複素解析学

Yahata

概要

複素解析学について整理する。

目次

第 1 章　解析関数 3
1.1　Cauchy-Riemann 方程式 3
1.2　孤立特異点と留数 3
1.3　演習問題 4
第 2 章　調和関数 5
2.1　調和関数 5
演習問題の解答 6
参考文献 7
記号一覧 8

第 1 章　解析関数

1.1　Cauchy-Riemann 方程式

1.2　孤立特異点と留数

定義 1.2.1 (孤立特異点). [TODO]

定義 1.2.2 (留数).

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a;r)} f(\zeta)\, d\zeta \tag{1.2.1}$$

[TODO]

極における留数は、Laurent 展開を求めなくても計算できる。

命題 1.2.3 (極における留数).

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) \tag{1.2.2}$$

[TODO]

証明　[TODO] □

1.3 演習問題

♤ **演習問題 1.1** (ChatGPT). 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ の $z = i$ における留数を求めよ。

第 2 章　調和関数

2.1　調和関数

定義 2.1.1 (調和関数)**.** C^2 かつ $\Delta u = 0$ を満たす関数 u を**調和関数 (harmonic function)** という。

命題-定義 2.1.2 (随伴調和関数)**.** D を単連結な領域とする。調和関数 u を実部にもつ D 上の正則関数 f が虚部の実定数差を除いて一意的に存在する。

証明　[TODO] □

定理 2.1.3 (平均値性質)**.** D を領域、u を D 上の調和関数とする。u の $z \in D$ での値は、z を中心とする任意の円周上の u の平均値に等しい。

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\xi - z| = r} u(\xi)\, |d\xi| \quad \text{(実の線積分であることに注意)} \tag{2.1.1}$$

証明　[TODO] □

演習問題の解答

演習問題 1.1 の解答. $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ と表せるから、$z = i$ は f の 1 位の極である。したがって、極における留数の公式より

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{\substack{z \to i \\ z \neq i}} (z-i) f(z) = \lim_{\substack{z \to i \\ z \neq i}} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2} i \tag{2.1.2}$$

である。 □

参考文献