振り返りと導入

前回は最小次元実現の間のアファイン変換について調べた。本稿では次のことを行う:

- 指数型分布族自体に構造を入れる。
- Amari-Chentsov テンソルおよび α-接続を定義する。

1 指数型分布族の構造

本節では、指数型分布族にいくつかの構造を定め、さらに Amari-Chentsov テンソルおよび α-接続の定義を行う。

以降、本節では $\mathcal{X}$ を可測空間、$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族とする。また、0606_資料.pdf 定義 0.1, 0.2 で定めた写像や真パラメータ空間の記号「$P_{(V,T,\mu)}$」「$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$」をよく用いる。さらに次の記号を定義しておく:

定義 1.1. $\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$P_{(V,T,\mu)}|_{\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}}$ の逆写像 $\mathcal{P} \to \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ を $\theta_{(V,T,\mu)}$ と書くことにする。

1.1 多様体構造と平坦アファイン接続

命題-定義 1.2 ($\mathcal{P}$ が開であること)**.** 指数型分布族 $\mathcal{P}$ に関し、次は同値である:

(1) ある最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。
(2) すべての最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ は $V^\vee$ で開である。

$\mathcal{P}$ がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、$\mathcal{P}$ は**開 (open)** であるという。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は、0606_資料.pdf 系 1.13 より、最小次元実現の真パラメータ空間がアファイン変換で写り合うことから従う。(2) $\Rightarrow$ (1) は最小次元実現が存在することから従う。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ は開とする。

命題-定義 1.3 ($\mathcal{P}$ の自然な多様体構造)**.** $\mathcal{P}$ 上の多様体構造 $\mathcal{U}$ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 (V,T,μ) に対し、$\mathcal{U}$ は全単射 $\theta_{(V,T,\mu)}$ により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様体構造に一致する。

この $\mathcal{U}$ を $\mathcal{P}$ の**自然な多様体構造**という。

証明 Step 1: $\mathcal{U}$ の一意性　$\mathcal{U}$ の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで $\mathcal{U}$ が決まるから、$\mathcal{U}$ は一意である。

Step 2: $\mathcal{U}$ の存在　最小次元実現 (V,T,μ) をひとつ選び、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$ とおき、θ により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様体構造を $\mathcal{U}$ とおく。この $\mathcal{U}$ が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、(V',T',μ') を最小次元実現とし、$\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$ とおき、$\mathcal{U}'$ を θ' により $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ から $\mathcal{P}$ 上に誘導された多様

体構造とするとき、恒等写像 $\mathrm{id}\colon (\mathcal{P}, \mathcal{U}) \to (\mathcal{P}, \mathcal{U}')$ が微分同相となることである。これは図式

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{P}, \mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\theta"'] & (\mathcal{P}, \mathcal{U}') \arrow[d, "\theta'"] \\ \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)} \arrow[r, "F"'] & \Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')} \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

の可換性と、θ, θ', F が微分同相であることから従う。ただし F とは、0606_資料.pdf 系 1.13 より一意に存在するアファイン変換 $V^\vee \to V'^\vee$ の制限である。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に自然な多様体構造が定まっているものとする。

命題-定義 1.4 ($\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続). $\mathcal{P}$ 上の平坦アファイン接続 ∇ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 (V, T, μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$ とおくと、∇ は $\nabla = \theta^*_{(V,T,\mu)}\widetilde{\nabla}$ をみたす。

この ∇ を $\mathcal{P}$ 上の**自然な平坦アファイン接続**という。

証明には次の補題を用いる。

補題 1.5 (アファイン変換によるアファイン接続の引き戻し). V, V' を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$F\colon V \to V'$ をアファイン変換、∇, ∇' をそれぞれ V, V' 上の標準的な平坦アファイン接続とする。このとき $F^*\nabla' = \nabla$ が成り立つ。

証明 資料末尾の付録に記した。 □

命題-定義 1.4 の証明 Step 1: ∇ の一意性 ∇ の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで ∇ が決まるから、∇ は一意である。

