微分積分学

Yahata

概要

微分積分学について整理する。

目次

第 I 部

積分

第 1 部では Riemann 積分および Lebesgue 積分について整理する。

第 1 章　Riemann 積分

1.1　Riemann 積分の定義

点付き分割の概念を定義する。なお、ここで定義する「分割」という言葉の意味は一般の集合論における分割とは異なることに注意すべきである。

定義 1.1.1 (点付き分割). $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉区間とする。組 (X, T) が I の**点付き分割 (tagged partition)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(1)　X は順序組 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ であって、各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は $[a_i, b_i]$ の有限部分集合

$$X_i = \{a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = b_i\} \quad (k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{1.1.1}$$

である。X を I の**分割 (partition)** といい、

$$I_{i_1 \ldots i_n} := [x_{1,i_1-1}, x_{1,i_1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n-1}, x_{n,i_n}] \quad (1 \leq i_1 \leq k_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq k_n) \tag{1.1.2}$$

を X の定める I の**小区間 (subinterval)** という。

(2)　T は X の定める各小区間を "代表" する点の集まりである。すなわち

$$T := \{t_{i_1 \ldots i_n} \mid t_{i_1 \ldots i_n} \in I_{i_1 \ldots i_n},\ 1 \leq i_1 \leq k_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq k_n\} \tag{1.1.3}$$

である。

I の点付き分割全部の集合を $\mathcal{P}(I)$ と書くことにする。

定義 1.1.2 (細分). $I \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉区間、$(X, T), (X', T')$ を I の点付き分割とする。(X', T') が (X, T) の**細分 (refinement)** であるとは、$X_i \subset X'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つことをいう。このとき $(X, T) \leq (X', T')$ と書く。

補題 1.1.3. 上の定義の状況で $(\mathcal{P}(I), \leq)$ は有向集合となる。

証明　反射性と推移性は包含関係の性質から明らか。また、2 つの点付き分割 $(X, T), (X', T')$ に対して $X'' := X \cup X'$ は I の分割であり、X'' の定める各小区間から 1 個ずつ点を選んだものを T'' とおけば、(X'', T'') は I の点付き分割であって $(X, T), (X', T')$ の細分である。したがって共通上界の存在もいえた。よって $(\mathcal{P}(I), \leq)$ は有向集合である。 □

定義 1.1.4 (Riemann 和). $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉区間、$f \colon I \to \mathbb{R}$ を関数とする。$\mathbb{R}$ 内のネット $S_f \colon \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$S_f(X, T) := \sum_{i_1, \ldots, i_n} f(t_{i_1 \ldots i_n})(x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1}) \cdots (x_{n,i_n} - x_{n,i_n-1}) \tag{1.1.4}$$

各 $S_f(X,T)$ を (X,T) に関する f の **Riemann 和 (Riemann sum)** という。

Riemann 積分をネット S_f の極限として定義する。

定義 1.1.5 (Riemann 積分)**.** 上の定義の状況で、ネット S_f が収束するとき f は I 上 **Riemann 可積分 (Riemann integrable)** であるといい、S_f の極限[1]を f の I 上の **Riemann 積分 (Riemann integral)** といい、$\displaystyle\int_I f(x)dx$ と書く。

通常、Riemann 積分といったら点付き分割の「幅」を 0 に近づけるときの Riemann 和の極限を指す[1]。そのような定義と上の定義との同値性を示そう。

命題 1.1.6. [TODO]

証明 [TODO] □

定義 1.1.7 (Darboux 積分)**.** [TODO]

1.2 Riemann 積分と連続関数

命題 1.2.1. [TODO]

1) $\mathbb{R}$ は Hausdorff だから S_f の極限は存在すれば一意である。

1) 点付き分割の幅を 0 に近づける Riemann 積分の定義はネットの収束の定義と相性が悪い。すなわち、ネットの収束は「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して、$\lambda \geq \lambda_0$ なるすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し、…」という形で定式化され、「ある〜」の部分 λ_0 と「…なるすべての〜」の部分 λ が同じ有向集合に属しているが、一方で点付き分割の幅を 0 に近づける Riemann 積分の定義は「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、$|(X,T)| < \delta$ なるすべての (X,T) に対し、…」の形だから、δ と (X,T) が同じ有向集合に属していない。

1.3 演習問題

♤ **演習問題 1.1** (東大数理 2006A)**.**

第 2 章　測度

2.1　有限加法族と σ-加法族

位相空間における開集合系のように、与えられた集合 X に対して "良い" 性質を持った部分集合系を定義することを考えよう。

定義 2.1.1 (有限加法族). [TODO]

定義 2.1.2 (σ-加法族). [TODO]

定義 2.1.3 (可測空間). 集合 X と X の部分集合の σ-加法族 $\mathcal{F}$ の組 $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間 (measurable space)** という。

2.2　有限加法的な実数値集合関数

測度の導入の準備として、有限加法的な実数値集合関数について述べる。

定義 2.2.1 (集合関数). X を集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合の族とする。$\mathcal{A}$ 上の関数であって $[-\infty, +\infty]$ の部分集合に値を持つものを X 上の (あるいは $\mathcal{A}$ 上の) **集合関数 (set function)** という。

A.　有限加法的な実数値集合関数

実数値集合関数のなかでもとくに、次に定義する有限加法性を持つものは有限加法族と相性が良い。

定義 2.2.2 (有限加法性). X を集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合の族 [TODO] 最初から有限加法族ではだめ？、μ を $\mathcal{A}$ 上の集合関数とする。

(1)　μ が $(-\infty, \infty)$ に値を持つとする。μ が**有限加法的 (finitely additive)** であるとは、有限個の互いに素な任意の $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ であって $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ なるものに対し

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{2.2.1}$$

が成り立つことをいう。

B.　有限加法的な非負実数値集合関数

有限加法的な実数値集合関数がさらに非負の場合を考える。

命題 2.2.3 (有限加法的な非負実数値集合関数の基本性質). X を集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合の有限加法族、μ を $\mathcal{A}$ 上の有限加法的な非負実数値集合関数とする。このとき次が成り立つ:

(1) (単調性) 各 $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つ。

(2) (有限劣加法性) 各 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ に対し、

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{2.2.2}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

2.3 測度

有限の加法性だけでは理論的に弱すぎるため、加法性を可算まで強めたものを考える必要がある。

定義 2.3.1 (可算加法性). X を集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合の族 [TODO] 最初から有限加法族ではだめ？、μ を $\mathcal{A}$ 上の集合関数とする。

(1) μ が $(-\infty, +\infty)$ に値を持つとする。μ が**可算加法的 (countably additive)** であるとは、互いに素な任意の列 $(A_i)_{i=1}^{\infty}$, $A_i \in \mathcal{A}$ であって $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ なるものに対し

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2.3.1}$$

が成り立つことをいう。

(2) μ が $[0, +\infty]$ に値を持つとする。μ が**可算加法的 (countably additive)** であるとは、互いに素な任意の列 $(A_i)_{i=1}^{\infty}$, $A_i \in \mathcal{A}$ であって $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ なるものに対し

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2.3.2}$$

が成り立つことをいう。ただし、両辺が同時に ∞ となることも許す。

注意 2.3.2. 可算加法性の定義 (1) の右辺に現れる級数は絶対収束が要求されていることに注意すべきである。実際、$\bigcup A_i \in \mathcal{A}$ ゆえに $\mu\left(\bigcup A_i\right)$ は実数だから右辺 $\sum \mu(A_i)$ は収束する。さらに左辺、したがって右辺は添字の並べ替えで値が変わらないから $\sum \mu(A_i)$ は無条件収束であり、Riemann の級数定理 (??) より絶対収束となる。

符号付き測度を定義する。

定義 2.3.3 (符号付き測度). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする。

- $(X, \mathcal{A})$ 上の可算加法的な実数値集合関数 μ を $(X, \mathcal{A})$ 上の**符号付き測度 (signed measure)** という [3]。

測度を定義する。

定義 2.3.4 (測度)**.** $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする。

- $\mathcal{A}$ 上の集合関数 μ であって次をみたすものを、$(X, \mathcal{A})$ 上の**測度 (measure)** という:
  (1) $[0, +\infty]$ に値を持つ。
  (2) 可算加法性をみたす。
  (3) $\mu(\varnothing) = 0$
- $(X, \mathcal{A})$ 上の測度 μ であって次をみたすものを $(X, \mathcal{A})$ 上の **σ-有限測度 (σ-finite measure)** という:
  (1) $\mu(E_n) < \infty$ かつ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ なる $E_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在する。
- $(X, \mathcal{A})$ 上の測度 μ であって $[0, +\infty)$ に値を持つものを $(X, \mathcal{A})$ 上の**有限測度 (finite measure)** という。

例 2.3.5 (測度の例)**.**

- 後で述べる Lebesgue 測度は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は Borel 集合族) 上の測度である。
- 数え上げ測度は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度である。
- $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、$x \in X$ とする。$\delta_x(A) := \chi_A(x)$ で定義される $(X, \mathcal{A})$ 上の測度を **Dirac 測度 (Dirac measure)** という。

とくに有限測度により測度空間が定義される。

定義 2.3.6 (測度空間)**.** $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の有限測度とする。このとき 3 つ組 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**測度空間 (measure space)** という。

注意 2.3.7. μ が単に測度というだけでは測度空間の要件を満たさないことに注意すべきである。しかし、可測空間 $(X, \mathcal{A})$ と $\mathcal{A}$ 上の ($+\infty$ も値に許す) 測度をあわせて扱う場面もしばしばあるから、混同しないようにしなければならない。

定義 2.3.8 (完備な測度)**.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする [TODO] 可測空間ではなく？。μ が**完備 (complete)** であるとは、$\mu(A) = 0$ なる任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し、すべての部分集合 $B \subset A$ が $\mathcal{A}$ に含まれることをいう。

定義 2.3.9 (ほとんどいたるところ)**.** $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の測度とする。$x \in X$ に関する命題 $P(x)$ が

$$\mu(\{x \in X \mid P(x) \text{ は偽}\}) = 0 \tag{2.3.3}$$

をみたすとき、命題 $P(x)$ は X 上 **μ-ほとんどいたるところ (μ-almost everywhere; μ-a.e.)** で成立するという。

3) 符号付き測度は**複素測度 (complex measure)** の実数値の場合である。

2.4 外測度

[TODO] どこに書くべき？

2.5 拡張定理

[TODO] 積測度もここ？

[TODO] Riesz の表現定理？

第 3 章　Lebesgue 積分

3.1　可測関数

可測関数の概念を定義する。可測関数は「可測」という名前に反して測度とは無関係に定義される概念であることに注意すべきである。

定義 3.1.1 (可測関数). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、$f: X \to \mathbb{R}$ を関数とする。このとき f が $\mathcal{A}$ に関し**可測 (measurable)** であるとは、すべての strict sublevel sets が可測集合であること、すなわち任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{A}$ が成り立つことをいう。

命題 3.1.2. 可測関数は単関数の各点収束極限として表せる。

証明　まず有界関数の場合、値域を等分して単関数列を定義すればよい。一般の場合は値域を徐々に広げるように有界可測関数の列を定義し、それに沿って単関数列を定義すればよい。 □

例 3.1.3 (可測な確率変数). $E(X, \mathcal{A})$ の説明はここに詳しく書いてある: cf. `https://math.stackexchange.com/a/690905`

3.2　単関数の積分

単関数を定義する。[TODO] σ-加法族や測度によらず定義されるべき?

定義 3.2.1 (単関数). $(X, \mathcal{A})$ を可測関数、μ を $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$ に値をもつ測度とする。可測関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が μ に関し**単関数 (simple function)** であるとは、$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$ であって [4]、f を

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \in \mathcal{A} \tag{3.2.1}$$

と $\mathcal{A}$ の元の指示関数の $\mathbb{R}$-線型結合に書けることをいう。

文献によっては単関数の定義に「$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$」を含めないものもあるが、そのような流儀では、$+\infty$ を許す測度を扱う場合にのみこの条件を課すことになり、議論が煩雑になってしまう。したがって本稿では最初から単関数の定義にこの条件を含めることにした。

次に単関数の積分を定義する。

定義 3.2.2 (単関数の積分). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$ に値をもつ測度とする。μ に関する任意の

4)　μ が有限測度の場合は $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$ の条件は自然に満たされる。

単関数 $f: X \to \mathbb{R}$

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \in \mathcal{A} \tag{3.2.2}$$

に対し、f の**積分 (integral)** を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) \tag{3.2.3}$$

と定義する。

命題 3.2.3 (単関数の積分の基本性質). (1) (三角不等式)

[TODO]

定義 3.2.4 (単関数の平均 Cauchy 列). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を X 上の測度、$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の μ に関する単関数の列とする。$(f_n)_n$ が**平均 Cauchy 列 (mean Cauchy sequence)** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、すべての $i, j \geq n$ に対し

$$\int_X |f_i(x) - f_j(x)|\,\mu(dx) < \varepsilon \tag{3.2.4}$$

が成り立つことをいう。

命題 3.2.5 (平均 Cauchy 列の性質). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を X 上の測度、$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の μ に関する単関数の列とする。このとき次が成り立つ:

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が平均 Cauchy 列ならば、数列 $\left(\int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ はある実数に収束する。

(2) [TODO]

証明 (1) 単関数の積分の三角不等式と実数の完備性より従う。

(2) [TODO] □

3.3 一般の関数の積分

一般の関数の積分を定義する。ここで「一般の」関数というのは次の定義で述べるもののことであって、決して可測関数を指すわけではないという点に注意すべきである。実際、可測関数は実数値関数だから $\pm\infty$ を値に持つことはないが、今から定義する積分では $\pm\infty$ を値に持つ関数も扱うことになる。ただし、後で示すように可積分関数はほとんど至るところ可測関数に一致するから、この違いは実際上はそれほど問題にはならない。

定義 3.3.1 (一般の関数の積分). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を X 上の測度、f を μ-a.e. $x \in X$ で定義された関数であって、$[-\infty, +\infty]$ に値をもち、μ-a.e. $x \in X$ で有限なものとする。このとき f が **μ-可積分 (μ-integrable)** であるとは、X 上の単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって次をみたすものが存在することをいう:

(1) μ-a.e. $x \in X$ に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ が成り立つ。

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は平均 Cauchy 列である。

このとき、命題 3.2.5 より

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) \in \mathbb{R} \tag{3.3.1}$$

が存在するが、これを f の**積分 (integral)** という。積分の値は上の条件をみたす単関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のとり方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

証明 [TODO] □

命題 3.3.2. 可積分関数はほとんど至るところ可測関数に一致する。

証明 [TODO] □

命題 3.3.3 (可積分関数の基本性質). (1) ($\mathbb{R}$-線型性)

(2) (単調性)

[TODO]

証明 [TODO] □

次の Markov の不等式は確率論において重要な役割を果たす。確率論的にいえば、Markov の不等式は確率分布の裾の確率を上から評価するものである[1)]。

定理 3.3.4 (Markov の不等式). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$ に値をもつ測度、f を μ-可積分関数とする。このとき、任意の $R > 0$ に対し

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq R\}) \leq \frac{1}{R}\int_X |f(x)|\,\mu(dx) \tag{3.3.2}$$

が成り立つ。

証明 f は μ-可積分だから、X 上の可測関数であるとしてよい [TODO] why?。$A_R := \{x \in X \mid |f(x)| \geq R\}$ とおくと、各 $x \in X$ に対し $R\chi_{A_R}(x) \leq |f(x)|$ である。いま f の可積分性より $\mu(A_R) \leq \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > 0\}) < \infty$ だから、積分の単調性より

$$0 \leq R\mu(A_R) = \int_X R\chi_{A_R}(x)\,\mu(dx) \leq \int_X |f(x)|\,\mu(dx) < \infty \tag{3.3.3}$$

