ などと書くべきところを添字を省略して $d(L_x)$ などと書いている。

証明 $(x,u)\in TM,\ (g,v)\in TG$ とする。M, G 内のある C^∞ 曲線 γ, β が存在して

$$\gamma(0)=x,\quad [\gamma]=u \tag{12.3.24}$$

$$\beta(0)=g,\quad [\beta]=v \tag{12.3.25}$$

が成り立つ ([ ] は曲線の類を表す)。さて、示すべき式の左辺を変形すると

$$d\alpha((x,u),(g,v)) = d\alpha((x,[\gamma]),(g,[\beta])) \tag{12.3.26}$$

$$= d\alpha((x,[\gamma]),(g,0)) + d\alpha((x,0),(g,[\beta])) \tag{12.3.27}$$

となる。ここで M, G 内で定値 x, g をとる曲線をそれぞれ c_x, c_g とおけば

$$[c_x]=0_{T_xM},\quad [c_g]=0_{T_gG} \tag{12.3.28}$$

となる。よって

$$d\alpha((x,[\gamma]),(g,0)) = d\alpha((x,[\gamma]),(g,[c_g])) \tag{12.3.29}$$

$$= \left(\alpha(x,g),\ \frac{d}{dt}\alpha(\gamma(t),c_g(t))\Big|_{t=0}\right) \tag{12.3.30}$$

$$= \left(\alpha(x,g),\ \frac{d}{dt}\alpha(\gamma(t),g)\Big|_{t=0}\right) \tag{12.3.31}$$

$$= \left(\alpha(x,g),\ \frac{d}{dt}R_g(\gamma(t))\Big|_{t=0}\right) \tag{12.3.32}$$

$$= (\alpha(x,g),\ d(R_g)[\gamma]) \tag{12.3.33}$$

$$= (\alpha(x,g), d(R_g)u) \tag{12.3.34}$$

を得る。同様にして

$$d\alpha((x,0),(g,[\beta])) = (\alpha(x,g), d(L_x)v) \tag{12.3.35}$$

を得る。したがって

$$d\alpha((x,u),(g,v)) = (\alpha(x,g), d(L_x)v + d(R_g)u) \tag{12.3.36}$$

がいえた。 □

補題 12.3.16 (TG の Lie 群構造)**.** G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ $\mu\colon G \times G \to G,\ \iota\colon G \to G$ とおく。TG は $d\mu\colon TG \times TG \to TG$ を積、$(1, 0) \in TG$ を単位元として Lie 群となり、逆元は $d\iota\colon TG \to TG$ で与えられる。

証明 TG が多様体であることと、$d\mu, d\iota$ が C^∞ であることは明らか。あとは $d\mu$ が群の演算の公理を満たすことと、$d\iota$ が逆元を与えることを示せばよい。

結合律　$(g, u), (h, v), (i, w) \in TG$ とする。表記の簡略化のため $d\mu$ による二項演算を $\cdot$ で書くことにすれば、

$$\begin{aligned} &((g, u) \cdot (h, v)) \cdot (i, w) && (12.3.37)\\ &= (gh, d(L_g)v + d(R_h)u) \cdot (i, w) && (12.3.38)\\ &= (ghi, d(L_{gh})w + d(R_i)(d(L_g)v + d(R_h)u)) && (12.3.39)\\ &= (ghi, d(L_{gh})w + d(L_g)d(R_i)v + d(R_{hi})u) && (12.3.40) \end{aligned}$$

であり (合成の順序を交換するところで G の乗法の結合律を用いた)、一方

$$\begin{aligned} &(g, u) \cdot ((h, v) \cdot (i, w)) && (12.3.41)\\ &= (g, u) \cdot (hi, d(L_h)w + d(R_i)v) && (12.3.42)\\ &= (ghi, d(L_g)(d(L_h)w + d(R_i)v) + d(R_{hi})u) && (12.3.43)\\ &= (ghi, d(L_{gh})w + d(L_g)d(R_i)v + d(R_{hi})u) && (12.3.44) \end{aligned}$$

となるから結合則がいえた。

単位元　$(g, u) \in TG$ に対し

$$\begin{aligned} (g, u) \cdot (1, 0) &= (g, d(L_g)0 + d(R_1)u) && (12.3.45)\\ &= (g, u) && (12.3.46)\\ (1, 0) \cdot (g, u) &= (g, d(L_1)u + d(R_g)0) && (12.3.47)\\ &= (g, u) && (12.3.48) \end{aligned}$$

より $(1, 0)$ は単位元である。

逆元　$(g, [\gamma]) \in TG$ に対し

$$\begin{aligned} (g, [\gamma]) \cdot d\iota(g, [\gamma]) &= (g, [\gamma]) \cdot (g^{-1}, d\iota[\gamma]) && (12.3.49)\\ &= (g, [\gamma]) \cdot (g^{-1}, [\iota \circ \gamma]) && (12.3.50)\\ &= \left(1,\ \frac{d}{dt}\mu(\gamma(t), \iota \circ \gamma(t))\Big|_{t=0}\right) && (12.3.51)\\ &= \left(1,\ \frac{d}{dt}1\Big|_{t=0}\right) && (12.3.52)\\ &= (1, 0) && (12.3.53) \end{aligned}$$

となる。左右逆の積についても同様。したがって $d\iota$ が逆元を与える。 □

上の補題により TG が Lie 群となることがわかったが、群としての具体的な構造は次の命題で与えられる。

命題 12.3.17 (TG の群構造)**.** G を Lie 群とし、$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ とおく。さらに各 $a \in G$ に対し内部自己同型

$$G \to G, \quad g \mapsto aga^{-1} = L_a \circ R_{a^{-1}}(g) \tag{12.3.54}$$

の微分を Ad_a とおく。上の補題より TG は群だから [TODO] どういうこと？、写像 $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(TG)$ は群の表現となる [25]。このとき、TG は半直積群 $G \ltimes_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ と群同型であり、群同型写像は

$$G \ltimes_{Ad} \mathfrak{g} \to TG, \quad (a, X) \mapsto (a, d(R_a)X) \tag{12.3.55}$$

で与えられる。

証明 長いので省略。cf. https://math.stackexchange.com/a/3585581/1026040 □

Lie 群の接束に群構造が誘導されるのと同様に、主 G 束の接束には群作用が誘導される。

補題 12.3.18. M を多様体、$P \to M$ を主 G 束とし、G の P への C^∞ 右作用を $\alpha\colon P \times G \to P$ とおく。このとき、$d\alpha\colon TP \times TG \to TP$ は Lie 群 TG の TP への C^∞ 右作用を定める。

証明 $d\alpha$ が C^∞ であることは明らか。あとは $d\alpha$ が群作用の公理をみたすことを確かめればよいが、これは TG が Lie 群となることの証明と同様なので省略。 □

12.4 誘導準同型

定義 12.4.1 (誘導準同型)**.** G, H を Lie 群とする。さらに $F\colon G \to H$ を Lie 群準同型とする。このとき、任意の $X \in \mathrm{Lie}(G)$ に対し、図式

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "dF"] & TH \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "F"'] & H \arrow[u, dashed, "F_*X"'] \end{tikzcd} \tag{12.4.1}$$

を可換にする $F_*X \in \mathrm{Lie}(H)$ がただひとつ存在する。$F_*\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ を**誘導された Lie 代数準同型 (induced Lie algebra homomorphism)** という。

注意 12.4.2 ($\mathrm{Lie}(\square)$ の関手性)**.** 対応付け $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$、$F \mapsto F_*$ は Lie 群の圏 **Lie** から有限次元 Lie 代数の圏 **lie** への共変関手である。

12.5 基本ベクトル場

基本ベクトル場を定義する。基本ベクトル場の概念は主ファイバー束の接続の定義に利用される。以下では Lie 群を接束へ埋め込んで同一視した議論が行われるから、埋め込み方について補題を述べておく。

25) 表現 Ad を**随伴表現 (adjoint representation)** という。[TODO] 定義が重複してる？

補題 12.5.1. G を Lie 群とすると、ゼロ切断

$$G \to TG, \quad p \mapsto (p, 0) \tag{12.5.1}$$

は Lie 群の埋め込みである。この同一視により $G \subset TG$ とみなす。 □

証明　幾何学 I 演習で扱ったので省略。 □

補題 12.5.2. G を Lie 群とすると、

$$\mathrm{Lie}(G) \to T_1 G, \quad X \mapsto (1, X_1) \tag{12.5.2}$$

は Lie 代数として同型である。この同一視により $\mathrm{Lie}(G) = T_1 G \subset TG$ とみなす。 □

証明　幾何学 I 演習で扱ったので省略。 □

基本ベクトル場を定義する。

定義 12.5.3 (基本ベクトル場)**.** M を多様体、$P \to M$ を主 G 束、$A \in \mathrm{Lie}(G)$ とする。上の補題より、P 上のベクトル場 $A^* \in \mathfrak{X}(P)$ を

$$A^*_u \coloneqq u.A = (u, 0).(1, A_1) = (u, d(L_u)A_1) \quad (u \in P) \tag{12.5.3}$$

で定めることができる [26)]。A^* を A に対応する**基本ベクトル場 (fundamental vector field)** という。

補題 12.5.4 (左不変ベクトル場は完備)**.** Lie 群 G の左不変ベクトル場は完備である。

証明のスケッチ.　X を左不変ベクトル場とすると、単位元 1 のまわりで積分曲線の定義域に $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ が含まれ、左不変性よりすべての $g \in G$ のまわりで $(-\varepsilon, \varepsilon)$ が積分曲線の定義域に含まれる。あとはコンパクト台をもつベクトル場が完備であることの証明と同様の流れで示せる。詳しくは [Lee] p.216 を参照。 □

定義 12.5.5 (1 助変数部分群)**.** M を多様体、$P \to M$ を主 G 束、$A \in \mathrm{Lie}(G)$ とする。上の補題より A は完備なので、A の生成するフローは C^∞ 写像 $\mathbb{R} \times G \to G$ であり、さらにこれは G への C^∞ 左作用を定める。そこで、とくに単位元 $1 \in G$ を通る軌道 $\mathbb{R} \to G$ を e^{tA} あるいは $\exp tA$ と書くことにする。この曲線 $e^{tA} \colon \mathbb{R} \to G$ を、A によって生成される **1 助変数部分群 (one-parameter subgroup)** という。

命題 12.5.6 (基本ベクトル場の幾何学的意味)**.** 上の定義の状況で、A に対応する基本ベクトル場 A^* の $u \in P$ での値は、P 内の曲線

$$\mathbb{R} \to P, \quad t \mapsto u.e^{tA} \tag{12.5.4}$$

26)　ここでの L_u は $G \to G$ でなく $G \to P$ の写像であることに注意。したがって "A の左不変性より $d(L_u)A_1 = A_u$" という議論は誤りである。

の u での接ベクトルに等しい。すなわち

$$A_u^* = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u.e^{tA} \tag{12.5.5}$$

が成り立つ。

証明 e^{tA} が A の積分曲線であることに注意して

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u.e^{tA} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_u \circ e^{tA} \tag{12.5.6}$$

$$= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tA}\right)(L_u) \tag{12.5.7}$$

$$= A_1(L_u) \tag{12.5.8}$$

$$= d(L_u)A_1 \tag{12.5.9}$$

$$= A_u^* \tag{12.5.10}$$

を得る。 □

12.6 構造方程式

[TODO] Maurer-Cartan 形式との関連性？

命題 12.6.1. $\mathfrak{g}^*$ は左不変 1-形式の空間である。[TODO]

証明 [TODO] □

定義 12.6.2 (Lie 群の構造方程式). $B_1, \ldots, B_m$ を $\mathfrak{g}$ の基底、$\theta^1, \ldots, \theta^m$ をその双対基底とする。

$$[B_j, B_k] = \sum c_{jk}^i B_i \tag{12.6.1}$$

で**構造定数 (structure constant)** $c_{jk}^i \in \mathbb{R}$ を定める。すると

$$d\theta^i = -\sum c_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \tag{12.6.2}$$

が成り立つ。これを G の**構造方程式 (structure equation)** という。

$$d\theta = -[\theta, \theta] \tag{12.6.3}$$

と書くこともある。[TODO] どういう意味？

証明 [TODO] □

第 II 部

接続

[TODO] 接続とは一体何なのか？

この部では接続について論じる。接続とは、ベクトル場を方向微分して新たなベクトル場を作る手続きのようなものである。接束の接続はアファイン接続と呼ばれ、とくに重要である。

第 13 章　ベクトル値微分形式

13.1　ベクトル値微分形式

微分形式の概念をベクトル束に値をもつように一般化する。これは後に主ファイバー束の接続を定義するために用いる。

定義 13.1.1 (ベクトル束に値をもつ微分形式). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束とし、$p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。ベクトル束 $\bigwedge^p T^*M \otimes E$ の切断を **E に値をもつ p-形式** あるいは **E-値 p-形式 (E-valued p-form)** という。E-値 p-形式全体のなす集合を

$$A^p(E) := \Gamma\left(\left(\bigwedge^p T^*M\right) \otimes E\right) \tag{13.1.1}$$

と書く。E-値 p-形式は $\theta \otimes \xi$ ($\theta \in A^p(M)$, $\xi \in A^0(E)$) の形の元の和に (一意ではないが) 書ける。

注意 13.1.2. [TODO] どういうこと？ベクトル空間の同型

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x M, V) \cong (\Lambda^k T_x M)^* \otimes V \cong (\Lambda^k T_x^* M) \otimes V \tag{13.1.2}$$

に注意すれば、V に値をもつ k-形式の値は、確かに $\Lambda^k T_x M \to V$ の $\mathbb{R}$ 線型写像とみなせることがわかる。

注意 13.1.3. テキストでは θ と ξ の順序が逆になったりしているが、ここでは $\theta \otimes \xi$ の順序に統一する。

ベクトル値形式は従来の意味での微分形式ではなく、したがって外積は定義されていないが、通常の外積から自然に定義が拡張される。

定義 13.1.4 (ベクトル値形式の外積). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$\wedge\colon A^p(M) \times A^q(M) \to A^{p+q}(M)$ を通常の外積とし、その一般化として $\wedge\colon A^p(M) \times A^q(E) \to A^{p+q}(E)$ を

$$(\omega, \xi) = \left(\omega, \sum_i \alpha_i \otimes \xi_i\right) \mapsto \omega \wedge \xi := \sum_i \omega \wedge \alpha_i \otimes \xi_i \tag{13.1.3}$$

$$(\alpha_i \in A^q(M),\ \xi_i \in A^0(E)) \tag{13.1.4}$$

と定める。これは明らかに ξ の表し方によらず well-defined に定まる。

定義 13.1.5 (ベクトル値形式の内積). M を多様体、$E \to M$, $F \to M$ をベクトル束、$g\colon A^0(E) \times A^0(F) \to A^0(M)$ を $C^\infty(M)$-双線型写像とする。g の一般化として、同じ記号で写像 $g\colon A^p(E) \times A^q(F) \to A^{p+q}(M)$ を

$$(\omega, \xi) = \left(\sum_i \alpha_i \otimes \omega_i, \sum_j \beta_j \otimes \xi_j\right) \mapsto g(\omega, \xi) := \sum_{i,j} g(\omega_i, \xi_j)\alpha_i \wedge \beta_j \tag{13.1.5}$$

$$(\alpha_i \in A^p(M),\ \beta_j \in A^q(M),\ \omega_i \in A^0(E),\ \xi_j \in A^0(F)) \tag{13.1.6}$$

と定める。これは ω,ξ の表し方によらず well-defined に定まり (証明略)、また $C^\infty(M)$-双線型写像である。

注意 13.1.6. 上の定義の双線型写像 $g\colon A^0(E)\times A^0(F)\to A^0(M)$ の例としては、

- 双対の定める内積 $\langle,\rangle\colon A^0(E^*)\times A^0(E)\to A^0(M)$
- 計量 $g\colon A^0(E)\times A^0(E)\to A^0(M)$

などがある。

第 14 章　主ファイバー束

主ファイバー束は、多様体 M 上局所自明な群の族である。ここで主ファイバー束という概念を持ち出す理由はベクトル束を調べるためであるが、実際ベクトル束と主ファイバー束の間には良い関係がある。というのも、ベクトル束はフレーム束と呼ばれる主ファイバー束と対応し、逆に主ファイバー束はその構造群の表現を通してベクトル束と対応する。したがって、あるベクトル束について調べたいときに代わりに主ファイバー束を考えることで議論の見通しがよくなることがある。そこで、この章では主ファイバー束とベクトル束の基本的な関係を調べることにする。

14.1　ファイバー束

ファイバー束を定義する。

[TODO] ファイバー束は構造群付きを基本として、修飾しない場合は自明な構造群を持つものと定義したい

定義 14.1.1 (ファイバー束)**.** M, F を多様体とする。多様体 E が**ファイバー束 (fiber bundle)** であるとは、E が次をみたすことである：

(1)　全射な C^∞ 写像 $\pi\colon E \to M$ が与えられている。
(2)　[TODO] 局所自明性

[TODO] 主ファイバー束をファイバー束の特別な場合として定義したい

定義 14.1.2 (主ファイバー束)**.** M を多様体、G を Lie 群とする。多様体 P が G を**構造群 (structure group)** とする M 上の**主ファイバー束 (principal fiber bundle)**、あるいは**主 G 束 (principal G-bundle)** であるとは、P が次をみたすことである：

