2020 A6. 気持ち: 各 m に対し $(a_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 上の確率密度関数になっている。

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ が m に関し一様収束したと仮定すると、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して、すべての $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} < \frac{1}{2}$ が成り立つ。さらに条件 (c) より、ある $M \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $\sum_{n=1}^{N} a_{M,n} < \frac{1}{2}$ が成り立つ。以上より $\sum_{n=1}^{\infty} a_{M,n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ が成り立つが、これは条件 (b) に矛盾する。

(2) Step 1: まず各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n$ の収束を示す。そのためには実数列 $\left(\sum_{n=1}^{k} a_{m,n}s_n\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ の Cauchy 列であることを示せばよい。そこで $\varepsilon > 0$ を任意とすると、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ が収束すること (条件 (b)) と実数列 $(s_n)_n$ が s に収束すること (小問の仮定) より、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して、すべての $k, k' \geq N,\ k < k'$ に対し $\sum_{n=k+1}^{k'} a_{m,n} < \varepsilon$ かつ $|s_k - s| < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、すべての $k, k' \geq N,\ k < k'$ に対し

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k'} a_{m,n}s_n\right| \leq \sum_{n=k+1}^{k'} a_{m,n}|s_n| \qquad (\because \text{条件 (a)}) \tag{0.1}$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{k'} a_{m,n}(|s_n - s| + |s|) \tag{0.2}$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{k'} a_{m,n}(\varepsilon + |s|) \tag{0.3}$$

$$\leq \varepsilon(\varepsilon + |s|) \tag{0.4}$$

が成り立つ。よって実数列 $\left(\sum_{n=1}^{k} a_{m,n}s_n\right)_k$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である (ε をとり直す議論は省略)。

Step 2: つぎに $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n = s$ となることを示す。そこで $\varepsilon > 0$ を任意とする。いま実数列 $(s_n)_n$ が s に収束すること (小問の仮定) より、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して、すべての $k \geq N$ に対し $|s_k - s| < \varepsilon$ が成り立つ。そこで実定数 c を $c := \sup_{1\leq n\leq N} |s_n - s| + 1$ とおいておく。さらに条件 (c) より、ある $M \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在してすべての $m \geq M$ に対し $\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} < \frac{\varepsilon}{c}$ が成り立つ。したがって、各 $m \geq M$ に対し

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n - s\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}(s_n - s)\right| \qquad (\because \text{条件 (b)}) \tag{0.5}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}|s_n - s| + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n}|s_n - s| \qquad (\because \text{条件 (a)}) \tag{0.6}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{c} \sup_{1\leq n\leq N} |s_n - s| + \varepsilon \qquad (\because \text{条件 (b)}) \tag{0.7}$$

$$\leq 2\varepsilon \tag{0.8}$$

が成り立つ。よって $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n = s$ が示された。 □

2020 A7. まず集合族 $\mathcal{L}$ は X の被覆であって 2 元の交叉で閉じているから、X の位相の開基である。

(1) X における $\{(0,0)\}$ の閉包 $\mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ は $F := (-\infty,0]\times(-\infty,0]$ であることを示す。まず F は $F = X\setminus\left(\bigcup_{n\geq 1} O(-n,0)\cup\bigcup_{n\geq 1} O(0,-n)\right)$ というように開集合の補集合の形に表せるから、X の閉集合である。そこで背理法のために $F = \mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ でなかったとすると、閉包の最小性より $F \supsetneq \mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ となるから、ある点 $(x,y)\in F\setminus\mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ が存在する。このとき点 (x,y) は $\mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ の外点だから、(x,y) のある近傍 U であって $\mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ と交わらないものが存在する。一方、$(x,y)\in F$ すなわち $x\leq 0,\ y\leq 0$ であるから、$\mathcal{L}$ が開基であることより、ある実数 $a<x\leq 0$ と $b<y\leq 0$ であって $O(a,b)\subset U$ となるものが存在する。したがって U は点 $(0,0)$ において $\mathrm{Cl}_X\{(0,0)\}$ と交わることになり、矛盾が従う。

(2) K のいかなる開被覆も点 $(0,0)$ を含むある開集合 U を含むが、$\mathcal{L}$ が開基であることより、ある実数 $a<0$ と $b<0$ であって $O(a,b)\subset U$ となるものが存在する。したがって $K\subset O(a,b)\subset U$ が成り立つから、$\{U\}$ は K の有限部分被覆となる。したがって K は X のコンパクト部分集合である。

(3) F を X の非空な閉集合として、F がコンパクトでないことを示す。$(x_0,y_0)\in F$ をひとつ選ぶと、F が閉であることより $\mathrm{Cl}_X\{(x_0,y_0)\}\subset F$ だから、(1) と同様の議論により $(-\infty,x_0]\times(-\infty,y_0] = \mathrm{Cl}_X\{(x_0,y_0)\}\subset F$ が成り立つ。すると、F の開被覆 $\{O(-n,-n)\mid n\geq 1\}$ は有限個の元で $(-\infty,x_0]\times(-\infty,y_0]$ を覆うことはできず、したがって F を覆うこともできないから、有限部分被覆を持たない。よって F はコンパクトでない。 $\square$