Step 2: ∇ の存在 最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選び、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$、$\nabla := \theta^*\widetilde{\nabla}$ と定める。この ∇ が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、(V', T', μ') を最小次元実現とし、$\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}'$ とおくとき、$\theta^*\widetilde{\nabla} = \theta'^*\widetilde{\nabla}'$ が成り立つことである。そこで、0606_資料.pdf 系 1.13 より一意に存在するアファイン変換 $V^\vee \to V'^\vee$ を F とおくと、

$$\theta'^*\widetilde{\nabla}' = \theta^*F^*\widetilde{\nabla}' \quad (F \text{ と } \theta, \theta' \text{ の関係}) \tag{1.2}$$

$$= \theta^*\widetilde{\nabla} \quad (\text{補題 } 1.5) \tag{1.3}$$

が成り立つ。したがって $\theta^*\widetilde{\nabla} = \theta'^*\widetilde{\nabla}'$ が示された。よって ∇ は命題-定義の主張の条件をみたす。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に自然な平坦アファイン接続 ∇ が定まっているものとする。

1.2 Fisher 計量

命題-定義 1.6 ($\mathcal{P}$ 上の Fisher 計量). $\mathcal{P}$ 上の Riemann 計量 g であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- $\mathcal{P}$ の任意の最小次元実現 (V, T, μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおくと、$g = \theta^*_{(V,T,\mu)}\widetilde{g}$ が成り立つ。

これを $\mathcal{P}$ 上の **Fisher 計量**という。

証明には次の補題を用いる。

補題 1.7. $(V, T, \mu), (V', T', \mu')$ を $\mathcal{P}$ の最小次元実現とし、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$, $\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$ とおき、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$, $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の Fisher 計量をそれぞれ g, g' とおき、`0606_資料.pdf` 定理 1.12 より一意に存在する線型同型写像 $V \to V'$ を L とおく。このとき、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = (L \otimes L)(g'_{\theta'(p)})$ が成り立つ。

証明 L は $T'(x) = L(T(x)) + \mathrm{const.}$ μ-a.e.x をみたし、また各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = \mathrm{Var}_p[T]$, $g'_{\theta'(p)} = \mathrm{Var}_p[T']$ が成り立つから、期待値と分散のペアリングの命題 (`0523_資料.pdf` 命題 1.1) と同様の議論により補題の主張の等式が成り立つ。 □

命題-定義 1.6 の証明 Step 1: g の一意性 g の存在を仮定すれば、最小次元実現をひとつ選ぶことで g が決まるから、g は一意である。

Step 2: g の存在 最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選び、$\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおき、$g := \theta^*\widetilde{g}$ と定める。この g が求めるものであることを示せばよい。示すべきことは、(V', T', μ') を最小次元実現とし、$\theta' := \theta_{(V',T',\mu')}$、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V',T',\mu')}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}'$ とおいて、$\theta^* g = \theta'^* g'$ が成り立つことである。そこで `0606_資料.pdf` 定理 1.12 より一意に存在する線型同型写像 $V \to V'$ を L とおくと、各 $p \in \mathcal{P}$, $u, v \in T_p\mathcal{P}$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\theta^* g)_p(u, v) &= g_{\theta(p)}(d\theta_p(u), d\theta_p(v)) && (1.4)\\
&= \left\langle g_{\theta(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle && (1.5)\\
&= \left\langle (L \otimes L) g'_{\theta'(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle \quad (\text{補題 } 1.7) && (1.6)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, {}^tL \circ d\theta_p(u) \otimes {}^tL \circ d\theta_p(v) \right\rangle && (1.7)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d({}^tL \circ \theta)_p(u) \otimes d({}^tL \circ \theta)_p(v) \right\rangle && (1.8)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d\theta'_p(u) \otimes d\theta'_p(v) \right\rangle \quad (L \text{ と } \theta, \theta' \text{ の関係}) && (1.9)\\
&= g'_p(d\theta'_p(u), d\theta'_p(v)) && (1.10)\\
&= (\theta'^* g')_p(u, v) && (1.11)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって $\theta^* g = \theta'^* g'$ が示された。よって g は命題-定義の主張の条件をみたす。 □

