第 1 章　定数係数線型常微分方程式

定数係数という節見出しだが、以下の「3.1 定義と基本性質」の内容だけは変数係数の場合も含んでいる。なお、係数だけでなく非斉次項も定数ならば、y を定数関数とおいて解けば特殊解がひとつ得られる。

1.1　定義と基本性質

定義 1.1.1 (3.1.1 線型)**.**

(1)　n 階常微分方程式が**線型**であるとは

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{1.1.1}$$

という形をしていること。

(2)　n 個の未知関数を持つ連立 1 階常微分方程式が**線型**であるとは

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \tag{1.1.2}$$

という形をしていること。

(1) は (2) の形に書き直せる。

A.　$b(x) \equiv 0$ のとき

$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}$ の解全体の集合 V は線型空間をなす。

定理 1.1.2 (3.1.2)**.** $\{\boldsymbol{\beta}_i \coloneqq \boldsymbol{y}_i(\alpha)\}_{1\le i\le n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) が $\mathbb{R}^n$ の基底であるとき、$\{\boldsymbol{y}_i\}_{1\le i\le n}$ は V の基底である。

証明.　線型独立性は明らかなので、$V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{y}_i\}_{1\le i\le n}$ を示そう。$\boldsymbol{y} \in V$ を任意にとる。$\boldsymbol{y}(\alpha) \eqqcolon \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ とおくと、$\{\boldsymbol{\beta}_i\}_{1\le i\le n}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることから

$$\boldsymbol{\beta} = c_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{\beta}_n \tag{1.1.3}$$

と書ける。このとき、$\boldsymbol{y}(x)$ と $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots c_n\boldsymbol{y}_n(x)$ はいずれも初期値問題

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(\alpha) = \boldsymbol{\beta} \tag{1.1.4}$$

の解なので、解の一意性により

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots c_n\boldsymbol{y}_n(x) \tag{1.1.5}$$

が成り立つ。したがって $V = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{y}_i\}_{1\le i\le n}$ がいえた。 □

定義 1.1.3 (3.1.3)**.** V の基底を与える解の組を**基本解**という。

B. $b(x) \not\equiv 0$ のとき

解全体の集合を $\tilde{V}$ とおく。

定理 1.1.4 (3.1.4)**.** $\varphi(x)$ をひとつの解とすると、

$$y(x) \in \tilde{V} \iff y(x) - \varphi(x) \in V \tag{1.1.6}$$

である。

1.2 定数係数 n 階線型常微分方程式

定数係数 n 階線型常微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(y) \tag{(1)}$$

を考える。

A. 同次の場合

定義 1.2.1 (特性多項式)**.** 微分演算子を $D := \dfrac{d}{dx}$ とおくと、(1) は

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = 0 \tag{1.2.1}$$

と書ける。ここで

$$\Phi(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \tag{1.2.2}$$

を (1) の**特性多項式**という。

以下、特性多項式の因数分解

$$\Phi(t) = \prod_{i=1}^{r}(t - \lambda_i)^{n_i} \tag{1.2.3}$$

が重要である。この因数分解に応じて (1) は

$$\prod_{i=1}^{r}(D - \lambda_i)^{n_i} y = 0 \tag{(3)}$$

と書ける。

補題 1.2.2 (3.2.1)**.** $e^{-\lambda x}(D - \lambda)g = D(e^{-\lambda x}g)$

証明. 簡単なので省略。 □

定理 1.2.3 (3.2.2)**.** $\{x^j e^{\lambda_i x} \mid 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq n_i - 1\}$ は (3) の基本解である。

証明. 任意の解が所与の関数系の線型結合で書けることを示せばよい。$r = 1$ すなわち特性多項式の根がひとつしかない場合は、補題 3.2.1 から簡単な計算によりわかる。$r > 1$ の場合は r に関する帰納法によって示す。

□

同次の場合の解法は至ってシンプルである。すなわち、定理 3.2.2 によって特性多項式の根に対応する基本解がただちに得られる。

♤ **演習問題 1.1** (3.2.4). $y''' - y'' - y' + y = 0$ を解け。
解答：

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} \tag{1.2.4}$$

♤ **演習問題 1.2** (教科書例題 3.4). $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega > 0)$ の一般解を実数値関数として求めよ。定理 3.2.2 から得られる基底 $e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}$ は複素数値関数なので、これらの線型結合によって基底を $\cos\omega x, \sin\omega x$ と取り直せば実数値関数としての一般解が得られる。
解答：$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$

♤ **演習問題 1.3.** 教科書の問 3.1, 問 3.2, 問 3.3, 問 3.4 を読者の演習問題とする。

B. 非同次の場合

非同次の場合は**演算子法**によって解く。これは兎にも角にもひとつの解 $\varphi(x)$ を求めるのが基本的である。そこで特性多項式を $\Phi(t) = (t - \lambda_1)\Psi(t)$ と変形すると、補題 3.2.1 より

$$\begin{aligned}\Phi(D)\varphi = f(x) &\iff e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_1)\Psi(D)\varphi = e^{-\lambda_1 x} f(x) \\ &\iff \Psi(D)\varphi = e^{\lambda_1 x}\int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

となり、階数のひとつ小さい微分方程式が得られる[1]。これを繰り返して $\varphi(x)$ を求める。あとは $\varphi(x)$ に同次の一般解を足し合わせれば、それが非同次の解となる。

