振り返りと導入

前回は KL ダイバージェンスの双対平坦多様体への一般化を考え始めた。本稿では次のことを行う:

- 双対平坦構造の canonical ダイバージェンスを定義する。
- 双対平坦構造からシンプレクティック構造が定まることをみる。

1 双対平坦構造の canonical ダイバージェンス

以下 M を多様体とする。

定義 1.1 (canonical ダイバージェンスの定義域). (g, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造とし、

$$\mathcal{W} := \left\{ (p, q) \in M \times M \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{(i) } p, q \text{ を結ぶ } \nabla\text{-測地線のうち最短なものがただひとつ存在する。} \\ \text{(ii) その像を覆う単連結 } \nabla\text{-アファインチャートが存在する。} \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{U} := \mathrm{Int}_{M \times M}\, \mathcal{W} \tag{1.2}$$

とおく。$\mathcal{U}$ を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) の **canonical ダイバージェンスの定義域** と呼ぶ。

補題 1.2. $\mathcal{U}$ は $M \times M$ における $\mathrm{diag}\, M$ の開近傍である。

証明 [TODO] □

補題 1.3. 上の定義の (ii) のチャート U をひとつ選ぶと、U 上の g の ∇-ポテンシャルが存在する。

証明 Poincaré の補題より従う。 □

命題-定義 1.4 (canonical ダイバージェンス). $(p, q) \in \mathcal{U}$ を固定し、(i) の ∇-測地線を $\gamma \colon I \to M$ とおく。γ の像を覆う任意の単連結 ∇-アファインチャート (U, θ) と U 上の g の ∇-ポテンシャル $\psi \colon U \to \mathbb{R}$ に対し

$$\psi(q) - \psi(p) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}(p)(\theta^i(q) - \theta^i(p)) \tag{1.3}$$

の値は $(U, \theta), \psi$ の取り方によらない。この値を $D(p \| q)$ と記す。

以上により定まる関数 $D \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) の **canonical ダイバージェンス** と呼ぶ。

証明 $\nabla d\psi = g = \nabla d\psi'$ ゆえ $D^{\theta', \psi} = D^{\theta', \psi'}$ が成り立つ。また、$U \cap U'$ のうち γ の像を含む連結成分上では 2 つの座標 θ, θ' はアファイン変換で移り合うから、$D^{\theta, \psi} = D^{\theta', \psi}$ が成り立つ。よって $D^{\theta, \psi} = D^{\theta', \psi'}$ が成り立つ。 □

定義 1.5 (D の方向微分の記法). $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し、$D(X \|), D(\| X) \in C^\infty(M)$ を

$$D(X \|)(p) := X_p(D(- \| p)), \qquad D(\| X)(p) := X_p(D(p \| -)) \qquad (p \in M) \tag{1.4}$$

で定める。以下、帰納的に $X_1,\dots,X_l,Y_1,\dots,Y_m \in \mathfrak{X}(M)$, $l \geq 1, m \geq 1$ に対し $D(X_l\cdots X_1\|Y_m\cdots Y_1) \in C^\infty(M)$ を

$$D(X_l\cdots X_1\|Y_m\cdots Y_1)(p) := (X_l)_p(D(X_{l-1}\cdots X_1\|Y_m\cdots Y_1)) = (Y_m)_p(D(X_l\cdots X_1\|Y_{m-1}\cdots Y_1)) \qquad (p \in M) \tag{1.5}$$

で定める。

命題 1.6 (canonical ダイバージェンスから双対平坦構造の復元). $x = (x_i)_i$ を M の局所座標として

(1) $g(X,Y) = -D(X\|Y)$
(2) $\Gamma_{ijk} = -D(\partial_i\partial_j\|\partial_k)$.
(3) $D(p\|-)\colon \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{U}_p$ 上の g の ∇-ポテンシャルである。
(4) $D(-\|q)\colon \mathcal{U}_q \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{U}_q$ 上の g の ∇^*-ポテンシャルである。