(1)　全射な C^∞ 写像 $p\colon P \to M$ が与えられている。
(2)　G は P に右から C^∞ に作用しており、さらに次をみたす:
　(2-a)　作用はファイバーを保つ。
　(2-b)　作用はファイバー上単純推移的[27]である。
(3)　M のある開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して、各 U_α 上に次をみたす写像 $\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ が存在する:
　(3-a)　σ_α は C^∞ であって $p \circ \sigma_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha}$ をみたす。すなわち σ_α は U_α 上の P の切断である。
　(3-b)　(局所自明性) 写像

$$\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G,\quad \underbrace{\sigma_\alpha(x).s}_{\text{群作用を「.」で書く。}} \mapsto (x, s) \tag{14.1.1}$$

　が diffeo である (写像として well-defined に定まることはすぐ後で確かめる)[28]。

ここで

- φ_α を U_α 上の P の**局所自明化 (local trivialization)** という。

27)　作用が**単純推移的 (simply transitive)** であるとは、自由かつ推移的であることをいう。

補題 14.1.3 (G-torsor の特徴付け)**.** G を群、X を空でない集合とし、G は X に右から作用しているとする。このとき次は同値である:

(1) G の作用が単純推移的である。

(2) 写像

$$\theta\colon X\times G\to X\times X,\quad (x,g)\mapsto(x.g,x) \tag{14.1.2}$$

が全単射である [29]。

したがって、とくに上の定義の φ_α が確かに写像として定まる。

証明

$$\begin{aligned}
\theta\colon\ \text{全射} &\iff \forall x,y\in X\ \exists g\in G\ [x.g=y] && (14.1.3)\\
&\iff G\ \text{の作用が推移的} && (14.1.4)\\
\theta\colon\ \text{単射} &\iff \forall x\in X\ \forall g,g'\in G\ [x.g=x.g' \implies g=g'] && (14.1.5)\\
&\iff \forall x\in X\ \forall g,g'\in G\ [x=x.g'g^{-1} \implies g'g^{-1}=1] && (14.1.6)\\
&\iff \forall x\in X\ \forall g\in G\ [x=x.g \implies g=1] && (14.1.7)\\
&\iff G\ \text{の作用が自由} && (14.1.8)
\end{aligned}$$

□

定義 14.1.4 (変換関数)**.** M を多様体、$p\colon P\to M$ を主 G 束とすると、主 G 束の定義より、M の open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ であって各 U_α 上に切断 $\sigma_\alpha\colon U_\alpha\to p^{-1}(U_\alpha)$ を持つものがとれる。各 $\alpha,\beta\in A$, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ に対し、写像 $\psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to G$ を $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ を $\sigma_\beta(x)=\sigma_\alpha(x).s$ なる $s\in G$ に写す写像、すなわち

$$x\overset{\sigma_\beta}{\mapsto}\sigma_\beta(x)=\sigma_\alpha(x).s \overset{\substack{\sigma_\alpha\ \text{より定まる}\\ \text{局所自明化}}}{\mapsto} (x,s)\overset{\mathrm{pr}_2}{\mapsto} s \tag{14.1.9}$$

で定めると、これは C^∞ である。C^∞ 写像の族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を、切断の族 $\{\sigma_\alpha\}$ から定まる P の**変換関数 (transition function)** という。

14.2 ベクトル束と主ファイバー束の同伴

A. ベクトル束から主ファイバー束へ

多様体上のランク r ベクトル束が与えられると、フレーム束とよばれる主 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ 束を構成できる。

[TODO] フレーム束はフレーム多様体をファイバーとする主 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ 束？

[TODO] フレーム束の主ファイバー束構造は全単射により誘導する？

28) このように定めた写像 φ_α が diffeo かどうか (とくに C^∞ かどうか) は他の条件からはおそらく導かれない気がするので ([TODO] 本当に？)、独立な条件として与えておくことにする。[TODO] cf. `https://math.stackexchange.com/questions/2930299/trivialization-from-a-smooth-frame`

29) 写像 θ を shear map といい、shear map が全単射のとき X を G-torsor という。

定義 14.2.1 (フレーム束). M を n 次元多様体、$E \to M$ をランク r ベクトル束とする。M の atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ であって、各 α に対して U_α 上の E の局所自明化 ρ_α が存在するものがとれる。

∵ 各 $x \in M$ に対し、多様体の定義とベクトル束の定義より、x の M における開近傍 V_x, W_x であって V_x を定義域とするチャートが存在し、かつ W_x 上の E の局所自明化が存在するようなものがとれる。そこで $U_x \coloneqq V_x \cap W_x$ とおけば $\{U_x\}_{x \in M}$ が求める atlas となる。 //

E の局所自明化の族 $\{\rho_\alpha\}$ により定まる E の変換関数を $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ とおく。E の**フレーム束 (frame bundle)** とよばれる主 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ 束 $p\colon P \to M$ を次のように構成する:

(1) 各 $x \in M$ に対し、集合 P_x を

$$P_x \coloneqq \{u\colon \mathbb{R}^r \to E_x \mid u \text{ は線型同型}\} \tag{14.2.1}$$

で定める。P_x は E_x の基底全体の集合とみなせる。

(2) P_x らの disjoint union を

$$P \coloneqq \coprod_{x \in M} P_x \tag{14.2.2}$$

とおく。

(3) 射影 $p\colon P \to M$ を

$$p((x, u)) \coloneqq x \tag{14.2.3}$$

で定義する。

(4) $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ の P への右作用 β を次のように定める:

$$\beta\colon P \times \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \to P, \quad ((x, u), s) \mapsto (x, u \circ s) \tag{14.2.4}$$

(5) 各 $\alpha \in A$ に対し、U_α 上の E の局所自明化 ρ_α をひとつ選び、それにより定まる E のフレームを $e_1^{(\alpha)}, \dots, e_r^{(\alpha)}$ とおく。写像 $\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ を次のように定める:
- 各 $x \in U_\alpha$ に対し、E_x の基底 $e_1^{(\alpha)}(x), \dots, e_r^{(\alpha)}(x)$ により定まる線型同型 $\mathbb{R}^r \to E_x$ を一時的な記号で $\sigma_\alpha(x)_2$ と書く。
- $\sigma_\alpha(x) \coloneqq (x, \sigma_\alpha(x)_2)$ と定める。記号の濫用で $\sigma_\alpha(x)_2$ も $\sigma_\alpha(x)$ と書く。

(6) 写像 φ_α を

$$\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}), \quad (x, \sigma_\alpha(x) \circ s) \mapsto (x, s) \tag{14.2.5}$$

と定める。ただし、$(x, \sigma_\alpha(x) \circ s)$ から s が一意に定まることは $s = \sigma_\alpha(x)^{-1} \circ \sigma_\alpha(x) \circ s$ と表せることよりわかる。また、φ_α は明らかに可逆である。

(7) 写像族 $\{\varphi_\alpha\}$ を用いて P に多様体構造が入る (このあとすぐ示す)。

(8) $p\colon P \to M$ は、$\{\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)\}$ を切断の族、これにより定まる変換関数を $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ として M 上の主 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ 束となる (このあとすぐ示す)。

P は E に**同伴する (associated)** 主ファイバー束と呼ばれる。

証明 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{r^2}$ と同一視する。まず P に多様体構造が入ることを示す。M の atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ は、小さ

い範囲に制限した chart、すなわち

$$(U'_\alpha, \psi_\alpha|_{U'_\alpha}) \quad (\alpha \in A,\ U'_\alpha \overset{\text{open}}{\subset} U_\alpha) \tag{14.2.6}$$

をすべて含むとしてよい。写像族 $\{\Phi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{n+r^2}\}$ を

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_\alpha"'] & U_\alpha \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \arrow[r, "\psi_\alpha \times \mathrm{id}"] & \psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{r^2} \subset \mathbb{R}^{n+r^2} \end{tikzcd} \tag{14.2.7}$$

を可換にするものとして定める。P に $\{\Phi_\alpha\}$ を atlas とする多様体構造が入ることを示すため、Smooth Manifold Chart Lemma (補題 3.5.1) の条件を確認する。φ_α が可逆であることと ψ_α が M の chart であることから、Φ_α は $\mathbb{R}^{n+r^2}$ の開部分集合 $\psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{r^2}$ への全単射である。よって (i) が満たされる。

各 $\alpha, \beta \in A$ に対し ψ_α, ψ_β が M の chart であることから

$$\Phi_\alpha(p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta)) = \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{r^2} \tag{14.2.8}$$

$$\Phi_\beta(p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta)) = \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{r^2} \tag{14.2.9}$$

はいずれも $\mathbb{R}^{n+r^2}$ の開部分集合である。よって (ii) が満たされる。

各 $\alpha, \beta \in A$ に対し合成写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は

$$\begin{array}{ccccc} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \\ (x, s) & \longmapsto & (x, \sigma_\alpha(x) \circ s) & \longmapsto & (x, \sigma_\beta(x)^{-1} \circ \sigma_\alpha(x) \circ s) \end{array} \tag{14.2.10}$$

という対応を与えるが、ここで $\sigma_\beta(x)^{-1} \circ (\sigma_\alpha(x)) \circ s$ は (x, s) に関し C^∞ である。

∵ s を右から合成する演算は Lie 群 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ における積なので C^∞ である。そこで $\sigma_\beta(x)^{-1} \circ \sigma_\alpha(x)$ について考える。いま各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^r \arrow[rr, "\sigma_\beta(x)^{-1} \circ \sigma_\alpha(x)"] \arrow[dr, "\sigma_\beta(x)"'] & & \mathbb{R}^r \arrow[dl, "\sigma_\alpha(x)"] \\ & E_x & \end{tikzcd} \tag{14.2.11}$$

は可換であるが、$\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ は定め方から E の局所自明化の E_x への制限 $\rho_\alpha(x), \rho_\beta(x)$ の逆写像である。よって写像

$$U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}), \quad x \mapsto \sigma_\beta(x)^{-1} \circ \sigma_\alpha(x) \tag{14.2.12}$$

は E の変換関数 $\rho_{\beta\alpha}$ に他ならず、したがってこれは C^∞ である。よって、$\sigma_\beta(x)^{-1} \circ (\sigma_\alpha(x)) \circ s$ は (x, s) に関し C^∞ である。 //

したがって

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} = (\psi_\beta \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\psi_\alpha \times \mathrm{id})^{-1} \tag{14.2.13}$$

は $\Phi_\alpha(p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta))$ 上 C^∞ である。よって (iii) が満たされる。

$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ は小さい範囲に制限した chart をすべて含むことから明らかに (iv) が満たされる。

以上で Smooth Manifold Chart Lemma の条件が確認できた。したがって P は $\{(p^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}$ を atlas として多様体となる。

つぎに、P は $\{\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)\}$ を切断の族として M 上の主 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ 束となることを示す。そのためには次を示せばよい:

(1) p が C^∞ であること
(2) 作用 β がファイバーを保つこと
(3) 作用 β がファイバー上単純推移的であること
(4) 作用 β が C^∞ であること
(5) σ_α が U_α 上の P の切断となること
(6) 主ファイバー束の定義の局所自明性が満たされること
(7) $\{\sigma_\alpha\}$ により定まる P の変換関数が $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ であること

ここで、φ_α らは diffeo である。実際、図式

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_\alpha"'] & U_\alpha \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \arrow[r, "\psi_\alpha\times\mathrm{id}"] & \psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^{r^2} \subset \mathbb{R}^{n+r^2} \end{tikzcd} \tag{14.2.14}$$

が可換であることと $\psi_\alpha \times \mathrm{id}$, Φ_α が diffeo であることから従う。

p が C^∞ であることは各点の近傍での C^∞ 性を示せばよいが、これは各 $(x,u)\in P$ に対し $p^{-1}(U_\alpha)$ が開近傍となるような $\alpha \in A$ がとれて

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & p^{-1}(U_\alpha)\times\mathbb{R}^{n+r^2} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & P \end{tikzcd} \tag{14.2.15}$$

が可換となることから従う。

$\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ の P への作用

$$\beta((x,u),s) = (x, u\circ s) \tag{14.2.16}$$

がファイバーを保つことは定義から明らか。

β がファイバー $P_x = p^{-1}(x)$ $(x\in M)$ 上単純推移的であることは、shear map

$$P_x \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \to P_x \times P_x, \quad ((x,u),s) \mapsto ((x,u\circ s),(x,u)) \tag{14.2.17}$$

が逆写像

$$P_x \times P_x \to P_x \times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}), \quad ((x,t),(x,u)) \mapsto ((x,u),u^{-1}\circ t) \tag{14.2.18}$$

を持つことから従う。

β が C^∞ であることを示す。$(x,u)\in P$ の近傍 U_α 上で

$$(x,u) = (x, \sigma_\alpha(x)\circ t) \quad (t\in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})) \tag{14.2.19}$$

の形に書けることに注意すれば、

$$((x,u),s) \in p^{-1}(U_\alpha)\times \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \tag{14.2.20}$$

$$\overset{\mathrm{id}\times(\mathrm{pr}_2\circ\varphi_\alpha)}{\mapsto} ((x,u),s,t) \in p^{-1}(U_\alpha)\times\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \tag{14.2.21}$$

$$\overset{\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})\text{ での積}}{\mapsto} ((x,u),ts) \in p^{-1}(U_\alpha)\times\mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \tag{14.2.22}$$

$$\overset{p}{\mapsto} \quad (x, ts) \in U_\alpha \times \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \tag{14.2.23}$$
$$\overset{\varphi_\alpha^{-1}}{\mapsto} \quad (x, \sigma_\alpha(x) \circ ts) = (x, u \circ s) \in p^{-1}(U_\alpha) \tag{14.2.24}$$

の各写像が C^∞ であることから、β は U_α 上 C^∞ であることがわかる。したがって β は C^∞ である。

σ_α が U_α 上の P の切断となることを示す。$p \circ \sigma_\alpha(x) = x$ となることは定義から明らか。C^∞ 性は

$$\sigma_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, 1) \tag{14.2.25}$$

よりわかる。したがって σ_α は U_α 上の P の切断である。さらに φ_α の定義と φ_α が diffeo であることから主ファイバー束の定義の局所自明性も満たされる。

最後に、$x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\alpha, \beta \in A$ に対し

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \circ \sigma_\alpha^{-1} \circ \sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \circ \rho_{\alpha\beta}(x) \tag{14.2.26}$$

が成り立つことから、$\{\sigma_\alpha\}$ により定まる P の変換関数は $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ である。

以上で P は $\{\sigma_\alpha\}$ を切断の族とし、これにより定まる P の変換関数を $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ として M 上の主 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ 束となることが示せた。 □

例 14.2.2 (構造群の縮小). E をベクトル束、g を E の内積とする。フレーム束の定義の P_x を

$$Q_x := \{u \colon \mathbb{R}^r \to E_x \mid u \text{ は線型同型かつ内積を保つ}\} \tag{14.2.27}$$

に置き換えると、Q は直交群 $O(r)$ を構造群とする M 上の主束となる。このとき Q は P の部分束であり、Q は P の構造群 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ を $O(r)$ に**縮小 (reduction)** して得られたという。

B. 主ファイバー束からベクトル束へ

逆に主 G 束 P と表現 $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ が与えられると、ランク r ベクトル束 E が構成できる。

定義 14.2.3 (同伴するベクトル束). M を多様体、$P \to M$ を主 G 束、$\rho \colon G \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ を Lie 群の表現とする。直積多様体 $P \times \mathbb{R}^r$ への G の C^∞ 右作用を

$$(P \times \mathbb{R}^r) \times G \to P \times \mathbb{R}^r, \quad ((u, y), s) \mapsto (u.s, \rho(s)^{-1} y) \tag{14.2.28}$$

で定め、軌道空間 $(P \times \mathbb{R}^r)/G$ を

$$P \times_\rho \mathbb{R}^r \tag{14.2.29}$$

と書く。このとき、$P \times_\rho \mathbb{R}^r$ は M 上のベクトル束となり、P のある変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ に対し $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$ が $P \times_\rho \mathbb{R}^r$ の変換関数のひとつとなる (このあとすぐ示す)。これを P に**同伴する (associated)** ベクトル束という。

証明 $P \times_\rho \mathbb{R}^r$ が M 上のベクトル束になることを、Vector Bundle Chart Lemma を用いて示す。標準射影 $P \to M$ および $P \times \mathbb{R}^r \to P \times_\rho \mathbb{R}^r$ をそれぞれ p, q とおく。

まず射影を構成する。図式

$$\begin{tikzcd} P \times \mathbb{R}^r \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & P \times_\rho \mathbb{R}^r \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd} \tag{14.2.30}$$

において、$p \circ \mathrm{pr}_1$ は q のファイバー上定値である。

∵　$u \in P_x,\ u' \in P_{x'}\ (x, x' \in M),\ y, y' \in \mathbb{R}^r$ について $q(u, y) = q(u', y')$ ならば、q の定義からある $s \in G$ が存在して $(u, y) = (u'.s, \rho(s)^{-1}y')$ が成り立ち、とくに $u = u'.s$ だが、G の P への作用がファイバーを保つことから $x = x'$ が成り立つ。 //

