1 A

♤ **演習問題 0.1** (第 1 問). A を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値および広義固有空間を全て求めよ。
(2) $AB = 2BA$ を満たす任意の 3 次正方行列 B は $B^3 = O$ を満たすことを示せ。
(3) $AB = 2BA$ を満たす零行列でない 3 次正方行列 B を 1 つ求めよ。

演習問題 0.1 の解答. (1 略解) 固有多項式は $\det(XI - A) = (X-1)^2(X-2)$ となる。固有値は $1, 2$ である。固有値 λ に関する広義固有空間を $V_{[\lambda]}$ と書くことにすれば

$$V_{[2]} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_{[1]} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

となる。

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とおくと $AP = PJ$ が成り立つ。

(2) $AB = 2BA$ の成立を仮定すると、両辺の det をとって $\det A \det B = 8 \det B \det A$ となるから、$\det A \neq 0$ であることとあわせて $\det B = 8 \det B$、したがって $\det B = 0$ を得る。もし $B^3 \neq O$ なら両辺の det をとって $(\det B)^3 \neq 0$、したがって $\det B \neq 0$ となり矛盾が生じる。したがって $B^3 = O$ である。

(3) $AB = 2BA$ より $JP^{-1}BP = 2P^{-1}BPJ$ だから、$P^{-1}BP =: \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ とおくとおくと

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2a & b & b+c \\ 2d & e & e+f \\ 2g & h & h+i \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

を得る。直接計算により $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。そこで $c = 1$ とおけば $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ を得る。定め方からこの B は $AB = 2BA$ を満たす。 □

♤ **演習問題 0.2** (第 2 問)**.** $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x,y)$ を $f(0,0)=0$、原点以外で $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ と定義する。次の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続かつ 1 回偏微分可能であることを示せ。

(2) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能かどうか、理由をつけて答えよ。

(3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, f(x,y)>0\}$ とおくとき、積分

$$I=\iint_D \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)}dxdy \tag{1.5}$$

の値を求めよ。

演習問題 0.2 の解答. (1) 原点以外での連続性は f の定義式より直ちに従う。原点での連続性は $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=0$ をいえばよい。ここで $(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=(x-y)\left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \tag{1.6}$$

である。したがって任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\delta:=\varepsilon/3$ とおけば、$\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ なるすべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| &= |x-y|\left|1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right| &(1.7)\\
&\le (|x|+|y|)\left(1+\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right) &(1.8)\\
&\le (|x|+|y|)\left(1+\frac{1}{2}\right) \quad \text{(AM-GM)} &(1.9)\\
&\le 2\|(x,y)\|\cdot\frac{3}{2} &(1.10)\\
&= 3\|(x,y)\| &(1.11)\\
&< 3\delta &(1.12)\\
&= \varepsilon &(1.13)
\end{aligned}$$

を得る。よって $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=0$ がいえた。したがって f は原点で連続である。よって f は $\mathbb{R}^2$ 上連続である。

つぎに f が $\mathbb{R}^2$ 上 1 回偏微分可能であることを示す。原点以外での 1 回偏微分可能性は f の定義式より直ちに従う。あとは原点での 1 回偏微分可能性を考えればよい。x,y それぞれに関して

$$\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}}\frac{t^3}{t^3}=1 \tag{1.14}$$

$$\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{\substack{t\to0\\t\neq0}}\frac{-t^3}{t^3}=-1 \tag{1.15}$$

という極限が存在するから、偏微分の定義より f は原点で x,y それぞれに関し 1 回偏微分可能である。

(2) f は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能ではないことを背理法で示す。そこで f が $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能であると仮定する

と、とくに原点で全微分可能であり、原点における f の 1 次近似 $p(x,y)$ が存在し

$$p(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = x - y \tag{1.16}$$

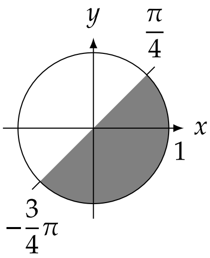
$$\lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{f(x,y) - p(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \tag{1.17}$$

をみたす。一方 $\theta \in (0,\pi/4)$ をひとつ選べば、いかなる $\delta > 0$ に対しても、$(x,y) := \left(\frac{\delta}{2}\cos\theta, \frac{\delta}{2}\sin\theta\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ は $\|(x,y)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ でありながら

$$\left|\frac{f(x,y) - p(x,y)}{\|(x,y)\|}\right| = \left|\frac{(x-y)xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| = |(\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta\sin\theta| \tag{1.18}$$

となり、右辺は δ によらない正定数だから (1.17) に矛盾する。背理法より f は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能でない。

(3)　D は下図の塗りつぶされた部分 (境界を除く) である。



そこで極座標に変数変換して積分を計算すれば

$$\begin{aligned} I &= \int_D f(x,y)\,dxdy &(1.19)\\ &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} r^2(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta dr &(1.20)\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2} &(1.21) \end{aligned}$$

を得る。 □

♤ **演習問題 0.3** (第 3 問). A,B を $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分集合、U を $\mathbb{R}^2$ の開集合であって $A\times B \subset U$ なるものとする。このとき、$\mathbb{R}$ の開集合 V,W であって $A\times B \subset V\times W \subset U$ をみたすものが存在することを示せ。

演習問題 0.3 の解答. A,B は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合だから $A\times B$ は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である。いま $\{U\}$ は $\mathbb{R}^2$ における $A\times B$ の開被覆であるから、Lebesgue 数の補題よりある $\delta > 0$ が存在して、任意の $(a,b) \in A\times B$ に対し (a,b) の $\mathbb{R}^2$ における δ-近傍 $B_\delta(a,b)$ は U に含まれる。ここで $\mathbb{R}$ の開集合 V,W を $V := \bigcup_{a\in A} B_{\delta/2}(a)$, $W := \bigcup_{b\in B} B_{\delta/2}(b)$ で定める。これらが求める V,W であることを示す。まず $A\subset V$, $B\subset W$ より $A\times B \subset V\times W$ が成り立つ。つぎに $(v,w)\in V\times W$ とすると、V,W の定義よりある $a\in A$, $b\in B$ が存在して $v\in B_{\delta/2}(a)$, $w\in B_{\delta/2}(b)$ が成り立つ。したがって

$$\|(v,w)-(a,b)\|^2 \le (v-a)^2 + (w-b)^2 \tag{1.22}$$

$$< \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \tag{1.23}$$

$$= \frac{\delta^2}{2} \tag{1.24}$$

$$< \delta^2 \tag{1.25}$$

$$\therefore \quad \|(v, w) - (a, b)\| < \delta \tag{1.26}$$

を得る。よって $(v, w) \in B_\delta(a, b) \subset U$ である。したがって $V \times W \subset U$ もいえた。 □

2 B

♤ **演習問題 0.4** (第 10 問). 集合 X 上の σ-加法族を $\mathcal{B}$ とし、$\mathcal{B}$ 上定義された二つの測度 μ, ν を考える。$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して、$\mu(A) \geq \nu(A)$ であるとする。このとき、$\mathcal{B}$ の各元 A に対して、$\lambda(A)$ を

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) - \nu(B) \mid \nu(B) < +\infty, B \subset A, B \in \mathcal{B}\} \tag{2.1}$$

と定める。このとき、

(1) ν が有限測度のとき、λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり、$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して、$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ。

(2) ν が有限とは限らない測度であっても、λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり、$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して、$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ。

演習問題 0.4 の解答. □