証明 [TODO] □

2 双対平坦構造とシンプレクティック構造

定義 2.1 (シンプレクティックベクトル空間). $2n$ 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 V と V 上の非退化交代形式 $\omega\colon V\times V \to \mathbb{R}$ の組 (V,ω) を**シンプレクティックベクトル空間 (symplectic vector space)** という。

定義 2.2 (シンプレクティック構造). M を $2n$ 次元多様体とする。$\omega \in \Omega^2(M)$ が M 上の**シンプレクティック構造 (symplectic structure)** あるいは**シンプレクティック形式 (symplectic form)** であるとは、ω が閉形式かつ各点 $x \in M$ で (T_xM, ω_x) がシンプレクティックベクトル空間であることをいう。

例 2.3 (標準的なシンプレクティック構造). $\mathbb{R}^{2n}$ の標準的な座標 $(x^1,\dots,x^n,y_1,\dots,y_n)$ に対し $\omega_0 := dx^i \wedge dy_i \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック構造である。ω_0 を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の**標準的なシンプレクティック構造 (standard symplectic structure)** という。

例 2.4 (余接束のシンプレクティック構造). M を n 次元多様体とする。トートロジカル 1-形式 $\theta \in \Omega^1(T^\vee M)$ に対し $\omega_0 := -d\theta \in \Omega^2(T^\vee M)$ は $T^\vee M$ 上のシンプレクティック構造である。[TODO]

命題 2.5 (双対平坦構造のシンプレクティック構造). M を多様体、(g,∇,∇^*) を M 上の双対平坦構造、$\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の標準的なシンプレクティック構造とする。このとき、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega := (d_1D)^*(\omega_0) \in \Omega^2(\mathcal{U})$ は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック構造である。さらに任意の座標 $(\xi^1,\dots,\xi^n,\xi^{*1},\dots,\xi^{*n})$ に対し次の成分表示を持つ:

$$\omega = \frac{\partial D}{\partial\xi^i\partial\xi^{*j}} d\xi^i \wedge d\xi^{*j} \tag{2.1}$$

証明 [TODO] □

今後の予定

- シンプレクティック構造と Legendre 変換

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

M を多様体、g を M 上の Riemann 計量、∇ を M 上のアファイン接続とする。

定義 A.1 (simple chain). X を位相空間とする。X の開集合の有限列 $(U_i)_{i=1}^N$ が **simple chain** であるとは、$U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i-j| \leq 1$ が成り立つことをいう。

すべての $U_i \cap U_{i+1}$ が連結な simple chain を **very simple chain** という。

補題 A.2. ∇-アファインチャートの列 $(U_i)_{i=1}^N$ が very simple chain ならば、$\bigcup_{i=1}^N U_i$ を定義域とする ∇-アファイン座標が存在する。

証明 $U_1 \cap U_2$ は連結であり、2 つの座標はアファイン変換で移り合うから、それに応じて U_2 上の座標を調整すれば $U_1 \cup U_2$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。以下同様にして $U_1 \cup \cdots \cup U_N$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。 □

命題 A.3. $\gamma\colon I \to M$ が単射な ∇-測地線ならば、$\gamma(I)$ を覆う単連結な ∇-アファインチャートが存在する。

証明 [TODO] $\gamma(I)$ の各点のまわりの ∇-アファインチャートを集めて $\gamma(I)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ を作る。Lebesgue 数の補題より、実数列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ が存在して各 $S_i := \gamma([t_{i-1}, t_i])$ はある $U_i \in \mathcal{U}$ に含まれる。γ の単射性より、ある $\varepsilon > 0$ であって $(U(S_i, \varepsilon))_{i=1}^N$ が very simple chain かつ $U(S_i, \varepsilon) \subset U_i$ となるものが存在する (ただし $U(S_i, \varepsilon)$ は Riemann 距離に関する ε-近傍)。そこで $U := \bigcup_{i=1}^N U(S_i, \varepsilon)$ とおくと、補題より U 上の ∇-アファイン座標が存在する。また各 $U(S_i, \varepsilon)$ は S_i とホモトピック (?) だから単連結で、$U(S_i, \varepsilon) \cap U(S_{i+1}, \varepsilon)$ は (弧状) 連結だから、和集合 U は単連結である。 □