が成り立つ。R を移項して定理の主張の式を得る。 □

系 3.3.5 (Chebyshev の不等式). [TODO] 平均まわりでみた裾の確率を標準偏差を使って評価する

証明 [TODO] □

1) Markov の不等式とは反対に裾の確率を下から評価する不等式としては、Salem-Zygmund の不等式がある [Bog07, p.142]。

3.4 収束定理

この節では、極限と積分の交換に関する 3 つの重要な定理を述べる。優収束定理は優関数 (dominant function) を用いて収束を導くものであり、多くの場面で重宝する。なお、優関数を見つけられない場合に一般化した収束定理としては、一様可積分性を用いる Lebesgue-Vitali の定理がある [Bog07, p.268]。

定理 3.4.1 (優収束定理; DCT). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を X 上の測度、$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を μ-可積分関数 $X \to \mathbb{R}$ の列とする。このとき、条件

(1) μ-a.e.$x \in X$ に対し、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $[-\infty, +\infty]$ 内に存在する。[TODO] a.e. でいいのか？

(2) ある μ-可積分関数 Φ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $|f_n(x)| \leq \Phi(x)$ a.e.x をみたす。

が成り立つならば、$f\colon X \to [-\infty, +\infty]$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は μ-可積分であり [TODO] 値域あってる？、

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) \tag{3.4.1}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 3.4.2 (単調収束定理; MCT). $(X, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$ に値をもつ測度、$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を μ-可積分関数の列であってすべての $n \in \mathbb{N}$ と μ-a.e. $x \in X$ に対し $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ をみたすものとする。このとき、$\sup_n \int_X |f_n(x)|\,\mu(dx) < \infty$ ならば、$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は μ-a.e. $x \in X$ に対し有限の値をとる μ-可積分であり、

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) \tag{3.4.2}$$

が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 3.4.3 (Fatou の定理). 非負可積分関数列 (f_n), $f_n \to f$ が

$$\sup_n \int_X f_n\,\mu(dx) < \infty \tag{3.4.3}$$

をみたすとき、

$$\int_X f\,\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mu(dx) \tag{3.4.4}$$

が成り立つ。

Fatou の定理は優収束定理や単調収束定理と違い、各関数が非負であることを仮定している。また、極限の交換を主張しているわけではなく、式の形は下半連続性に似ている。

証明 [TODO] □

3.5　演習問題

♤ **演習問題 3.1** (ChatGPT)**.** $(E, \mathcal{A})$ を可測空間、μ を $\mathcal{A}$ 上の $[0, +\infty]$ に値をもつ測度、f を非負の可測関数とし、$\int_E f(x)\,dx = 0$ が成り立つとする。このとき、ほとんどすべての $x \in E$ に対して $f(x) = 0$ となることを示せ。

第 4 章　Lebesgue 測度

ここまでは一般の可測空間を考えてきたが、実用上は $\mathbb{R}^n$ 上での積分がとくに重要である。この章では Lebesgue 測度を導入し、Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係性について調べる。

4.1　Lebesgue 測度の構成

定義 4.1.1. [TODO]

4.2　Riemann 積分との関連

[TODO] これが一番大事？

第 5 章　符号付き測度

5.1　全変動

[TODO] 符号付き測度全体の空間は全変動をノルムとして Banach 空間となる？

定義 5.1.1 (全変動). [TODO]

5.2　Radon-Nikodym の定理

定義 5.2.1 (絶対連続と特異). [TODO]

命題 5.2.2 (Lebesgue 分解). $(X, \mathcal{B})$ を可測空間、μ を σ-有限な測度空間、Φ を $\mathcal{B}$ 上の測度とする。このとき次が成り立つ:

(1) [TODO]

$$\Phi(E) = F(E) + \Psi(E) \tag{5.2.1}$$

(2) 上の分解は一意である。

証明 [TODO] □

定理 5.2.3 (Radon-Nikodym の定理). $(X, \mathcal{B})$ を可測空間、μ を X 上の σ-有限測度、F を μ に関し絶対連続な X 上の測度とする。このとき、μ-a.e. $x \in X$ に対し定義された可積分関数 f が存在して

$$F(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \quad (E \in \mathcal{B}) \tag{5.2.2}$$

が成り立つ。この f を μ に関する F の **Radon-Nikodym 微分 (Radon-Nikodym derivative)** という。

証明 [TODO] □

5.3　Fubini の定理

定理 5.3.1 (Fubini の定理). [TODO]

証明 [TODO] □

第 6 章　関数空間

6.1　積分不等式

命題 6.1.1 (Hölder の不等式). $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を可測空間、μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とする。$1 < p < \infty$、$q = p(p-1)^{-1}$、f を p 乗 μ-可積分関数、g を q 乗 μ-可積分関数とする。このとき、fg は μ-可積分であり、かつ

$$\int_{\mathcal{X}} |fg| \mu(dx) \leq \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^q \mu(dx) \right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.1.1}$$

が成り立つ。

証明　積に関する Young の不等式 $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$ を使う (これは Fenchel の不等式の特別な場合でもある)。 □

命題 6.1.2 (Jensen の不等式). p を確率測度、ψ を凸関数とする。このとき

$$\psi\left(\int_{\mathcal{X}} f(x) p(dx) \right) \leq \int_{\mathcal{X}} \psi\left(f(x)\right) p(dx) \tag{6.1.2}$$

が成り立つ。

証明　凸関数の性質より、$y_0 := \int_{\mathcal{X}} f(x)p(dx)$ とおくと、ある $\alpha(y_0) \in \mathbb{R}$ が存在して $\psi(y) \geq \psi(y_0) + \alpha(y_0)(y - y_0)$ $(y \in \operatorname{dom}\psi)$ が成り立つ。各辺を積分して命題の不等式を得る。 □

6.2　測度収束

[TODO] その他の収束概念もまとめるべき？

定義 6.2.1 (測度 Cauchy 列と測度収束). [TODO]

命題 6.2.2.
(1)　概収束すれば測度収束する。
(2)　L^1 収束すれば測度収束する。

証明　[TODO] □

上の命題の部分的な逆を述べたものが次の Riesz の定理である。

定理 6.2.3 (Riesz). 測度収束すれば、概収束する部分列が存在する。

証明 [TODO] □

6.3 L^p ノルム

定理 6.3.1 (Minkowski の不等式)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

6.4 Hilbert 空間 L^2

第 II 部

微分

第 2 部では、関数解析へのつながりを念頭に、Gâteaux 微分と Fréchet 微分の導入から始める。関数解析とは、一言で言えば線型代数の無限次元版である [河 08]。しかし単に線型空間を無限次元にしただけでは議論の手がかりに乏しい。そこで関数解析では空間の位相も合わせて考える。これが通常の線型代数との大きな違いである。まず微分の基本的な性質について整理した後、第 1 部で導入した種々の積分との関連を見る。とくに微分積分学の基本定理は、具体的な積分計算を実行するために欠かせないものである。

第 7 章　微分

微分は局所凸位相ベクトル空間上の写像に対し定義される。

7.1　オーダー記法

写像の漸近挙動を扱う際には、オーダー記法が便利である。

定義 7.1.1 (Little-o 記法)**.** X を位相空間、Y を $\mathbb{R}$ 上の位相ベクトル空間、$f\colon X \to Y$ および $g\colon X \to \mathbb{R}$ を写像、$a \in X$ とする。次の条件が成り立つとき

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a,\ x \neq a) \tag{7.1.1}$$

と記す:

- a のまわりで a を除いて $g(x) \neq 0$ が成り立ち、さらに

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{7.1.2}$$

  が成り立つ。

定義 7.1.2 (Big-O 記法)**.** X を位相空間、Y をノルム空間、$f\colon X \to Y$ および $g\colon X \to \mathbb{R}$ を写像、$a \in X$ とする。次の条件が成り立つとき

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a,\ x \neq a) \tag{7.1.3}$$

と記す:

- ある $M \geq 0$ が存在して、a のまわりで

$$\|f(x)\| \leq M\|g(x)\| \tag{7.1.4}$$

  が成り立つ。

7.2　Gateaux 微分と Fréchet 微分

位相ベクトル空間上では「方向微分」として Gateaux 微分が定義できる。

定義 7.2.1 (Gateaux 微分)**.** X, Y を位相ベクトル空間、$U \overset{\text{open}}{\subset} X$ を開部分集合、$f\colon U \to Y$ を写像、$c \in U,\ h \in X$ とする。f が c で h 方向に **Gateaux 微分可能 (Gateaux differentiable)** であるとは、ある連続線型写像 $T\colon X \to Y$ が存在して

$$f(c + th) - f(c) - T(th) = o(t) \quad (t \to 0,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{7.2.1}$$

が成り立つことをいい、このとき T を f の c での h 方向の **Gateaux 微分 (Gateaux differential)** といい、$D_h f(c)$ と記す。

さらにノルム空間上では「全微分」として Fréchet 微分が定義できる。

定義 7.2.2 (Fréchet 微分). $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間、$U \overset{\text{open}}{\subset} X$ を開部分集合、$f\colon U \to Y$ を写像、$c \in U$ とする。f が c で **Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable)** であるとは、ある連続線型写像 $T\colon X \to Y$ が存在して

$$\|f(c+h) - f(c) - T(h)\|_Y = o(\|h\|_X) \quad (h \to 0,\ h \in X \setminus \{0\}) \tag{7.2.2}$$

が成り立つことをいい、このとき T を f の c での **Fréchet 微分 (Fréchet differential)** といい、$Df(c)$ と記す。

7.3 チェインルール

[TODO]

7.4 Taylor の定理

平均値定理は 1 次近似の最も基本的な形を与えるものである。

定理 7.4.1 (平均値定理). [TODO]

証明 [TODO] □

平均値の定理は 2 通りの拡張がある。ひとつは次に示す Cauchy の平均値定理である。

定理 7.4.2 (Cauchy の平均値定理). [TODO]

証明 [TODO] □

もうひとつの拡張は、高次の導関数を用いた近似を与える Taylor の定理である。

定理 7.4.3 (Taylor の定理). f を $[a, x]$ 上で n 回微分可能な実数値関数とする。このとき、実数 $R_n(x)$ を

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x) \tag{7.4.1}$$

で定義すると、ある $c \in (a, x)$ が存在して $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が成り立つ。

証明 [TODO] □

定理 7.4.4. f が a のまわりで C^{n-1} 級で n 階微分可能ならば

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \tag{7.4.2}$$

が成り立つ。さらに C^n 級ならば

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + O((x-a)^n) \tag{7.4.3}$$

が成り立つ。

Little-O は最高次の項に付け加わる形であるのに対し、Big-O は最高次の項を置き換える形であることに注意する。

証明 [TODO] □

多変数の Taylor の定理も「$d^k f$」という記号を次のように導入すれば 1 変数の場合と同様に表せる。

定理 7.4.5. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、f を U 上の C^n 級実数値関数とする。このとき

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(df)_a(x-a) + \frac{1}{2!}(d^2 f)_a(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(d^{n-1} f)_a(x-a) + O(\|x-a\|^n) \tag{7.4.4}$$

が成り立つ。ただし

$$(d^k f)_a(x) \coloneqq \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ \in\{1,\ldots,n\}}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) x_{i_1} \cdots x_{i_k} \tag{7.4.5}$$

と定義する。

第 8 章　逆関数定理

8.1　陰関数定理

方程式 $f(x,y)=0$ が y について解けるための十分条件を与えるのが陰関数定理です。定理の主張を標語的に言えば「(y での) 微分が消えないならば (y を) 陰関数で書ける」ということです。まずは 2 次元の場合から示します。

定理 8.1.1 (2 次元版の陰関数定理)**.** Ω は $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合とし、f を Ω 上の C^1 級 $\mathbb{R}$ 値関数、$(x_0,y_0)\in\Omega$ とする。

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)\neq 0 \tag{8.1.1}$$

ならば、$\exists\delta,\rho>0\quad$ s.t.

(1)　$I:=B(x_0,\delta),\ J:=B(y_0,\rho)$ とおくと $\bar{I}\times\bar{J}\subset\Omega$

(2)　$\forall x\in I,\ \exists! y\in J\quad$ s.t.　$f(x,y)=0$　（このような y を $\varphi(x)$ と書くことにする）

(3)　φ は I 上の C^1 級関数かつ $\varphi'(x)=-f_y(x,\varphi(x))^{-1}f_x(x,\varphi(x))$

(4)　f が Ω 上 C^k 級ならば φ も I 上 C^k 級

証明　f_y の連続性より、点 (x_0,y_0) の充分近くでは f_y の符号は一定である。よって、必要ならば f を $-f$ に取り替えて $f_y>0$ としても議論の一般性を失わない。

Step 1: 最初に (1), (2) を示そう。f_y の連続性と $f_y(x_0,y_0)>0$ から、点 (x_0,y_0) を中心とするある長方形

$$I\times J:=(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\rho,y_0+\rho) \tag{8.1.2}$$

が存在して

$$\begin{cases}\bar{I}\times\bar{J}\subset\Omega & \\ f_y(x,y)>0 & \text{for }\forall(x,y)\in\bar{I}\times\bar{J}\quad\cdots(1)\\ f(x,y_0-\rho)<0,\ f(x,y_0+\rho)>0 & \text{for }\forall x\in\bar{I}\qquad\qquad\cdots(2)\end{cases} \tag{8.1.3}$$

が成り立つ。(1) より、$x\in\bar{I}$ を固定するごとに f は y に関して $\bar{J}$ 上狭義単調増加なので、(2) と中間値の定理も用いれば

$$\exists! y\in J\quad\text{s.t.}\quad f(x,y)=0 \tag{8.1.4}$$

である。このような y を $\varphi(x)$ とおく。これで (1), (2) がいえた [6)]。

Step 2: 次に (3) を示していきたいのだが、Step 2 ではひとまず φ が連続であることを示そう。すなわち、$s_0\in I$ を固定して、$\forall\varepsilon>0$ に対し $\exists\eta>0$ s.t.

$$\varphi(B(s_0,\eta))\subset B(\varphi(s_0),\varepsilon) \tag{8.1.5}$$

を示す。ただし $\varepsilon>0$ が充分小さな場合だけ考えればよいから、$B(\varphi(s_0),\varepsilon)$ が J に含まれるように $\forall\varepsilon>0$ をとる。すると、点 $(s_0,\varphi(s_0))$ において $f=0,\ f_y>0$ であることから

$$f(s_0,\varphi(s_0)+\varepsilon)>0,\quad f(s_0,\varphi(s_0)-\varepsilon)<0 \tag{8.1.6}$$

が成り立つ。このことと f の連続性から、

(1) 点 $(s_0, \varphi(s_0)+\varepsilon)$ の充分近くでは常に $f>0$ であり、
(2) 点 $(s_0, \varphi(s_0)-\varepsilon)$ の充分近くでは常に $f<0$ である。

したがって、（$B(s_0,\eta)$ が I に含まれるような）充分小さな $\eta>0$ が存在して、$\forall x \in B(s_0,\eta)$ に対し

$$f(x,\varphi(s_0)+\varepsilon)>0, \quad f(x,\varphi(s_0)-\varepsilon)<0 \tag{8.1.7}$$

よって

$$\varphi(x) \in B(\varphi(s_0),\varepsilon) \tag{8.1.8}$$

である（$f_y>0$ と (8.1.4) を用いた）。$x \in B(s_0,\eta)$ は任意であったから

$$\varphi(B(s_0,\eta)) \subset B(\varphi(s_0),\varepsilon) \tag{8.1.9}$$

がいえた。これで Step 2 が完了した。

Step 3: φ が I 上 C^1 級であることを示す。そこで $s_0 \in I$ を任意にとり、φ の増分を $k(h) \coloneqq \varphi(s_0+h)-\varphi(s_0)$ とおく。$\lim_{h\to 0} k(h)/h$ を求めるのが目下の目標である。そのために $s_0+h \in I$ なる $h \neq 0$ を固定し、

$$g(t) \coloneqq f(s_0+th, \varphi(s_0)+tk(h)) \tag{8.1.10}$$

とおく。すると

$$\begin{aligned} g(0) &= f(s_0,\varphi(s_0)) = 0 \\ g(1) &= f(s_0+h,\varphi(s_0)+k(h)) = f(s_0+h,\varphi(s_0+h)) = 0 \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

なので、平均値定理より $\exists\theta \in (0,1)$ s.t.