したがって写像 $\pi\colon P \times_\rho \mathbb{R}^r \to M$ が誘導される。このとき $p \circ \mathrm{pr}_1$ が全射であることより π も全射である。

つぎに $P \times_\rho \mathbb{R}^r$ の局所自明化を構成する。P の切断の族 $\{\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to P\}_{\alpha \in A}$ であって $\bigcup U_\alpha = P$ なるものをひとつ選ぶ。これにより定まる P の局所自明化の族を $\{\varphi_\alpha\}$ とおき、さらにこれにより定まる P の変換関数を $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ とおく。このとき、各 $\alpha \in A$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times \mathbb{R}^r \arrow[r, "{(x,y) \atop \mapsto (x,1,y)}"] \arrow[drr, dashed] & U_\alpha \times G \times \mathbb{R}^r \arrow[r, "\varphi_\alpha^{-1} \times \mathrm{id}"] & p^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "q"] \\ & & p^{-1}(U_\alpha) \times_\rho \mathbb{R}^r = \pi^{-1}(U_\alpha) \end{tikzcd} \tag{14.2.31}$$

の破線部の写像は全単射である。

∵　$(u, y), (u', y') \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ について

$$q(\varphi_\alpha^{-1}(u, 1), y) = q(\varphi_\alpha^{-1}(u', 1), y') \tag{14.2.32}$$

$$\iff \exists s \in G \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \varphi_\alpha^{-1}(u, 1) = \varphi_\alpha^{-1}(u', 1).s \\ y = \rho(s)^{-1} y' \end{cases} \tag{14.2.33}$$

$$\iff \exists s \in G \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \varphi_\alpha^{-1}(u, 1) = \varphi_\alpha^{-1}(u', s) \\ y = \rho(s)^{-1} y' \end{cases} \tag{14.2.34}$$

$$\iff \exists s \in G \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} (u, 1) = (u', s) \\ y = \rho(s)^{-1} y' \end{cases} \tag{14.2.35}$$

$$\iff \begin{cases} u = u' \\ y = y' \end{cases} \tag{14.2.36}$$

//

ただし、図式の右下が $p^{-1}(U_\alpha) \times_\rho \mathbb{R}^r = \pi^{-1}(U_\alpha)$ であることは次のようにしてわかる。

∵　$(\subset)$

$$\pi(p^{-1}(U_\alpha) \times_\rho \mathbb{R}^r) = \pi \circ q(p^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^r) \tag{14.2.37}$$

$$= p \circ \mathrm{pr}_1(p^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^r) \tag{14.2.38}$$

$$= p \circ p^{-1}(U_\alpha) \tag{14.2.39}$$

$$\subset U_\alpha \tag{14.2.40}$$

より $p^{-1}(U_\alpha)\times_\rho \mathbb{R}^r \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ である。

(⊃)　$(u,y)\in p^{-1}(U_\alpha)\times\mathbb{R}^r$ について $\pi(q(u,y))\in U_\alpha$ ならば

$$p(u) = p\circ \mathrm{pr}_1(u,y)\in U_\alpha \tag{14.2.41}$$

だから $(u,y)\in p^{-1}(U_\alpha)\times\mathbb{R}^r$、したがって $q(u,y)\in p^{-1}(U_\alpha)\times_\rho \mathbb{R}^r$ である。　//

そこで、破線矢印の逆向きの写像 $\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^r$ を Φ_α とおく。各 $x\in M$ に対し、$x\in U_\alpha$ なる $\alpha\in A$ をひとつ選べば、$\Phi_\alpha(x)\colon \pi^{-1}(x)\to\{x\}\times\mathbb{R}^r=\mathbb{R}^r$ は可逆である。実際、

$$\{x\}\times\mathbb{R}^r\to\pi^{-1}(x),\quad (x,y)\mapsto q(\varphi^{-1}(x,1),y) \tag{14.2.42}$$

が逆写像を与える。そこで、この 1:1 対応により $\pi^{-1}(x)$ に r 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間の構造を入れる。

最後に、$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ なる $\alpha,\beta\in A$ と $(x,y)\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^r$ に対し

$$\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}(x,y) = (x,\rho\circ\psi_{\alpha\beta}y) \tag{14.2.43}$$

が成り立つ。

∵　まず

$$\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}(x,y) = \Phi_\alpha(q(\varphi_\beta^{-1}(x,1),y)) \tag{14.2.44}$$

$$= \Phi_\alpha(q(\varphi_\beta(x)^{-1}(1),y)) \tag{14.2.45}$$

である。このとき

$$(\varphi_\beta(x)^{-1}(1),y) = (\sigma_\beta(x),y) \tag{14.2.46}$$

$$= (\sigma_\alpha(x).\psi_{\alpha\beta}(x),y) \tag{14.2.47}$$

が成り立つから

$$\Phi_\alpha(q(\varphi_\beta(x)^{-1}(1),y)) = \Phi_\alpha(q(\sigma_\alpha(x).\psi_{\alpha\beta}(x),y)) \tag{14.2.48}$$

$$= \Phi_\alpha(\sigma_\alpha(x),\rho(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1})^{-1}y) \tag{14.2.49}$$

$$= \Phi_\alpha(\varphi_\alpha(x)^{-1}(1),\rho(\psi_{\alpha\beta}(x))y) \tag{14.2.50}$$

$$= \Phi_\alpha\circ\Phi_\alpha^{-1}(x,\rho(\psi_{\alpha\beta}(x))y) \tag{14.2.51}$$

$$= (x,\rho\circ\psi_{\alpha\beta}y) \tag{14.2.52}$$

となる。　//

$\rho,\psi_{\alpha\beta}$ はいずれも C^∞ だから $\rho\circ\psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ も C^∞ である。

以上で Vector Bundle Chart Lemma の条件が確認できた。したがって $P\times_\rho\mathbb{R}^r$ は M 上のベクトル束となり、$\{\Phi_\alpha\}$ は $P\times_\rho\mathbb{R}^r$ の局所自明化の族となり、これにより定まる $P\times_\rho\mathbb{R}^r$ の変換関数は $\{\rho\circ\psi_{\alpha\beta}\}$ である。　□

例 14.2.4 (ベクトル束のフレーム束に同伴するベクトル束)**.** $E \to M$ をランク r ベクトル束、$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を E の変換関数、P を E から構成されたフレーム束とする。フレーム束の定義より、$\{\psi_{\alpha\beta}\}$ も P の変換関数であった。よって表現 $\rho\colon \mathrm{GL}(r,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ を恒等写像とすれば、$P \times_\rho \mathbb{R}^r$ の変換関数は $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}\}$ となり、$P \times_\rho \mathbb{R}^r$ が E に一致することがわかる。

例 14.2.5 (直和束)**.** [TODO]

例 14.2.6 (テンソル積束)**.** [TODO] $\rho(s) = s \otimes s$

例 14.2.7 (双対束)**.** [TODO] $\rho(s) = {}^t s^{-1}$

第 15 章　アファイン接続

接続の概念に慣れるため、まずは多様体の接束の接続であるアファイン接続からはじめる。

15.1　アファイン接続

定義 15.1.1 (ベクトル束の接続). M を多様体とする。M の**アファイン接続 (affine connection)** とは、$\mathbb{R}$-線型写像 $A^0(TM) \to A^1(TM)$ であって、Leibniz の公式

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f\nabla Y \quad (f \in A^0(M),\ Y \in A^0(TM)) \tag{15.1.1}$$

をみたすものである。各 $Y \in A^0(M),\ X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し、$\nabla Y(X) \in A^0(TM)$ を $\nabla_X Y$ とも書き、Y の X 方向の**共変微分 (covariant derivative)** と呼ぶ。

例 15.1.2 (アファイン接続の例).

- [TODO] 座標を明示せよ $\mathbb{R}^n$ のアファイン接続 $\overline{\nabla}$ を

$$\overline{\nabla}_X Y := X(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n} = X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{15.1.2}$$

で定めることができる。$\overline{\nabla}$ を **Euclid 接続 (Euclidean connection)** という。X を書かずに表せば

$$\overline{\nabla}Y = dY^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{15.1.3}$$

となる。定義 16.1.1 の Leibniz の公式の成立を確かめると、

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}(fY) &= d(fY^i)\frac{\partial}{\partial x^i} && (15.1.4)\\ &= d(fY^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (TM\text{-値微分形式の同一視}) && (15.1.5)\\ &= (Y^i\, df + f\, dY^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} && (15.1.6)\\ &= df \otimes Y + f \cdot \overline{\nabla}Y && (15.1.7)\end{aligned}$$

より確かに成り立つ。[TODO] 接続係数が 0 であることを述べる

- [TODO] tangential connection

次に定義する接続形式とは、局所フレームに関する接続の行列表示のようなものである。

定義 15.1.3 (接続形式). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$(E_i)$ を U 上の TM の局所フレームとする。

- 各 j に対し、

$$\nabla E_j = \omega_j^k E_k \tag{15.1.8}$$

と表したときの 1-形式 ω_j^k らの族 $\omega := (\omega_j^k)$ を ∇ の**接続形式 (connection form)** という。

- C^∞ 関数 $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma^k_{ij} := \omega^k_j(E_i) \tag{15.1.9}$$

を ∇ の**接続係数 (connection coefficient)** という。定義から明らかに、接続係数は

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k \tag{15.1.10}$$

をみたす。

15.2 捩率と曲率

この節では捩率テンソルと曲率テンソルを定義する。

定義 15.2.1 (捩率テンソル)**.** M を多様体、∇ を M のアファイン接続とする。このとき

$$T\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \tag{15.2.1}$$

と定義すると T は交代 $C^\infty(M)$-双線型写像となる（このあと示す）。そこで T は M 上の TM に値をもつ 2 次形式とみなせて、これを接続 ∇ の**捩率テンソル (torsion tensor)** という。捩率の値が M 上恒等的に 0 であるとき、接続 ∇ は**捩れなし (torsion-free)** あるいは**対称 (symmetric)** であるという [30]。

証明 [TODO] □

定義 15.2.2 (曲率テンソル)**.** M を多様体、∇ を M のアファイン接続とする。このとき、

$$R\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y, Z) \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{15.2.2}$$

は M 上の $(1, 3)$-テンソル場となり、これを接続 ∇ の**曲率テンソル (curvature tensor)** という。

捩率テンソルは、局所的には接続形式を用いて表せる。

命題 15.2.3 (第 1 構造方程式)**.** $e_1, \ldots, e_n$ を TM の局所フレーム、$\theta^1, \ldots, \theta^n$ をその双対フレームとする。捩率 T は $A^2(TM)$ の元だから

$$T = \sum_{i=1}^n \Theta^i \otimes e_i \quad (\Theta^i \in A^2(M)) \tag{15.2.3}$$

と表せる。すると

$$\Theta^i(e_k, e_l) = d\theta^i(e_k, e_l) + \omega^i_j \wedge \theta^j(e_k, e_l) \tag{15.2.4}$$

すなわち

$$\Theta^i = d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j \tag{15.2.5}$$

が成り立つ。これをアファイン接続 ∇ の**第 1 構造方程式 (first structure equation)** という。

30) 「対称」という語は、接続が対称であるための必要十分条件 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ からきている [Lee18, p.121]。

証明 [TODO] □

Bianchi の第 1 恒等式は、曲率テンソルの非対称性を捩率を用いて表すものである。

命題 15.2.4 (Bianchi の第 1 恒等式).

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 2(DT)(X,Y,Z) \tag{15.2.6}$$

接続形式で書けば

$$\Omega^i_j \wedge \theta^j = d\Theta^i + \omega^i_j \wedge \Theta^j \tag{15.2.7}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

次に定義する曲率形式とは、局所フレームに関する曲率テンソルの行列表示のようなものである。

定義 15.2.5 (曲率形式). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とし、(E_i) を U 上の TM の局所フレームとする。各 j に対し、

$$R(X,Y)(E_j) = \Omega^k_j(X,Y)E_k \tag{15.2.8}$$

と表したときの 2-形式 Ω^k_j らの族 $\Omega := (\Omega^k_j)$ を ∇ の**曲率形式 (curvature form)** という。

曲率は、局所的には接続形式を用いて表せる。

命題 15.2.6 (第 2 構造方程式). M を多様体、$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とし、(E_i) を U 上の TM の局所フレームとする。このとき、曲率形式に関する方程式

$$\Omega^k_j = d\omega^k_j + \omega^k_i \wedge \omega^i_j \tag{15.2.9}$$

が成り立つ。これを接続 ∇ の**第 2 構造方程式 (second structure equation)** という。

証明 [TODO] □

Bianchi の第 2 恒等式は、曲率テンソルの共変外微分が消えることを表す。

命題 15.2.7 (Bianchi の第 2 恒等式).

$$DR = 0 \tag{15.2.10}$$

接続形式で書けば

$$d\Omega^\mu_\lambda - \Omega^\mu_\nu \wedge \omega^\nu_\lambda + \omega^\mu_\nu \wedge \Omega^\nu_\lambda = 0 \tag{15.2.11}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

Ricci の恒等式は、共変微分の非可換性を表すものである。

命題 15.2.8 (Ricci の恒等式)**.**

$$\frac{1}{2}(\nabla^2 K(X,Y) - \nabla^2 K(Y,X)) = -R(X,Y)K + \nabla_{T(X,Y)}K \tag{15.2.12}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

15.3 平行移動

この節では測地線について述べた後、その一般化として平行の概念を導入する。

定義 15.3.1 (測地線)**.** M を多様体とし、∇ を M のアファイン接続とする。M 上の曲線 γ が M の**測地線 (geodesic)** であるとは、γ' 方向の γ' の共変微分が恒等的に 0 であること、すなわち

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' \equiv 0 \tag{15.3.1}$$

が成り立つことをいう。

例 15.3.2 (測地線の例)**.** [TODO]

定義 15.3.3 (平行)**.** M を多様体とし、∇ を M のアファイン接続とする。γ を M 上の曲線とする。γ に沿ったテンソル場 V が γ に沿って**平行 (parallel)** であるとは、γ' 方向の V の共変微分が恒等的に 0 であること、すなわち

$$\nabla_{\gamma'}V \equiv 0 \tag{15.3.2}$$

が成り立つことをいう。

例 15.3.4 (平行なテンソル場の例)**.** [TODO]

- γ が測地線であるとは、その速度ベクトル場が γ 自身に沿って平行であることと同値である。

定義 15.3.5 (平行移動)**.** M を多様体とし、∇ を M のアファイン接続とする。さらに、$\gamma\colon I \to M$ を M 上の曲線とし、$t_0 \in I$, $v \in T_{\gamma'(t_0)}M$ とする。このとき、γ に沿って平行なベクトル場 V であって $V(t_0) = v$ をみたすものがただひとつ存在し、このような V を γ に沿った v の**平行移動 (parallel transport)** という。

第 16 章　ベクトル束の接続

ベクトル束の接続について考える。

16.1　ベクトル束の接続

定義 16.1.1 (ベクトル束の接続). M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする。E の**接続 (connection)** とは、$\mathbb{R}$-線型写像 $\nabla\colon A^0(E) \to A^1(E)$ であって、Leibniz の公式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi \quad (f \in A^0(M),\ \xi \in A^0(E)) \tag{16.1.1}$$

をみたすものである。各 $\xi \in A^0(E),\ X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し、$\nabla\xi(X) \in A^0(E)$ を $\nabla_X\xi$ とも書き、ξ の X 方向の**共変微分 (covariant derivative)** と呼ぶ。

定義からわかるように、接続 ∇ は $C^\infty(M)$-線型ではないが、2 つの接続 ∇, ∇' の差 $\nabla - \nabla'$ は $C^\infty(M)$-線型である。この事実はたとえば情報幾何学において、m-接続と e-接続の差によって Amari-Chentsov テンソルを定義する際に用いられる。

命題 16.1.2 (接続の差は $C^\infty(M)$-線型). M を多様体、E を M 上のベクトル束、∇, ∇' を E の接続とする。このとき $\nabla - \nabla'\colon A^0(E) \to A^1(E),\ \xi \mapsto \nabla\xi - \nabla'\xi$ は $C^\infty(M)$-線型である。

証明

$$\begin{aligned}(\nabla - \nabla')(f\xi) &= \nabla(f\xi) - \nabla'(f\xi) && (16.1.2)\\ &= df \otimes \xi + f\nabla\xi - df \otimes \xi - f\nabla'\xi && (16.1.3)\\ &= f(\nabla - \nabla')\xi && (16.1.4)\end{aligned}$$

より従う。 □

16.2　接続形式

接続形式を導入する。接続形式は、接続の座標表示にあたるものである。

定義 16.2.1 (接続形式). M を多様体、$E \to M$ をランク r のベクトル束、∇ を E の接続とする。さらに $U \overset{\text{open}}{\subset} M$、$\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_r)$ を U 上の E のフレームとする。このとき、U 上の 1-形式の族 $\omega = (\omega^\mu_\lambda)_{\lambda,\mu}$ により

$$\nabla e_\lambda = \sum_\mu \omega^\mu_\lambda \otimes e_\mu \quad (\lambda = 1, \ldots, r) \tag{16.2.1}$$

