振り返りと導入

前回は、指数型分布族にいくつかの構造を定め、Amari-Chentsov テンソルと α-接続を定義した。本稿では次のことを行う:

- 具体例の計算 (有限集合上の full support な確率分布の族)
- 具体例の計算 (正規分布族)

今回以降、次のように記法を変更する[1]。

定義 0.1 (パラメータの空間の記法の変更)**.** 可測空間 $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族 $\mathcal{P}$ とその実現 (V, T, μ) に対し、

- 自然パラメータ空間 $\Theta_{(V,T,\mu)}$ を $\widetilde{\Theta}_{(V,T,\mu)}$ と書くことにし、
- 真パラメータ空間 $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ を $\Theta_{(V,T,\mu)}$ と書くことにする。

文脈から明らかな場合は添字を省略することがある。

1 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族

本節では、有限集合上の full support な確率分布の族について、α-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

設定 1.1 (有限集合上の full support な確率分布の族)**.** $\mathcal{X} := \{1, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, 0 < p_i < 1 \ (i = 1, \dots, n) \right\} \tag{1.1}$$

とおく。ただし δ^i は 1 点 $i \in \mathcal{X}$ での Dirac 測度である。`0425_資料.pdf` 例 3.1 でみたように $\mathcal{P}$ は $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族である。

まず $\mathcal{P}$ が開であることを確かめる。

命題 1.2 (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認)**.**

(1) (V, T, μ) を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^{n-1}, &(1.2)\\ &T : \mathcal{X} \to V, \quad k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \dots, \delta_{(n-1)k}), &(1.3)\\ &\mu = \gamma \quad (\text{数え上げ測度}) &(1.4)\end{aligned}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi : \widetilde{\Theta} \to \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = \log\left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \exp \theta^l\right)$ となる。

(3) 写像 $P := P_{(V,T,\mu)} : \widetilde{\Theta} \to \mathcal{P}$ は次をみたす:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^{n-1} \exp \theta^l} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i) \delta^i + \delta^n \right) \tag{1.5}$$

1) [BN78] での記法によった。

(4) 次の写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は P の逆写像である:

$$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \mapsto \left(\log \frac{p_i}{p_n}\right)_{i=1}^{n-1} \tag{1.6}$$

(5) $\Theta = \widetilde{\Theta} = \mathbb{R}^{n-1}$ が成り立つ。

(6) (V, T, μ) は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

証明 (1) 実現であることはよい。

(2) 対数分配関数の定義より

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= \log \int_{\mathcal{X}} \exp \langle \theta, T(x) \rangle \ \mu(dx) &(1.7)\\ &= \log \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\sum_{l=1}^{n-1} \theta^l \delta_{li}\right) &(1.8)\\ &= \log\left(\sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i + 1\right) &(1.9)\end{aligned}$$

である。

(3) $P(\theta) = \exp(\langle \theta, T(k) \rangle - \psi(\theta)) \cdot \gamma$ を直接計算すれば得られる。

(4) $P \circ \theta,\ \theta \circ P$ を直接計算すれば確かめられる。

(5) すべての $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し $\int_{\mathcal{X}} \exp \langle \theta, T(x) \rangle \ \mu(dx) = \sum_{l=1}^{n-1} \exp \theta^l + 1 < \infty$ が成り立つから $\Theta = \mathbb{R}^{n-1}$ である。

(6) 最小次元実現の特徴づけを確かめる。条件 A(3) と条件 B が成り立つことから、最小次元実現であることがわかる。 □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を ∇、Fisher 計量を g とおく。また、$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は多様体 $\mathcal{P}$ 上の座標とみなす。

図形的には、P は $\mathbb{R}^{n-1}$ から $\mathbb{R}^n$ 内の $(n-1)$-単体 (の内部) への微分同相写像になっている。

命題 1.3 ($\mathcal{P}$ の 2 通りの位相と多様体構造). $\mathcal{P}$ 上の位相 (resp. 多様体構造) として、$\mathcal{X}$ 上の符号付き測度全体のなすベクトル空間 $\mathcal{S}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{R}^n$ の位相部分空間 (resp. 部分多様体) としての構造と、指数型分布族としての自然な構造の 2 通りを考えられるが、これらの構造は互いに一致する。