$$\begin{aligned} 0 &= g'(\theta) \\ &= f_x(s_0+\theta h,\varphi(s_0)+\theta k(h))\,h + f_y(s_0+\theta h,\varphi(s_0)+\theta k(h))\,k(h) \end{aligned} \tag{8.1.12}$$

が成り立つ。ここで h のとり方と $k(h)$ の定義から明らかに点 $(s_0+\theta h, \varphi(s_0)+\theta k(h))$ は $I\times J$ に属するので、この点において $f_y>0$ である。したがって (8.1.12) を変形して

$$\frac{k(h)}{h} = -\frac{f_x(s_0+\theta h,\varphi(s_0)+\theta k(h))}{f_y(s_0+\theta h,\varphi(s_0)+\theta k(h))} \tag{8.1.13}$$

を得る。よって

$$\varphi'(s_0) = \lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = -\frac{f_x(s_0,\varphi(s_0))}{f_y(s_0,\varphi(s_0))} \tag{8.1.14}$$

であり、右辺は s_0 に関して連続なので φ は C^1 級である。これで (3) がいえた。

Step 4: (8.1.14) から、$f \in C^k \Rightarrow \varphi \in C^k$ も明らかである。これで (4) がいえた。 □

さて、次に n 次元版の陰関数定理を示していきます。ここでは不動点定理を用いて証明を行うので、そのためにいくつか補題を示しておきます。

6) Step 1 でやったことは、換言すれば高さ $f(x,y)=0$ の等高線がグラフになるような領域の存在を示したということです。そのために使った武器は狭義単調性と中間値の定理でした。実は n 次元版の証明でも同様の議論を行いますが、そちらで使う武器は不動点定理に変わります。だったら 2 次元版でも不動点定理を使えばいいんじゃないかという気もしますが、狭義単調性と中間値の定理による証明方法にもそれなりにメリットはあるようです [杉 85]。

定義 8.1.2 (縮小写像). 写像 $F\colon X \to X$ が X 上の**縮小写像**であるとは、ある $k \in [0, 1)$ が存在して、$\forall x, y \in X$ に対し

$$|F(x) - F(y)| \leq k|x - y| \tag{8.1.15}$$

が成り立つことをいう。

定理 8.1.3 (Banach の縮小写像の原理). $\overline{\Omega}$ は $\mathbb{R}^n$ の空でない閉集合とする。$T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ が $\overline{\Omega}$ 上の縮小写像であるならば、T の不動点がただひとつ存在する。

証明　次の規則により $\overline{\Omega}$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定める。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1 \in \overline{\Omega} \\ &\boldsymbol{x}_{n+1} := T(\boldsymbol{x}_n) \quad (\forall \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{8.1.16}$$

$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\overline{\Omega}$ の Cauchy 点列になっている。実際、縮小写像の性質より $\exists \rho \in [0, 1)$ s.t.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n| &= |T(\boldsymbol{x}_n) - T(\boldsymbol{x}_{n-1})| \\ &\leq \rho|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}| \\ &\leq \cdots \\ &\leq \rho^{n-1}|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1| \end{aligned} \tag{8.1.17}$$

である。したがって、$\mathbb{R}^n$ の完備性により $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は極限 $\boldsymbol{x}_\infty \in \mathbb{R}^n$ を持ち、$\overline{\Omega}$ が閉集合であることから $\boldsymbol{x}_\infty \in \overline{\Omega}$ である。さらに

$$\begin{aligned} |T(\boldsymbol{x}_\infty) - \boldsymbol{x}_\infty| &\leq |T(\boldsymbol{x}_\infty) - T(\boldsymbol{x}_n)| + |T(\boldsymbol{x}_n) - T(\boldsymbol{x}_{n+1})| + |T(\boldsymbol{x}_{n+1}) - \boldsymbol{x}_\infty| \\ &\leq \rho|\boldsymbol{x}_\infty - \boldsymbol{x}_n| + |\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_{n+2}| + |\boldsymbol{x}_{n+2} - \boldsymbol{x}_\infty| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned} \tag{8.1.18}$$

より $T(\boldsymbol{x}_\infty) = \boldsymbol{x}_\infty$、すなわち $\boldsymbol{x}_\infty$ は T の不動点である。また、T の不動点 $\boldsymbol{x}_\infty, \boldsymbol{x}'_\infty$ に対し

$$|\boldsymbol{x}_\infty - \boldsymbol{x}'_\infty| = |T(\boldsymbol{x}_\infty) - T(\boldsymbol{x}'_\infty)| \leq \rho|\boldsymbol{x}_\infty - \boldsymbol{x}'_\infty| \tag{8.1.19}$$

ゆえに $\boldsymbol{x}_\infty = \boldsymbol{x}'_\infty$ が成り立つので不動点の一意性も示せた。 □

補題 8.1.4. A を n 次行列とする。$\|I - A\| < 1$ ならば、A は逆行列を持つ。ただし $\|\cdot\|$ は作用素ノルム $\|A\| := \sup\limits_{|x|\leq 1} |Ax|$ である。

証明　$A\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0$ を示せばよい。$A\boldsymbol{x} = 0$ とすると、$\boldsymbol{x} = (I - A)\boldsymbol{x}$ が成り立つので

$$|\boldsymbol{x}| \leq |(I - A)\boldsymbol{x}| \leq \|I - A\|\,|\boldsymbol{x}| \tag{8.1.20}$$

よって $\|I - A\| < 1$ ならば $\boldsymbol{x} = 0$ である。 □

定理 8.1.5 (一般次元での陰関数定理). Ω は $\mathbb{R}^{m+n}$ の空でない開集合とし、f を Ω 上の C^1 級 $\mathbb{R}^n$ 値関数、$(x_0, y_0) \in \Omega$ とする。

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0 \tag{8.1.21}$$

ならば、$\exists \delta, \rho > 0$ s.t.

(1) $I := B(x_0, \delta)$, $J := B(y_0, \rho)$ とおくと $\bar{I} \times \bar{J} \subset \Omega$
(2) $\forall x \in I$, $\exists! y \in J$ s.t. $f(x, y) = 0$ （このような y を $\varphi(x)$ と書くことにする）
(3) φ は I 上の C^1 級関数かつ $D\varphi(x) = -D_y f(x, \varphi(x))^{-1} f_x(x, \varphi(x))$
(4) f が Ω 上 C^k 級ならば φ も I 上 C^k 級

以下では行列のノルムとして作用素ノルム $\|A\|$ と最大値ノルム $\|A\|_\infty := \max\{a_{ij}\}$ を使います。**ノルムの同値性**より、両者の値は行列によらない定数倍で抑えられることが知られています[1)]。すなわち、ある定数 $C_0, C_1 > 0$ が存在して、任意の行列 A に対し

$$C_0 \|A\|_\infty \leq \|A\| \leq C_1 \|A\|_\infty \tag{8.1.22}$$

が成り立ちます。ただし、証明内で使いやすいように、必要ならば $C_1 > 1$ ととりなおしておきます。

定理 8.1.5 の証明. Step 1: まずは陰関数の存在を示そう。Step 1 の方針は、適当な縮小写像を持ち出して不動点定理によって陰関数を構成するというものである。そこで、写像 $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を

$$T(x, y) := y - (D_y f(x_0, y_0))^{-1} f(x, y) \tag{8.1.23}$$

と定義する。これは

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0) &= y_0 \\ D_y T(x_0, y_0) &= I - (D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_y f(x_0, y_0) = I - I = O \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

をみたす。したがって、$T, D_y T$ の連続性から、充分小さい $\exists \delta, \rho > 0$ s.t.

- $\overline{B}(x_0, \delta) \times \overline{B}(y_0, \rho) \subset \Omega$
- $\|D_y T(x, y)\|_\infty \leq \dfrac{1}{2C_1}$ for $\forall (x, y) \in B(x_0, \delta) \times B(y_0, \rho)$
- $|T(x, y_0) - y_0| \leq \dfrac{\rho}{3}$ for $\forall x \in B(x_0, \delta)$

が成り立つ。よって、T は $\overline{B}(y_0, \rho)$ 上の縮小写像である。実際、$\forall y, y' \in \overline{B}(y_0, \rho)$ に対し

$$\begin{aligned} |T(x, y) - T(x, y')| &= |D_y T(x, (1-t)y + ty')(y - y')| \quad \text{for } \exists t \in (0, 1) \\ &\leq \|D_y T(x, (1-t)y + ty')\| \, |y - y'| \\ &\leq C_1 \|D_y T(x, (1-t)y + ty')\|_\infty \, |y - y'| \\ &\leq \frac{1}{2} |y - y'| \end{aligned} \tag{8.1.25}$$

1) 参考文献 [? , p.66] を参照。

であり、$\forall y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ に対し

$$
\begin{aligned}
|T(x,y) - y_0| &\le |T(x,y) - T(x,y_0)| + |T(x,y_0) - y_0| \\
&\le \frac{1}{2}|y - y_0| + \frac{\rho}{3} \\
&\le \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{3} \\
&< \rho
\end{aligned}
\tag{8.1.26}
$$

である。したがって、不動点定理 (定理8.1.3) により T はただひとつの不動点を持つ。すなわち、$\exists! y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ s.t.

$$
\begin{aligned}
T(x,y) = y \quad &\text{i.e.} \quad y - (D_y f(x_0, y_0))^{-1} f(x,y) = y \\
&\text{i.e.} \quad f(x,y) = 0
\end{aligned}
\tag{8.1.27}
$$

が成り立つ。よって、$\rho > 0$ を少し大きくとりなおせば $\exists \delta, \rho > 0$ s.t.

(1) $I := B(x_0, \delta)$, $J := B(y_0, \rho)$ とおくと $\overline{I} \times \overline{J} \subset \Omega$

(2) $\forall x \in I, \exists! y \in J \quad \text{s.t.} \quad f(x,y) = 0$

が成り立つ。このような y を $\varphi(x)$ と書くことにする。これで定理の (1), (2) がいえた。

Step 2: 次に (3) を示していきたいのだが、Step 2 ではひとまず φ が連続であることを示そう。$s_0, s_0 + h \in I$ を任意にとると

$$
\begin{aligned}
|\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)| &= |T(s_0 + h, \varphi(s_0 + h)) - T(s_0, \varphi(s_0))| \\
&\le |T(s_0 + h, \varphi(s_0 + h)) - T(s_0 + h, \varphi(s_0))| \\
&\qquad + |T(s_0 + h, \varphi(s_0)) - T(s_0, \varphi(s_0))| \\
&\le \frac{1}{2C_1}|\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)| \\
&\qquad + |T(s_0 + h, \varphi(s_0)) - T(s_0, \varphi(s_0))|
\end{aligned}
\tag{8.1.28}
$$

整理して

$$
|\varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0)| \le \frac{2C_1}{2C_1 - 1}|T(s_0 + h, \varphi(s_0)) - T(s_0, \varphi(s_0))| \tag{8.1.29}
$$

を得る。T の連続性より、右辺は $|h| \to 0$ で 0 に収束する。したがって φ は点 s_0 で連続である。これで Step 2 が完了した。

Step 3: φ が I 上 C^1 級であることを示そう。そこで $s_0 \in I$ を任意にとり、φ の増分を $k(h) := \varphi(s_0+h) - \varphi(s_0)$ とおく。$\lim_{h \to 0} k(h)/|h|$ を求めるのが目下の目標である。そのために $s_0 + h \in I$ なる $h \neq 0$ を固定しておく。ただし、以下必要に応じて $|h|$ は充分小さいものとしてよい。$k(h)$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
k(h) &= \varphi(s_0 + h) - \varphi(s_0) \\
&= T(s_0 + h, \varphi(s_0 + h)) - T(s_0, \varphi(s_0)) \quad (\because (8.1.27)) \\
&= T(s_0 + h, \varphi(s_0) + k(h)) - T(s_0, \varphi(s_0)) \\
&= \underbrace{D_x T(s_0, \varphi(s_0))}_{L\text{とおく}} h + \underbrace{D_y T(s_0, \varphi(s_0))}_{M\text{とおく}} k(h) + R(h, k(h))
\end{aligned}
\tag{8.1.30}
$$

となる。ただし、右辺第 3 項の $R(h,k)$ は

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{R(h,k)}{|(h,k)|}=0 \tag{8.1.31}$$

なる関数である。これより

$$(I-M)k(h)=Lh+R(h,k(h)) \tag{8.1.32}$$

が成り立つが、ここで

$$\|I-(I-M)\|=\|M\|=\|D_yT(s_0,\varphi(s_0))\|\leq\frac{1}{2C^1}<1 \tag{8.1.33}$$

なので、定理 8.1.4 より行列 $I-M$ は正則である。したがって式 (8.1.32) は

$$k(h)=(I-M)^{-1}(Lh+R(h,k(h))) \tag{8.1.34}$$

と変形できる。さて、φ の微分可能性を示すためには、右辺の $R(h,k(h))$ が $o(|h|)$ になってほしいのだが、$(h,k)\to 0$ で $\dfrac{R(h,k)}{|(h,k)|}\to 0$ だからといって $h\to 0$ で $\dfrac{R(h,k(h))}{|h|}\to 0$ とは限らない。そこで、まず $h\to 0$ における $k(h)$ の挙動を評価しよう。表記の簡略化のために

$$\varepsilon(h):=\frac{R(h,k(h))}{|h|+|k(h)|} \tag{8.1.35}$$

を導入しておくと、R の定義 (8.1.31) に注意すれば $|h|\to 0$ で $\varepsilon(h)\to 0$ である。この $\varepsilon(h)$ を用いて $|k(h)|$ を変形すれば

$$\begin{aligned}|k(h)|&=|(I-M)^{-1}(Lh+R(h,k(h)))|\\&=|(I-M)^{-1}(Lh+\varepsilon(h)(|h|+|k(h)|))|\\&\leq\|(I-M)^{-1}\|\{\|L\||h|+|\varepsilon(h)|(|h|+|k(h)|)\}\end{aligned} \tag{8.1.36}$$

であるが、$|h|$ を充分小さくとれば $\|(I-M)^{-1}\||\varepsilon(h)|<1/2$ なので、

$$（右辺）<\|(I-M)^{-1}\|\{\|L\|+|\varepsilon(h)|\}|h|+\frac{1}{2}|k(h)| \tag{8.1.37}$$

整理して

$$\frac{1}{2}|k(h)|\leq\|(I-M)^{-1}\|\{\|L\|+|\varepsilon(h)|\}|h| \tag{8.1.38}$$

が成り立つ。これは $|k(h)|=O(|h|)\ (h\to 0)$ を表している。したがって

$$\begin{aligned}\frac{R(h,k(h))}{|h|}&=\frac{R(h,k(h))}{\sqrt{|h|^2+|k(h)|^2}}\frac{\sqrt{|h|^2+|k(h)|^2}}{|h|}\\&=\frac{R(h,k(h))}{\sqrt{|h|^2+|k(h)|^2}}\sqrt{1+\left(\frac{|k(h)|}{|h|}\right)^2}\\&\to 0\quad(h\to 0)\end{aligned} \tag{8.1.39}$$

すなわち $R(h,k(h))=o(|h|)$ がいえた。よって式 (8.1.34) より

$$\varphi(s_0+h)-\varphi(s_0)=(I-M)^{-1}Lh+o(|h|) \tag{8.1.40}$$

すなわち φ の点 s_0 における微分可能性がいえて

$$\begin{aligned}D\varphi(s_0)&=(I-M)^{-1}Lh\\&=(I-D_yT(s_0,\varphi(s_0)))^{-1}D_xT(s_0,\varphi(s_0))\end{aligned} \tag{8.1.41}$$

を得る。ここで、T の定義 (8.1.23) および点 (x_0, y_0) の近傍で $\det D_y f(x,y) \neq 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} (I - D_y T(s_0, \varphi(s_0)))^{-1} &= (D_y f(s_0, \varphi(s_0)))^{-1} D_y f(x_0, y_0) \\ D_x T(s_0, \varphi(s_0)) &= -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(s_0, \varphi(s_0)) \end{aligned} \tag{8.1.42}$$

なので

$$D\varphi(s_0) = -(D_y f(s_0, \varphi(s_0)))^{-1} D_x f(s_0, \varphi(s_0)) \tag{8.1.43}$$

が成り立つ。f は C^1 級なのでこれは点 s_0 で連続である。これで定理の (3) がいえた。

Step 4: (8.1.43) から、$f \in C^k \Rightarrow \varphi \in C^k$ も明らかである。これで (4) がいえた。 □

8.2 逆写像定理

次の逆写像定理は、陰関数定理を用いて比較的簡単に示すことができます。

定理 8.2.1 (逆写像定理). Ω を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とし、f を Ω 上の C^1 級 $\mathbb{R}^n$ 値関数、$x_0 \in \Omega$ とする。

$$\det Df(x_0) \neq 0 \tag{8.2.1}$$

ならば、$x_0, f(x_0)$ の開近傍 U, V が存在して

(1) $f: U \to V$ は全単射

(2) $f^{-1} \in C^1(V; U)$ かつ $\forall y \in V$ に対し

$$Df^{-1}(y) = Df(x)^{-1}, \quad x = f^{-1}(y) \tag{8.2.2}$$

(3) f が Ω 上 C^k 級ならば f^{-1} も V 上 C^k 級

証明　証明の方針は、方程式 $f(x) - y = 0$ に陰関数定理を適用して得られる陰関数を用いて逆関数を構成するというものである。$F: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$F(x, y) := f(x) - y \tag{8.2.3}$$

とおき、$y_0 := f(x_0)$ とおく。すると

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \det D_x F(x_0, y_0) = \det Df(x_0) \neq 0 \tag{8.2.4}$$

なので、陰関数定理より $\exists \delta, \rho > 0$ s.t.