と書ける。ω をフレーム $\mathcal{E}$ に関する ∇ の**接続形式 (connection form)** という。

もうひとつのフレームに関する接続形式を考えると、ふたつの接続形式の間の変換規則が立ち現れる。

命題 16.2.2 (接続形式の変換規則). 上の定義の状況で、さらに $\mathcal{E}' := (e'_1, \ldots, e'_r)$ も U 上の E のフレームとし、$\mathcal{E}'$ に関する ∇ の接続形式を ω' とする。フレームの取り替えの行列 (a^μ_λ) は

$$e'_\lambda = \sum_\mu a^\mu_\lambda e_\mu \quad (a^\mu_\lambda \in A^0(U)) \tag{16.2.2}$$

とおく。このとき、接続形式の変換規則は

$$\omega' = a^{-1}\omega a + a^{-1}da \tag{16.2.3}$$

となる。

証明 [TODO] □

逆に、$\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ に値をもつ 1-形式の族から接続を構成できる。

命題 16.2.3 (接続形式から定まる接続). M を多様体、$E \to M$ をランク r のベクトル束とする。$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の open cover であって各 U_α 上で g に関するフレーム $\mathcal{E}_\alpha = (e^{(\alpha)}_1, \ldots, e^{(\alpha)}_r)$ を持つものとする。さらに、各 U_α 上の局所自明化 φ_α を $\mathcal{E}_\alpha$ から定め、変換関数を $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ とおく。このとき、$\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ に値をもつ 1-形式の族

$$\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A} \tag{16.2.4}$$

であって、変換規則

$$\omega_\beta = \psi^{-1}_{\alpha\beta}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi^{-1}_{\alpha\beta}\, d\psi_{\alpha\beta} \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta \tag{16.2.5}$$

をみたすものが与えられたならば、次をみたす E の接続が構成できる:

(1) 各フレーム $\mathcal{E}_\alpha$ に関する ∇ の接続形式は ω_α である。

証明 [TODO] □

[TODO] 大域的な与え方と接続形式による与え方

定義 16.2.4 (直和束の接続). [TODO]

定義 16.2.5 (テンソル積束の接続). [TODO]

定義 16.2.6 (双対束の接続). [TODO]

定義 16.2.7 (引き戻し束の接続). [TODO]

16.3 ベクトル束の共変外微分と曲率

微分形式に対する外微分を一般化し、ベクトル束に値をもつ微分形式に対し共変外微分とよばれる演算を定義する。さらに共変外微分から曲率を定義する。

定義 16.3.1 (共変外微分). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、∇ を E の接続、$p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$\mathbb{R}$-線型写像 $D\colon A^p(E) \to A^{p+1}(E)$ を

$$D(\theta \otimes \xi) := d\theta \otimes \xi + \theta \wedge \nabla\xi \quad (\theta \in A^p(M),\ \xi \in A^0(E)) \tag{16.3.1}$$

で定め、D を**共変外微分 (covariant exterior derivative)** という。

注意 16.3.2. とくに $p = 1$ のとき、$\varphi \in A^1(E)$ に対し

$$(D\varphi)(X,Y) = \nabla_X(\varphi(Y)) - \nabla_Y(\varphi(X)) - \varphi([X,Y]) \quad (X,Y \in \Gamma(TM)) \tag{16.3.2}$$

が成り立つ。これは通常の外微分の公式 remark 8.3.4 の拡張になっている。

共変外微分は次の性質をみたす。

命題 16.3.3 (共変外微分の anti-derivation 性 (外積に関して)). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、∇ を E の接続、D を ∇ から定まる共変外微分とする。$p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$D(\theta \wedge \varphi) = d\theta \wedge \varphi + (-1)^p \theta \wedge D\varphi \quad (\theta \in A^p(M),\ \varphi \in A^q(E)) \tag{16.3.3}$$

が成り立つ [31)]。

証明 [TODO] □

ある性質を満たす双線型写像に対し、共変外微分は anti-derivation 性をみたす。

命題 16.3.4 (共変外微分の anti-derivation 性 (双線型写像に関して)). M を多様体、$E \to M$, $E' \to M$ をベクトル束、∇, ∇' をそれぞれ E, E' の接続、D, D' をそれぞれ ∇, ∇' から定まる共変外微分、$g\colon A^0(E) \times A^0(E') \to A^0(M)$ を $C^\infty(M)$-双線型写像とする。D, D' が条件

$$d(g(\xi,\eta)) = g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla'\eta) \quad (\xi \in A^0(E),\ \eta \in A^0(E')) \tag{16.3.5}$$

をみたすならば [32)]、$p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$d(g(\xi,\eta)) = g(D\xi,\eta) + (-1)^p g(\xi,D'\eta) \quad (\xi \in A^p(E),\ \eta \in A^q(E')) \tag{16.3.6}$$

が成り立つ。

31) [小林] では E-値形式を表すときの ξ と θ の順序が逆なので

$$D(\varphi \wedge \theta) = D\varphi \wedge \theta + (-1)^p \varphi \wedge d\theta \tag{16.3.4}$$

という形になっている。

32) とくに g が M の Riemann 計量で $E = E' = TM$ の状況でこの条件が成り立っているならば、∇' は g に関する ∇ の**双対接続 (dual connection)** であるという。

証明 Einstein の記法を用いる。$A^p(E), A^q(E')$ の元はそれぞれ

$$\alpha \otimes \xi \in A^p(E) \quad (\alpha \in A^p(M),\ \xi \in A^0(E)) \tag{16.3.7}$$
$$\beta \otimes \eta \in A^q(E') \quad (\beta \in A^q(M),\ \eta \in A^0(E')) \tag{16.3.8}$$

の形の元の有限和で書けるから、このような形の元について示せば十分である。

$$\nabla\xi = \alpha^i \otimes \xi_i, \quad (\alpha^i \in A^1(M),\ \xi_i \in A^0(E)) \tag{16.3.9}$$
$$\nabla\eta = \beta^j \otimes \eta_j \quad (\beta^j \in A^1(M),\ \eta_j \in A^0(E')) \tag{16.3.10}$$

とおいておく (ただし、Einstein の記法を使うために共変・反変による添字の上下の慣例を一時的に無視している)。まず

$$\begin{aligned}
&d(g(\alpha\otimes\xi, \beta\otimes\eta)) && (16.3.11)\\
&= d(g(\xi,\eta)\alpha\wedge\beta) \quad (\because \text{ベクトル束値形式の内積の定義}) && (16.3.12)\\
&= d(g(\xi,\eta))\alpha\wedge\beta + g(\xi,\eta)d\alpha\wedge\beta + (-1)^p g(\xi,\eta)\alpha\wedge d\beta && (16.3.13)\\
&= d(g(\xi,\eta))\alpha\wedge\beta + g(\xi\otimes d\alpha, \eta\otimes\beta) + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha, \eta\otimes d\beta) && (16.3.14)
\end{aligned}$$

となる。ここで、第 1 項は

$$\begin{aligned}
&d(g(\xi,\eta))\alpha\wedge\beta && (16.3.15)\\
&= g(\nabla\xi,\eta)\alpha\wedge\beta + g(\xi,\nabla'\eta)\alpha\wedge\beta \quad (\because \text{命題の仮定}) && (16.3.16)\\
&= g(\xi_i,\eta)\alpha^i\wedge\alpha\wedge\beta + g(\xi,\eta_j)\beta^j\wedge\alpha\wedge\beta && (16.3.17)\\
&= g(\xi_i,\eta)\alpha^i\wedge\alpha\wedge\beta + (-1)^p g(\xi,\eta_j)\alpha\wedge\beta^j\wedge\beta && (16.3.18)\\
&= g(\xi_i\otimes\alpha^i\wedge\alpha, \eta\otimes\beta) + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha, \eta_j\beta^j\wedge\beta) && (16.3.19)\\
&= g(\nabla\xi\wedge\alpha, \eta\otimes\beta) + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha, \nabla'\eta\wedge\beta) && (16.3.20)
\end{aligned}$$

となる。したがって、(16.3.14) より

$$\begin{aligned}
d(g(\alpha\otimes\xi,\beta\otimes\eta)) &= g(\nabla\xi\wedge\alpha,\eta\otimes\beta) + g(\xi\otimes d\alpha,\eta\otimes\beta) && (16.3.21)\\
&\quad + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha,\nabla'\eta\wedge\beta) + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha,\eta\otimes d\beta) && (16.3.22)\\
&= g(D(\xi\wedge\alpha),\eta\otimes\beta) + (-1)^p g(\xi\otimes\alpha, D'(\eta\wedge\beta)) && (16.3.23)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

曲率を定義する。

定義 16.3.5 (曲率). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、∇ を E の接続、D を ∇ により定まる共変外微分とする。$R := D^2$ とおき、R を ∇ の**曲率 (curvature)** という。

命題 16.3.6. 写像 $R = D^2\colon A^0(E) \to A^2(E)$ は $A^2(\mathrm{End}\,E)$ の元ともみなせる。[TODO] why?

証明 [TODO] □

曲率は、局所的には接続形式を用いて表せる。ここで登場する構造方程式は、アファイン接続の場合の第 2 構造方程式 (命題 15.2.6) に他ならない。それでは第 1 構造方程式はどこにいったのかと気になるが、一般の接続では捩率が定義できないから第 1 構造方程式にあたるものは登場しない。Bianchi の恒等式に関しても同様である。

命題 16.3.7 (構造方程式)**.**

$$\Omega^{\mu}_{\lambda} = d\omega^{\mu}_{\lambda} + \omega^{\mu}_{\nu} \wedge \omega^{\nu}_{\lambda} \tag{16.3.24}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

命題 16.3.8 (Bianchi の恒等式)**.**

$$DR = 0 \tag{16.3.25}$$

接続形式で書けば

$$d\Omega^{\mu}_{\lambda} - \Omega^{\mu}_{\nu} \wedge \omega^{\nu}_{\lambda} + \omega^{\mu}_{\nu} \wedge \Omega^{\nu}_{\lambda} = 0 \tag{16.3.26}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

命題 16.3.9 (Ricci の恒等式)**.** 共変外微分の公式 remark 16.3.2 で $\varphi = D\xi$, $\xi \in A^0(E)$ とおいて計算すると

$$R(X,Y)\xi = D(D\xi)(X,Y) = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\xi \tag{16.3.27}$$

すなわち

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \tag{16.3.28}$$

を得る。これを **Ricci の恒等式 (Ricci's identity)** という。

証明 [TODO] □

定義 16.3.10 (直和束の曲率)**.** [TODO]

定義 16.3.11 (テンソル積束の曲率)**.** [TODO]

定義 16.3.12 (双対束の曲率)**.** [TODO]

定義 16.3.13 (引き戻し束の曲率)**.** [TODO]

第 17 章　主ファイバー束の接続

前章ではベクトル束の接続について考えた。この章ではまず主ファイバー束の接続について 2 通りの定義を述べた後、主ファイバー束の接続とベクトル束の接続との対応について調べる。

17.1　主ファイバー束の接続 (微分形式)

主 G 束 P の接続の定義の方法は 2 つあり、

(1)　1 つ目は P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 形式としての定義である。
(2)　2 つ目は T_uP から垂直部分空間への射影としての定義である。こちらは幾何学的な様子がわかりやすいという利点がある。

この節ではまずは $\mathfrak{g}$ 値 1 形式としての定義で接続を導入する。

A.　主ファイバー束の接続形式

命題 16.2.3 で見たように、ベクトル束の接続は $GL(r;\mathbb{R})$ 値の変換関数と $\mathfrak{gl}(r;\mathbb{R})$ 値の 1 形式により定めることができた。そこで、主 G 束でも同様の方法により $\mathfrak{g}$ 値 1 形式として接続を定義する。

[TODO] こちらはむしろ特徴付けにするべきでは？ゲージポテンシャルを主役とみる立場ならこちらが定義？

定義 17.1.1 (主ファイバー束の接続形式). M を多様体、G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数、$p\colon P \to M$ を主 G 束とする。$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $\bigcup U_\alpha = P$ なる P の局所自明化の族とし、これにより定まる切断の族を $\{\sigma_\alpha\}$ とおく。さらに各 α に対し、ω_α を U_α 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式であって関係式

$$\omega_\beta = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}^{-1}d\varphi_{\alpha\beta} \quad \text{on} \quad U_\alpha \cap U_\beta \tag{17.1.1}$$

をみたすものとする。このとき、P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 ω を各 $p^{-1}(U_\alpha) \subset P$ 上で

$$\omega := s_\alpha^{-1}(\pi^*\omega_\alpha)s_\alpha + s_\alpha^{-1}ds_\alpha \tag{17.1.2}$$

と定めることができる (このあとすぐ示す)。ただし右辺の積は TG における積であり、s_α は

$$s_\alpha := \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to G, \quad (x, \sigma_\alpha(x).s) \mapsto s \tag{17.1.3}$$

と定めた。ω を P の**接続形式 (connection form)** という。

証明　(⇒)　$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $\bigcup U_\alpha = P$ なる P の局所自明化の族とし、これにより定まる切断の族を $\{\sigma_\alpha\}$ とおき、ω はこれにより定まる P の接続形式であるとする。[TODO] □

注意 17.1.2. $\sigma_\alpha^*\omega = \omega_\alpha$ が成り立つ [33]。[TODO]

33)　$\sigma_\alpha^*\omega$ は物理学では**ゲージポテンシャル (gauge potential)** と呼ばれる。

定理 17.1.3 (主ファイバー束の接続形式の特徴付け). M を多様体、G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数、$p\colon P \to M$ を主 G 束とする。$\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1-形式 ω に関し、ω が P の接続形式であることと ω がつぎの条件をみたすこととは同値である:

(1) (G-同変性) $R_a^*\omega = (\mathrm{Ad}\, g^{-1})\omega \quad (a \in G)$

(2) $\omega(A^*) = A \quad (A \in \mathfrak{g})$

証明 [TODO] □

定義 17.1.4 (Ehresmann 接続). M を多様体、$p\colon P \to M$ を主 G 束とする。上の定理の条件 (1), (2) をみたす P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 ω を P 上の **Ehresmann 接続 (Ehresmann connection)** あるいは単に**接続 (connection)** という。

主ファイバー束の接続に対し、Lie 群の構造方程式 (定義 12.6.2) と類似の方程式が成り立つ。したがって

- P の接続は G の接続の一般化
- P の接続の構造方程式は G の構造方程式の一般化

とみることができる。[TODO] どういう意味？

命題 17.1.5 (接続の構造方程式).

$$d\omega = -[\omega, \omega] \tag{17.1.4}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

B. 主ファイバー束の曲率

主ファイバー束の曲率を定義する。ベクトル束の接続の曲率は構造方程式 (命題 16.3.7) をみたすのであった。そこで、主ファイバー束の接続の曲率は逆にこの方程式によって定義する。

定義 17.1.6 (曲率形式). [TODO]

17.2 主ファイバー束の接続 (水平部分空間の方法)

前節では主ファイバー束の接続を微分形式として定義した。この節では水平部分空間の方法を用いて接続を定義する。

A. 接分布

まず基本的な概念を導入しておく。

定義 17.2.1 (接分布). M を多様体とする。$D \subset TM$ が M 上の**接分布 (tangent distribution)** であるとは、D が TM の部分ベクトル束であることをいう。

定義 17.2.2 (積分多様体)**.** M を多様体、$D \subset TM$ を M 上の接分布とする。部分多様体 $N \subset M$ が D の**積分多様体 (integral manifold)** であるとは、

$$T_x N = D_x \quad (\forall x \in N) \tag{17.2.1}$$

が成り立つことをいう。

各 $x \in M$ に対し D のある積分多様体 $N \subset M$ が存在して $x \in N$ となるとき、D は**積分可能 (integrable)** であるという。

定義 17.2.3 (包合的)**.** M を多様体、$D \subset TM$ を M 上の接分布とする。D が**包合的 (involutive)** であるとは、D の任意の局所切断 X, Y に対し $[X, Y]$ も D の局所切断となることをいう。

定理 17.2.4 (Frobenius)**.** [TODO]

B. 垂直接分布と水平接分布

垂直接分布を定義する。垂直接分布は接続とは関係なく主ファイバー束の構造のみによって決まる。

定義 17.2.5 (垂直接分布)**.** M を多様体、$p \colon P \to M$ を主 G 束とする。各 $u \in P$ に対し、$\mathbb{R}$-部分ベクトル空間

$$V_u := \operatorname{Ker} p_* \tag{17.2.2}$$

を $T_u P$ の**垂直部分空間 (vertical subspace)** という。さらに $\coprod_{u \in P} V_u$ は TP の部分ベクトル束となり、これを**垂直接分布 (vertical distribution)** という。

垂直接分布に属する元は**垂直 (vertical)** であるという。

垂直部分空間は次のように表せる。これにより V_u と $\mathfrak{g}$ を同一視すれば、主ファイバー束の接続形式の条件 $\omega(A^*) = A$ とは ω が V_u 上恒等写像であるという条件に他ならない。

命題 17.2.6. $V_u = \{A_u^* \mid A \in \mathfrak{g}\}$ [TODO]

証明 [TODO] □

定理 17.2.7 (垂直接分布は積分可能)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

次に水平部分空間を定義する。水平部分空間とは $T_u P = V_u \oplus H_u$ なる部分空間 H_u のことであるが、H_u は主ファイバー束の構造のみからは決定されない。後で詳しく見るが、主ファイバー束に接続を与えることは、本質的には右不変な水平部分空間を選ぶのと同じことである。