証明 いずれの位相 (resp. 多様体構造) に関しても写像 $P\colon \widetilde{\Theta} \to \mathcal{P}$ は同相 (resp. 微分同相) 写像だからである。 □

命題 1.4 (Fisher 計量の成分). 座標 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ に関する Fisher 計量 g の成分は

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} p_i - p_i p_j \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j = 1, \ldots, n-1) \tag{1.10}$$

となる。

証明 命題 2.2 の (V, T, μ) に関する Fisher 計量を $\widetilde{g}$ とおくと、各点 $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned}
g_{ij}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) && (1.11)\\
&= (\theta^*\widetilde{g})_p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) && (1.12)\\
&= \widetilde{g}_{\theta(p)}\left(d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right), d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)\right) && (1.13)\\
&= (\mathrm{Hess}\,\psi)_{\theta(p)}\left(d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right), d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)\right) && (1.14)\\
&= (\mathrm{Var}_p[T])(e^i, e^j) && (1.15)\\
&= E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])] && (1.16)\\
&= \sum_{l=1}^{n}(\delta_{il} - p_i)(\delta_{jl} - p_j)p_l && (1.17)\\
&= \delta_{ij}p_i - p_ip_j && (1.18)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

命題 1.5 (AC テンソルの成分). 座標 θ に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{ijk} = p_i\delta_{ij}\delta_{jk} - p_ip_k\delta_{ij} - p_ip_j\delta_{jk} - p_jp_k\delta_{ik} + 2p_ip_jp_k \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j, k = 1, \ldots, n-1) \tag{1.19}$$

となる。

証明 前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.9 を用いると

$$S_{ijk}(p) = E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])(T^k - E_p[T^k])] \tag{1.20}$$

となるから、命題 1.4 と同様に直接計算して命題の主張の等式が得られる。 □

以降、$n = 3$ の場合を考える。

命題 1.6 ($n = 3$ での g, S, A の計算). 座標 θ に関し、g の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})_{i,j} = \frac{1}{p_3}\begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \frac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

となる。S の成分は

$$\begin{aligned}
S_{111} &= p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3, && (1.22)\\
S_{112} = S_{121} = S_{211} &= -p_1p_2 + 2p_1^2p_2, && (1.23)\\
S_{122} = S_{212} = S_{221} &= -p_1p_2 + 2p_1p_2^2, && (1.24)\\
S_{222} &= p_2 - 3p_2^2 + 2p_2^3 && (1.25)
\end{aligned}$$

となる。A の成分は

$$A_{11}{}^1 = 1 - 2p_1, \qquad A_{11}{}^2 = 0 \tag{1.26}$$
$$A_{12}{}^1 = A_{21}{}^1 = -p_2, \qquad A_{12}{}^2 = A_{21}{}^2 = -p_1 \tag{1.27}$$
$$A_{22}{}^1 = 0, \qquad A_{22}{}^2 = 1 - 2p_2 \tag{1.28}$$

となる。

証明 g の行列表示は命題 1.4 よりわかる。その逆行列は直接計算よりわかる。S の成分は命題 1.5 よりわかる。A の成分は直接計算よりわかる。 □

命題 1.7 ($n = 3$ での測地線方程式). 各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、座標 θ に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\ddot{\theta}^1 = -\frac{1-\alpha}{2}\left((1-2p_1)\dot{\theta}^{1^2} - 2p_2\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\right) \tag{1.29}$$
$$\ddot{\theta}^2 = -\frac{1-\alpha}{2}\left(-2p_1\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2 + (1-2p_2)\dot{\theta}^{2^2}\right) \tag{1.30}$$

となる (p_1, p_2 は θ^1, θ^2 の関数であることに注意)。とくに $\alpha = 1$ のとき

$$\ddot{\theta}^1 = 0, \quad \ddot{\theta}^2 = 0 \tag{1.31}$$

である。

証明 測地線の方程式

$$\ddot{\theta}^k = -\Gamma_{ij}^k\dot{\theta}^i\dot{\theta}^j \tag{1.32}$$

に、前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.11 の等式 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} = \dfrac{1-\alpha}{2}A_{ij}{}^k$ を代入して得られる。 □

$\alpha \neq 1$ の場合に上の測地線方程式を解くのは難しい (ように思う)。

2 具体例: 正規分布族

本節では、正規分布族について、α-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

設定 2.1 (正規分布族). $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\lambda(dx) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\right\} \tag{2.1}$$

とおく。

命題 2.2 (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認).