(a) $B(y_0, \delta) \times B(x_0, \rho) \subset \mathbb{R}^n \times \Omega$

(b) $\forall y \in B(y_0, \delta), \exists! x \in B(x_0, \rho)$ s.t.

$$F(x, y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad y = f(x) \quad \text{（このような } x \text{ を } \varphi(y) \text{ とおく）} \tag{8.2.5}$$

が成り立つ。ここで f の連続性と Df の連続性より、上で得られた δ に対し

(i) $B(x_0, \rho') \subset \Omega$

(ii) $B(x_0, \rho') \subset \varphi(B(y_0, \delta))$　（f の連続性を使った）

(iii) $\det Df(x) \neq 0 \quad (\forall x \in B(x_0, \rho'))$　（Df の連続性を使った）

が成り立つように $0<\rho'<\rho$ なる ρ' をとることができ、

$$U := B(x_0, \rho'), \quad V := \varphi^{-1}(U) \tag{8.2.6}$$

とおけば、φ の連続性から V は開集合である（もちろん U も開集合である）[8)]。したがって、f の制限 $f|_U : U \to V$ を同じ記号 f で書くことにすれば、f は全単射で $f^{-1}=\varphi$ である。実際、$y \in V$ に対しある $x \in U$ が存在して $\varphi(y)=x$ すなわち $y=f(x)$ なので全射性が従い、$x, z \in U$, $f(x)=f(z)=y$ ならば $x=\varphi(y)=z$ なので単射性、そして $f^{-1}=\varphi$ が従う。これで定理の (1) がいえた。

さて、陰関数定理によれば φ は V 上 C^1 級で

$$F(\varphi(y), y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(\varphi(y)) = y \tag{8.2.7}$$

なので、y で微分して

$$Df(\varphi(y))D\varphi(y) = I \tag{8.2.8}$$

を得る。よって、(iii) にも注意すれば

$$D\varphi(y) = Df(\varphi(y))^{-1} \quad \text{i.e.} \quad Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1} \tag{8.2.9}$$

が成り立つ。これで定理の (2) がいえた。

また、f が Ω 上 C^k 級ならば F も $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上 C^k 級なので、$f^{-1}=\varphi$ も V 上 C^k 級である。これで定理の (3) がいえた。 □

8) 参考文献 [松 76, 第 4 章 §1] を参照。

第 9 章　微分と積分の関係

9.1　微分積分学の基本定理

定理 9.1.1 (微分積分学の第 1 基本定理)**.** [TODO]

証明　[TODO] □

定理 9.1.2 (微分積分学の第 2 基本定理)**.** [TODO]

証明　[TODO] □

定理 9.1.3 (Leibniz integral rule)**.** [TODO]

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)\,dt = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt \tag{9.1.1}$$

証明　[TODO] □

9.2　積分記号下での微分

本節では積分記号下の微分について論じる。まず Riemann 積分バージョンについて述べる。

定理 9.2.1 (積分記号下の微分 (Riemann 積分))**.** A を $\mathbb{R}^n$ の Jordan 可測な有界閉集合、$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$、$f\colon A \times (a,b) \to \mathbb{R}$ を写像とする。このとき、f が条件

(A-1)　f は $A \times (a,b)$ 上連続

をみたすならば、$J\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_A f(x,t)\,dx$ は連続である。

[TODO]

注意 9.2.2. 上の命題の「Jordan 可測な有界閉集合」の部分は、「有界閉集合はすべて Jordan 可測なのではないか？」と一見冗長に思えるかもしれないが、そうではない。実際、太った Cantor 集合は有界閉集合だが Jordan 可測ではない [TODO] why?。

証明　[TODO] □

つぎに Lebesgue 積分バージョンについて述べる。

定理 9.2.3 (積分記号下の微分 (Lebesgue 積分)). A を可測空間、μ を A 上の測度、$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$、$f \colon A \times (a,b) \to \mathbb{R}$ を写像とする。このとき、f が条件

(A-1) a.e.$x \in A$ に対し、$t \mapsto f(x,t)$ は (a,b) 上連続

(A-2) A 上可積分なある関数 $\Phi \colon A \to \mathbb{R}$ が存在して、すべての $t \in (a,b)$ に対し $|f(x,t)| \leq \Phi(x)$ a.e.x をみたす。

をみたすならば、$J \colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_A f(x,t)\,\mu(dx)$ は連続である。さらに f が条件

(B-1) a.e.$x \in A$ に対し、$t \mapsto f(x,t)$ は (a,b) 上微分可能

(B-2) A 上可積分なある関数 $\Phi \colon A \to \mathbb{R}$ が存在して、すべての $t \in (a,b)$ に対し $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \Phi(x)$ a.e.x をみたす。

もみたすならば、$J \colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_A f(x,t)\,\mu(dx)$ は微分可能であり、$J'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mu(dx)$ が成り立つ。

注意 9.2.4. (A-2) の優関数の存在の仮定は、「すべての t に対し $x \mapsto f(x,t)$ は A 上可積分」よりも強い条件であることに注意すべきである ((B-2) も同様)。

一見すると、f に課される条件が Riemann 積分バージョンよりも複雑になったようにも見えるが、実は Riemann 積分バージョンよりもかなり弱い条件になっている。たとえば、f の定義域全体での連続性はもはや不要となっている。

[TODO] 優関数の存在を仮定するようになったのは、前提が厳しくなっていないか？

証明 [TODO] □

第 III 部

Miscellaneous

第 10 章　関数列と関数項級数

10.1　関数列

関数列の収束について基礎的な事項を整理する。

[TODO] 関数族の場合も含めてネットで定義する

定義 10.1.1 (各点収束と一様収束、広義一様収束). $I \subset \mathbb{R}$、f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ を I 上の実数値関数とする。

(1)　関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に **I 上各点収束 (converge pointwise on I)** するとは、$\forall \varepsilon > 0$ と $\forall x \in I$ に対し、$\exists N \in \mathbb{R}$ が存在し、$\forall n \geq N$ に対し

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{10.1.1}$$

が成り立つことをいう。

(2)　関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に **I 上一様収束 (converge uniformly on I)** するとは、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\exists N \in \mathbb{R}$ が存在し、$\forall x \in I$ と $\forall n \geq N$ に対し

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{10.1.2}$$

が成り立つことをいう。

(3)　関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I の任意のコンパクト部分集合上で一様収束するとき、関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **I 上広義一様収束する (converge compactly on I)** という。

命題 10.1.2 (一様 Cauchy 条件). $I \subset \mathbb{R}$、$f_n, f : I \to \mathbb{R}$ とする。このとき、次の条件は同値である。

(1)　$f_n \to f$ in $C(I)$ as $n \to \infty$

(2)　$\|f_n - f\| \to 0$ as $n \to \infty$

(3)　$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\exists N \in \mathbb{N}$ が存在し、$\forall n, m \geq N$ に対し

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{10.1.3}$$

が成り立ち、$f_n(x)$ の $n \to \infty$ での各点収束の極限は $f(x)$ である

証明　(1) ⇔(2)　一様収束の定義から明らか。

(1) ⇒(3)　$\forall \varepsilon > 0$ をとる。ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$\forall n \geq N$ に対し

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \tag{10.1.4}$$

なので、$\forall n, m \geq N$ に対し

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{10.1.5}$$

である。

(3) ⇒(1)　x ごとに $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので、実数の完備性より確かに $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \cdots$ (1) が

$\forall x \in I$ に対し存在する。(3) より、$\forall \varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$\forall n, m \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \tag{10.1.6}$$

すなわち[9)]

$$\forall n \geq N, \forall x \in I, \forall m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \tag{10.1.7}$$

である。よって、$\forall n \geq N, \forall x \in I$ をとって、(1) から定まる N' s.t.

$$\forall m \geq N', |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \tag{10.1.8}$$

に対し $m \geq \max\{N, N'\}$ をひとつ選べば

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{10.1.9}$$

である。 □

命題 10.1.3. I を任意の区間とする。I 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に I 上広義一様収束するならば、f も I 上の連続関数である。

もちろん、I は有界や閉区間でなくてもかまいません。

証明 I がコンパクトでない場合は点 $x \in I$ を含む I のコンパクト部分集合をとりなおせばよいから、以下では I がコンパクトの場合のみ示す。

$x' \in I$ を固定し、f が x' で連続であることを示そう。広義一様収束の仮定から、$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon/3 \tag{10.1.10}$$

である。f_N は x' で連続だから、x' のある近傍 U が存在して

$$x \in U \cap I \Rightarrow |f_N(x') - f_N(x)| < \varepsilon/3 \tag{10.1.11}$$

が成り立つ。よって $\forall x \in U$ に対し

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')| + |f_N(x') - f(x')| \\ &\leq \|f - f_N\| + \varepsilon/3 + \|f_N - f\| \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{10.1.12}$$

である。したがって f は x' で連続である。 □

定理 10.1.4 (項別積分)**.** $I := [a, b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to \infty$ のとき f に I 上一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \tag{10.1.13}$$

9) 混乱の恐れがなければ、以降の議論をすっ飛ばして単に「$m \to \infty$ とすれば $\forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$」と言ってしまう手もあります。次の定理 10.1.3 や第 4 回の定理 11.4.3 でもこれと似たような内容の論証を少しずつ異なる言い回しで試みているので、ぜひ見比べてみてください。

証明　一様性があるので積分を外から抑えられます。 □

定理 10.1.5 (項別微分). I を任意の区間とする。このとき

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(I)$ が $n \to \infty$ で f に各点収束
(2) $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(I)$ が $n \to \infty$ で g に I 上広義一様収束

ならば

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(I)$ が $n \to \infty$ で f に I 上一様収束し C^1 級
(2) I の各点で $g(x) = f'(x)$

証明　I が有界閉区間の場合を以下の流れに沿って示した後、一般の区間 I に対しては各点 x を含む有界閉区間がとれることを用いて示します。x ごとに微積分学の基本定理を使って一様収束を示します。f の微分可能性は積分の平均値定理を使って示します。 □

10.2　関数項級数

関数項級数の収束について基礎的な事項を整理します。

定義 10.2.1 (関数項級数の収束). 簡単なので省略

命題 10.2.2 (関数項級数の項別積分). $I := [a, b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ による関数項級数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ が I 上一様収束であるとき

(1) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ も連続関数
(2) $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k\in N} f_k(x)dx$

証明　関数列の場合と同様なので省略 □

命題 10.2.3 (関数項級数の項別微分). I を任意の区間とし、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(I)$ とする。このとき

(1) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ が $n \to \infty$ で各点収束
(2) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f'_k(x)$ が $n \to \infty$ で I 上広義一様収束

ならば

(1) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ が $n \to \infty$ で I 上一様収束し C^1 級
(2) I の各点で $\frac{d}{dx} \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f'_k(x)$

証明　関数列の場合と同様なので省略 □

定理 10.2.4 (Weierstrass の M テスト)**.** $a < b$, $I = [a, b]$ とし、$f_n : I \to \mathbb{R}\,(\forall n \in \mathbb{N})$ とする。ある実数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して次を満たすと仮定する：

(1) 十分大きな $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $\|f_n\| \leq M_n$

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} M_k$ は収束する

このとき、級数 $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ は I 上一様収束する。

この定理は f_n, f が多変数関数の場合にも拡張できます。

証明　一様 Cauchy 条件に帰着させて示します。 □

10.3　演習問題

♤ **演習問題 10.1** (東大数理 2006A).

(1)　正の整数 n に対し、定積分 $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos\theta) \, d\theta \tag{10.3.1}$$

を $x = 0$ を中心として Taylor 展開し、その $n+1$ 次以上の項を無視して得られる多項式を $p_n(x)$ とする。$p_n(x)$ を求めよ。

(3)　K を $\mathbb{R}$ の有界な部分集合とする。$n \to \infty$ のとき $p_n(x)$ は $f(x)$ に K 上一様収束することを示せ。

証明　(1)　$n \geq 2$ のとき、$\cos^n \theta = \cos^{n-2}\theta(1 - \sin^2\theta)$ に注意すると

$$I_n = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta \, d\theta}_{=I_{n-2}} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta \, d\theta \tag{10.3.2}$$

である。右辺第 2 項は部分積分により

$$\left[-\frac{1}{n-1}\cos^{n-1}\theta \sin\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta \, d\theta \tag{10.3.3}$$

$$= \frac{1}{n-1} I_n \tag{10.3.4}$$

と変形される。したがって $I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1} I_n$ となり、整理して $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ を得る。具体的計算により $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ だから、求める答えは

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{10.3.5}$$

である。

(2)

$$p_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{(-1)^k}{k!} I_{2k} x^k \tag{10.3.6}$$

[TODO]

(3)　Taylor 展開の剰余項を $R_n(x) := f(x) - p_n(x)$ とおく。$R_n(x)$ が $n \to \infty$ で K 上 0 に一様収束することをいえばよい。いま K は有界だから、ある $R > 0$ が存在して、すべての $x \in K$ に対して $|x| < R$ が成り立つ。また (1) の結果より、すべての $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $I_{2k} < \frac{\pi}{2}$ が成り立つ。したがって

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k > n/2} \frac{1}{k!} I_{2k} |x|^k \tag{10.3.7}$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \sum_{k > n/2} \frac{1}{k!} R^k \tag{10.3.8}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^R - \sum_{0\le k\le n/2} \frac{1}{k!}R^k\right) \tag{10.3.9}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty) \tag{10.3.10}$$

を得る。すなわち $R_n(x)$ は K 上 0 に一様収束する。これが示したいことであった。 □

第 11 章　Fourier 級数と Fourier 変換

11.1　熱方程式に対するフーリエの方法

偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{k}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{11.1.1}$$

を**熱方程式**と呼びます。以下、簡単のため $c = k = 1$ とします。これに

$$\begin{aligned} &\text{境界条件} \quad u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \\ &\text{初期条件} \quad u(x,0) = a(x) \not\equiv 0 \quad \text{for } x \in [0,1] \quad \left(\text{ただし } \int_0^1 a(x)^2 dx < \infty\right) \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

を付け加えた問題を考えてみます。求解の方針は次の 3 ステップです。

(1)　解の形を変数分離形 $u(x,t) = \varphi(x)\eta(t)$ に仮定し、

(2)　境界条件から $\varphi_n(x)$ と $\eta_n(t)$ を順に求め、

(3)　$\varphi_n(x)\eta_n(t)$ の無限個の重ね合わせをとり、初期条件をみたす係数を求める。

(3) の無限和の収束性に一旦目をつぶれば、"解"は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), \quad c_n = 2\int_0^1 a(x)\sin(n\pi x)dx \tag{11.1.3}$$