[TODO] あとで接続から水平部分空間が定まることをいうのだから、水平部分空間の定義には接続を含むべきでないのでは？

定義 17.2.8 (水平部分空間). M を多様体、$p\colon P \to M$ を主 G 束、ω を P の接続形式とする。各 $u \in P$ に対し、$\mathbb{R}$-部分ベクトル空間

$$H_u := \operatorname{Ker} \omega_u \tag{17.2.3}$$

を $T_u P$ の**水平部分空間 (horizontal subspace)** という。

C. 水平接分布と接続

水平接分布により主ファイバー束の接続を特徴付ける。

定理 17.2.9 (水平接分布から接続へ). $p\colon P \to M$ を主 G 束、H を右不変な水平接分布とする。このとき、P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 ω を

$$\omega_u\colon T_u P \to V_u \to \mathfrak{g} \tag{17.2.4}$$

により定めると、ω は P 上の接続となる。

証明 [TODO] cf. [Tu] p.255 □

定理 17.2.10 (接続から水平接分布へ). $p\colon P \to M$ を主 G 束、ω を P 上の接続とする。このとき、$H_u := \operatorname{Ker} \omega_u$ は P の右不変な水平部分空間である。

証明 [TODO] cf. [Tu] p.257 □

主ファイバー束の曲率形式も水平接分布を用いて表すことができる。

命題 17.2.11. 接続形式 ω の曲率形式 Ω は

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) \quad (X, Y \in T_u P) \tag{17.2.5}$$

をみたす。

証明 [TODO] □

水平接分布の積分可能性と曲率には密接な関係がある。

定理 17.2.12 (水平接分布の積分可能性). P の水平接分布 $\coprod_{u \in P} H_u$ に関し次は同値である:

(1) $\coprod H_u$ は積分可能である。
(2) P の曲率は 0 である。

証明 [TODO] □

17.3 同伴ベクトル束の接続

同伴ベクトル束を思い出そう。14.2 B 節 で見たように、主ファイバー束 P と表現 ρ から同伴ベクトル束 $E = P \times_\rho \mathbb{R}^r$ が構成できるのであった。このとき、P の共変外微分から E に共変外微分が誘導される。とくに P の接続形式から E の接続形式が定まる。

定理 17.3.1 (微分形式の対応)**.** P 上の $\mathbb{R}^r$ 値 p-形式 $\widetilde{\xi}$ で

(1) $R_a^*\widetilde{\xi} = \rho(a)^{-1}\widetilde{\xi} \quad (a \in G)$

(2) ある i で X_i が垂直ならば $\widetilde{\xi}(X_1, \ldots, X_p) = 0$

をみたすもの全体の空間を $\widetilde{A}^p(P)$ とおく。$A^p(E)$ と $\widetilde{A}^p(P)$ は次の対応により 1:1 に対応する。

$$\widetilde{\xi}(X_1, \ldots, X_p) = u^{-1}(\xi(\pi_* X_1, \ldots, \pi_* X_p)) \quad (X_1, \ldots, X_p \in T_u P) \tag{17.3.1}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

命題 17.3.2. 上の定理の対応は外積代数 $A(E)$ から $\widetilde{A}(P)$ への $A(M)$-加群同型である。[TODO]

証明 [TODO] □

$\widetilde{A}(P)$ に共変外微分を定義し、上の同型により $A(E)$ に共変外微分を誘導する。

定義 17.3.3 ($\widetilde{A}(P)$ の共変外微分)**.**

$$D\widetilde{\xi}(X_1, \ldots, X_{p+1}) = d\widetilde{\xi}(X_1^H, \ldots, X_{p+1}^H) \quad (X_1, \ldots, X_{p+1} \in T_u P) \tag{17.3.2}$$

[TODO]

$D\widetilde{\xi}$ は次のように書くこともできる。

命題 17.3.4.

$$D\widetilde{\xi} = d\widetilde{\xi} + \rho(\omega) \wedge \widetilde{\xi} \tag{17.3.3}$$

[TODO]

証明 [TODO] □

17.4 平行移動とホロノミー

この節では、平行移動とホロノミーについて述べる。

A. ベクトル束の平行移動とホロノミー

さて、ここで曲線 γ に沿う ξ の共変微分「$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi$」を定義したい。ところが、ややこしいことに「曲線 γ に沿う E の切断」は「E の切断」ではないため、「$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi$」という文字列に正確な意味を与えるにはさらなる定義が必要となる。

[TODO] 引き戻しを用いて定義したほうがよさそう cf. [Tu] p. 262

定義 17.4.1 (曲線に沿う切断の拡張可能性). M を多様体、$\pi\colon E \to M$ をベクトル束、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線とする。曲線 γ に沿う E の切断 $\xi\colon J \to E$ が**拡張可能 (extendible)** であるとは、γ の像 $\gamma(J)$ を含む $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の E の切断 $\widetilde{\xi}$ が存在して

$$\widetilde{\xi}_{\gamma(t)} = \xi_t \quad (\forall t \in J) \tag{17.4.1}$$

が成り立つことをいう。$\widetilde{\xi}$ を ξ **の拡張**という。

例 17.4.2 (拡張可能でない例). 8 の字曲線 $\gamma\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\sin t, \sin t \cos t)$ の速度ベクトル $\dot{\gamma}$ は拡張可能でない。なぜならば、8 の字の中央部分で速度ベクトルが 2 方向に出ているからである。

定義 17.4.3 (曲線に沿う共変微分). 上の定義の状況で、さらに ∇ を E の接続とし、ξ は拡張可能であるとする。このとき、ξ の拡張 $\widetilde{\xi} \in \Gamma(E)$ をひとつ選び

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi \coloneqq \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\widetilde{\xi} \quad (t \in J) \tag{17.4.2}$$

と定義し、これを**曲線 γ に沿う共変微分 (covariant derivative along γ)** という。これは $\widetilde{\xi}$ の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

命題 17.4.4. 上の定義の状況で、さらに $\widetilde{\xi} \in \Gamma(E)$ を ξ の拡張、$t \in J$、U を M における $\gamma(t)$ の開近傍、$e_1, \ldots, e_r$ を U 上の E の局所フレーム、$x^1, \ldots, x^n$ を U 上の M の局所座標とする。$\widetilde{\xi}$ を局所的に

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}^\lambda e_\lambda \quad (\widetilde{\xi}^\lambda \in C^\infty(U)) \tag{17.4.3}$$

と表し、$\xi^\lambda \coloneqq \widetilde{\xi}^\lambda \circ \gamma$ とおく。また ∇e_μ を局所的に

$$\nabla e_\mu = \omega_\mu^\lambda \otimes e_\lambda \quad (\omega_\mu^\lambda \in A^1(U)) \tag{17.4.4}$$

$$= \Gamma_{\mu i}^\lambda dx^i \otimes e_\lambda \quad (\Gamma_{\mu i}^\lambda \in C^\infty(U)) \tag{17.4.5}$$

と表す。このとき

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi = \left\{ \frac{d\xi^\lambda}{dt}(t) + \xi^\mu(t)\Gamma_{\mu i}^\lambda(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t) \right\} (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{17.4.6}$$

が成り立つ。したがってとくに $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi$ の値は $\widetilde{\xi}$ の選び方によらず well-defined に定まる。

証明　まず記法を整理すると

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi = \nabla_{\dot\gamma(t)}\widetilde{\xi} = (\nabla\widetilde{\xi})(\dot\gamma(t)) = \underbrace{(\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)}}_{\in T^*_{\gamma(t)}M\otimes E_{\gamma(t)}}\,(\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\in T_{\gamma(t)}M}) \tag{17.4.7}$$

と書けることに注意する。そこで $\nabla\widetilde{\xi}$ を変形すると

$$\nabla\widetilde{\xi} = d\widetilde{\xi}^\lambda \otimes e_\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \nabla e_\mu \tag{17.4.8}$$
$$= d\widetilde{\xi}^\lambda \otimes e_\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \Gamma^\lambda_{\mu i} dx^i \otimes e_\lambda \tag{17.4.9}$$
$$= \left\{ d\widetilde{\xi}^\lambda + \widetilde{\xi}^\mu \Gamma^\lambda_{\mu i} dx^i \right\} \otimes e_\lambda \tag{17.4.10}$$

となるから、点 $\gamma(t)$ での値は

$$(\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)} = \left\{ d\widetilde{\xi}^\lambda_{\gamma(t)} + \widetilde{\xi}^\mu(\gamma(t))\Gamma^\lambda_{\mu i}(\gamma(t)) dx^i_{\gamma(t)} \right\} \otimes (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{17.4.11}$$
$$= \left\{ d\widetilde{\xi}^\lambda_{\gamma(t)} + \xi^\mu(\gamma(t))\Gamma^\lambda_{\mu i}(\gamma(t)) dx^i_{\gamma(t)} \right\} \otimes (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{17.4.12}$$

である。ここで

$$(d\widetilde{\xi}^\lambda)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t} \widetilde{\xi}^\lambda \circ \gamma(t) = \frac{d\xi^\lambda}{dt}(t) \tag{17.4.13}$$
$$(dx^i)_\gamma(t)(\dot\gamma(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t} x^i \circ \gamma(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \tag{17.4.14}$$

だから

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi = (\nabla\widetilde{\xi})_{\gamma(t)} = \left\{ \frac{d\xi^\lambda}{dt}(t) + \xi^\mu(t)\Gamma^\lambda_{\mu i}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t) \right\} (e_\lambda)_{\gamma(t)} \tag{17.4.15}$$

を得る。関数 ξ^λ は $\widetilde{\xi}$ の選び方によらないから well-defined 性もいえた。 □

測地線の一般化として、平行の概念を定義する。

定義 17.4.5 (平行)**.** M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、∇ を E の接続、J を $\mathbb{R}$ の区間、$\gamma\colon J \to M$ を C^∞ 曲線、ξ を曲線 γ に沿う E の切断とする。ξ が

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\xi = 0 \quad (\forall t \in J) \tag{17.4.16}$$

をみたすとき、ξ は**曲線 γ に沿って平行 (parallel along γ)** であるという。上の命題より、これは次の斉次 1 階常微分方程式系が成り立つことと同値である:

$$\frac{d\xi^\lambda}{dt}(t) + \xi^\mu(t)\Gamma^\lambda_{\mu i}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}(t) = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots, r) \tag{17.4.17}$$

$\boldsymbol{\xi} := {}^t(\xi^1, \ldots, \xi^r)$, $A := \left(\Gamma^\lambda_{\mu i}\dfrac{d\gamma^i}{dt} \right)_{\lambda,\mu}$ とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = -A\boldsymbol{\xi} \tag{17.4.18}$$

と書ける。

注意 17.4.6. 測地線とは、その速度ベクトルが自身に沿って平行な曲線のことである。

定義 17.4.7 (平行移動). 上の命題の状況でさらに $J = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ とするとき、初期値問題の解の存在と一意性より任意の $\xi_a \in E_{\gamma(a)}$ に対し $\xi(a) = \xi_a$ なる解 ξ が一意に定まる。このとき、ξ は ξ_a を曲線 γ に沿って**平行移動 (parallel displacement)** して得られたという [34)]。

命題 17.4.8. 上の定義の状況で、写像

$$E_{\gamma(a)} \to E_{\gamma(b)}, \quad \xi_a \mapsto \xi_b := \xi(b) \tag{17.4.19}$$

は $\mathbb{R}$-線型同型である。

証明 初期値問題の解の存在と一意性より、写像であることはよい。全射性は $t = b$ での ξ の値を指定した初期値問題を考えればよい。$\mathbb{R}$-スカラー倍を保つことは次のようにしてわかる: ξ が $\xi(a) = \xi_a$ なる解であったとすると、各 $c \in \mathbb{R}$ に対し $\eta(t) := c\xi(t)$ は $\eta(a) = c\xi_a$ をみたすただひとつの解であるから、$c\xi_a = \eta(a)$ を曲線 γ に沿って平行移動して得られる値は $\eta(b) = c\xi(b) = c\xi_b$ に他ならない。和を保つことも同様にして示せる。よって命題の写像は全射 $\mathbb{R}$-線型写像である。$\dim_{\mathbb{R}} E_{\gamma(a)} = \dim_{\mathbb{R}} E_{\gamma(b)}$ より $\mathbb{R}$-線型同型であることが従う。 □

定義 17.4.9 (ベクトル束の接続のホロノミー群). $x_0 \in M$ とする。x_0 を基点とする区分的に C^∞ な任意の閉曲線 c に対し、平行移動により $\mathbb{R}$-ベクトル空間 E_{x_0} の自己同型写像 (τ_c とおく) が得られる。そこで

$$\Psi_{x_0} := \{\tau_c \in GL(E_{x_0}) \mid c \text{ は } x_0 \text{ を基点とする区分的に } C^\infty \text{ な閉曲線}\} \tag{17.4.20}$$

とおくと、Ψ_{x_0} は $GL(E_{x_0})$ の部分群となる (このあと示す)。Ψ_{x_0} を x_0 を基点とする**ホロノミー群 (holonomy group)** という。

証明 写像の合成について閉じていること $\tau_c, \tau_{c'} \in \Psi_{x_0}$ とすると $c \circ c'$ は x_0 を基点とする区分的に C^∞ な閉曲線であり、$\tau_c \circ \tau_{c'} = \tau_{c \circ c'}$ が成り立つ。

単位元を含むこと 定値曲線 x_0 に対し $\tau_{x_0} \in \Psi_{x_0}$ が恒等写像となる。

逆元を含むこと $\tau_c \in \Psi_{x_0}$ とする。c を逆向きに動く曲線 d を $d(t) := c(a + b - t)$ $t \in [a, b]$ で定め、ξ を逆向きに動く曲線 η を $\eta(t) := \xi(a + b - t)$ $t \in [a, b]$ で定める。このとき d は x_0 を基点とする区分的に C^∞ な閉曲線だから $\tau_d \in \Psi_{x_0}$ である。また、η は d に沿う E の切断である。さらに η が d に沿って平行であることは、ξ の拡張を $\widetilde{\xi}$ として (これは η の拡張でもある)

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{d}(t)}\eta &= \nabla_{\dot{d}(t)}\widetilde{\xi} && (17.4.21)\\ &= \nabla_{-\dot{c}(a+b-t)}\widetilde{\xi} && (17.4.22)\\ &= -\nabla_{\dot{c}(a+b-t)}\widetilde{\xi} && (17.4.23)\\ &= -\nabla_{\dot{c}(a+b-t)}\xi && (17.4.24) \end{aligned}$$

34) 最適化の分野では、指数写像や平行移動の数値計算のために、これらの代替となる**レトラクション (retraction)** や**ベクトル輸送 (vector transport)** が用いられる。

$$= 0 \tag{17.4.25}$$

よりわかる。よって $\xi_b = \eta(a)$ を d に沿って平行移動すると $\eta(b) = \xi(a) = \xi_a$ が得られる。したがって $\eta_d = \eta_c^{-1}$ である。 □

B. 主ファイバー束の平行移動とホロノミー

定義 17.4.10 (水平な曲線). M を多様体、G を Lie 群、$p\colon P \to M$ を主 G 束、ω を P の接続形式、$J \subset \mathbb{R}$ を区間とする。C^∞ 曲線 $u\colon J \to P$ が**水平 (horizontal)** であるとは、u の速度ベクトル $\dot{u}$ がつねに水平部分空間に含まれること、すなわち

$$\omega(\dot{u}(t)) = 0 \quad (\forall t \in J) \tag{17.4.26}$$

が成り立つことをいう。

定義 17.4.11 (平行移動). M を多様体、G を Lie 群、$p\colon P \to M$ を主 G 束、ω を P の接続形式、$J \subset \mathbb{R}$ を区間、$x\colon J \to M$ を $x_0 \in M$ を始点とする C^∞ 曲線とする。このとき各 $u_0 \in P_{x_0}$ に対し、u_0 を始点とする水平な C^∞ 曲線 $u\colon J \to P$ であって

$$\pi(u(t)) = x(t) \quad (t \in J) \tag{17.4.27}$$

をみたすものが一意に存在する (証明略)。このとき、u は曲線 x に沿った u_0 の**平行移動 (parallel displacement)** であるという。

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "p"] \\ J \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "x"'] & M \end{tikzcd} \tag{17.4.28}$$

命題 17.4.12. u が水平ならば、任意の $s \in G$ に対し $u(t).s$ も水平である。

証明 水平接分布が G の作用で保たれることより明らか。 □

定義 17.4.13 (主ファイバー束の接続のホロノミー群). $u_0 \in P$ とし、$x_0 = p(u_0)$ とおく。x_0 を始点とする M 内の任意の閉曲線 c に対し、x に沿った u_0 の平行移動を u とおくと

$$u(b) = u_0.\tau_c \tag{17.4.29}$$

なる $\tau_c \in G$ が一意に定まる。このような τ_c 全体の集合を Ψ_{u_0} とおくと、Ψ_{u_0} は G の部分群となる。Ψ_{u_0} を u_0 を始点とする ω の**ホロノミー群 (holonomy group)** という。