また、非斉次項が特別な形の場合は**未定係数法**も利用できる。

♤ **演習問題 1.4** (3.2.4). $y'' + 3y' + 2y = e^x$ を解け。

まず φ を求めると

$$\begin{aligned}(D+1)(D+2)\varphi &= e^x \\ (D+2)\varphi &= \frac{1}{2}e^x \\ \varphi &= \frac{1}{6}e^x\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

なので、一般解は

$$y(x) = \frac{1}{6}e^x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \tag{1.2.7}$$

である。

♤ **演習問題 1.5.** 教科書の問 3.5 を読者の演習問題とする。

1) イメージとしては、$(D - \lambda_1)\Psi(D)\varphi = f(x)$ を見たら右辺の式から $e^{\lambda_1 x}$ を「引き剥がして」おいて残りを積分するという感じ。

1.3　定数係数連立 1 階線型常微分方程式

以下では定数係数の連立 1 階型を考える。これは一見すると n 階型を行列の言葉で言い換えただけに過ぎないようにも見えるが、同次形の初期値問題が簡単に解けるという利点がある。

命題 1.3.1 (3.3.1 行列の指数関数)**.**　(1)　n 次正方行列 A に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n =: e^A \tag{1.3.1}$$

は収束する。

(2)　$AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つ。

(3)　行列値関数 e^{xA} は C^1 級（実は C^∞ 級）で

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} \tag{1.3.2}$$

が成り立つ。

証明.　(1) コーシーの収束条件を使えば示せる。

(2), (3) 省略 □

定理 1.3.2 (3.3.2 非同次形の一般解)**.**　$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ の解は

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{xA} \left(\int^x e^{-tA} \boldsymbol{b}(t)\, dt + \boldsymbol{C} \right) \tag{1.3.3}$$

である。

系 1.3.3 (3.3.3 非同次形の初期値問題)**.**　さらに初期条件 $\boldsymbol{y}(\alpha) = \boldsymbol{\beta}$ をみたす解は

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{xA} \left(\int_\alpha^x e^{-tA} \boldsymbol{b}(t)\, dt + e^{-\alpha A} \boldsymbol{\beta} \right) \tag{1.3.4}$$

である。

系 1.3.4 (3.3.4 同次形の一般解と初期値問題)**.**　$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解は

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{xA} \boldsymbol{C} \tag{1.3.5}$$

であり、さらに初期条件 $\boldsymbol{y}(\alpha) = \boldsymbol{\beta}$ をみたす解は

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{(x-\alpha)A} \boldsymbol{\beta} \tag{1.3.6}$$

である。

この系 3.3.4 により、同次形の場合は初期値に指数関数 e^{xA} を作用させるだけで解が求まることがわかった。e^{xA} の計算には **Jordan 標準形**を用いる。Jordan 標準形とは、通常の対角化における固有値問題 $(A - \alpha I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ を $(A - \alpha I)^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ へ拡張したものに対応する。Jordan 標準形の求め方は以下の通りである。

(1) 特性方程式を解き、

(2) 固有値の重複度ぶんだけ

$$
\begin{aligned}
(A-\alpha I)\,\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{o} \\
(A-\alpha I)\,\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.3.7}
$$

という計算を繰り返して広義固有ベクトルを求めていく。

これより e^{xA} は Jordan 標準形 J と対角化?行列 P を用いて

$$
e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1} \tag{1.3.8}
$$

と求まる。このとき、P の成分にできるだけ 0 が現れるようにしたほうが後の計算が楽になる。また、固有値 α に対応する m 次の Jordan 細胞 $J(\alpha, m)$ は

$$
e^{xJ(\alpha,m)} = \begin{bmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{\alpha x} \\ & e^{\alpha x} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & e^{\alpha x} \end{bmatrix} \tag{1.3.9}
$$

をみたす。この形は記憶しておいたほうがよい。

♤ **演習問題 1.6** (3.3.6)**.** 次の微分方程式の解を 2 通りの方法で求めよ。

$$
\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.3.10}
$$

1 つ目の方法は、素直に A の Jordan 標準形を用いるものである。

2 つ目の方法は、e^{xA} の各列がそれぞれ初期値 $\boldsymbol{y}(0) = {}^t(1,0), {}^t(0,1)$ に対応する特殊解であることを利用するものである。すなわち、A の固有多項式の根に対応する基本解（定理 3.2.2）の線型結合でこれら特殊解 $\boldsymbol{y}(x)$ の各成分を表し、続いて微分方程式と初期条件から係数を決めるという方法である [2)]。

解答：

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2e^x - e^{3x} & -e^x + e^{3x} \\ 2e^x - 2e^{3x} & -e^x + 2e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{1.3.11}
$$

♤ **演習問題 1.7** (3.3.7)**.** 次の微分方程式の解を 2 通りの方法で求めよ。

$$
y' = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.3.12}
$$

解答：

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} (1-x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{1.3.13}
$$

2) 板書の注 3.3.5 を参照

♤ **演習問題 1.8** (小テスト 8)**.** 次の微分方程式の解を 2 通りの方法で求めよ。

$$y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{1.3.14}$$

この微分方程式は係数も非斉次項も定数なので、定数関数を解に持つ。

解答：

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^x - e^{-x} & -3e^x + 3e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & -e^x + 3e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{1.3.15}$$

♤ **演習問題 1.9.** 教科書の問 3.7 を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 1.10.** **[?**] 第 4 章例題 1-5 を読者の演習問題とする。

♤ **演習問題 1.11.** **[?**] 第 4 章例題 16-17 を読者の演習問題とする。