

第 1 章 統計的多様体

1 双対構造

定義 1.1 (双対構造). M を多様体とする。 M 上の Riemann 計量 g とアファイン接続 ∇, ∇^* の組 (g, ∇, ∇^*) が M 上の **双対構造 (dualistic structure)** であるとは、すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z) \quad (1.1)$$

が成り立つことをいう。このとき、 ∇, ∇^* はそれぞれ g に関する ∇^*, ∇ の **双対接続 (dual connection)** であるという。

さらに ∇, ∇^* がいずれも M 上平坦であるとき、 (g, ∇, ∇^*) は **双対平坦 (dually flat)** であるという。双対平坦な双対構造を **双対平坦構造 (dually flat structure)** という。

命題 1.2 (双対接続の存在と一意性). M を多様体、 g を M 上の Riemann 計量、 ∇ を M 上のアファイン接続とする。このとき、 g に関する ∇ の双対接続がただひとつ存在する。

証明 一意性は g の非退化性より明らか。以下、存在を示す。まず、 $X, Z \in \mathfrak{X}(TM)$ を固定すると写像 $\mathfrak{X}(TM) \rightarrow C^\infty(M)$, $Y \mapsto X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z)$ は $C^\infty(M)$ -線型だから $\Omega^1(M)$ に属する。これを g で添字を上げて得られるベクトル場を $\nabla_X^* Z$ と書くことにすれば、 $\nabla_X^* Z$ は目的の式をみたす。ここまでで、目的の式をみたす写像 $\nabla^*: \Gamma(TM) \rightarrow \text{Map}(\Gamma(TM), \Gamma(TM))$ が得られた。 ∇^* の像が $\text{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(TM), \Gamma(TM)) = \Gamma(T^*M \otimes TM)$ に属することは、各 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $\nabla^* Z$ の $C^\infty(M)$ -線型性を確かめればよく、すぐにわかる。あとは ∇^* の \mathbb{R} -線型性と Leibniz 則を確かめればよいが、これらも ∇^* の定め方から明らか。よって存在が示された。 \square

定義 1.3 (双対アファイン座標). (g, ∇, ∇^*) を M 上の双対構造とする。 ∇ -アファイン座標 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^n)$ と ∇^* -アファイン座標 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ の組 (θ, η) が (g, ∇, ∇^*) に関する **双対アファイン座標 (dual affine coordinate)** であるとは、

$$g(\partial_i, \partial^j) = \delta_i^j \quad (\forall i, j) \quad (1.2)$$

が成り立つことをいう。ただし $\partial_i := \frac{\partial}{\partial \theta^i}$, $\partial^i := \frac{\partial}{\partial \eta_i}$ である。