命題 17.4.14 (ホロノミー群の共役). $u_0, u_1 \in P$ とし、$x_0 = p(u_0)$, $x_1 = p(u_1)$ とおく。c_0 を x_0 から x_1 への区分的に C^∞ な曲線とし、曲線 c_0 に沿った u_0 の平行移動を $\widetilde{c}_0$ とおく。すると $\widetilde{c}_0(b) = u_1.a$ なる $a \in G$ がただひとつ存在するが、このとき $\Psi_{u_1} = a\Psi_{u_0}a^{-1}$ が成り立つ。

証明　$a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1}$ および $a^{-1}\Psi_{u_1}a \subset \Psi_{u_0}$ を示せばよい。実際、これらが示されたならば $a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1} = aa^{-1}\Psi_{u_1}aa^{-1} \subset a\Psi_{u_0}a^{-1}$ より $a\Psi_{u_0}a^{-1} = \Psi_{u_1}$ が従う。さらに u_0, u_1 に関する対称性より $a\Psi_{u_0}a^{-1} \subset \Psi_{u_1}$ を示せば十分。そこで $\tau_c \in \Psi_{u_1}$ とし、c に沿う u_0 の平行移動を $\widetilde{c}$ とおき、$a\tau_c a^{-1} \in \Psi_{u_0}$ を示す。そのためには $a\tau_c a^{-1} = \tau_{c_0 \circ c \circ c_0^{-1}}$ であること、すなわち $c_0 \circ c \circ c_0^{-1}$ に沿う u_1 の平行移動の終点が $u_1.a\tau_c a^{-1}$ であることをいえばよい。

まず c_0^{-1} に沿う u_1 の平行移動は $R_{a^{-1}} \circ \widetilde{c_0}^{-1}$ であり、その終点は $u_0.a^{-1}$ である。

つぎに c に沿う $u_0.a^{-1}$ の平行移動は $R_{a^{-1}} \circ \widetilde{c}$ であり、その終点は $u_0.\tau_c a^{-1}$ である。

最後に c_0 に沿う $u_0.\tau_c a^{-1}$ の平行移動は $R_{\tau_c a^{-1}} \circ \widetilde{c_0}$ であり、その終点は $u_1.a\tau_c a^{-1}$ である。これが示したいことであった。 □

第 18 章　特性類

特性類について述べる。特性類はベクトル束の位相不変量である。

18.1　複素ベクトル束

定義 18.1.1 (Complex Vector Bundles). [TODO]

18.2　Euler 類

[TODO]

18.3　Chern 類

[TODO]

第 III 部

計量と Riemann 多様体

この部では計量を持つ多様体、すなわち擬 Riemann 多様体について論じる。また、すでに述べた接続の概念と計量との関係についても調べる。とくに、Riemann 多様体のアファイン接続にいくつかの自然な制約を課すと接続が一意に定まり、これは Levi-Civita 接続と呼ばれる。

微分幾何学において、多様体の外在的な性質と内在的な性質はそれぞれ異なる重要性を持つ。多様体の外在的な性質とは多様体が埋め込まれている空間に由来する性質であり、内在的な性質とは多様体自身が持つ性質である。

[TODO]

第 19 章　擬 Riemann 多様体

19.1　擬 Riemann 多様体

計量については 7.3 節で述べた。

定義 19.1.1 (擬 Riemann 多様体). [TODO] 計量を持つ多様体はパラコンパクトか？多様体 M と M 上の擬 Riemann 計量 g の組 (M, g) を**擬 Riemann 多様体 (pseudo-Riemannian manifold)** という。

擬 Riemann 計量により多様体上 [TODO] というよりは接空間上？にノルムや角度などの幾何学的概念が導入される。

定義 19.1.2 (ノルム). (M, g) を擬 Riemann 多様体、$p \in M$ とする。$v \in T_pM$ に対し

$$|v|_g := \sqrt{\langle v, v \rangle_g} \tag{19.1.1}$$

と書き、これを v の**ノルム (norm)** という。

定義 19.1.3 (角度). [TODO]

擬 Riemann 計量の成分表示には特別な記法を用いる。

定義 19.1.4 (計量の成分表示). (M, g) を擬 Riemann 多様体、$x^1, \ldots, x^n$ を局所座標とする。この座標の座標フレームに関する g の成分を g_{ij} と書くことにする。すなわち

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \tag{19.1.2}$$

である。さらに、g が非退化対称であることから $(g_{ij})_{i,j}$ は正則な対称行列である。そこで (g_{ij}) は逆行列を持つが、これは添字を上げて $(g^{ij})_{i,j}$ と書くことにする。

命題 19.1.5 (計量の成分と座標変換).

$$g_{ab} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^a} \frac{\partial x^j}{\partial u^b} \tag{19.1.3}$$

これは行列表示の合同変換になっている (したがって Sylvester の慣性法則が適用される)。[TODO]

証明　[TODO] □

19.2　Riemann 多様体の構成

通常の多様体における部分多様体や積多様体の構成と同様に、擬 Riemann 多様体においても部分多様体や積多様体が定義される。

定義 19.2.1 (Riemann 部分多様体). [TODO]

命題 19.2.2 (Riemann 部分多様体の計量).

$$g(u,v) = \widetilde{g}(u,v) \tag{19.2.1}$$

[TODO]

証明 部分多様体の接空間の同一視 $d\iota(u) = u$ による。[TODO] □

19.3 等長写像と平坦性

定義 19.3.1 (等長写像). $(M,g),(\widetilde{M},\widetilde{g})$ を擬 Riemann 多様体とする。微分同相写像 $\varphi\colon M \to \widetilde{M}$ が**等長写像 (isometry)** であるとは、次の同値な条件のうち少なくとも 1 つ (したがってすべて) をみたすことをいう:

(1) 引き戻しにより計量が一致する。すなわち $\varphi^*\widetilde{g} = g$ が成り立つ。
(2) 各 $p \in M$ に対し、$d\varphi_p\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ は計量同型写像である。

等長写像 $(M,g) \to (\widetilde{M},\widetilde{g})$ が存在するとき、(M,g) と $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ は**等長 (isometric)** であるという。

同値性の証明. [TODO] □

定義 19.3.2 (局所等長). [TODO]

定義 19.3.3 (平坦). n 次元擬 Riemann 多様体 (M,g) が**平坦 (flat)** であるとは、$\mathbb{R}^n$ と局所等長であることをいう。

19.4 擬 Riemann 多様体上の微分形式

擬 Riemann 多様体においては、擬 Riemann 計量を用いて接ベクトルと余接ベクトルを互いに変換し合うことができる。

定義 19.4.1 (音楽同型). (M,g) を擬 Riemann 多様体とし、束同型 $\widehat{g}\colon TM \to T^*M$

$$\widehat{g}(v)(w) := g_p(v,w) \quad (p \in M,\ v,w \in T_pM) \tag{19.4.1}$$

を考える。$(E_i)_i$ を TM の局所フレーム、$(\varepsilon^i)_i$ をその双対フレームとする。

- $X \in \mathfrak{X}M$ とすると、X のフレーム表示 $X = X^iE_i$ に対し $\widehat{g}(X) = (g_{ij}X^i)\varepsilon_j$ が成り立つ。そこで $X_j := g^{ij}X^i$ とおくと、$\widehat{g}(X) = X_j\varepsilon_j$ が成り立つ。この記法を念頭に、$\widehat{g}(X)$ を $X^\flat$ と書き、**X の添字を下げて (lowering an index)** 得られたという。
- $\omega \in \Omega(M)$ とすると、ω のフレーム表示 $\omega = \omega^i\varepsilon_i$ に対し $\widehat{g}^{-1}(\omega) = (g^{ij}\omega_j)E_i$ が成り立つ。そこで $\omega^i := g_{ij}\omega_j$ とおくと、$\widehat{g}^{-1}(\omega) = \omega^iE_i$ が成り立つ。この記法を念頭に、$\widehat{g}^{-1}(\omega)$ を $\omega^\sharp$ と書き、**ω の添字を上げて (raising an index)** 得られたという。

$\flat, \sharp$ で表される束同型を**音楽同型 (musical isomorphisms)** という。

音楽同型を用いて定義される最も重要な概念が勾配である。

定義 19.4.2 (勾配). (M, g) を擬 Riemann 多様体、f を M 上の C^∞ 実数値関数、X を M 上のベクトル場とする。ベクトル場

$$\operatorname{grad} f := (df)^\sharp \tag{19.4.2}$$

を f の**勾配 (gradient)** という。

命題 19.4.3 (勾配の性質). (M, g) を Riemann 多様体とし、X を M 上のベクトル場とする。このとき

$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g = Xf \tag{19.4.3}$$

が成り立つ。

証明 定義に基づいて変形すれば

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g &= (\operatorname{grad} f)^\flat(X) && (19.4.4)\\ &= (df^\sharp)^\flat(X) && (19.4.5)\\ &= df(X) && (19.4.6)\\ &= Xf && (19.4.7) \end{aligned}$$

を得る。 □

定義 19.4.4 (回転). ベクトル場

$$\operatorname{curl} X := \beta^{-1} d(X^\flat) \tag{19.4.8}$$

を X の**回転 (curl)** という。[TODO]

[TODO] Lie 微分と関係がある？

定義 19.4.5 (発散). 関数

$$\operatorname{div} X := *^{-1} d(\beta(X)) \tag{19.4.9}$$

を X の**発散 (divergence)** という。[TODO]

19.5 Riemann 多様体上の積分

A. 弧長積分

弧長積分は 1 次元の積分である。

定義 19.5.1 (曲線の弧長). (M, g) を Riemann 多様体、$\gamma\colon [a, b] \to M$ を M 上の C^∞ 曲線とする。このとき、曲線 γ の**弧長 (arc length)** を

$$L_g(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|_g \, dt \tag{19.5.1}$$

で定義する。

例 19.5.2 (単位円周の弧長). [TODO]

B. 面積分

面積分は余次元 1 の積分である。

[TODO]

C. 体積分

体積分は最高次の積分である。

定義 19.5.3 (計量に付随する体積形式). M を向きづけられた n 次元多様体、g を M 上の計量、$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を与えられた M の向きを定める atlas とし、各 $\alpha \in A$ に対し $\varphi_\alpha =: (x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha n})$ とおいて U_α 上で

$$g = g_{\alpha ij} dx_{\alpha i} \otimes dx_{\alpha j} \tag{19.5.2}$$

と座標表示する。このとき、$\omega_\alpha \in \Omega^n(U_\alpha)$ を

$$\omega_\alpha := \sqrt{|\det g_\alpha|}\, dx_{\alpha 1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha n} \tag{19.5.3}$$

と定めると、ω_α らをはりあわせて M 上の nonvanishing な最高次形式 ω が定まる (このあとすぐ示す)。ω を g に付随する**体積形式 (volume form)** といい、$d\mathrm{vol}_g$ や vol_g と書く。

証明 [TODO] □

例 19.5.4 (S^n の体積). S^n の体積 ($n = 1$ なら円周の長さ、$n = 2$ なら球の表面積) を求める。S^n の表示は色々あるが、ここでは立体射影を用いる。$S^n \setminus \{N\}$ は立体射影 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(x) = \frac{(2x, |x|^2 - 1)}{|x|^2 + 1} \tag{19.5.4}$$

の像である。そこで、f が $\mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$ の向きを保つ微分同相であること [35] にも注意すれば、

$$\begin{aligned}
\int_{S^n} dV_{i^*\overline{g}} &= \int_{\mathbb{R}^n} f^* dV_{i^*\overline{g}} \quad (\text{命題 } 10.1.5) && (19.5.5)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^* \left(\sqrt{\det(i^*\overline{g}_{ij})}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \right) \quad (\text{??}) && (19.5.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\det(i^*\overline{g}_{ij} \circ f)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (\text{命題 } 5.3.2) && (19.5.7)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、$(y^i) := f^{-1}$ とおいた。ここで

$$\begin{aligned}
f^*(i^*\overline{g}) &= f^*(i^*\overline{g}_{ij}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) && (19.5.8)\\
&= i^*\overline{g}_{ij} \circ f\, d(y^1 \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ f) && (19.5.9)\\
&= i^*\overline{g}_{ij} \circ f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n && (19.5.10)
\end{aligned}$$

だから

$$i^*\overline{g}_{ij} \circ f = f^* i^* \overline{g}_{ij} = (i \circ f)^* \overline{g}_{ij} \tag{19.5.11}$$

である ($i^*\overline{g}_{ij}$ は (y^i) に関する局所座標表示の係数、$(i \circ f)^*\overline{g}_{ij}$ は (x^i) に関する局所座標表示の係数)。よって、上の計算を続けて

$$\int_{S^n} dV_{i^*\overline{g}} = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\det((i \circ f)^*\overline{g}_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{19.5.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\det((i \circ f)^*\overline{g}_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n \tag{19.5.13}$$

が成り立つ。直接計算により

$$(i \circ f)^*\overline{g} = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^2 (dx^1 dx^1 + \cdots + dx^n dx^n) \tag{19.5.14}$$

であるから、

$$\sqrt{\det((i \circ f)^*\overline{g})_{ij}} = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^n \tag{19.5.15}$$

である。よって、たとえば S^1 の体積 (円周の長さ) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+|x|^2}\, dx = 2\pi \tag{19.5.16}$$

である。S^2 の体積 (球の表面積) は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy = 4\pi \tag{19.5.17}$$

である。

定理 19.5.5 (発散定理; Green の定理). (M, g) を向き付けられた Riemann 多様体とする。このとき、M 上の compactly supported な任意のベクトル場 X に対し

$$\int_M \operatorname{div} X\, dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g\, dV_{\tilde{g}} \tag{19.5.18}$$

が成り立つ。ただし、N は ∂M に沿った外向き単位法線ベクトル場であり、$\tilde{g}$ は ∂M 上の誘導計量である。

証明 cf. [Lee] p.424 □

定義 19.5.6 (表面積分). [TODO]

35) ただし、f は等長写像ではない。

第 20 章　擬 Riemann 多様体の例

この章では擬 Riemann 多様体の具体例に触れる。

20.1　Euclid 空間

$(\mathbb{R}^n, \overline{g})$ の等長変換は

$$(b, A) \cdot x = b + Ax \quad (b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{O}(n)) \tag{20.1.1}$$

で尽くされる。等長変換群 $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, \overline{g})$ は半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes_\theta \mathrm{O}(n)$ である。[TODO] proof

20.2　球面

$(S^n, \mathring{g})$ の等長変換群 $\mathrm{Iso}(S^n, \mathring{g})$ は $\mathrm{O}(n+1)$ である。

[TODO] proof

20.3　トーラス

命題 20.3.1 (トーラスの平坦性)**.** トーラス T^n に $\mathbb{R}^{2n}$ からの誘導計量を入れた Riemann 多様体は平坦である。

[TODO] 平坦とは？

証明　パラメータ付け $X \colon \mathbb{R}^n \to T^n$,

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (\cos u^i, \sin u^i)_{i=1}^n \tag{20.3.1}$$

を考える。$\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n$ の Euclid 計量をそれぞれ $\overline{g}, \overline{g}'$ とおき、T^n の誘導計量を g とおく。また、X の局所的な逆写像を φ とおく。状況を大まかに表した図式が次である：

$$(\mathbb{R}^n, \overline{g}') \underset{\varphi}{\overset{X}{\rightleftarrows}} (T^n, g) \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}^{2n}, \overline{g}) \tag{20.3.2}$$

(T^n, g) が平坦であることを示すには、φ^{-1} が等長写像であること、すなわち

$$(\varphi^{-1})^* g = \overline{g}' \tag{20.3.3}$$

をいえばよい。左辺をより計算しやすい $\overline{g}$ で表すと、

$$(\varphi^{-1})^* g = X^* g = X^* i^* \overline{g} = (i \circ X)^* \overline{g} \tag{20.3.4}$$

となる。ここで、局所座標表示により

$$\begin{aligned}
(i \circ X)^* \overline{g} &= (i \circ X)^*(dx^j dx^j) && (20.3.5)\\
&= d(\cos u^j)^2 + d(\sin u^j)^2 && (20.3.6)\\
&= (-\sin u^j \, du^j)^2 + (\cos u^j \, du^j)^2 && (20.3.7)\\
&= \sin^2 u^j \, du^j du^j + \cos^2 u^j \, du^j du^j && (20.3.8)\\
&= du^j du^j && (20.3.9)
\end{aligned}$$

$$= \overline{g}' \tag{20.3.10}$$

を得る。よって $(\varphi^{-1})^* g = \overline{g}'$ がいえた。 □

20.4 双曲空間

[TODO]

20.5 等質空間

[TODO]

第 21 章　計量と接続

この章では計量と接続の関係について述べる。第 2 部で見たように、アファイン接続は曲率や測地線などの幾何学的概念を提供する。一方、本章で詳しく調べる Riemann 計量もまたいくつかの幾何学的概念をもたらす。どの幾何学的概念が接続と計量のいずれに由来するのか、はっきりと区別しておくことは重要である。そこで下に一覧を整理しておく。

- 接続に由来する概念
  (1) 平行移動
  (2) 共変微分
  (3) 測地線
  (4) 曲率
- 計量に由来する概念
  (1) 曲線の長さ
  (2) 距離
  (3) 直交性