と求まります[1)]。そして、実はこの級数はきちんと収束します。

命題 11.1.1. フーリエの方法で求めた解 (11.1.3) は $[0,1]\times(0,\infty)$ 上広義一様収束する。

証明　$[0,1]\times[\tau,T]$, $0<\tau<T$ を任意にとる。Weierstrass の定理を用いて示す。充分大きな任意の n に対し

$$\begin{aligned} |c_n u_n(x,t)| &\leq |c_n|\, e^{-(n\pi)^2\tau} \sin(n\pi x) \\ &\leq |c_n|\, e^{-(n\pi)^2\tau} \\ &\leq \frac{|c_n|}{(n\pi)^2\tau}(n\pi)^2\tau\, e^{-(n\pi)^2\tau} \end{aligned} \tag{11.1.4}$$

$$\therefore \quad |c_n u_n(x,t)| = O\left(\frac{|c_n|}{n^2}\right) \quad (n\to\infty)$$

であり、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^2} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)^{1/2} \\ &= \left(2\int_0^1 a(x)^2 dx\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)^{1/2} \\ &< \infty \end{aligned} \tag{11.1.5}$$

1)　c_n の式の先頭に現れる 2 は $\displaystyle\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{2}$ に由来します。

なので、(11.1.3) の級数は $[0,1]\times[\tau,T]$ 上一様収束、したがって $[0,1]\times(0,\infty)$ 上広義一様収束する。 □

11.2 フーリエ級数展開

周期 2π の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し、同じく周期 2π の関数からなる関数系 $\{1/\sqrt{2}, \cos nx, \sin nx\}$ $(n=1,2,\dots)$ による展開[2)]

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \tag{11.2.1}$$

を f の**フーリエ級数展開**と呼び、

$$S_N[f](x):=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \tag{11.2.2}$$

を f の**第 N フーリエ部分和**と呼びます。フーリエ級数展開が f に一致するかどうかはまだわかりませんが、一致すると仮定すれば、三角関数の直交性から**フーリエ係数** a_n, b_n は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

と表せることがわかります[3)]。そこで、フーリエ級数展開が f に一致するという仮定は一旦忘れて、a_n, b_n を上のように定義して議論をスタートします。

ここからは、フーリエ級数展開が収束するかどうか、するとしたらどこに収束するか、ということを考えていきます。まずはフーリエ級数展開が一様収束するための条件をいくつか確認しておきます。

定理 11.2.1. f が C^2 級の 2π 周期関数であるとき、$S_N[f]$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する。

証明　フーリエ係数 a_n に対して

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx && (11.2.4)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx \quad (\because \text{部分積分}) && (11.2.5)\\ &= -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx \quad (\because \text{部分積分}) && (11.2.6)\\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n\to\infty) && (11.2.7) \end{aligned}$$

である。よって

$$|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\le|a_n|+|b_n|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty) \tag{11.2.8}$$

なので、Weierstrass の定理により、$S_N[f]$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する。 □

定理 11.2.2. f が C^1 級の 2π 周期関数であるとき、$S_N[f]$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する。

2) 関数系 $\{1/\sqrt{2}, \cos nx, \sin nx\}$ は内積 $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx$ のもとで正規直交関数系となっています。

3) f が偶関数ならば $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}$, $b_n=0$ に、奇関数ならば $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}$ になります。

証明　$m > n > 0$ なる自然数 m, n を任意にとると

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| = \sum_{k=n}^{m} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right| \quad (\because \text{定義}) \tag{11.2.9}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{m} \left| \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx \right| \quad (\because \text{部分積分}) \tag{11.2.10}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=n}^{m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\because \text{Schwartz の不等式}) \tag{11.2.11}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^2} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx \right\}^{1/2} \quad (\because \text{Parseval の等式}) \tag{11.2.12}$$

$$< \infty \tag{11.2.13}$$

なので、Cauchy の収束条件により級数 $\sum |a_n|$ は収束する。同様にして $\sum |b_n|$ も収束する。したがって

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \tag{11.2.14}$$

の右辺は収束するから、Weierstrass の定理により、$S_N[f]$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する。 □

さて、フーリエ級数展開が一様収束するための条件はいくつか確認できたので、次は肝心の「どこに収束するか？」を考えていきます。そのためには各点収束の極限を考えればよいのですが、その前にいくつかの補題を準備しておきます。

補題 11.2.3. フーリエの部分和は

$$S_N[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) y}{\sin \frac{1}{2} y} dy \tag{11.2.15}$$

と書ける。

証明　三角数列の和の公式

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{11.2.16}$$

と、f の周期性を利用した置換を用いて示します。 □

補題 11.2.4. 区間 $[-\pi, \pi]$ 上で区分的に連続な関数 g に対して次が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) x dx = 0 \tag{11.2.17}$$

証明　リーマン・ルベーグの定理[13)]より明らか。 □

13)　リーマン・ルベーグの定理の主張は以下のとおりです。証明は参考文献 [杉清金岡 89, 第 3 章 例題 3.3] を参照。有界閉区間 $I = [a, b]$ 上

補題 11.2.5. f を $\mathbb{R}$ 上の区分的 C^1 級関数とし、$x \in \mathbb{R}$ を任意にとる。このとき

$$y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x-0)}{\sin(y/2)} \text{ は } -\pi \le y \le 0 \text{ で、} \tag{11.2.18}$$

$$y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x+0)}{\sin(y/2)} \text{ は } 0 \le y \le \pi \text{ で、} \tag{11.2.19}$$

それぞれ区分的に連続である。

証明 $x \in \mathbb{R}$ を任意に固定する。x は f の不連続点であってもよい。$y \neq 0$ のときは (11.2.18), (11.2.19) の分母は 0 でないから、f の区分的連続性により定理の主張が成り立つ。したがって $y \to 0$ のときを考えればよく、以下 $y \to -0$ の場合を示す。$y \to +0$ の場合も同様にして示せる。

$$\alpha(y) := \frac{f(x+y) - f(x-0)}{\sin(y/2)} \tag{11.2.20}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\alpha(y) &= \frac{f(x+y) - \lim_{\varepsilon\to+0} f(x-\varepsilon)}{\sin(y/2)} \\ &= 2\,\frac{f(x+y) - \lim_{\varepsilon\to+0} f(x-\varepsilon)}{y}\,\frac{y/2}{\sin(y/2)} \\ &= 2\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{f(x-\varepsilon+y) - f(x-\varepsilon)}{y}\,\frac{y/2}{\sin(y/2)}\end{aligned} \tag{11.2.21}$$

である。ただし、最後の式変形では $|y|$ が充分小さいとき f が点 $x+y$ で連続であることを用いた。$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}$ の部分を ε-δ 論法で書き直すと、$\forall\eta > 0$ に対し $\exists\varepsilon_\eta > 0$ s.t. $0 < \forall\varepsilon < \varepsilon_\eta$ に対し

$$\alpha(y) - \eta < 2\,\frac{f(x-\varepsilon+y) - f(x-\varepsilon)}{y}\,\frac{y/2}{\sin(y/2)} < \alpha(y) + \eta \tag{11.2.22}$$

である。ε を充分小さくとれば f は点 $x - \varepsilon$ で微分可能、とくに左微分可能なので、式 (11.2.22) の第 2 辺には $y \to -0$ の極限が存在するが、それはとくに下極限と一致するから、式 (11.2.22) の各辺の $y \to -0$ の下極限をとって

$$\liminf_{y\to-0} \alpha(y) - \eta \le 2f'(x-\varepsilon) \le \liminf_{y\to-0} \alpha(y) + \eta \tag{11.2.23}$$

を得る。ふたたび ε-δ 論法による極限の定義を思い出せば

$$2f'(x-0) = \liminf_{y\to-0} \alpha(y) \tag{11.2.24}$$

を得る。同様の議論により

$$2f'(x-0) = \limsup_{y\to-0} \alpha(y) \tag{11.2.25}$$

も示せる。f は区分的 C^1 級なので $f'(x-0)$ が存在し、したがって

$$\lim_{y\to-0} \alpha(y) = \liminf_{y\to-0} \alpha(y) = \limsup_{y\to-0} \alpha(y) = 2f'(x-0) \in \mathbb{R} \tag{11.2.26}$$

である。 □

で関数 f が可積分であるとき、$\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(tx)dx = 0$ および $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(tx)dx = 0$ が成り立つ。

定理 11.2.6. f が区分的に C^1 級の 2π 周期関数であるとき、任意の $x \in [-\pi, \pi]$ に対して

$$S_N[f](x) \to \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2} \quad (N \to \infty) \tag{11.2.27}$$

が成り立つ。

この定理は、f のフーリエ級数展開が

- x が連続点のときは $f(x)$ に
- x が不連続点のときはそこでの "跳躍" の中央に

各点で収束するということを主張しています。

証明 定理 11.2.3 より、

$$S_N[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy \tag{11.2.28}$$

である。さらに

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy = \pi \tag{11.2.29}$$

である。よって

$$S_N[f](x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{11.2.30}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(y+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy - \frac{f(x-0)}{2}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(y+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy - \frac{f(x+0)}{2} \tag{11.2.31}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(y+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(y+x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}dy \tag{11.2.32}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(y+x)-f(x-0)}{\sin\frac{1}{2}y}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)ydy$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(y+x)-f(x+0)}{\sin\frac{1}{2}y}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)ydy \tag{11.2.33}$$

である。ここで

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y+x)-f(x-0)}{\sin\frac{1}{2}y} & (-\pi \leq y \leq 0) \\ \dfrac{f(y+x)-f(x+0)}{\sin\frac{1}{2}y} & (0 < y \leq \pi) \end{cases} \tag{11.2.34}$$

とおけば、定理 11.2.5 により g は区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続である。したがって、定理 11.2.4 により

$$(\text{式 (11.2.33)}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)ydy \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{11.2.35}$$

である。すなわち

$$S_N[f](x) \to \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2} \quad (N \to \infty) \tag{11.2.36}$$

がいえた。 □

定理 11.2.7. f が区分的な周期関数で $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty\, (f \in L^2(-\pi, \pi))$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N[f])^2 dx \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{11.2.37}$$

が成り立つ。

証明　難しいので省略[14)] □

11.3　複素フーリエ級数展開

周期 $2\pi l,\ l > 0$ の複素数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対し、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n}{l}x} \tag{11.3.1}$$

を f の**複素フーリエ級数展開**と呼びます。フーリエ係数 c_n は、指数関数の直交性から

$$c_n = \frac{1}{2\pi l} \int_{-l\pi}^{l\pi} f(x) e^{-i\frac{n}{l}x} dx \tag{11.3.2}$$

と表せることがわかります。

♤ **演習問題 11.1.** 関数列

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \tag{11.3.3}$$

の極限 $(n \to \infty)$ を求めよ。

解答：

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \tag{11.3.4}$$

♤ **演習問題 11.2.** $I = [0, 1],\ f_n(x) = x^n\ (n \in \mathbb{N})$ とおく。関数列 $\{f_n\}_n$ は各点収束するが一様収束しないことを示せ。

♤ **演習問題 11.3.** $I = [0, 2]$、

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (x \in [0, 1/n]) \\ -n^2(x - 2/n) & (x \in [1/n, 2/n]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{11.3.5}$$

とおく。関数列 $\{f_n\}_n$ は各点収束するが一様収束しないことを示せ。また、項別積分が一致しないことを確かめよ。

14)　参考文献 [吉 21, 定理 8.2.1] を参照

♤ **演習問題 11.4.** $I = [0, \infty)$, $f_n(x) := \dfrac{x}{nx+1}$ とおく。関数列 $\{f_n\}_n$ は I 上一様収束することを示せ。

♤ **演習問題 11.5.** $I = [0, 1]$ 上の関数 $f_n(x) := \dfrac{x}{nx+1}$ は $n \to \infty$ で I 上一様収束することを示せ。また、項別積分が一致することを確かめよ。

♤ **演習問題 11.6.** $I = [-R, R]\,(R > 0)$ 上の関数項級数

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{x^2+k^2} \tag{11.3.6}$$

が一様収束することを示せ。

♤ **演習問題 11.7.** $I = [0, 2]$ 上の関数項級数

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{x^2+k^2} \tag{11.3.7}$$

が一様収束することを示せ。

♤ **演習問題 11.8.**

- [杉清金岡 89, 第 III 章 例題 6.1.1]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 6.1.2 (2)]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 例題 6.2.1]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 6.2.1 (1),(2)]

を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 11.9.** 次の初期値・境界値問題の解を求めよ。

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{for } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 5\sin(8\pi x) \quad \text{for } x \in [0,1] \end{aligned} \tag{11.3.8}$$

解答：

$$u(x,t) = 2e^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x) + 5e^{-(8\pi)^2 t}\sin(8\pi x) \tag{11.3.9}$$

♤ **演習問題 11.10.** 次の初期値・境界値問題の解を求めよ。

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{for } (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty) \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ &u(x,0) = a(x) \quad \text{for } x \in [0,L] \end{aligned} \tag{11.3.10}$$

ただし $\displaystyle\int_0^L a(x)^2 dx < \infty$ とする。

解答：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L a(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{11.3.11}$$

♤ **演習問題 11.11.** 次の初期値・境界値問題の解を求めよ。

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{for } (x,t) \in (0,10)\times(0,\infty) \\ &u(0,t) = u(10,t) = 0 \\ &u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) \quad \text{for } x \in [0,10] \end{aligned} \tag{11.3.12}$$

解答：

$$u(x,t) = e^t\left(3e^{-(2\pi)^2 t}\sin(2\pi x) - 7e^{-(4\pi)^2 t}\sin(4\pi x)\right) \tag{11.3.13}$$

♤ **演習問題 11.12.** 関数 $x \mapsto \pi - |x| \quad (x \in [-\pi,\pi])$ を $\mathbb{R}$ 全体に周期拡張した関数を f とおく。f のフーリエ級数展開を求めよ。

解答：

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \tag{11.3.14}$$

♤ **演習問題 11.13.** 関数

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & (0 < x \le \pi) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases} \tag{11.3.15}$$

を $\mathbb{R}$ 全体に周期拡張した関数を f とおく。f のフーリエ級数展開を求めよ。

解答：

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \tag{11.3.16}$$

♤ **演習問題 11.14.** $0 \le x \le \pi$ に対し $f(x) = -x(x-\pi)$ とおく。f の周期 2π の奇関数拡張、偶関数拡張のフーリエ級数展開を求めよ。

解答：

奇関数拡張：$b_n = \dfrac{4}{n^3\pi}(1-(-1)^n)$

偶関数拡張：$\dfrac{1}{2}a_0 = \dfrac{1}{6}\pi^2$, $a_n = -\dfrac{2}{n^2}(1+(-1)^n)$

♤ **演習問題 11.15.**

- [杉清金岡 89, 第 III 章 例題 3.3]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 11.1 (1)-(4)]

を読者の演習問題とする。

11.4 パラメータを含む積分

ここからはパラメータを含む積分の一様収束性など基礎的な事項を整理します。

以下では 2 変数関数 $f(x,s)$ が登場しますが、x の方がパラメータで、s は主変数です。x の変域 Ω はコンパクトの場合のみを考えます。一方で s の変域 I は、まずコンパクトの場合を考えてから非有界区間の場合に拡張しますが、このときに積分の一様収束性が仮定に加わることになります。

定理 11.4.1 (I がコンパクトの場合)**.** $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $\Omega := [\alpha,\beta]$, $I := [a,b]$ をとる。関数 $f(x,s)$ が $\Omega\times I$ 上連続ならば次が成り立つ。

(1) x の関数 $\displaystyle\int_a^b f(x,s)\,ds$ は Ω 上連続である。

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,s)\,ds\right)dx = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,s)\,dx\right)ds$

さらに $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,s)$ が存在して $\Omega\times I$ 上連続ならば次も成り立つ。

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,s)\,ds = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds$ と書けて Ω 上連続