以降、本節では $\mathcal{P}$ に Fisher 計量 g が定まっているものとする。

1.3 Amari-Chentsov テンソルと α-接続

定義 1.8 (Amari-Chentsov テンソル)**.** $\mathcal{P}$ 上の $(0,3)$-テンソル場 S を $S := \nabla g$ で定め、これを $\mathcal{P}$ 上の **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** という。また、$\mathcal{P}$ 上の $(1,2)$-テンソル場 A を次の関係式により定める:

$$g(A(X,Y),Z) = S(X,Y,Z) \quad (\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{P})) \tag{1.12}$$

以降、「Amari-Chentsov テンソル」を「AC テンソル」と略記することがある。

以降、本節では $\mathcal{P}$ に Amari-Chentsov テンソル S が定まっているものとする。

命題 1.9 (AC テンソルの成分)**.** (V,T,μ) を $\mathcal{P}$ の最小次元実現、$\Theta^{\mathcal{P}} := \Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$, $\theta := \theta_{(V,T,\mu)}$、$(V,T,\mu)$ の対数分配関数を ψ とおく。このとき、$\mathcal{P}$ 上の任意の ∇-アファイン座標 $x := (x^1,\dots,x^m)\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}^m$ に対し、$\varphi := (\varphi^1,\dots,\varphi^m) := x \circ \theta^{-1}\colon \Theta^{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}^m$ とおくと、S の成分は

$$S_{ijk}(p) = \frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j\partial\varphi^k}(\theta(p)) = E_p\left[(T_i - E_p[T_i])(T_j - E_p[T_j])(T_k - E_p[T_k])\right] \tag{1.13}$$

をみたす。ただし T_i $(i = 1,\dots,m)$ とは、同一視 $V = V^{\vee\vee} = T^{\vee}_{\theta(p)}\Theta^{\mathcal{P}}$ により $d\varphi^i$ $(i = 1,\dots,m)$ を V の基底とみなしたときの T の成分である。

証明 左側の等号と右側の等号についてそれぞれ示す。

<u>Step 1: 左側の等号</u> $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の標準的な平坦アファイン接続を $\widetilde{\nabla}$ とおき、ψ の定める $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (1.14)\\
&= \left(\left(\theta^*\widetilde{\nabla}\right)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\theta^*\widetilde{g})\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (1.15)\\
&= \left(\theta_*^{-1}\left(\widetilde{\nabla}_{\theta_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\widetilde{g}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) && (1.16)\\
&= \left(\widetilde{\nabla}_{\theta_*\frac{\partial}{\partial x^i}}\widetilde{g}\right)\left(d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), d\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) && (1.17)\\
&= \left(\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}}\widetilde{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^j},\frac{\partial}{\partial\varphi^k}\right) && (1.18)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^l\partial\varphi^n}\right)d\varphi^l d\varphi^n\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^j},\frac{\partial}{\partial\varphi^k}\right) \quad (\varphi \text{ は } \widetilde{\nabla}\text{-アファイン座標}) && (1.19)\\
&= \frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j\partial\varphi^k} && (1.20)
\end{aligned}$$

となるから、命題の主張の左側の等号が従う。

<u>Step 2: 右側の等号</u> 「E_p」の下付きの p を省略して書けば、直接計算より

$$\begin{aligned}
&E[(T_i - E[T_i])(T_j - E[T_j])(T_k - E[T_k])] && (1.21)\\
&= E[T_iT_jT_k] - E[T_i]E[T_jT_k] - E[T_j]E[T_kT_i] - E[T_k]E[T_iT_j] + 2E[T_i]E[T_j]E[T_k] && (1.22)
\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、$\lambda := \exp\psi$ とおき、$\dfrac{\partial}{\partial\varphi^i}$ を ∂_i と略記すれば、直接計算より

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j\partial\varphi^k} = \partial_i\partial_j\partial_k \log\lambda \tag{1.23}$$

$$= \frac{\partial_i\partial_j\partial_k\lambda}{\lambda} - \frac{(\partial_i\lambda)(\partial_j\partial_k\lambda)}{\lambda^2} - \frac{(\partial_j\lambda)(\partial_k\partial_i\lambda)}{\lambda^2} - \frac{(\partial_k\lambda)(\partial_i\partial_j\lambda)}{\lambda^2} + 2\frac{(\partial_i\lambda)(\partial_j\lambda)(\partial_k\lambda)}{\lambda^3} \tag{1.24}$$

