振り返りと導入

前回は KL ダイバージェンスの双対平坦多様体への一般化を考え始めた。本稿では次のことを行う:

- 双対平坦構造の canonical ダイバージェンスを定義する。
- 双対平坦構造からシンプレクティック構造が定まることをみる。

1 双対平坦構造とシンプレクティック構造

命題 1.1 (双対平坦構造のシンプレクティック構造). M を多様体、(g, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造、$D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を canonical ダイバージェンス、$\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック構造とする。写像 $d_1 D\colon \mathcal{U} \to T^\vee M$ を第 1 成分に関する微分、すなわち $d_1 D := D(\frac{\partial}{\partial x^i} \|)\, dx^i$ で定め、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ を $\omega := (d_1 D)^*(\omega_0)$ で定める。このとき次が成り立つ:

(1) M の任意の局所座標 $x = (x_i)_i$ に対し、$x^* := x$ とおいて $\mathcal{U}$ の局所座標 $(x, x^*) = (x^1, \ldots, x^n, x^{*1}, \ldots, x^{*n})$ を定めると、ω の成分表示は

$$\omega = D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} \tag{1.1}$$

となる。

(2) ω は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。

証明 (1) 前回示した。

(2) $\mathcal{U}$ の局所座標として (η, θ^*) をとれば $D(\frac{\partial}{\partial \eta_i} \| \frac{\partial}{\partial \theta^{*j}}) = -\delta^i_j$ となるから $d_1 D$ ははめ込みである。よって ω は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。 □

例 1.2 ($\mathbb{R}^n$ の場合). [TODO]

今後の予定

- 双対平坦構造のシンプレクティック構造と双対アファイン座標

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

1.1 ??の条件 (i), (ii) について

M を多様体、g を M 上の Riemann 計量、∇ を M 上のアファイン接続とする。

定義 A.1 (simple chain (ここだけの用語)). X を位相空間とする。X の開集合の有限列 $(U_i)_{i=1}^N$ が **simple chain** であるとは、$U_i \cap U_j \neq \varnothing \iff |i-j| \leq 1$ が成り立つことをいう。さらにすべての $U_i \cap U_{i+1}$ が連結のとき **very simple chain** という。

補題 A.2. ∇-アファインチャートの列 $(U_i)_{i=1}^N$ が very simple chain ならば、$\bigcup_{i=1}^N U_i$ を定義域とする ∇-アファイン座標が存在する。

証明 $U_1 \cap U_2$ は連結であり、2 つの座標はアファイン変換で移り合うから、それに応じて U_2 上の座標を調整すれば $U_1 \cup U_2$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。以下同様にして $U_1 \cup \cdots \cup U_N$ 上の ∇-アファイン座標が得られる。 □

命題 A.3. $\gamma: I \to M$ が単射な ∇-測地線ならば、$\gamma(I)$ を覆う単連結な ∇-アファインチャートが存在する。

証明 [TODO] 要確認 $\gamma(I)$ の各点のまわりの ∇-アファインチャートを集めて $\gamma(I)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ を作る。Lebesgue 数の補題より、実数列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ が存在して各 $S_i := \gamma([t_{i-1}, t_i])$ はある $U_i \in \mathcal{U}$ に含まれる。γ の単射性より、ある $\varepsilon > 0$ であって $(U(S_i, \varepsilon))_{i=1}^N$ が very simple chain かつ $U(S_i, \varepsilon) \subset U_i$ となるものが存在する (ただし $U(S_i, \varepsilon)$ は Riemann 距離に関する ε-近傍)。そこで $U := \bigcup_{i=1}^N U(S_i, \varepsilon)$ とおくと、補題より U 上の ∇-アファイン座標 θ が存在する。$\theta(\gamma(I))$ が $\theta(U)$ 内の線分であることに注意すると、$\theta(\gamma(I))$ の十分小さい近傍 V をとれば、$\theta^{-1}(V)$ は $\gamma(I)$ を覆う単連結な ∇-アファインチャートとなる。 □

1.2 ??の証明

証明 $p \in M$ を固定し、(p,p) の $M \times M$ におけるある開近傍が $\mathcal{W}$ に含まれることを示せばよい。そのような開近傍を次のように構成する。

まず ∇ の平坦性より p のまわりの ∇-アファインチャート (U, θ) が存在する。p の M における (計量 g から定まる距離に関する) $3r$-近傍が U に含まれるように $r > 0$ をとり、p の M における r-近傍を U' とおく。さらに $\theta(p)$ の $\mathbb{R}^n$ における ε-近傍 V_ε が $\theta(U')$ に含まれるように $\varepsilon > 0$ をとる。$U_\varepsilon := \theta^{-1}(V_\varepsilon)$ とおくと (p,p) の $U_\varepsilon \times U_\varepsilon$ は $M \times M$ における開近傍である。

以下 $U_\varepsilon \times U_\varepsilon \subset \mathcal{W}$ を示す。すなわち、$(a,b) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon$ として $(a,b) \in \mathcal{W}$ を示す。U_ε は ∇-凸ゆえ、a, b を結ぶ U_ε 内の ∇-測地線 γ が存在する。このとき γ はとくに U 内の ∇-測地線でもあるが、U は ∇-アファインチャートだから γ は a, b を結ぶ U 内の唯一の ∇-測地線である。U' の定め方から、a, b を結ぶ (M 内の) 任意の ∇-測地線は γ より真に長いか γ 自身である [TODO] 怪しい。したがって、a, b を結ぶ (M 内の) ∇-測地線のうち最短なものはただひとつ存在し、それは γ である。よって (a,b) は条件 (i) をみたす。さらに U_ε は γ の像を覆う単連結 ∇-アファインチャートだから、(a,b) は条件 (ii) をみたす。したがって $(a,b) \in \mathcal{W}$ である。 □