証明 (1) f はコンパクト集合 $\Omega\times I$ 上連続なので、$\Omega\times I$ 上一様連続でもある。したがって $\varepsilon>0$ を任意にとると、$\exists\delta>0$ s.t.

$$|(x,s)-(y,t)|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x,s)-f(y,t)|<\varepsilon/(b-a) \tag{11.4.1}$$

とくに

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x,s)-f(y,s)|<\varepsilon/(b-a) \quad (\forall s\in I) \tag{11.4.2}$$

すなわち

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad \|f(x,\cdot)-f(y,\cdot)\|\le\varepsilon/(b-a) \tag{11.4.3}$$

である。そこで $|x-y|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x,s)\,ds-\int_a^b f(y,s)\,ds\right| &\le \int_a^b |f(x,s)-f(y,s)|\,ds\\ &\le \|f(x,\cdot)-f(y,\cdot)\|\,(b-a)\\ &\le\varepsilon\end{aligned} \tag{11.4.4}$$

である。したがって、$\displaystyle\int_a^b f(x,s)\,ds$ は Ω 上（一様）連続である。

(2) 長いので省略 [15)]

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,s)$ が連続ならば (1) より $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds$ も連続である。よって

$$\begin{aligned}\int_\alpha^x \left\{\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,s)\,ds\right\} d\xi &= \int_a^b \left\{\int_\alpha^x \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,s)\,d\xi\right\} ds \\ &= \int_a^b (f(x,s)-f(\alpha,s))ds \\ &= \int_a^b f(x,s)ds - \underbrace{\int_a^b f(\alpha,s)ds}_{\text{定数}}\end{aligned} \tag{11.4.5}$$

この両辺を x で微分して定理の式を得る。 □

定理 11.4.2 (I が非有界区間の場合). $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $\Omega := [\alpha,\beta]$ と非有界区間 $I := [a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ をとる。関数 $f(x,s)$ が $\Omega \times I$ 上連続で、広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,s)\,ds$ が Ω 上広義一様収束するならば次が成り立つ。

(1) x の関数 $\displaystyle\int_a^\infty f(x,s)\,ds$ は Ω 上連続である。

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x,s)\,ds\right) dx = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x,s)\,dx\right) ds$

さらに $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,s)$ が存在して $\Omega \times I$ 上連続で、$\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds$ が Ω 上広義一様収束するならば次も成り立つ。

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^\infty f(x,s)\,ds = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds$ と書けて Ω 上連続

実際は (3) だけを言いたいのであれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x,s)\,ds$ は各点収束でも問題ないのですが、ここではこのまま進めます。

証明 (1), (2) 定理 11.4.1 と、連続関数の広義一様収束極限も連続関数であるという定理を用いれば示せます。
(3) 定理 11.4.1 と同様の論法で示せます。 □

さて、広義積分の一様収束性を判定する定理として、第 2 回で登場した関数項級数に関する Weierstrass の M テストの類似が成り立ちます。補題をひとつ提示してから定理を示します。

補題 11.4.3 (連続関数全体の空間の完備性). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。Ω 上の連続関数全体の集合に sup ノルムから誘導される距離を入れた空間 $C(\Omega)$ は完備である。

証明 $C(\Omega)$ の完備性を示すには、$C(\Omega)$ の任意の Cauchy 列が $C(\Omega)$ に極限を持つことをいえばよい。そこ

15) [杉 80, 第 IV 章 §7]

で、Ω 上の連続関数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって

$$\lim_{n,m\to\infty} \|F_n - F_m\| = 0 \tag{11.4.6}$$

であるものを任意にとる。すると、$x \in \Omega$ ごとに $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので、$\mathbb{R}^n$ の完備性より $\lim_{n\to\infty} F_n(x) =: F(x) \cdots$ (1) が $\forall x \in \Omega$ に対し存在する。よって、あとは $F \in C(\Omega)$ を示せば定理がいえる。そこで $x' \in \Omega$ を固定し、x' での F の連続性を示そう。

(11.4.6) より、$\forall\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall n, m \geq N, \forall x \in \Omega, |F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon/3 \tag{11.4.7}$$

なので、$m \to \infty$ として

$$\forall n \geq N, \forall x \in \Omega, |F_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon/3 \tag{11.4.8}$$

である。F_n の連続性より、x' の近傍 U が存在して

$$x \in U \in \Omega \Rightarrow |F_n(x) - F_n(x')| < \varepsilon/3 \tag{11.4.9}$$

なので、$\forall x \in U$ に対し

$$|F(x) - F(x')| \leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(x')| + |F_n(x') - F(x')| < \varepsilon \tag{11.4.10}$$

である。したがって F は x' で連続である。 □

定理 11.4.4 (広義積分に関する Weierstrass の M テスト)**.** $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $\Omega := [\alpha, \beta]$ と非有界区間 $I := [a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ をとる。与えられた連続関数 $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ に対し、ある関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ が存在して次を満たすと仮定する：

(1) 十分大きな $\forall s \in I$ に対し $\|f(\cdot, s)\| \leq \varphi(s)$
(2) $\displaystyle\int_a^\infty \varphi(s)\,ds$ が広義可積分

このとき、広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x, s)\,ds$ は Ω 上一様収束する。

証明 $\displaystyle\int_a^\infty f(x, s)\,ds$ に関する一様 Cauchy 条件の成立を、$\displaystyle\int_a^\infty \varphi(s)\,ds$ に関する Cauchy 条件を用いて示します。極限関数の存在は、Ω 上の連続関数全体の空間が sup ノルムに関して完備であることを用いて示します。 □

11.5 フーリエ変換

フーリエ級数展開は直交関数系 $\{e^{i\frac{n}{T}x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ による展開でしたが、周期を持つとは限らない関数でも展開できるようにするため、関数系を非可算に拡張することを考えます。天下り的に定義を述べると、$\mathbb{R}$ 上の複素数値広義可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対し、

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \tag{11.5.1}$$

を f の**フーリエ変換**と呼び、

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi \tag{11.5.2}$$

を f の**逆フーリエ変換**と呼びます[4]。ここで、ある良い性質を持った f に対しては

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi)\, e^{i\xi x} d\xi \tag{11.5.3}$$

が成り立つことがわかっています。すなわち、非可算な関数系 $\{e^{i\xi x}\}_{\xi\in\mathbb{R}}$ を用いて、$\{\mathcal{F}[f](\xi)\}_{\xi\in\mathbb{R}}$ を展開係数とした f の展開が得られるということです。

11.6　急減少関数空間

定義 11.6.1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が**急減少関数**であるとは、f が次をみたすことをいう[5]：

(1)　$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

(2)　任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|f|_{m,n} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m |f^{(n)}(x)| < \infty \tag{11.6.1}$$

急減少関数全体の集合を $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と書く。

定理 11.6.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

証明　ややこしいので省略[17]　□

定理 11.6.3 (反転公式). $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。このとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し**反転公式**

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f](x) \tag{11.6.2}$$

が成り立つ。

証明　ややこしいので省略[18]　□

11.7　フーリエ変換の性質

まず次の写像を準備しておきます：

- 平行移動 $\tau_h : x \mapsto x - h$
- 拡大・縮小 $d_t : x \mapsto tx \quad (t > 0)$
- 反転 $f^\vee(x) = f(-x)$

4)　係数の $1/\sqrt{2\pi}$ は複素指数関数の周期 2π に由来しており、この係数が出てこないような関数系を用いる流儀も存在します。なお、フーリエ変換も逆フーリエ変換も $\int_{\mathbb{R}}$ が付いているのでどっちがどっちだかややこしいですが、フーリエ変換は "展開係数" であり、逆フーリエ変換は "重ね合わせ" にあたります。

5)　「微分して　x たちを　掛けたとて　その絶対値　限りありけり」 — 詠み人知らず

17)　[杉 85, 第 VII 章 定理 6.7]

18)　[杉 85, 第 VII 章 定理 6.7]

命題 11.7.1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。このとき次が成り立つ：

(1) $f \circ \tau_h,\ f \circ d_t,\ f^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(2) $\mathcal{F}[f \circ \tau_h](\xi) = e^{ih\xi}\mathcal{F}[f](\xi)$

(3) $\mathcal{F}[f \circ d_t](\xi) = \dfrac{1}{t}\mathcal{F}[f]\left(\dfrac{\xi}{t}\right)$

(4) $\mathcal{F}[f^\vee](\xi) = (\mathcal{F}[f])^\vee(\xi) = \mathcal{F}^{-1}[f](\xi)$

証明 (1) 簡単, (2) 自明, (4) 明らか

(3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f \circ d_t](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f \circ d_t(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(tx) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x/t} dx \\
&= \frac{1}{t}\mathcal{F}[f](\xi/t)
\end{aligned} \tag{11.7.1}$$

□

定理 11.7.2. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。このとき次が成り立つ：

- 線形性:
$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(\alpha f) = \alpha\mathcal{F}f \tag{F1}$$

- 微分演算:
$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}f\right] = i\xi\mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d}{d\xi}g\right] = -ix\mathcal{F}^{-1}g \tag{F2}$$

- 掛け算:
$$\mathcal{F}[xf] = i\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}f) \tag{F3}$$

- 畳み込み[6]: $(f * g)(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ とおくと
$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \tag{F4}$$

証明 (F1) は明らか。

(F2) について、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f'](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{x=-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= i\xi\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\xi)
\end{aligned} \tag{11.7.2}$$

6) 畳み込みは確率変数の和 $X + Y$ の確率分布を表すときに使ったりします。

である。ただし、f が急減少関数であることからとくに $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x||f(x)| < \infty$、したがって

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)e^{i\xi x}| = \lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0 \tag{11.7.3}$$

であることを用いた。$\mathcal{F}^{-1}$ についても同様に示せる。

(F3) について、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[xf](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(-\frac{1}{i}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}(e^{-i\xi x})dx \\
&= \left(-\frac{1}{i}\right)\frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= i\sqrt{2\pi}\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)
\end{aligned} \tag{11.7.4}$$

である。

(F4) について、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)dt\right)e^{-i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,e^{-i\xi(x-t)}g(t)\,e^{-i\xi t}dtdx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,e^{-i\xi(x-t)}dx\right)g(t)\,e^{-i\xi t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-i\xi x}dx\right)g(t)\,e^{-i\xi t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\xi)\,g(t)\,e^{-i\xi t}dt \\
&= \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(t)\,e^{-i\xi t}dt \\
&= \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi)
\end{aligned} \tag{11.7.5}$$

である。 □

♤ **演習問題 11.16.** $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ を確認せよ。

♤ **演習問題 11.17.** $\dfrac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}$ を確認せよ。

♤ **演習問題 11.18** (ポアソン核)**.** $f(x) = e^{-k|x|}$ $(k > 0)$ のフーリエ変換を求めよ。

解答：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{\xi^2+k^2} \tag{11.7.6}$$

♤ **演習問題 11.19** (ガウス核). $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ $(\alpha > 0)$ のフーリエ変換を求めよ。

解答：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\alpha}\right) \tag{11.7.7}$$

♤ **演習問題 11.20** (全空間上の熱方程式). 熱方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\, t > 0) \\ &|u| \to 0 \quad (|x| \to \infty) \\ &u(x,0) = a(x) \end{aligned} \tag{11.7.8}$$

の解を求めよ。

解答；

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} a(z) dz \tag{11.7.9}$$

♤ **演習問題 11.21.** 次の関数のフーリエ変換を求めよ。$\alpha > 0$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le \alpha) \\ 0 & (|x| > \alpha) \end{cases} \tag{11.7.10}$$

解答：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\alpha\xi)}{\xi} \tag{11.7.11}$$

♤ **演習問題 11.22.** 次の関数のフーリエ変換を求めよ。$L > 0$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{11.7.12}$$

解答：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-iL\xi)\,(1 + iL\xi) - 1}{\xi^2} \tag{11.7.13}$$

♤ **演習問題 11.23.** 次の関数のフーリエ変換を求めよ。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \tag{11.7.14}$$

ただし次のことは用いてよい。

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \tag{11.7.15}$$

解答：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{1}{|\xi|}} \tag{11.7.16}$$

♤ **演習問題 11.24.** 次の積分を計算せよ。

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt) dt \tag{11.7.17}$$

解答： $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \dfrac{-x^2}{4}$

♤ **演習問題 11.25.** 連続関数 $a(x)$ は定数 $A > 0$ に対して $|a(x)| \leq A \ (x \in \mathbb{R})$ をみたすものとし、$(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ で定義された関数

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} a(y)\, dy \tag{11.7.18}$$

を考える。このとき、$u_x(x, t)$ は $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上連続で

$$u_x(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{x-y}{2t} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} a(y)\, dy \tag{11.7.19}$$

と表せることを示せ。

♤ **演習問題 11.26.**

- [杉 85, 第 VII 章 §6 問題 1)]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 7.1 (1)]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 7.2 (1)]

を読者の演習問題とする。

第 12 章　Lagrange の未定乗数法

12.1　条件付き極値問題

ここでは U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とし、$f\colon U \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g}\colon U \to \mathbb{R}^m$ を C^1 級とします。さらに

$$S_{\boldsymbol{g}} := \{\boldsymbol{x} \in U \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\} \tag{12.1.1}$$

とおきます。さて、$S_{\boldsymbol{g}}$ は拘束条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0$ をみたす零点集合ですが、$\boldsymbol{x}$ がこの集合に沿って動くときの $f(\boldsymbol{x})$ の極値を求めたいというのが Lagrange の未定乗数法のモチベーションです。

定義 12.1.1. $\boldsymbol{x_0} \in S_{\boldsymbol{g}}$ とする。$\exists r > 0$　s.t.

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x_0}) \quad \text{for } \forall \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{x_0}) \cap S_{\boldsymbol{g}} \tag{12.1.2}$$

が成り立つとき、f は $\boldsymbol{x_0}$ **において** $S_{\boldsymbol{g}}$ **上の極大値をとる**という。

$\boldsymbol{x}$ が $S_{\boldsymbol{g}}$ に沿って動くときの $f(\boldsymbol{x})$ の極値を求めるには、素朴なアイディアとしては $\boldsymbol{x}$ が $S_{\boldsymbol{g}}$ に沿って動くときの f の方向微分を考えればよさそうです。しかし、そのような条件をきちんと考慮するのは結構面倒です。そこで登場するのが、方向微分など持ち出さずとも単なる勾配 ∇f を考えればよいことを保証してくれる次の定理です。

定理 12.1.2. $U, f, \boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{a} \in S_{\boldsymbol{g}}$ に対し

(1)　$\boldsymbol{a}$ において f は $S_{\boldsymbol{g}}$ 上の極値をとる

(2)　$\operatorname{rank} D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = m$　ただし $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \left(g_{ix_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

が成り立つならば、$\exists \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$　s.t.