21.1　計量を保つ接続

[TODO] 符号の一貫性や正定値性を使っているか？

定義 21.1.1 (計量を保つ接続). M を多様体、$E \to M$ をベクトル束、g を E の計量、∇ を E の接続とする。∇ が **g を保つ (preserve)**、あるいは g が ∇ に関し**平行 (parallel)** であるとは、

$$X(g(\xi,\eta)) = g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta) \quad (X \in \mathfrak{X}(M),\ \xi,\eta \in A^0(E)) \tag{21.1.1}$$

が成り立つことをいう。同じことだが、X を使わずに書けば

$$d(g(\xi,\eta)) = g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla\eta) \tag{21.1.2}$$

となる。

命題 21.1.2 (計量を保つ接続の特徴付け). M を多様体、$E \to M$ をランク r のベクトル束、g を E の計量、∇ を E の接続とする。このとき、次は同値である:

(1) ∇ が g を保つ。
(2) $\nabla g = 0$

証明　Eistein の記法を用いる。同値をいうには

$$X(g(\xi,\eta)) = (\nabla_X g)(\xi,\eta) + g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta) \quad (X \in \mathfrak{X}(M),\ \xi,\eta \in A^0(E)) \tag{21.1.3}$$

を示せばよい。まず $X \in \mathfrak{X}(M),\ \xi,\eta \in A^0(E)$ とする。局所フレーム $(e_1,\dots,e_r)$ をひとつ選び、その双対を

$(e^1, \ldots, e^r)$ とおく。g, ξ, η を局所的に

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad \xi = \xi^k e_k, \quad \eta = \eta^l e_l \tag{21.1.4}$$

と表示しておく。ここで、次が成り立つことに注意する (縮約については 3.8 節を参照):

$$\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X (e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l)) = 0 \tag{21.1.5}$$

$\because$ 左辺を変形して

$$\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X (e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l)) \tag{21.1.6}$$
$$= \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}\Big(\nabla_X e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l + e^i \otimes \nabla_X e^j \otimes e_k \otimes e_l \tag{21.1.7}$$
$$+ e^i \otimes e^j \otimes \nabla_X e_k \otimes e_l + e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes \nabla_X e_l\Big) \tag{21.1.8}$$
$$(\because \text{テンソル積の共変微分の定義}) \tag{21.1.9}$$
$$= \mathrm{tr}\Big(\langle \nabla_X e^i, e_k \rangle e^j \otimes e_l + \langle e^i, e_k \rangle \nabla_X e^j \otimes e_l \tag{21.1.10}$$
$$+ \langle e^i, \nabla_X e_k \rangle e^j \otimes e_l + \langle e^i, e_k \rangle e^j \otimes \nabla_X e_l\Big) \tag{21.1.11}$$
$$(\because \text{縮約の性質}) \tag{21.1.12}$$
$$= \mathrm{tr}\Big(\cancel{X(\langle e^i, e_k \rangle) e^j \otimes e_l} + \langle e^i, e_k \rangle \nabla_X e^j \otimes e_l + \langle e^i, e_k \rangle e^j \otimes \nabla_X e_l\Big) \tag{21.1.13}$$
$$(\because \text{1-形式の共変微分の定義}) \tag{21.1.14}$$
$$= \mathrm{tr}(\nabla_X e^j \otimes e_l + e^j \otimes \nabla_X e_l) \tag{21.1.15}$$
$$= \langle \nabla_X e^j, e_l \rangle + \langle e^j, \nabla_X e_l \rangle \quad (\because \text{縮約の性質}) \tag{21.1.16}$$
$$= X\langle e^j, e_l \rangle \quad (\because \text{1-形式の共変微分の定義}) \tag{21.1.17}$$
$$= 0 \tag{21.1.18}$$

を得る。 //

よって

$$(\nabla_X g)(\xi, \eta) + g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta) \tag{21.1.19}$$
$$= \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X g \otimes \xi \otimes \eta + g \otimes \nabla_X \xi \otimes \eta + g \otimes \xi \otimes \nabla_X \eta) \tag{21.1.20}$$
$$(\because \text{縮約の性質}) \tag{21.1.21}$$
$$= \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X (g \otimes \xi \otimes \eta)) \quad (\because \text{テンソル積の共変微分の定義}) \tag{21.1.22}$$
$$= \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X (g_{ij} \xi^k \eta^l e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l)) \tag{21.1.23}$$
$$= \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(g_{ij} \xi^k \eta^l \nabla_X e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l + X(g_{ij} \xi^k \eta^l) e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l) \tag{21.1.24}$$
$$(\because \text{共変微分の定義}) \tag{21.1.25}$$
$$= g_{ij} \xi^k \eta^l \cancel{\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(\nabla_X (e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l))} \tag{21.1.26}$$
$$+ \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}(X(g_{ij} \xi^k \eta^l) e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l) \quad (\because \text{縮約の性質}) \tag{21.1.27}$$
$$= X(g_{ij} \xi^k \eta^l) \quad (\because \text{縮約の性質}) \tag{21.1.28}$$
$$= X(g(\xi, \eta)) \tag{21.1.29}$$

を得る。これが示したいことであった。 □

接続が与えられているとき、各フレームに対し接続形式が定まるのであった。ここではとくに正規直交フレームに対し定まる接続形式を考える。

命題 21.1.3 (正規直交フレームに関する接続形式). M を多様体、$E \to M$ をランク r のベクトル束、g を E の計量、∇ を E の接続とする。$U \overset{\text{open}}{\subset} M$ とし、U 上の g に関する正規直交フレーム $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_r)$ が与えられているとする。∇ が g を保つとすると、$\mathcal{E}$ に関する ∇ の接続形式 $\omega = (\omega_\lambda^\mu)_{\lambda,\mu}$ は交代行列となる。

証明　Eistein の記法を用いる。$\mathcal{E}$ は正規直交だから

$$g(e_\lambda, e_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \quad (\forall\, \lambda, \mu) \tag{21.1.30}$$

が成り立つ。いま ∇ は g を保つことに注意して外微分をとれば

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla e_\lambda, e_\mu) + g(e_\lambda, \nabla e_\mu) && (21.1.31)\\ &= g(\omega_\lambda^\nu e_\nu, e_\mu) + g(e_\lambda, \omega_\mu^\nu e_\nu) && (21.1.32)\\ &= \omega_\lambda^\mu + \omega_\mu^\lambda && (21.1.33) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって ω は交代行列である。 □

命題 21.1.4 (変換関数は直交群に値を持つ). 上の命題の状況で、さらに $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の open cover であって各 U_α 上で g に関する正規直交フレーム $\mathcal{E}_\alpha = (e_1^{(\alpha)}, \ldots, e_r^{(\alpha)})$ を持つものとする [36)]。このとき、各 U_α 上の局所自明化 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を $\mathcal{E}_\alpha$ から定まるものとすれば、局所自明化の族 $\{\varphi_\alpha\}$ に対する E の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は直交群 $O(r)$ に値を持つ。

証明　[TODO] □

逆に、$\mathfrak{o}(r, \mathbb{R})$ に値をもつ 1-形式の族から接続を構成できる。

命題 21.1.5 (接続形式から定まる接続). M を多様体、$E \to M$ をランク r のベクトル束、g を E の計量とする。$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の open cover であって各 U_α 上で g に関する正規直交フレーム $\mathcal{E}_\alpha = (e_1^{(\alpha)}, \ldots, e_r^{(\alpha)})$ を持つものとする。さらに、各 U_α 上の局所自明化 φ_α を $\mathcal{E}_\alpha$ から定め、変換関数を $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ とおく。このとき、$\mathfrak{o}(r, \mathbb{R})$ に値をもつ 1-形式の族

$$\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A} \tag{21.1.34}$$

であって、変換規則

$$\omega_\beta = \psi_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1}\, d\psi_{\alpha\beta} \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta \tag{21.1.35}$$

をみたすものが与えられたならば、次をみたす E の接続が構成できる:

(1)　各フレーム $\mathcal{E}_\alpha$ に関する ∇ の接続形式は ω_α である。

(2)　∇ は g を保つ。

36)　このような open cover はたしかに存在する。実際、各点 $x \in M$ のある近傍 U_p 上で正規直交フレームが存在するから、M 自身を添字集合として $\{U_p\}_{p\in M}$ をとればよい。なお、実は $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ 上にフレームが存在すれば、U 上に g に関する正規直交フレームも存在する。詳細は [Lee] p.330 を参照。

証明 Eistein の記法を用いる。(1) をみたす ∇ の構成法は、局所的に定義して貼り合うことを確認すればよい。これは前回と同様なので省略。g を保つことを示す。$X \in \mathfrak{X}(M), \xi, \eta \in A^0(E)$ とし、命題で与えられた正規直交フレームを用いて局所的に

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad \xi = \xi^i e_i, \quad \eta = \eta^j e_j \tag{21.1.36}$$

と表示すれば、

$$\begin{aligned}
&g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta) && (21.1.37)\\
&= g(\xi^i \nabla_X e_i, \eta) + g(X(\xi^i) e_i, \eta) && (21.1.38)\\
&\quad + g(\xi, \eta^j \nabla_X e_j) + g(\xi, X(\eta^j) e_j) \quad (\because \text{共変微分の定義}) && (21.1.39)\\
&= \xi^i \eta^j g(\nabla_X e_i, e_j) + X(\xi^i) \eta^j g(e_i, e_j) && (21.1.40)\\
&\quad + \xi^i \eta^j g(e_i, \nabla_X e_j) + \xi^i X(\eta^j) g(e_i, e_j) && (21.1.41)\\
&= \xi^i \eta^j \omega_i^k g_{kj} + X(\xi^i) \eta^j g_{ij} && (21.1.42)\\
&\quad + \xi^i \eta^j \omega_j^k g_{ik} + \xi^i X(\eta^j) g_{ij} && (21.1.43)\\
&= \xi^i \eta^j (\omega_i^j + \omega_j^i) + X(\xi^i) \eta^j g_{ij} + \xi^i X(\eta^j) g_{ij} \quad (\because \text{正規直交性}) && (21.1.44)\\
&= X(\xi^i) \eta^j g_{ij} + \xi^i X(\eta^j) g_{ij} \quad (\because \text{接続形式は交代行列}) && (21.1.45)\\
&= g_{ij} X(\xi^i \eta^j) && (21.1.46)
\end{aligned}$$

であり、一方

$$\begin{aligned}
X(g(\xi, \eta)) &= X(g_{ij} \xi^i \eta^j) && (21.1.47)\\
&= X(g_{ij}) \xi^i \eta^j + g_{ij} X(\xi^i \eta^j) && (21.1.48)\\
&= g_{ij} X(\xi^i \eta^j) \quad (\because \text{正規直交性}) && (21.1.49)
\end{aligned}$$

であるから

$$X(g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta) \tag{21.1.50}$$

が成り立つ。したがって ∇ は g を保つ。 □

命題 21.1.6 (計量を保つ接続の存在). M をパラコンパクトな多様体、$E \to M$ をベクトル束、g を E の計量とする。このとき、g を保つような E の接続が存在する。

証明 1 の分割を用いればよい。[TODO] □

命題 21.1.7 (曲率形式). M を多様体、$E \to M$ をランク r ベクトル束、g を E の計量、∇ を E の接続、R を ∇ の曲率とする。∇ が g を保つならば、

$$g(R\xi, \eta) + g(\xi, R\eta) = 0 \tag{21.1.51}$$

が成り立ち、任意の正規直交フレーム $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_r)$ に対し曲率形式 Ω は交代行列となる。

証明 g が ∇ を保つとすると

$$d(g(\xi,\eta)) = g(\nabla\xi,\eta) + g(\xi,\nabla\eta) \quad (\xi,\eta \in A^0(E)) \tag{21.1.52}$$

が成り立つから、両辺の外微分をとって

$$\begin{aligned} 0 &= d(g(\nabla\xi,\eta)) + d(g(\xi,\nabla\eta)) && (21.1.53)\\ &= g(D\nabla\xi,\eta) - g(\nabla\xi,\nabla\eta) + g(\nabla\xi,\nabla\eta) + g(\xi,D\nabla\eta) && (21.1.54)\\ &\qquad (\because \text{命題 } 16.3.4) && (21.1.55)\\ &= g(R\xi,\eta) + g(\xi,R\eta) && (21.1.56) \end{aligned}$$

を得る。また、接続形式に対して行った議論と同様にして Ω が交代行列であることも従う。 □

21.2 捩れのない接続

[TODO]

21.3 Levi-Civita 接続

[TODO] 接続形式で書くと何が嬉しいのか？

定義 21.3.1 (Levi-Civita 接続). (M,g) を n 次元擬 Riemann 多様体、$\theta^1,\dots,\theta^n$ を g に関する正規直交フレームとする。このとき、次をみたす接続形式 $\omega = (\omega^i_j)$ がただひとつ存在する：

(a) $\omega^i_j = -\omega^j_i$
(b) $d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j = 0$

この ω を (M,g) の **Levi-Civita 接続 (Levi-Civita connection)** という。

注意 21.3.2. 上の定義の (a) は計量が保たれることを意味し、(b) は第 1 構造方程式の各辺が 0、すなわち捩れがないことを意味する。

命題 21.3.3 (Levi-Civita 接続の接続係数). (M,g) を n 次元擬 Riemann 多様体、∇ を Levi-Civita 接続、Γ^k_{ij} を ∇ の接続係数とする。

(1) (座標フレームに関する接続係数) $x^1,\dots,x^n$ を座標とすると

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right) \tag{21.3.1}$$

が成り立つ。

(2) [TODO]

証明 [TODO] □

21.4 最短線と測地線

[TODO]

21.5 曲率

定義 21.5.1 ($(1,3)$-曲率テンソル)**.** [TODO]

定義 21.5.2 ($(0,4)$-曲率テンソル)**.** [TODO]

定義 21.5.3 (接続に関する平坦性)**.** [TODO] Levi-Civita 接続では計量に関する平坦性と同値？

演習問題の解答

演習問題 2.1 の解答. TM の射影を π とおく。TM が M 上のランク r ベクトル束となることは定義 3.9.1 を参照。

つぎに、与えられたチャートにより定まる U_α, U_β 上の TM の局所自明化をそれぞれ ψ_α, ψ_β とおく。状況を表した図式が次である:

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[l, "\psi_\alpha"'] \arrow[r, "\psi_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd} \tag{21.5.1}$$

各 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し、ψ_α, ψ_β は $\pi^{-1}(p) \to \mathbb{R}^r$ の同型

$$v \mapsto ((dx^1)_p(v), \ldots, (dx^r)_p(v)), \quad v \mapsto ((dy^1)_p(v), \ldots, (dy^r)_p(v)) \tag{21.5.2}$$

をそれぞれ与える。よって、合成 $\psi_{\alpha\beta} := \psi_\alpha(p) \circ \psi_\beta(p)^{-1} \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は $\mathbb{R}^r$ の標準基底を

$$e_i \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \mapsto \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) e_j \tag{21.5.3}$$

と写す。行列の形で形式的に書けば

$$\psi_{\alpha\beta}(p)\left[e_1, \ldots, e_r\right] = \left[e_1, \ldots, e_r\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^r}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^r}{\partial y^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial x^r}{\partial y^r}(p) \end{bmatrix} \tag{21.5.4}$$

となる。したがって、座標変換 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列 $D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ が変換関数となっていることがわかる。 □

演習問題 2.2 の解答. 命題 3.3.3 および命題 3.3.2 を参照。 □

演習問題 2.3 の解答. π が逆写像を与えることは明らか。$n := \dim M$ とおく。(U, φ) を M のチャート、これにより定まる TM のチャートを $(\pi^{-1}(U), \psi)$ とおく。このとき、これらのチャートに関する S の局所表示は

$$\varphi(U) \to \psi(U) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0) \tag{21.5.5}$$

となる。よって Jacobi 行列 $D(\psi \circ S \circ \varphi^{-1})$ は $\varphi(U)$ 上いたるところ列フルランクである。したがって S の微分 S_* は U 上いたるところ単射である。このことと、S が π を連続逆写像として同相 $M \to S(M)$ を与えることから、S は埋め込みである。したがって $S(M)$ は M と diffeo である。 □

演習問題 2.4 の解答. [TODO] □

演習問題 2.5 の解答. 各 $p \in U$ に対し

$$(f^* dy^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}_p \right) = (dy^i)_{f(p)} \left(f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j}_p \right) \right) \tag{21.5.6}$$

$$= (dy^i)_{f(p)} \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^k}_{f(p)} \right) \tag{21.5.7}$$

$$= \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \tag{21.5.8}$$

が成り立つことから従う。 □

演習問題 2.6 の解答. 表記の簡略化のため $E \coloneqq TM|_{\partial M}/\iota_* T(\partial M)$ とおく。E が自明束であることを示すには E の大域フレームの存在をいえばよいが、E はランク 1 だから、M 上いたるところ非零な切断の存在を示せばよい。M のチャート $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ をひとつ選び、$\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ とおく。各 α に対し、$\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^1}$ は U_α 上の外向きベクトル場である。そこで ∂M の開被覆 $\{U_\alpha \cap \partial M\}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ をひとつ選び写像 $X \colon \partial M \to TM$ を

$$X \coloneqq \sum \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \tag{21.5.9}$$