(1) (V, T, μ) を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$V = \mathbb{R}^2, \tag{2.2}$$

$$T\colon \mathcal{X} \to V, \quad x \mapsto {}^t(x, x^2), \tag{2.3}$$

$$\mu = \lambda \quad (\text{Lebesgue 測度}). \tag{2.4}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi\colon \widetilde{\Theta} \to \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = -\dfrac{(\theta^1)^2}{8\theta^2} - \dfrac{1}{2}\log(-\theta^2) + \dfrac{1}{2}\log\pi$ となる。

(3) 写像 $P \coloneqq P_{(V,T,\mu)}\colon \widetilde{\Theta} \to \mathcal{P}$ は次をみたす:

$$P(\theta) = \exp\left(\theta^1 x + \theta^2 x^2 - \psi(\theta)\right)\lambda(dx) \tag{2.5}$$

(4) 次の写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は P の逆写像である:

$$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta, \quad p \mapsto \left(\frac{E_p[x]}{\operatorname{Var}_p[x]}, -\frac{1}{2\operatorname{Var}_p[x]}\right) \tag{2.6}$$

(5) $\Theta = \widetilde{\Theta} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ が成り立つ。

(6) (V, T, μ) は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

証明 (1) 実現であることはよい。

(2) 直接計算よりわかる。

(3) $P_{(V,T,\mu)}$ の定義よりわかる。

(4) $(\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ と $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ の対応に注意すれば直接計算よりわかる。

(5) $\theta^2 \geq 0$ だと $\exp\left(\theta^1 x + \theta^2 x^2 - \psi(\theta)\right)$ は積分可能でないから $\Theta \subset \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。逆に θ の定義より明らかに $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \subset \Theta$ である。したがって $\Theta = \widetilde{\Theta} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。

(6) 最小次元実現の特徴づけの条件 A(3) と条件 B が成り立つことから、最小次元実現であることがわかる。 □

命題 2.3. Fisher 計量 g について

(1) 座標 (θ^1, θ^2) に関する g の成分は

$$g_{ij} = \left(-\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2\right)d\theta^1 + \left(\frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^1 + \left(\frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3}\right)d\theta^2\right)d\theta^2 \tag{2.7}$$

である。

(2) 座標 (μ, σ) に関する g の成分は

$$g_{ij} = \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \tag{2.8}$$

である。

証明 座標 (θ^1, θ^2) と座標 (μ, σ) の間の座標変換は $\theta^1 = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$ および $\mu = -\dfrac{\theta^1}{2\theta^2}$, $\sigma = \sqrt{-\dfrac{1}{2\theta^2}}$ である。

$$d\mu = -\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2, \tag{2.9}$$

$$d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-3/2}d\theta^2, \tag{2.10}$$

$$d\theta^1 = \frac{1}{\sigma^2}d\mu - \frac{2\mu}{\sigma^3}d\sigma \tag{2.11}$$

$$d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^3}d\sigma \tag{2.12}$$

よって

$$(d\theta^1)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(d\mu)^2 - \frac{\mu}{\sigma^5}d\mu d\sigma + \frac{4\mu^2}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \tag{2.13}$$

$$d\theta^1 d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^5}d\mu d\sigma - \frac{2\mu}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \tag{2.14}$$

$$(d\theta^2)^2 = \frac{1}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \tag{2.15}$$

である。したがって

$$Dd\mu = \frac{1}{(\theta^2)^2}d\theta^1 d\theta^2 - \frac{\theta^1}{(\theta^2)^3}(d\theta^2)^2 \tag{2.16}$$

$$= \frac{4}{\sigma}d\mu d\sigma, \tag{2.17}$$

$$Dd\sigma = \frac{3}{4\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-5/2}(d\theta^2)^2 \tag{2.18}$$

$$= \frac{3}{\sigma}(d\sigma)^2 \tag{2.19}$$

である。よって

$$d\psi = \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma \tag{2.20}$$

$$\mathrm{Hess}\,\psi = Dd\psi \tag{2.21}$$

$$= d\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)d\mu + \frac{\mu}{\sigma^2}Dd\mu + d\left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)Dd\sigma \tag{2.22}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \tag{2.23}$$