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\lambda} D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) \quad \text{i.e.} \quad f_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{ix_j}(\boldsymbol{a}) \tag{12.1.3}$$

証明　$\operatorname{rank} D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = m$ なので $n \geq m$ であり、rank の性質より行列 $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ の 0 でない小行列式の最大次数が m である。そこで、議論の一般性を失うことなく、必要ならば x_j の番号を取り替えて

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)} \neq 0 \tag{12.1.4}$$

とできる。要するに行列 $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ の "右側" が正則となるように並び替えるわけである。ここで、行列 $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ を "右側" と "左側" に分けたのにあわせて、定理で与えられたベクトルも成分を書き分けておく。すなわち

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \tag{12.1.5}$$

とおく。陰関数定理より、方程式 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0$ は点 $\boldsymbol{a}$ の近傍で $\boldsymbol{z}=\varphi(\boldsymbol{y})$ と解ける。ここで $F\colon V\to\mathbb{R}$,

$$F(\boldsymbol{y}) \coloneqq f(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y})) \tag{12.1.6}$$

とおくと、これは $f(\boldsymbol{x})$ を点 $\boldsymbol{x}$ が S_g に沿って動くようにしたものとみなせる。よって F は $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ で極値をとる。すなわち $\nabla F(\boldsymbol{b})=0$ である。一方、

$$\begin{aligned}\nabla F(\boldsymbol{y}) &= \nabla_y f(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))+\nabla_z f(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))\,D\varphi(\boldsymbol{y}) && (\because\ \text{連鎖律})\\ &= \nabla_y f(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))-\nabla_z f(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))\,D_z\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))^{-1}D_y\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y})) && (\because\ \text{陰関数定理})\end{aligned} \tag{12.1.7}$$

であるが、青文字の部分に $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ を代入したものを

$$\boldsymbol{\lambda} \coloneqq \nabla_z f(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))\,D_z\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))^{-1} \tag{12.1.8}$$

とおけば、$\nabla F(\boldsymbol{b})=0$ より

$$\begin{aligned}\nabla_y f(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))&=\lambda D_y\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))\\ \nabla_z f(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))&=\lambda D_z\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b},\varphi(\boldsymbol{b}))\end{aligned}\qquad \text{i.e.}\qquad \begin{aligned}\nabla_y f(\boldsymbol{a})&=\lambda D_y\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})\\ \nabla_z f(\boldsymbol{a})&=\lambda D_z\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{12.1.9}$$

すなわち

$$\nabla f(\boldsymbol{a})=\lambda D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) \tag{12.1.10}$$

を得る。 □

系 12.1.3 (Lagrange の未定乗数法). $U, f, \boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{a}\in S_g$ に対し、

(1) $\boldsymbol{a}$ において f は S_g 上の極値をとる

ならば、次のいずれか一方のみが成り立つ。

(1) $F\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R},\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ に対し $\exists\boldsymbol{\lambda_0}\in\mathbb{R}^m$ s.t.

$$\nabla F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\lambda_0})=0 \tag{12.1.11}$$

(2) $\operatorname{rank} D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})<m$

証明　簡単なので省略 □

♤ **演習問題 12.1.** 方程式

$$f(x,y,z)\coloneqq x^2+(x-y^2+1)z-z^3=0 \tag{12.1.12}$$

を満たす点 (x,y,z) が点 $(0,0,1)$ の近傍で $z=\varphi(x,y)$ と書けることを示せ。また、この点における $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

解答：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{12.1.13}$$

♤ **演習問題 12.2.** 変数 x, y, z, u, v が

$$\begin{cases} xy + uv = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 \end{cases} \tag{12.1.14}$$

を満たすとする。点 $(2, 0, 1, 0, \sqrt{5})$ の近傍で $(u, v) = \varphi(x, y, z)$ と書けることを示せ。また、点 $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ における φ のヤコビ行列を求めよ。

解答：

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.1.15}$$

♤ **演習問題 12.3.** [杉清金岡 89, 第 II 章 問 6.2] を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 12.4.** 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\sum_i x_i, \sum_i x_i^2, \sum_i x_i^3 \right) \tag{12.1.16}$$

が点 (a_1, a_2, a_3) の近傍で一対一対応となるような a_i の条件を求めよ。

♤ **演習問題 12.5.** 変数 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ の間に

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ u_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ u_3 = x_1x_2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ v_2 = x_2^2 + x_3^2 \\ v_3 = x_3^2 + x_1^2 \end{cases} \tag{12.1.17}$$

という関係があるとし、$a = (a_1, a_2, a_3)$ とする。$a_i \neq a_j \ (i \neq j)$ のとき、$x = a$ の近傍で v は u の関数として表せることを示せ。さらに $a_1a_2a_3 \neq 0$ とし、$x = a$ に対し定まる u を b とおく。このとき $x = a$ の近傍で u は v の関数として表せることを示し、写像 $v \mapsto u$ の点 b におけるヤコビ行列式を求めよ。

解答：

$$\frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)}{16a_1a_2a_3} \tag{12.1.18}$$

♤ **演習問題 12.6.** [杉清金岡 89, 第 II 章 例題 6.2]、[杉清金岡 89, 第 II 章 問 6.3] を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 12.7.** $a \in \mathbb{R}^n \ (a \neq 0)$, $b \in \mathbb{R}$ とし、

$$g(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \tag{12.1.19}$$

とおく。$S_g := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ のもとで

$$f(x) := |x|^2 \tag{12.1.20}$$

の最小値を求めよ。

解答：$\dfrac{b^2}{|a|^2}$

♤ **演習問題 12.8.** $S_g := \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ のもとで

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 + 4xz + 4yz \tag{12.1.21}$$

の極値を求め、極大・極小を判定せよ。

解答：極小値 -3、極大値 3

♤ **演習問題 12.9.** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極値を求めよ。

解答：極小値 $f(\pm 1/2, \pm 1/2) = -1/8$、極大値 $(\pm 1/2, \mp 1/2) = 1/8$

♤ **演習問題 12.10.** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 \\ g(x,y) &= xy - 4 \end{aligned} \tag{12.1.22}$$

を考える。$M_g := \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ 上での f の最大値、最小値を求めよ。

解答：最大値なし、最小値 32

♤ **演習問題 12.11.** [杉清金岡 89, 第 II 章 問題 7.1, 7.2, 7.4] を読者の演習問題とする。

第 13 章　最小二乗法

13.1　最小二乗法

n 個の点 $(x_i, y_i)\,(i = 1, \ldots, n)$ が与えられたとします。x_i, y_i の間には、パラメータ $a, b \in \mathbb{R}$ によって

$$y_i = ax_i + b \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{13.1.1}$$

の関係があると仮定します。このとき、誤差

$$e_i \coloneqq y_i - (ax_i + b) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{13.1.2}$$

の 2 乗和

$$J(a, b) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \tag{13.1.3}$$

が最小となるような (a, b) を求めることを考えます。この問題は $J(a, b)$ の極小値を求める問題に帰着されるので、以上の状況設定で充分といえば充分なのですが、多変数（すなわち各点が $(x_{i1}, \ldots, x_{im}, y_i)$ である場合）への拡張を見据えてもう少し一般性のある形に書き換えてみます。すなわち、

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} \coloneqq (x_1, \ldots, x_n)^\top, \quad \boldsymbol{y} \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)^\top \\ Q \coloneqq \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \coloneqq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} \coloneqq \boldsymbol{y} - Q\boldsymbol{a} \end{gathered} \tag{13.1.4}$$

とおきます。すると簡単な計算から

$$J(a, b) = \|\boldsymbol{y}\|^2 + \langle Q^\top Q\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \langle 2Q^\top \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}\rangle \tag{13.1.5}$$

が成り立つので、$J(a, b)$ の最小化問題は

$$F(\boldsymbol{v}) \coloneqq \langle Q^\top Q\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle 2Q^\top \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\rangle \tag{13.1.6}$$

の最小化問題に帰着されます。ここで、J が極値をとるための必要条件 $\nabla J(a, b) = 0$ は、少し計算すると

$$Q^\top Q\boldsymbol{a} = Q^\top \boldsymbol{y} \tag{13.1.7}$$

と表せることがわかります。したがって、$Q^\top Q$ が正則ならば $\boldsymbol{a}$ が一意に定まってくれて嬉しいのですが、次の命題によれば、実用上ほとんどの場合 $Q^\top Q$ は正則だということがわかります。

命題 13.1.1. Q に対し次が成り立つ。

(1)　$Q^\top Q$ は非負定値対称行列である

(2)　$x_1 = \cdots = x_n$ ではないとすると、$Q^\top Q$ は正定値対称行列である。したがって正則である。

証明 (1) は内積を行列の積の形に書き直せばすぐわかります。

(2) は成分ごとの方程式を考えて矛盾をいえば示せます。 □

(13.1.7) をみたす $\boldsymbol{a}$ が $J(a, b)$ の最小化問題の一意的な解であることを明確に述べたのが次の定理です。

定理 13.1.2. $x_1 = \cdots = x_n$ でなければ、(13.1.7) をみたす $\boldsymbol{a}$ は

$$F(\boldsymbol{a}) < F(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{a}) \tag{13.1.8}$$

をみたす。

証明 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a})$ と分解して $F(\boldsymbol{v})$ と $F(\boldsymbol{a})$ の間の不等式を導けば示せます。途中で $\boldsymbol{a}$ が (13.1.7) をみたすという性質を使って式を綺麗にします。 □

上の定理は逆も成り立ちます。

定理 13.1.3. (13.1.8) をみたす $\boldsymbol{a}$ は (13.1.7) をみたす。

証明 $f(t) := F(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{w})$ は t に関して下に凸な 2 次関数ですが、$f(t)$ が $t = 0$ で極値をとることから $Q^\mathsf{T} Q\boldsymbol{a} = Q^\mathsf{T} \boldsymbol{y}$ を導くことができます。 □

第 14 章　Gamma 関数と Beta 関数

14.1　Gamma 関数と Beta 関数

ここでは **Gamma 関数**および **Beta 関数**という特殊関数を扱います。本題に入る前に、まず重積分の変数変換公式を確認しておきます。

定理 14.1.1 (変数変換公式). U, V を $\mathbb{R}^n$ の有界部分集合とし、写像 $\Phi\colon U \to V$,

$$\Phi(u) = (X_1(u), \ldots, X_n(u)) \tag{14.1.1}$$

は全単射かつ C^1 級であるとする。さらに $\forall u \in U$ に対し

$$\frac{\partial(X_1, \ldots, X_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}(u) \neq 0 \tag{14.1.2}$$

とする。このとき、U の任意の体積確定部分集合 U_1 と $V_1 := \Phi(U_1)$ に対し

$$\int_{U_1} f(x)dx = \int_{V_1} f(\Phi(u))\,|\det J_\Phi(u)|\,du \tag{14.1.3}$$

が成り立つ。

証明　長いので省略[19)] □

例 (n 次元極座標変換). $\mathbb{R}^n$ の極座標変換は

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \vdots & \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases} \tag{14.1.4}$$

ただし

$$\begin{aligned} &0 \le r < \infty \\ &0 \le \theta_i \le \pi \quad (i = 1, \ldots, n-2) \\ &0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi \end{aligned} \tag{14.1.5}$$

で与えられます。ヤコビアンは

$$\det J_\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2} \tag{14.1.6}$$

です。

19)　参考文献 [杉 85, 第 VII 章 §4] を参照。

定理 14.1.2. (1) $x > 0$ に対し、広義積分

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{14.1.7}$$

は各点で絶対収束する。

(2) $x, y > 0$ に対し、広義積分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{14.1.8}$$

は各点で絶対収束する。

定義 14.1.3. 定理 14.1.2 の (1) で定義される関数 $\Gamma(x)$ を **Gamma 関数**、(2) で定義される関数 $B(x)$ を **Beta 関数**という。

見ての通り、$\Gamma(x)$ や $B(x, y)$ はパラメータを含む広義積分で定義された関数です。

定理 14.1.2 の証明. (1) $x > 0$ を任意にとる。積分範囲が非有界な $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ と被積分関数が非有界な $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ とに分けて収束性を考える。まず $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ を考える。任意の正整数 n に対し

$$e^{-t} = O(t^{-n}) \quad (t \to \infty) \tag{14.1.9}$$

なので、

$$e^{-t} t^{x-1} = O(t^{x-n-1}) \quad (t \to \infty) \tag{14.1.10}$$

である。$n > x$ をひとつ選べば

$$\int_1^\infty t^{x-n-1} dt = \left[-\frac{1}{n-x} t^{-(n-x)} \right]_1^\infty = \frac{1}{n-x} \in \mathbb{R} \tag{14.1.11}$$

なので、優関数の方法により

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{14.1.12}$$

も絶対収束する。

つぎに $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ を考える。e^{-t} は $t = 0$ の近傍で有界なので

$$e^{-t} t^{x-1} = O(t^{x-1}) \quad (t \to +0) \tag{14.1.13}$$

である。$0 < x < 1$ のとき

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^1 = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \tag{14.1.14}$$

なので、優関数の方法により

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \tag{14.1.15}$$

も絶対収束する。$x \geq 1$ のときは $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ は広義でない普通の積分である。

$x > 0$ は任意であったから、$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ は $x > 0$ の各点で絶対収束する。

(2) $x, y < 1$ のときを考えれば充分です。(1) と同様に広義積分を分けて収束性を議論すれば示せます。 □

命題 14.1.4 (Gamma 関数と Beta 関数の基本性質). $x, y > 0$ に対し次が成り立つ。

(1) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(2) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\Gamma(x)$ とくに $\Gamma(n+1) = n!$

(3) $B(x, y) = B(y, x)$

(4) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

証明 (1), (2), (3) は簡単です。

(4) 変数変換によって

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \\
B(x, y) &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \, d\theta
\end{aligned}
\tag{14.1.16}
$$

と書けることに注意する。集合列 $\{J_R\}_{R\in\mathbb{N}}$, $\{I_R\}_{\mathbb{R}\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
J_R &:= [0, R] \times [0, R] \\
I_R &:= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \le R^2,\ u \ge 0,\ v \ge 0\}
\end{aligned}
\tag{14.1.17}
$$

と定めると、これらは $[0, \infty) \times [0, \infty)$ のコンパクト近似列 [20] になっている。

$$
\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1} dv \tag{14.1.18}
$$

$$
= 4\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-u^2} u^{2x-1} du \int_0^R e^{-v^2} v^{2y-1} dv \tag{14.1.19}
$$

$$
= 4\lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du\, dv \tag{14.1.20}
$$

$$
= 4\lim_{R\to\infty} \iint_{J_R} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du\, dv \tag{14.1.21}
$$

広義重積分可能ならば近似列を交換できるから

$$
= 4\lim_{R\to\infty} \iint_{I_R} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du\, dv \tag{14.1.22}
$$

$$
= 4\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta dr\, d\theta \tag{14.1.23}
$$

$$
= \lim_{R\to\infty} 2\int_0^R e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta \tag{14.1.24}
$$

$$
= 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta \tag{14.1.25}
$$

$$
= \Gamma(x+y)B(x, y) \tag{14.1.26}
$$

より定理の式が成り立つ。 □

20) コンパクト近似列の定義は参考文献 [杉 85, 第 VII 章 §1] を参照。

命題 14.1.5. (1) $\Gamma(x)$ は $x>0$ 上で C^∞ 級であり

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n dt \tag{14.1.27}$$

である。

(2) $\log\Gamma(x)$ は $x>0$ 上の凸関数である。

(2) はすこし唐突な印象もありますが、実はこのあと出てくる Bohr-Mollerup の定理において重要な役割を果たします。

証明 (1) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し広義積分

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n dt \tag{14.1.28}$$

が $x>0$ 上広義一様収束することさえ示せば積分記号下の微分ができるので、あとは数学的帰納法により (1) が示せる（数学的帰納法の部分は簡単なのでここでは省略する）。そこでまず $0<\forall x_0<\forall x_1<\infty$ を固定し、$I:=[x_0,x_1]$ 上での一様収束性を示そう。表記の簡略化のために

$$f_n(x,t) := e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n \tag{14.1.29}$$

とおくと、$t\to +0$ で

$$\begin{cases} e^{-t} & = O(1) \\ t^{x-1} & = O(t^{x_0-1}) \\ \log t & = O(t^{-\alpha}) \qquad (\text{ただし } \alpha \text{ は } 0<\alpha<x_0/n \text{ なる適当な定数}) \end{cases} \tag{14.1.30}$$

なので

$$f_n(x,t) = O(t^{x_0-n\alpha-1}) \tag{14.1.31}$$

である。$x_0-n\alpha-1>-1$ ゆえに $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ は収束するから、Weierstrass の定理により広義積分

$$\int_0^1 f_n(x,t)dt \tag{14.1.32}$$

は I 上一様収束する。一方、$t\to\infty$ で

$$\begin{cases} e^{-t} & = O(t^{-x_1-n-1}) \\ t^{x-1} & = O(t^{x_1-1}) \\ \log t & = O(t) \end{cases} \tag{14.1.33}$$

なので

$$f_n(x,t) = O(t^{-2}) \tag{14.1.34}$$

である。$\displaystyle\int_1^\infty t^{-2}dt$ は収束するから、Weierstrass の定理により広義積分

$$\int_1^\infty f_n(x,t)dt \tag{14.1.35}$$

は I 上一様収束する。以上より、広義積分 (14.1.28) は $x>0$ 上広義一様収束する。

(2) 上で示した (14.1.28) より、$\forall u \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}\Gamma(x)u^2 + 2\Gamma'(x)u + \Gamma''(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(u+\log t)^2 dt \\ &\geq 0\end{aligned} \tag{14.1.36}$$

