

発表時にコメントがあった命題などを整理する。

**定義 0.1 (full support).**  $X$  を位相空間、 $\mu$  を  $X$  上の Borel 測度とする。

$$\text{supp } \mu := \left( \bigcup_{\substack{U \subset X \\ U \text{ open} \\ \mu(U)=0}} U \right)^c \quad (0.1)$$

と定める。 $\mu$  が **full support** であるとは、 $\text{supp } \mu = X$  であることをいう。

◇ **演習問題 0.1.**  $X = \{1, \dots, n\}$  とする。 $X$  上の full support な確率測度全体の集合  $\mathcal{P}$  は例 3.1 で見たように指数型分布族であるが、 $\mathcal{P}$  は  $n-1$  次元の実現を持つか？

**演習問題 0.1 の解答.** 答え: 持つ。

$$p(dk) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (\log p_i) \delta_{ik} + \left( \log \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \right) \delta_{n,k} \right\} \gamma(dk) \quad (0.2)$$

$$= \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \log p_i - \log \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \right) \delta_{ik} + \log \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \right\} \gamma(dk) \quad (0.3)$$

と表せるから、 $T: X \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \dots, \delta_{n-1,k})$  を十分統計量、数え上げ測度  $\gamma$  を基底測度として  $(\mathbb{R}^{n-1}, T, \gamma)$  は  $n-1$  次元の実現となる。□

◇ **演習問題 0.2.**  $X$  を可測空間、 $\mathcal{P}$  を  $X$  上の指数型分布族とする。任意の  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  に対し  $P_1 \sim P_2$  (互いに絶対連続) が成り立つことを示せ。

**演習問題 0.2 の解答.** 役割を入れ替えれば逆向きも示せるから、 $P_1 \ll P_2$  のみ示せばよい。 $E \subset X$  を  $P_2(E) = 0$  なる可測集合とし、 $P_1(E) = 0$  を示す。 $\mathcal{P}$  の実現  $(T, \mu)$  をひとつ選んで固定する。 $P_2$  に対し定義 2.1 条件 (E3) の  $\theta_2 \in \mathbb{R}^m$  をひとつ選ぶ。

$$0 = P_2(E) \quad (0.4)$$

$$= \int_E \frac{dP_2}{d\mu}(x) \mu(dx) \quad (0.5)$$

$$= \int_E e^{(\theta_2, T(x)) - \psi(\theta_2)} \mu(dx) \quad (0.6)$$

であるが、被積分関数は  $\mu$  に関しほとんど至るところ正であることから、 $\mu(E) = 0$  でなければならない<sup>1)</sup>。よって、 $P_1 \ll \mu$  であることとあわせて  $P_1(E) = 0$  が従う。□

◇ **演習問題 0.3.** 正規分布族は 2 より小さい次元の実現を持つか？

**演習問題 0.3 の解答.** 条件 (as-a), (as-b) を確かめれば、2 が最小であることがわかる。(cf. [0606\\_資料.pdf](#)) □

1) ほとんど至るところ正の値をとる関数  $f > 0$  に対し  $X = f^{-1}((1, +\infty] \cup (1/2, 1] \cup \dots \cup (1/n, 1/(n-1)] \cup \dots)$  と表せることを使って示せる。

指数型分布族の定義の  $\mathbb{R}^m$  を有限次元ベクトル空間  $V$  に置き換えてみる。発表時点では  $\mathbb{R}^m$  で十分だと思っていたが、 $\mathbb{R}^m$  の代わりに  $V$  を使うことで、議論を簡潔にできるというメリットが指摘によりわかった。

**定義 0.2** (指数型分布族).  $X$  を可測空間、 $\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$  とする。 $\mathcal{P}$  が  $X$  上の指数型分布族 (exponential family) であるとは、次が成り立つことをいう:  $\exists (V, T, \mu)$  s.t.

(E0)  $V$  は有限次元  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間である。

(E1)  $T: X \rightarrow V$  は可測写像である。

(E2)  $\mu$  は  $X$  上の  $\sigma$ -有限測度であり、 $\forall p \in \mathcal{P}$  に対し  $p \ll \mu$  をみたす。

(E3)  $\forall p \in \mathcal{P}$  に対し、 $\exists \theta \in V^\vee$  s.t.

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in X \quad (0.7)$$

である。ただし  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は自然なペアリング  $V^\vee \times V \rightarrow \mathbb{R}$  である。

さらに次のように定める:

- $(V, T, \mu)$  を  $\mathcal{P}$  の実現 (representation) という。
  - $m$  を  $(V, T, \mu)$  の次元 (dimension) という。
  - $T$  を  $(V, T, \mu)$  の十分統計量 (sufficient statistic) という。
  - $\mu$  を  $(V, T, \mu)$  の基底測度 (base measure) という。
- 集合  $\Theta_{(V, T, \mu)}$

$$\Theta_{(V, T, \mu)} := \left\{ \theta \in V^\vee \mid \int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy) < +\infty \right\} \quad (0.8)$$

を  $(V, T, \mu)$  の自然パラメータ空間 (natural parameter space) という。

- 関数  $\psi: \Theta_{(V, T, \mu)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\psi(\theta) := \log \int_X \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy) \quad (0.9)$$