である。座標変換により (θ^1, θ^2) に関する $\mathrm{Hess}\,\psi$ の成分も得られる。 □

命題 2.4 (AC テンソルの成分). 座標 (μ, σ) に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{111} = 0 \tag{2.24}$$

$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = \frac{2}{\sigma^3} \tag{2.25}$$

$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = 0 \tag{2.26}$$

$$S_{222} = \frac{8}{\sigma^3} \tag{2.27}$$

である。座標 (μ, σ) に関する A の成分は

$$A_{11}{}^1 = 0, \qquad A_{11}{}^2 = \frac{1}{\sigma}, \tag{2.28}$$

$$A_{12}{}^1 = A_{21}{}^1 = \frac{2}{\sigma}, \qquad A_{12}{}^2 = A_{21}{}^2 = 0, \tag{2.29}$$

$$A_{22}{}^1 = 0, \qquad A_{22}{}^2 = \frac{4}{\sigma} \tag{2.30}$$

である。

証明

$$DD\psi = D\left(\frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2\right) \tag{2.31}$$

$$= -\frac{2}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{1}{\sigma^2}D(d\mu)^2 - \frac{4}{\sigma^3}(d\sigma)^3 + \frac{2}{\sigma^2}D(d\sigma)^2 \tag{2.32}$$

ここで

$$D(d\mu)^2 = 2d\mu Dd\mu = \frac{8}{\sigma}(d\mu)^2 d\sigma \tag{2.33}$$

$$D(d\sigma)^2 = 2d\sigma Dd\sigma = \frac{6}{\sigma}(d\sigma)^3 \tag{2.34}$$

だから

$$DDd\psi = \frac{6}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{8}{\sigma^3}(d\sigma)^3 \tag{2.35}$$

である。これより命題の主張の式が得られる。A の成分は直接計算より得られる。 □

命題 2.5 (接続係数).

(1) 座標 (μ, σ) に関する Γ^g の成分は

$$\Gamma^{g}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{g}{}^1_{12} = \Gamma^{g}{}^1_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{g}{}^1_{22} = 0, \tag{2.36}$$

$$\Gamma^{g}{}^2_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{g}{}^2_{12} = \Gamma^{g}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{g}{}^2_{22} = -\frac{1}{\sigma} \tag{2.37}$$

である。

(2) 座標 (μ, σ) に関する $\Gamma^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ の成分は

$$\Gamma^{(\alpha)}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{12} = \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{21} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{22} = 0, \tag{2.38}$$

$$\Gamma^{(\alpha)}{}^2_{11} = \frac{1-\alpha}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{12} = \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{22} = -\frac{1+2\alpha}{\sigma} \tag{2.39}$$

である。

証明 Γ^g は $\Gamma^{g}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$ を直接計算することで得られる。$\Gamma^{(\alpha)}$ は $\Gamma^{(\alpha)}{}^k_{ij} = \Gamma^{g}{}^k_{ij} - \frac{\alpha}{2}A_{ij}{}^k$ より得られる。 □

命題 2.6 (測地線方程式). (μ, σ) 座標に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \dfrac{2(1+\alpha)}{\sigma}\dot{\mu}\dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \dfrac{1-\alpha}{2\sigma}\dot{\mu}^2 - \dfrac{1+2\alpha}{\sigma}\dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

である。とくに $\alpha = 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \dfrac{2}{\sigma}\dot{\mu}\dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \dfrac{1}{2\sigma}\dot{\mu}^2 - \dfrac{1}{\sigma}\dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

である。

証明 測地線の方程式「$\ddot{x}^k = -\Gamma^k{}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$」に接続係数を代入して得られる。 □

事実 2.7. $\mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ とし、$\breve{g}$ を $\mathbb{H}$ 上の双曲計量とする。このとき、写像 $f : \mathbb{H} \to \mathcal{P}$, $(x, y) \to (x, \sqrt{2}y)$ は $(\mathbb{H}, \breve{g})$ から $(\mathcal{P}, g)$ への等長同型写像である。 □

事実 2.8. 局所等長同型写像は測地線を保つ。 □

事実 2.9. $\mathbb{H}$ の測地線は、x 軸上に中心を持つ円弧または y 軸に平行な直線である。 □

命題 2.10. $\mathbb{H}$ の測地線は、長軸が x 軸に重なる 長軸 : 短軸 = 2 : 1 の楕円または y 軸に平行な直線である。

今後の予定

- [TODO]

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[BN78] O. E. Barndorff-Nielsen, **Information and exponential families: In statistical theory**, Wiley, 1978.