である。よって判別式は

$$D/4 = \Gamma'(x) - \Gamma(x)\Gamma''(x) \leq 0 \tag{14.1.37}$$

をみたす。したがって

$$\begin{aligned}(\log\Gamma(x))'' &= \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)}{\Gamma(x)^2} \\ &\geq 0\end{aligned} \tag{14.1.38}$$

すなわち $\Gamma(x)$ は $x > 0$ 上の凸関数である。 □

14.2 Bohr-Mollerup の定理

定理 14.2.1 (Bohr-Mollerup の定理、Γ 関数の特徴付け). $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ が

(1) $f(x+1) = xf(x)$

(2) $f(x) > 0$ かつ $\log f(x)$ は凸関数

(3) $f(1) = 1$

をみたすとする。このとき、任意の $x > 0$ に対し

$$f(x) = \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{(ガウスの公式)} \tag{14.2.1}$$

$f(x) = \Gamma(x)$ の証明の際は、Γ の積分表式を持ち出すのではなく、f も Γ も式 (14.2.1) の極限式で書けるから一致するという論法で示します。

証明 条件 (1) から、$\forall n \geq 1$ に対し

$$f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)f(x) \tag{14.2.2}$$

である。さらに $x = 1$ として条件 (3) を用いれば

$$f(n+1) = n! \tag{14.2.3}$$

が成り立つ。また、条件 (2) より $g(x) := \log f(x)$ は凸関数であるから、$0 < {}^\forall a < {}^\forall t < {}^\forall b$ に対し

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} < \frac{g(b)-g(a)}{b-a} < \frac{g(b)-g(t)}{b-t} \tag{14.2.4}$$

が成り立つ。

Step 1: さて、ひとまず $x \in (0,1]$ を固定してガウスの公式 (14.2.1) を示していこう。ここで、任意の自然数 $n \geq 2$ に対し

$$\begin{aligned}\log(n-1) &= \log f(n) - \log f(n-1) \\ &\leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{x} \\ &\leq \log f(n+1) - \log f(n) \\ &= \log n\end{aligned} \tag{14.2.5}$$

が成り立つ。ただし、途中の不等式は $(a,t,b) = (n-1,n,n+x)$, $(n,n+x,n+1)$ に対し不等式 (14.2.4) を適用したものである。不等式 (14.2.5) の各辺に x を掛け、指数関数の値をとり、さらに $f(x)$ を掛ければ

$$(n-1)^x f(n) \leq f(n+x) \leq n^x f(n) \tag{14.2.6}$$

を得る。これと式 (14.2.2) から

$$\frac{(n-1)^x f(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x f(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{14.2.7}$$

であり、左の不等式だけ n を $n+1$ に置きなおして式 (14.2.3) を用いると

$$\underbrace{\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}_{a_n(x)\ \text{とおく}} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}_{a_n(x)} \frac{x+n}{n} \tag{14.2.8}$$

を得る。したがって、$n \to \infty$ の極限を考えれば

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) \tag{14.2.9}$$

がいえる。$x \in (0,1]$ は任意であったから、$x \in (0,1]$ においてガウスの公式 (14.2.1) の成立がいえた。

Step 2: $x > 1$ の場合は、$x = y + m\ (0 < y \leq 1,\ m \in \mathbb{N})$ とおけば、$\forall n > m$ に対し

$$\begin{aligned}\frac{n!n^x}{x\cdots(x+n)} &= \frac{n!n^y n^m}{(y+m)\cdots(y+m+n)} \\ &= \frac{n!n^y}{y\cdots(y+n)} \frac{n^m y\cdots(y+n)}{(y+m)\cdots(y+m+n)} \\ &= \frac{n!n^y}{y\cdots(y+n)} \frac{n^m y\cdots(y+m-1)\cancel{(y+m)\cdots(y+n)}}{\cancel{(y+m)\cdots(y+n)}(y+n+1)\cdots(y+n+m)} \\ &= \frac{n!n^y}{y\cdots(y+n)} \underbrace{\frac{n^m}{(y+n+1)\cdots(y+n+m)}}_{\to 1\ (n\to\infty)} y\cdots(y+m-1)\end{aligned} \tag{14.2.10}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x\cdots(x+n)} &= y\cdots(y+m-1)f(y) \\ &= f(y+m) \\ &= f(x)\end{aligned} \tag{14.2.11}$$

である。したがって $x > 1$ においてもガウスの公式 (14.2.1) の成立がいえた。

Step 3: Γ も定理の仮定を満たすから、Γ も $x > 0$ でガウスの公式 (14.2.1) をみたす。したがって $x > 0$ で $f(x) = \Gamma(x)$ である。 □

系 14.2.2. 上の定理の条件 (3) を除くと

$$f(x) = f(1)\Gamma(x) \quad (x > 0) \tag{14.2.12}$$

が成り立つ。

証明 $h(x) := f(x)/f(1)$ が条件 (1),(2),(3) をみたすことから直ちに成り立つ。 □

命題 14.2.3. $\forall x \in D := \mathbb{R} - (-\mathbb{N})$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \in \mathbb{R} \tag{14.2.13}$$

が存在する。

証明 $x \in D$ を任意にとる。$x > 0$ の場合は成立がわかっているから $x < 0$ の場合のみ考えればよい。すると、ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $y = x + m > 0$ なので、充分大きな任意の n に対し

$$\begin{aligned} \frac{n!n^x}{x\cdots(x+n)} &= \frac{n!n^y}{n^m(y-m)\cdots(y-m+n)} \\ &= \frac{1}{(y-m)\cdots(y-1)} \underbrace{\frac{n!n^y}{y\cdots(y+n)}}_{\to\Gamma(y)\ (n\to\infty)} \underbrace{\frac{(y-m+n+1)\cdots(y+n)}{n^m}}_{\to 1\ (n\to\infty)} \end{aligned} \tag{14.2.14}$$

が成り立つ。したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \in \mathbb{R} \tag{14.2.15}$$

が存在する。 □

定義 14.2.4 (Γ の極限式による定義). $\forall x \in D := \mathbb{R} - (-\mathbb{N})$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \in \mathbb{R} \tag{14.2.16}$$

と定義する。

命題 14.2.5. $\forall x \in D$ に対し次が成り立つ。

(1)

$$\Gamma(x) \neq 0 \tag{14.2.17}$$

(2)

$$\operatorname{sign}\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ (-1)^m & (-m < x < -m+1,\ m \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{14.2.18}$$

(3)

$$\lim_{x\to -n} (x+n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{14.2.19}$$

(3) は複素数に拡張された $\Gamma(x)$ の点 $-n$ における留数を表しています。

証明 (1), (2) は定理 14.2.3 から明らか。

(3)

$$\begin{aligned}(x+n)\Gamma(x) &= \frac{(x+n)\cdots x\Gamma(x)}{(x+n-1)\cdots x} \\ &= \frac{\Gamma(x+n-1)}{(x+n-1)\cdots x} \\ &\to \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\cdots(-n)} \quad (x\to -n) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\end{aligned} \tag{14.2.20}$$

□

14.3 Stirling の公式

ここでは $x \to \infty$ における Γ の挙動を漸近的に評価する方法を考えていきます。まず出発地点として $n!$ の値を $\int_1^n \log x\,dx$ で評価してみましょう。$\int_1^n \log x\,dx$ の値を "短冊" で近似することを考えると

$$\int_1^n \log x\,dx = \log 2 + \cdots \log(n-1) + \frac{1}{2}\log n + \delta_n \tag{14.3.1}$$

が成り立ちます（ただし δ_n は誤差)。すると、簡単な計算により

$$\begin{aligned}\log(n-1)! &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 - \delta_n \\ \therefore \quad \Gamma(n) &= n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}e^{1-\delta_n}\end{aligned} \tag{14.3.2}$$

と表せることがわかります。そこで、$x>0$ に対しても何らかの関数 $\mu(x)$ によって

$$f(x) := x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)} \tag{14.3.3}$$

を $\Gamma(x)$ の定数倍に一致させられないだろうか？というのが Stirling の公式の基本的なアイディアです。ここで Bohr-Mollerup の定理（定理 14.2.1）によれば、f が $x>0$ で条件

(1) $f(x+1) = xf(x)$
(2) $f(x) > 0$ かつ $\log f(x)$ は凸関数

をみたしてくれれば目標達成です。以下、このことを確認していきます。

補題 14.3.1. 式 (14.3.3) で定義された関数 f が $x>0$ で条件 (1) をみたすには、$\mu(x)$ が

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1}_{g(x)\ とおく} \tag{14.3.4}$$

をみたすことが必要十分である。

証明　$x > 0$ とする。f の定義式 (14.3.3) によれば

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x\left(1+\frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}} e^{\mu(x+1)-\mu(x)-1} \tag{14.3.5}$$

なので、f が条件 (1)、すなわち

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = x \tag{14.3.6}$$

をみたすには、μ が

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = \mu(x) - \mu(x+1) \tag{14.3.7}$$

をみたすことが必要十分である。 □

補題 14.3.2. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ は $x > 0$ 上で各点収束し、$x \to \infty$ で 0 に収束する。

証明　関数 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$ (= artanh y) は $|y| < 1$ で

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots \tag{14.3.8}$$

と収束級数に展開できる。右辺に $y = \dfrac{1}{2x+1}$ を代入することで

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= (2x+1)\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= (2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n}} \end{aligned} \tag{14.3.9}$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} 0 < g(x) &< \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2n}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2 \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{12x(x+1)} \\ &= \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} \end{aligned} \tag{14.3.10}$$

である。よって $\forall N \in \mathbb{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{n=0}^{N} g(x+n) &< \sum_{n=0}^{N} \left\{ \frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)} \right\} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)} \right\} \\
&= \frac{1}{12x}
\end{aligned}
\tag{14.3.11}
$$

である。したがって部分和 $\sum_{n=0}^{N} g(x+n)$ は上に有界な正数列なので $\sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ は収束し、上の不等式から $x \to \infty$ で 0 に収束することも示せた。 □

補題 14.3.3. μ を以下のように定めれば定理 14.3.1 の条件が達成される。

$$
\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k) \tag{14.3.12}
$$

証明 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$ が収束することから

$$
\begin{aligned}
\mu(x) - \mu(x+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k) - \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (g(x+k) - g(x+k+1)) \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} (g(x+k)0g(x+k+1)) \\
&= \lim_{N \to \infty} (g(x) - g(x+N+1)) \\
&= g(x)
\end{aligned}
\tag{14.3.13}
$$

である。 □

補題 14.3.4. 定義式 (14.3.3) と定理 14.3.3 の μ によって定まる f は条件 (2) をみたす。

証明 f の定義式から明らかに $f(x) > 0$ である。また

$$
\log f(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \log x - x + \mu(x) \tag{14.3.14}
$$

であり、右辺の $\mu(x)$ を除く項は凸であるから、$\log f$ が凸であることを示すには μ が凸であることをいえばよい。そのためには g が凸であることをいえば充分だが、

$$
g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0 \tag{14.3.15}
$$

なので g も $x > 0$ で凸である。したがって f は条件 (2) をみたす。 □

補題 14.3.5 (Wallis の公式)**.**

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} \tag{14.3.16}$$

証明　長いので省略[21)] □

定理 14.3.6 (Stirling の公式)**.** $x > 0$ に対し

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)} \tag{14.3.17}$$

が成り立つ。ただし μ は定理 14.3.3 で定めたものである。

証明　定理 14.3.3 と定理 14.3.4 より、定義式 (14.3.3) と μ によって定まる関数 f は Bohr-Mollerup の定理（定理 14.2.1）の条件 (1), (2) をみたす。したがって定理 14.2.2 より

$$\Gamma(x) = af(x) \quad (x > 0) \tag{14.3.18}$$

となる定数 $a > 0$ が存在する。a は Wallis の公式によって求めることができ、$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = anf(n)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(anf(n))^2}{a\cdot 2nf(2n)\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}a^2n^2\left(n^{n-1/2}e^{-n}e^{\mu(n)}\right)^2}{2an(2n)^{2n-1/2}e^{-2n}e^{\mu(2n)}\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{e^{2\mu(n)}}{e^{\mu(2n)}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{14.3.19}$$

よって $a = \sqrt{2\pi}$ である。以上より定理の主張が示せた。 □

♤ **演習問題 14.1.** $\Gamma(1/2)$, $\Gamma(n+1/2)$ の値を求めよ。
解答：

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{14.3.20}$$

21) 参考文献 [杉 80, 第 IV 章 定理 15.6 系] を参照。

♤ **演習問題 14.2.** $p, q > -1$ に対し

$$\int_0^{\pi/2} \cos^p\theta \sin^q\theta d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) \tag{14.3.21}$$

を示せ。

♤ **演習問題 14.3.** n 次元球の体積と表面積を Γ を用いて表わせ。
解答：

$$|B_n(R)| = \frac{\sqrt{\pi}R^n}{\Gamma(n/2+1)}, \quad |\partial B_n(R)| = \frac{2\sqrt{\pi}R^{n-1}}{\Gamma(n/2)} \tag{14.3.22}$$

♤ **演習問題 14.4.** $0 < m+1 < n$ とする。

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx \tag{14.3.23}$$

を Gamma 関数、Beta 関数を用いて表わせ。
解答：

$$I = \frac{1}{n}B\left(\frac{m+1}{n}, 1-\frac{m+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m+1}{n}\right) \tag{14.3.24}$$

♤ **演習問題 14.5.**

$$\int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{1+t^x}dt \quad (x > y > 0) \tag{14.3.25}$$

を Γ 関数で表わせ。
解答：

$$\frac{1}{x}\Gamma\left(1-\frac{y}{x}\right)\Gamma\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14.3.26}$$

♤ **演習問題 14.6.**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{x+y}}d\theta \quad (a, b, x, y > 0) \tag{14.3.27}$$

を Γ 関数で表わせ。
解答：

$$\frac{1}{2a^x b^y}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{14.3.28}$$

♤ **演習問題 14.7.**

$$\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\right) = \pi \tag{14.3.29}$$

を示せ。

♤ **演習問題 14.8 (積分).**

- [杉清金岡 89, 第 III 章 例題 8.1]

- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 8.1 (1)-(6)]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 8.2 (1),(2)]
- [杉清金岡 89, 第 III 章 問 8.3 (1)]

を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 14.9** (Stirling の公式)**.**

- [杉清金岡 89, 第 III 章 例題 8.5]

を読者の演習問題とする。

演習問題の解答

演習問題 1.1 の解答. □

演習問題 3.1 の解答. 任意の正整数 n に対し、Markov の不等式より $0 \leq \mu(\{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}) \leq n\int_E f(x)dx = 0$、したがって $\mu(\{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}) = 0$ が成り立つ。よって $\mu(\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x \in E \mid f(x) \geq 1/n\}) = 0$ が成り立つ。したがって μ-a.e. $x \in E$ に対し $f(x) = 0$ が成り立つ。 □

参考文献

[Bog07] Vladimir I. Bogachev, **Measure theory**, Springer, 2007.

[吉 21] 伸生 吉田, **[新装版] ルベーグ積分入門使うための理論と演習**, 日本評論社, 2021.

[杉 80] 光夫 杉浦, **解析入門 i（基礎数学 2）**, 東京大学出版会, 1980.

[杉 85] ______ , **解析入門 ii（基礎数学 3）**, 東京大学出版会, 1985.

[杉清金岡 89] 光夫 杉浦, 英男 清水, 晃 金子, and 和夫 岡本, **解析演習（基礎数学 7）**, 東京大学出版会, 1989.

[松 76] 和夫 松坂, **代数学入門**, 岩波書店, 1976.

[河 08] 泰之 河東, **線形代数と関数解析学–無限次元の考え方**, 数理科学 **46** (2008), no. 6, 39–43.

記号一覧

索引