が成り立つ。この右辺を `0516_資料.pdf` 系 2.4 により期待値の形で表せば式 (1.22) に一致するから、命題の主張の右側の等号が従う。 □

定義 1.10 (α-接続). $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。$\mathcal{P}$ 上のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を次の関係式により定める:

$$g(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) = g(\nabla^{(g)}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} S(X,Y,Z) \qquad (X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{P})) \tag{1.25}$$

この $\nabla^{(\alpha)}$ を (g,S) の定める **α-接続 (α-connection)** という。とくに $\alpha = 1, -1$ の場合をそれぞれ **e-接続 (e-connection)**、**m-接続 (m-connection)** という。

命題 1.11 ($\nabla^{(g)}, \nabla^{(\alpha)}$ の AC テンソルによる表示). $\mathcal{P}$ 上の任意の ∇-アファイン座標に関し、$\nabla^{(g)}$ および $\nabla^{(\alpha)}$ の接続係数は次をみたす:

(1)

$$\Gamma^{(g)}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}A^k_{ij}, \quad \Gamma^{(g)}{}_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk} \tag{1.26}$$

(2) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$\Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ij} = \frac{1-\alpha}{2}A^k_{ij}, \quad \Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk} = \frac{1-\alpha}{2}S_{ijk} \tag{1.27}$$

とくに $\alpha = 1$ のとき $\Gamma^{(1)}{}^k_{ij} = 0,\ \Gamma^{(1)}{}_{ijk} = 0$ である。

証明 (1) (1.26) の左側の等式は

$$\Gamma^{(g)}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right) \tag{1.28}$$

$$= \frac{1}{2}g^{kl}\left(S_{ijl} + S_{jli} - S_{lij}\right) \quad (\text{命題 } 1.9) \tag{1.29}$$

$$= \frac{1}{2}g^{kl}S_{ijl} \tag{1.30}$$

$$= \frac{1}{2}A^k_{ij} \tag{1.31}$$

より従う。g で添字を下げて (1.26) の右側の等式も従う。

(2) α-接続の定義より $\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk} = \Gamma^{(g)}{}_{ijk} - \dfrac{\alpha}{2}S_{ijk}$ だから、(1) とあわせて (1.27) の左側の等式が従う。g で添字を下げて (1.26) の右側の等式も従う。 □

命題 1.12 (捩率と曲率の AC テンソルによる表示). $\mathcal{P}$ 上の任意の ∇-アファイン座標に関し、$\nabla^{(\alpha)}$ の捩率テンソル $T^{(\alpha)}$ および (1,3)-曲率テンソル $R^{(\alpha)}$ の成分表示は次をみたす:

(1) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$T^{(\alpha)}{}^{k}_{ij} = 0 \tag{1.32}$$

(2) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$R^{(\alpha)}{}^{l}_{ijk} = \frac{1-\alpha}{2}\left(\partial_i A^l_{jk} - \partial_j A^l_{ik}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \left(A^m_{jk}A^l_{im} - A^m_{ik}A^l_{jm}\right) \tag{1.33}$$

とくに $\alpha = 1$ のとき $R^{(1)}{}^{l}_{ijk} = 0$ である。

証明 (1)

$$\begin{aligned} T^{(\alpha)}{}_{ij} &= \Gamma^{(\alpha)}{}^{k}_{ij} - \Gamma^{(\alpha)}{}^{k}_{ji} && (1.34) \\ &= \frac{1-\alpha}{2}A^k_{ij} - \frac{1-\alpha}{2}A^k_{ji} \quad (\text{命題 } 1.11(2)) && (1.35) \\ &= 0 \quad (A^k_{ij} = A^k_{ji}) && (1.36) \end{aligned}$$