A 付録

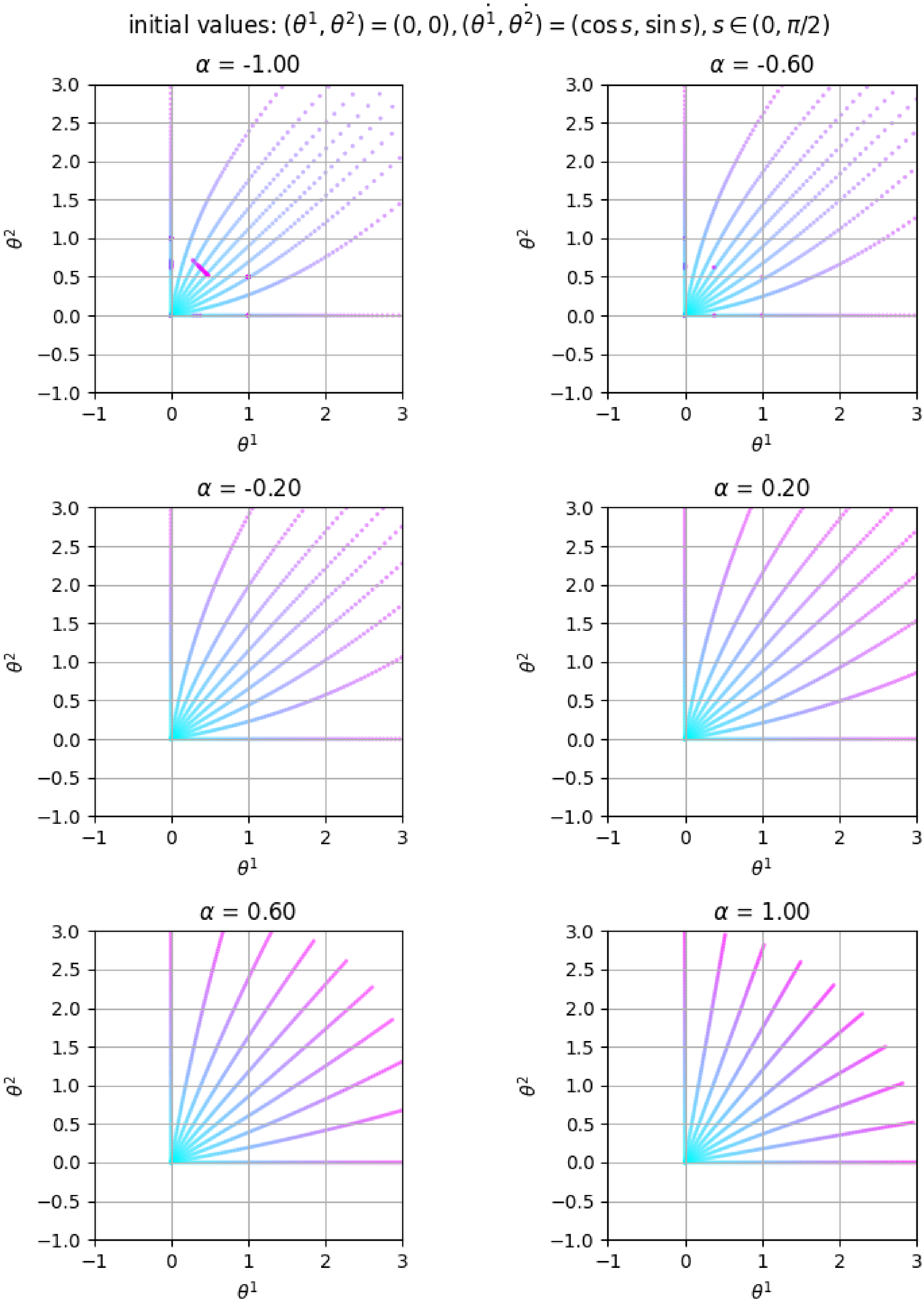

図 1　α を変化させたときの ∇^α-測地線の様子