で定めると、これは ι に沿う TM の切断、すなわち $TM|_{\partial M}$ の切断である。ここで、各 $p \in M$ に対し X_p は外向きだから $\iota_* T(\partial M)$ には属さない。したがって X と標準射 $TM|_{\partial M} \to E$ との合成は M 上いたるところ非零な E の大域切断である。 □

演習問題 3.1 の解答. $z \in S^1$ とする。ψ_z は定義より $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \psi_z$ をみたし、また π^{U_z} から $U_z \times \mathbb{R}$ への C^∞ 写像である。C^∞ 逆写像が $U_z \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U_z)$, $(w, t) \mapsto t\sqrt{w} e^{-\mathrm{Re}\, w}$ により与えられるから ψ_z は $\pi^{-1}(U_z) \to U_z \times \mathbb{R}$ なる diffeo である。$z, z' \in S^1$ とし、$U_z, U_{z'}$ 上の $\sqrt{\cdot}$ の枝をそれぞれ S, S' とおく。$w \in U_{zz'}, t \in \mathbb{R}$ とすると

$$\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}(w, t) = \psi_z(w, tS'(w) e^{-\mathrm{Re}\, w}) = (w, tS'(w)/S(w)) \tag{21.5.10}$$

となり、$U_{zz'}$ 上 $S'(w)/S(w) = \pm 1$ だから各 $w \in U_{zz'}$ に対し対応 $(w, t) \mapsto (w, tS'(w)/S(w))$ は $\mathbb{R}$-線型写像である。以上より ψ_z は U_z 上の E の局所自明化である。 □

演習問題 3.2 の解答. (1) 簡単なので省略。

(2) $(x, y, z) \in F_{(u,v)}$ とすると $\pi(x, y, z) = (u, v)$ より

$$\frac{x + yz}{1 + z^2} = u, \quad \frac{y - xz}{1 + z^2} = v \tag{21.5.11}$$

である。いま $u^2 + v^2 = 1$ だから

$$1 = \left(\frac{x + yz}{1 + z^2} \right)^2 + \left(\frac{y - xz}{1 + z^2} \right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{1 + z^2} \tag{21.5.12}$$

ゆえに $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ が成り立つ。したがって $(x, y, z) \in \Sigma$ である。

$F_{(u,v)}$ は

$$F_{(u,v)} = \{(u \mp \sqrt{r^2 - 1} v, \pm \sqrt{r^2 - 1} u + v, \pm \sqrt{r^2 - 1}) \in \Sigma \mid r \geq 1\} \quad (\text{複号同順}) \tag{21.5.13}$$

と表せることを示す。

「⊃」は直接計算によりわかる。「⊂」を示す。$(x,y,z) \in F_{(u,v)}$ $(\subset \Sigma)$ とする。$1+z^2 \geq 1$ だから

$$(x,y,z) = (x,y,\pm\sqrt{r^2-1}) \quad (r \geq 1) \tag{21.5.14}$$

と表せる。$(x,y,z) \in F_{(u,v)}$ より

$$\frac{1}{r^2}(x+yz, y-xz) = \left(\frac{x+yz}{1+z^2}, \frac{y-xz}{1+z^2}\right) = \pi(x,y,z) = (u,v) \tag{21.5.15}$$

だから

$$\begin{bmatrix} 1 & z \\ -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r^2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{21.5.16}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{r^2}{1+z^2} \begin{bmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \mp \sqrt{r^2-1}v \\ \pm\sqrt{r^2-1}u + v \end{bmatrix} \tag{21.5.17}$$

が成り立つ。したがって「⊂」がいえた。

(3) Σ は C^∞ 写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2-1$ の正則値 0 の逆像だから $\mathbb{R}^3$ の部分多様体である。また、S^1 も $\mathbb{R}^2$ の部分多様体である。したがって π_Σ は $\Sigma \to S^1$ なる C^∞ 写像とみなせる。したがって

$$\varphi\colon \Sigma \to S^1 \times \mathbb{R} \quad (x,y,z) \mapsto (\pi_\Sigma(x,y,z), z) \tag{21.5.18}$$

$$\psi\colon S^1 \times \mathbb{R} \to \Sigma \quad ((u,v),t) \mapsto (u-tv, tu+v, t) \tag{21.5.19}$$

はそれぞれ C^∞ 写像であり、直接計算により互いに逆写像になっている。したがって φ は diffeo である。問題の図式の可換性は定義から明らかである。 □

演習問題 3.3 の解答. [TODO] □

演習問題 4.1 の解答. (2) $L_X\omega = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y}\right)\omega$ であるが、$\varphi_t^*\omega = \omega$ なら $L_X\omega = 0$ だから $\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} = 0$ である。[TODO]

(3) [TODO] □

演習問題 8.1 の解答. (1) E は Lie 群 $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2$ への C^∞ 作用が定める軌道空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ であり、q はその商写像である。この作用は自由かつ固有不連続だから、E は多様体となり、q は smooth covering map となる。E に別の smooth structure を入れたものを E' とおけば、恒等写像 $E \to E'$ が diffeomorphism となることから smooth structure の一意性が従う。

(2) [TODO] □

演習問題 8.2 の解答.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] & TM \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[u, "f_*X"'] \end{tikzcd} \tag{21.5.20}$$

[TODO] $f_*X(p) = f_{*f^{-1}(p)}X(f^{-1}(p))$ ではないか？ □

演習問題 8.3 の解答. [TODO] □

演習問題 8.4 の解答. ω, μ, ν をそれぞれ s, t, u 次とする。座標フレームに関する成分表示

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_s} f_{i_1\dots i_s} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s}, \tag{21.5.21}$$

$$\mu = \sum_{j_1,\dots,j_t} g_{j_1\dots j_t} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_t}, \tag{21.5.22}$$

$$\nu = \sum_{k_1,\dots,k_u} h_{k_1\dots k_u} dx^{k_1} \otimes \cdots \otimes dx^{k_u} \tag{21.5.23}$$

を用いる。表記の簡略化のため、添字をまとめて

$$\omega = \sum_I f_I dx^I, \quad \mu = \sum_J g_J dx^J, \quad \nu = \sum_K h_K dx^K \tag{21.5.24}$$

と略記する。問題の 1 つ目の等式は

$$\omega \odot \mu = \sum_{I,J} f_I g_J \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \sigma(dx^I \otimes dx^J) \tag{21.5.25}$$

$s+t$ 個の数字の先頭の s 個と末尾の t 個を入れ替える置換を σ_0 とおけば

$$= \sum_{I,J} f_I g_J \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \sigma \circ \sigma_0(dx^I \otimes dx^J) \tag{21.5.26}$$

$$= \sum_{I,J} f_I g_J \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \sigma(dx^J \otimes dx^I) \tag{21.5.27}$$

$$= \mu \odot \omega \tag{21.5.28}$$

となり確かに成り立つ。問題の 2 つ目の等式は

$$(\omega \odot \mu) \odot \nu = \left(\sum_{I,J} f_I g_J \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \sigma(dx^I \otimes dx^J) \right) \odot \nu \tag{21.5.29}$$

$$= \sum_{I,J,K} f_I g_J h_K \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \frac{1}{(s+t+u)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{s+t+u}} \tau(\sigma(dx^I \otimes dx^J) \otimes dx^K) \tag{21.5.30}$$

各 σ に対し、$s+t+u$ 個の数字の先頭の $s+t$ 個を σ^{-1} で置換し、末尾の u 個を固定するような置換を τ_σ とおけば

$$= \sum_{I,J,K} f_I g_J h_K \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \frac{1}{(s+t+u)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{s+t+u}} \tau \circ \tau_\sigma(\sigma(dx^I \otimes dx^J) \otimes dx^K) \tag{21.5.31}$$

$$= \sum_{I,J,K} f_I g_J h_K \frac{1}{(s+t)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s+t}} \frac{1}{(s+t+u)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{s+t+u}} \tau(dx^I \otimes dx^J \otimes dx^K) \tag{21.5.32}$$

最も右側の総和はもはや σ にはよらないから

$$= \sum_{I,J,K} f_I g_J h_K \frac{1}{(s+t+u)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{s+t+u}} \tau(dx^I \otimes dx^J \otimes dx^K) \tag{21.5.33}$$

となる。同様にして $\omega \odot (\mu \odot \nu)$ も同じ式に変形できるから

$$(\omega \odot \mu) \odot \nu = \omega \odot (\mu \odot \nu) \tag{21.5.34}$$

がいえた。 □

演習問題 8.5 の解答. (1) ω を $(0,k)$-テンソル場とする。$(0,1)$-テンソル場のテンソル積で $\omega = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$ と表すと

$$\mathrm{Sym}\,\omega = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)} \tag{21.5.35}$$

だから

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\,\omega) = \frac{1}{k!}\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_k \\ \tau \in \mathfrak{S}_k}} \omega_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\tau\sigma(k)} \tag{21.5.36}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{1}{k!} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\tau\sigma = \mu} \omega_{\mu(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\mu(k)} \tag{21.5.37}$$

である。ここで $\tau\sigma = \mu$ となる組 (τ, σ) の個数は

$$\sharp\{(\tau,\sigma) \mid \tau \in \mathfrak{S}_k,\ \sigma = \tau^{-1}\mu\} = \sharp\mathfrak{S}_k = k! \tag{21.5.38}$$

だから、式変形を続けて

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\,\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_k} \omega_{\mu(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\mu(k)} \tag{21.5.39}$$

$$= \mathrm{Sym}\,\omega \tag{21.5.40}$$

を得る。

(2) ω が k 次対称テンソル場ならば

$$\mathrm{Sym}\,\omega = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma\omega \tag{21.5.41}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \omega \tag{21.5.42}$$

$$= \omega \tag{21.5.43}$$

を得る。 □

演習問題 8.6 の解答. 命題 8.2.4 を参照。 □

演習問題 8.7 の解答. (1) $\dim \left(\bigwedge^n T^*M \right)_p = \dim \bigwedge^n T_p^*M = \binom{n}{n} = 1$ より明らか。

(2) $dx_{\alpha 1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha n}$ は U_α 上 nonvanishing だから U_α 上の $\bigwedge^n T^*M$ のフレームである。したがって確かに局所自明化を定める。また、各 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, 1) = \varphi_\beta((dx_{\alpha 1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha n})_p) \tag{21.5.44}$$

$$= \varphi_\beta \left(\det \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} \right)_{i,j} (p)\, dx_{\beta 1} \wedge \cdots \wedge dx_{\beta n} \right) \tag{21.5.45}$$

$$= \left(p, \det\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta_j}\right)_{i,j}(p)\right) \tag{21.5.46}$$

$$= \left(p, \det\rho_{\alpha\beta}(p)\right) \tag{21.5.47}$$

$$= \left(p, \det\rho_{\beta\alpha}(p)^{-1}\right) \tag{21.5.48}$$

が成り立つから、U_α から U_β への変換関数は $\det\rho_{\beta\alpha}^{-1}$ である。 □

演習問題 8.8 の解答. [TODO] □

演習問題 8.9 の解答. [TODO] □

演習問題 8.10 の解答. [TODO] □

演習問題 8.11 の解答. [TODO] □

演習問題 9.1 の解答. (1) $E \to M$ を自明束とすると大域自明化 $\varphi\colon E \to M\times\mathbb{R}^r$ が存在する。$\varphi\circ\varphi^{-1}\colon M\times\mathbb{R}^r \to M\times\mathbb{R}^r$ は恒等写像だから、各 $p\in M$ に対し $\det(\varphi\circ\varphi^{-1}(p)) = \det I_r = 1 > 0$ が成り立つ。したがって E は向きづけ可能である。

(2) E が向きづけ可能であったとすると、E はランク 1 ゆえに自明束となるから $S^1\times\mathbb{R}$ と微分同相、とくに同相となり位相空間の一般論に矛盾する。 □

演習問題 9.2 の解答. [TODO] □

演習問題 9.3 の解答. [TODO] □

演習問題 9.4 の解答. ($\Rightarrow$) $f(x)\in f(U)$ とする。$d(\varphi\circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)} = d\varphi_x\circ d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)}$ であるが、(U,φ) が M に与えられた向きと整合的であることから $d\varphi_x$ は向きを保ち、また f が向きを保つはめ込みであることから $d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$ も向きを保つので $d(\varphi\circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)}$ は向きを保つ。したがって $(f(U), \varphi\circ f^{-1}|_{f(U)})$ は N の向きと整合的である。

($\Leftarrow$) $p\in M$ とし、M に与えられた向きと整合的なチャート (U,φ) をひとつ選ぶ。f ははめ込みだから df_p は単射であるが、いま $\dim M = \dim N$ だから df_p は全単射である。したがって逆関数定理 (定理 2.7.7) より f は局所微分同相である。そこで必要ならば U を小さくとりなおして $f|_U\colon U\to f(U)$ は微分同相であるとしてよい。このとき $(f(U), \varphi\circ f^{-1}|_{f(U)})$ は N のチャートとなるが、問題の仮定よりこれは N に与えられた向きと整合的である。したがって $d(\varphi\circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)} = d\varphi_p\circ d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)}$ は向きを保つ。このことと $d\varphi_p$ が向きを保つ ($\because (U,\varphi)$ は M の向きと整合的) ことから $(df_p)^{-1} = d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)}$ は向きを保ち、したがって df_p は向きを保つ。よって f は向きを保つ。 □

演習問題 9.5 の解答. [TODO] □

演習問題 10.1 の解答. $D \coloneqq (0,2\pi)\times(0,2\pi)$ とおき、$F\colon \overline{D}\to T^2$ を

$$F(\theta,\phi) \coloneqq (\cos\theta,\sin\theta,\cos\phi,\sin\phi) \tag{21.5.49}$$

で定める。$F|_D$ は D から $F(D)$ への向きを保つ微分同相であり、$\operatorname{supp}\omega\subset\overline{F(D)}=T^2$ をみたす。よって

$$\int_{T^2}\omega=\int_D F^*\omega \tag{21.5.50}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= \sin\theta\cos\phi\sin\phi\, d(w\circ F)\wedge d(y\circ F) \quad (\because\ \textbf{??}) && (21.5.51)\\
&= \sin\theta\cos\phi\sin\phi\,(-\sin\theta\, d\theta)\wedge(-\sin\phi\, d\phi) \quad (\because\ \text{関数の微分}) && (21.5.52)\\
&= \sin^2\theta\cos\phi\sin^2\phi\, d\theta\wedge d\phi \quad (\because\ \text{テンソル場の } C^\infty(M)\text{-多重線型性}) && (21.5.53)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\int_D F^*\omega &= \int_D \sin^2\theta\cos\phi\sin^2\phi\ d\theta d\phi && (21.5.54)\\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin^2\phi\ d\phi\right)d\theta && (21.5.55)\\
&= 0 && (21.5.56)
\end{aligned}$$

である。 □

演習問題 10.2 の解答. [TODO] □

演習問題 10.3 の解答. [TODO] □

演習問題 11.1 の解答. (1) 対偶を示す。$m\coloneqq\dim M,\ n\coloneqq\dim N$ とおき、$m>n$ と仮定する。$p\in M$ とし、p のまわりの M の局所座標 $x^1,\dots,x^m$ と $f(p)$ のまわりの N の局所座標 $y^1,\dots,y^n$ をとる。

$$\begin{aligned}
(f^*g)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= g_{f(p)}\left(f_*\frac{\partial}{\partial x^i}, f_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right) && (21.5.57)\\
&= g_{f(p)}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p)\frac{\partial}{\partial y^l}\right) && (21.5.58)\\
&= \frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p)\ g_{f(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^l}\right)\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p) && (21.5.59)
\end{aligned}$$

より

$$\left((f^*g)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)_{i,j} = {}^t\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p)\right)_{k,i}\left(g_{f(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^l}\right)\right)_{k,l}\left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p)\right)_{l,j} \tag{21.5.60}$$

だから、左辺の階数は $\le n<m$ である。よって $(f^*g)_p$ は非退化でなく、したがって f^*g は M の計量でない。これで対偶がいえた。

(2) 反例を挙げる。$M=\mathbb{R},\ N=\mathbb{R}^2$ とし、g は $\mathbb{R}^2$ の Euclid 計量、$f\colon M\to N,\ x\mapsto 0$ とすれば $f^*g=0$ だから (f^*g) は M の計量でない。

(3) (1) の記号を用いて

$$\left((f^*g)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)_{i,j} = {}^t\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p)\right)_{k,i}\left(g_{f(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^l}\right)\right)_{k,l}\left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p)\right)_{l,j} \tag{21.5.61}$$

だから、f が diffeo であることより右辺に現れる 3 つの行列はすべて正則だから左辺も正則である。したがって f^*g は M の計量である。さらに Sylvester の慣性法則より $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ である。 □

参考文献

[Lee12] John. M. Lee, **Introduction to smooth manifolds**, Springer, 2012.

[Lee18] ______ , **Introduction to riemannian manifolds**, Springer, 2018.

[Tu17] Loring W. Tu, **Differential geometry**, Springer, 2017.

[Wed16] Torsten Wedhorn, **Manifolds, sheaves, and cohomology**, Springer Fachmedien, 2016.

[小 04] 昭七 小林, **接続の微分幾何とゲージ理論**, 裳華房, 2004.

[松 88] 幸夫 松本, **多様体の基礎**, 東京大学出版会, 1988.

記号一覧

索引