を  $(V, T, \mu)$  の対数分配関数 (log-partition function) という。

上の定義に基づいて次の定理を書き直してみる (ただし発表時の修正を踏襲し、「極小実現」の語は「 $\theta$  が一意の実現」に置き換えてある)。証明の主な変更点としては、 $\mathbb{R}^m$  を  $V$  に置き換えたことによってノルムが使えなくなるため、かわりに annihilated を使うようになっている。証明は [Yos, Lemma 21] を参考にした。

**定理 0.3** (「 $\theta$  が一意の実現」の存在).  $X$  を可測空間、 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$  を  $X$  上の指数型分布族とする。このとき、 $\mathcal{P}$  の「 $\theta$  が一意の実現」が存在する。

**証明**  $(V, T, \mu)$  は  $\mathcal{P}$  の実現のうちで次元が最小のものであるとする。 $(V, T, \mu)$  の次元 ( $m$  とおく) が 0 ならば  $V^\vee$  は 1 点集合だから証明は終わる。

以下  $m \geq 1$  の場合を考え、 $(V, T, \mu)$  が「 $\theta$  が一意の実現」であることを示す。背理法のために  $(V, T, \mu)$  が「 $\theta$  が一意の実現」でないこと、すなわちある  $p_0 \in \mathcal{P}$  および  $\theta_0, \theta'_0 \in V^\vee$ ,  $\theta_0 \neq \theta'_0$  が存在して

$$\exp(\langle \theta_0, T(x) \rangle - \psi(\theta_0)) = \frac{dp_0}{d\mu}(x) = \exp(\langle \theta'_0, T(x) \rangle - \psi(\theta'_0)) \quad \mu\text{-a.e. } x \in X \quad (0.10)$$

が成り立つことを仮定する。証明の方針としては、次元  $m-1$  の実現  $(V', T', \mu)$  を具体的に構成することにより、 $(V, T, \mu)$  の次元  $m$  が最小であることとの矛盾を導く。

さて、式 (0.10) を整理して

$$\langle \theta_0 - \theta'_0, T(x) \rangle = \psi(\theta_0) - \psi(\theta'_0) \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.11)$$

を得る。表記の簡略化のために  $\theta_1 := \theta_0 - \theta'_0 \in V^\vee$ ,  $r := \psi(\theta_0) - \psi(\theta'_0) \in \mathbb{R}$  とおけば

$$\langle \theta_1, T(x) \rangle = r \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.12)$$

を得る。ここで  $V' := (\mathbb{R}\theta)^\perp = \{v \in V \mid \langle \theta, v \rangle = 0\}$  とおき、次の claim を示す。

**Claim** ある可測写像  $T': \mathcal{X} \rightarrow V'$  および  $v_0 \in V$  が存在して  $T(x) = T'(x) + v_0$  ( $\mu$ -a.e.  $x$ ) が成り立つ。

( $\because$ ) いま背理法の仮定より  $\theta_1 \neq 0$  であるから、 $\theta_1$  を延長した  $V^\vee$  の基底  $\theta_1, \dots, \theta_m$  が存在する。このとき、 $\theta_1, \dots, \theta_m$  を双対基底に持つ  $V$  の基底  $v_1, \dots, v_m$  が存在する。この基底  $v_1, \dots, v_m$  に関する  $T$  の成分表示を  $T(x) = \sum_{i=1}^m T^i(x) v_i$ ,  $T^i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  とおくと、(0.12) より  $T^1(x) = \langle \theta_1, T(x) \rangle = r$  ( $\mu$ -a.e.  $x$ ) が成り立つ。そこで  $v_0 := r v_1 \in V$  とおくと  $\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0$  ( $\mu$ -a.e.  $x$ ) が成り立つから、可測写像  $T': \mathcal{X} \rightarrow V'$  を

$$T'(x) := \begin{cases} T(x) - v_0 & (\langle \theta_1, T(x) - v_0 \rangle = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (0.13)$$

と定めることができる。この  $T, v_0$  が求めるものである。 //

$(V', T', \mu)$  が  $\mathcal{P}$  の実現であることを示す。定義 0.2 の条件 (E0)-(E2) は明らかに成立しているから、あとは条件 (E3) を確認すればよい。そこで  $p \in \mathcal{P}$  とする。いま  $(V, T, \mu)$  が  $\mathcal{P}$  の実現であることより、ある  $\theta \in V^\vee$  が存在して

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy)} \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X} \quad (0.14)$$

が成り立つ。 $T', v_0$  を用いて式変形すると、 $\mu$ -a.e.  $x$  に対し

$$\frac{dp}{d\mu}(x) = \frac{\exp\langle \theta, T(x) \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T(y) \rangle \mu(dy)} \quad (0.15)$$

$$= \frac{\exp\langle \theta, T'(x) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T'(y) \rangle + \langle \theta, v_0 \rangle \mu(dy)} \quad (0.16)$$

$$= \frac{\exp\langle \theta, T'(x) \rangle}{\int_{\mathcal{X}} \exp\langle \theta, T'(y) \rangle \mu(dy)} \quad (0.17)$$

が成り立つ。したがって  $(V', T', \mu)$  は条件 (E3) も満たし、 $\mathcal{P}$  の実現であることがいえた。 $(V', T', \mu)$  は次元  $m-1$  だから  $(V, T, \mu)$  の次元  $m$  の最小性に矛盾する。背理法より  $(V, T, \mu)$  は  $\mathcal{P}$  の「 $\theta$  が一意の実現」である。  $\square$

## 1 参考文献

[Yos] Taro Yoshino, [bn1970.pdf](#), Dropbox.