より従う。

(2)

$$\begin{aligned} R^{(\alpha)}{}^{l}_{ijk} &= \partial_i \Gamma^{(\alpha)}{}^{l}_{jk} - \partial_j \Gamma^{(\alpha)}{}^{l}_{ik} + \Gamma^{(\alpha)}{}^{m}_{jk}\Gamma^{(\alpha)}{}^{l}_{im} - \Gamma^{(\alpha)}{}^{m}_{ik}\Gamma^{(\alpha)}{}^{l}_{jm} && (1.37) \\ &= \frac{1-\alpha}{2}\left(\partial_i A^l_{jk} - \partial_j A^l_{ik}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \left(A^m_{jk}A^l_{im} - A^m_{ik}A^l_{jm}\right) \quad (\text{命題 } 1.11(2)) && (1.38) \end{aligned}$$

より従う。 □

今後の予定

- 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族
- 具体例: 正規分布族

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

A 付録

事実 A.1 (ベクトル場の押し出しと関数). M, N を (有限次元実 C^∞) 多様体、$F\colon M \to N$ を微分同相写像とする。このとき、次が成り立つ:

(1) 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し $F_*(fX) = f \circ F^{-1} F_*X$ が成り立つ。

(2) 任意の $g \in C^\infty(N)$ に対し $((F_*X)g) \circ F = X(g \circ F)$ が成り立つ。 □

事実 A.2 (アファイン変換によるベクトル場の押し出し). V, V' を m 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、∂_i, ∂'_i $(i = 1, \ldots, m)$ をそれぞれ V, V' の基底をベクトル場とみなしたもの、$F\colon V \to V'$ をアファイン変換とし、∂_i, ∂'_i に関する F の行列表示を $(a^i_j)_{i,j}$ とする。このとき、$F_*\partial_j = a^j_i \partial'_j$ が成り立つ。 □

補題 1.5 の証明 ∂_i, ∂'_i $(i = 1, \ldots, m)$ をそれぞれ V, V' の基底をベクトル場とみなしたものとし、∂_i, ∂'_i に関する F の行列表示を $(a^i_j)_{i,j}$ とおき、その逆行列を $(\widetilde{a}^i_j)_{i,j}$ とおく。任意の $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^i\partial_i \in \Gamma(TV)$ に対し

$$
\begin{aligned}
(F^*\nabla')_X Y &= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Y\right) && \text{(A.1)}\\
&= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X^i\partial_i)} F_*(Y^j\partial_j)\right) && \text{(A.2)}\\
&= F_*^{-1}\left(\nabla'_{X^i\circ F^{-1} F_*\partial_i}(Y^j \circ F^{-1} F_*\partial_j)\right) \quad (\text{事実 A.1 (1)}) && \text{(A.3)}\\
&= F_*^{-1}\left(\nabla'_{X^i\circ F^{-1} a^k_i\partial'_k}(Y^j \circ F^{-1} a^l_j\partial'_l)\right) \quad (\text{事実 A.2}) && \text{(A.4)}\\
&= F_*^{-1}\left(X^i \circ F^{-1} a^k_i a^l_j \nabla'_{\partial'_k}(Y^j \circ F^{-1}\partial'_l)\right) && \text{(A.5)}\\
&= F_*^{-1}\left(X^i \circ F^{-1} a^k_i a^l_j \partial'_k(Y^j \circ F^{-1})\partial'_l\right) \quad (\text{基底 } \partial'_i \text{ の定める座標は } \nabla'\text{-アファイン}) && \text{(A.6)}\\
&= F_*^{-1}\left(X^i \circ F^{-1} a^k_i a^l_j ((F_*^{-1}\partial'_k)Y^j) \circ F^{-1}\partial'_l\right) \quad (\text{事実 A.1 (2)}) && \text{(A.7)}\\
&= X^i a^k_i a^l_j (F_*^{-1}\partial'_k)(Y^j) F_*^{-1}\partial'_l \quad (\text{事実 A.1 (1)}) && \text{(A.8)}\\
&= X^i a^k_i a^l_j \widetilde{a}^m_k \partial_m(Y^j)\widetilde{a}^n_l \partial_n \quad (\text{事実 A.2}) && \text{(A.9)}\\
&= X^i \partial_i(Y^j)\partial_j && \text{(A.10)}\\
&= \nabla_X Y && \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

となる。よって $F^*\nabla' = \nabla$ が成り立つ。 □