振り返りと導入

前回は双対平坦構造に対して canonical ダイバージェンスとシンプレクティック構造を定義した。本稿では次のことを行う:

- 双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造の性質を調べる。
- 接束/余接束上の関数の Legendre 変換を定義する。
- 双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造と Legendre 変換の関係を調べる。

なおシンプレクティック構造の話題は [野 20] をベースにしている。

1 双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造

以下、M を多様体、(g, ∇, ∇^*) を M 上の双対平坦構造とする。また、命題-定義 A.15 で canonical ダイバージェンスが定義されることは一旦認めることにし、$D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R},\ \Delta_M \subset \mathcal{U} \overset{\text{open}}{\subset} M \times M$ を (g, ∇, ∇^*) の canonical ダイバージェンスとする。

命題-定義 1.1 (双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造)**.** $\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック形式とする。写像 $d_1 D\colon \mathcal{U} \to T^\vee M$ を第 1 成分に関する微分、すなわち $d_1 D := D(\frac{\partial}{\partial x^i} \|)\, dx^i$ で定め、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ を $\omega := (d_1 D)^* \omega_0$ で定める。このとき次が成り立つ:

(1) x を M の局所座標とし、記号の濫用で $\mathcal{U}$ の局所座標 (x, x^*) を $x(p,q) := x(p),\ x^*(p,q) := x(q)$ で定めると、座標 (x, x^*) に関する ω の成分表示は

$$\omega = D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^j})\, dx^i \wedge dx^{*j} \tag{1.1}$$

となる。

(2) ω は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。

ω を双対平坦構造 (g, ∇, ∇^*) に付随する**シンプレクティック構造 (symplectic structure)** と呼ぶ。

証明 (1) x を M の局所座標とし、$\mathcal{U}$ の局所座標 (x, x^*) を $x(p,q) := x(p),\ x^*(p,q) := x(q)$ で定める。x により定まる $T^\vee M$ の自然な局所座標を $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ とおけば

$$\begin{aligned}
\omega &= (d_1 D)^* \omega_0 && (1.2)\\
&= (d_1 D)^* (dx^i \wedge d\xi_i) && (1.3)\\
&= d(x^i \circ d_1 D) \wedge d(\xi_i \circ d_1 D) && (1.4)\\
&= dx^i \wedge \Big(D(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \|)\, dx^j + D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^j})\, dx^{*j} \Big) && (1.5)\\
&= D(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \| \tfrac{\partial}{\partial x^j})\, dx^i \wedge dx^{*j} && (1.6)
\end{aligned}$$

を得る。

(2) $d\omega = 0$ であることと ω が非退化であることを示せばよい。$d\omega = 0$ は $d\omega = (d_1 D)^* d\omega_0 = 0$ より従う。ω が非退化であることを示す。(U, θ, η) を g-凸な双対アファインチャートとすると (1) より

$$\begin{aligned}
\omega &= D(\partial_i \| \partial_j)\, d\theta^i \wedge d\theta^{*j} && (1.7)\\
&= -g_{ij}(p)\, d\theta^i \wedge d\theta^{*j} && (1.8)
\end{aligned}$$

を得る。したがって $\mathcal{U}$ の局所座標 (θ, θ^*) に関する ω の行列表示は $\begin{bmatrix} O & (-g_{ij}(p))_{ij} \\ (g_{ij}(p))_{ij} & O \end{bmatrix}$ となる。g の非退化性より ω は非退化である。 □

命題 1.2 (ω の成分表示). ω を (g, ∇, ∇^*) に付随するシンプレクティック構造とする。このとき、g-凸な任意の双対アファインチャート (U, θ, η) に対し、ω は次の成分表示をもつ:

$$\omega = -g_{ij}\, d\theta^i \wedge d\theta^{*j} = -d\eta_i \wedge d\theta^{*i} = -g_{ij} g^{*jk}\, d\theta^i \wedge d\eta^*_k = -g^{*ij}\, d\eta_i \wedge d\eta^*_j \tag{1.9}$$

ただし記号の濫用で $g_{ij}, g^{*ij} \colon U \times U \to \mathbb{R}$ は $g_{ij}(p,q) \coloneqq g_{ij}(p),\ g^{*ij}(p,q) \coloneqq g^{ij}(q)$ を表す。

注意 1.3. 任意の双対アファインチャート (U, θ, η) に対しては成り立つとは限らない。

証明　一番左の等号は命題-定義 1.1 の証明 (2) の中で示した。残りの等号は (θ, η) が双対アファイン座標であることから従う。 □

2　接束/余接束上の関数の Legendre 変換

以下、M を多様体、$E \coloneqq TM$、$W \overset{\text{open}}{\subset} E$ とし、$L \colon W \to \mathbb{R}$ を C^∞ 関数とする。以下では $E = TM$ の場合を考えるが、$E = T^\vee M$ の場合も同様である。

定義 2.1 (fiber derivative). 写像 $\mathbb{F}L \colon W \to E^\vee$ を L のファイバー方向の微分、すなわち

$$\langle \mathbb{F}L(x,v), w \rangle \coloneqq \frac{d}{dt} L(x, v + tw)\Big|_{t=0} \qquad (x,v) \in W,\ w \in E_x \tag{2.1}$$

で定める。$\mathbb{F}L$ を L の **fiber derivative** という。

注意 2.2. $\mathbb{F}L$ はファイバーごとに線型とは限らない。

定義 2.3 (接束/余接束上の関数の Legendre 変換). $\mathbb{F}L \colon W \to E^\vee$ が像への微分同相であるとき、$\mathbb{F}L$ を L による **Legendre 変換** と呼ぶことがある。また、$W' \coloneqq \mathbb{F}L(W) \subset E^\vee$ とおき、

$$H \colon W' \to \mathbb{R}, \qquad (x, \xi) \mapsto \langle \xi, v \rangle - L(x,v), \qquad (x,v) \coloneqq (\mathbb{F}L)^{-1}(x,\xi) \in W \tag{2.2}$$

を L の **Legendre 変換** と呼ぶ。

命題 2.4 (凸関数としての Legendre 変換との関係). 各 $x \in M$ に対し $W_x \subset E_x$ が凸集合で、$L|_{W_x} \colon W_x \to \mathbb{R}$ が $\mathrm{Hess}(L|_{W_x}) > 0$ をみたすとする (とくに $L|_{W_x}$ は凸関数となる)。このとき、$\mathbb{F}L$ は像への微分同相であり、H はファイバーごとに $L|_{W_x}$ の凸関数としての Legendre 変換である。

証明 H がファイバーごとに $L|_{W_x}$ の凸関数としての Legendre 変換であることは H の定義から明らか。あとは $\mathbb{F}L$ が像への微分同相であることを示せばよい。そのためには $\mathbb{F}L$ が単射かつ局所微分同相であることを示せばよい。$\mathbb{F}L$ が単射であることは、$\mathbb{F}L$ がファイバーを保つことと、各 $L|_{W_x}$ が凸ゆえに $\mathbb{F}L|_{W_x}$ が単射となることより従う。また M の局所座標 x をひとつ選んで固定し、x により定まる $E, E^\vee$ の自然な局所座標を考えると、これらの座標に関する $\mathbb{F}L$ の座標表示は $(x^i, v^i) \mapsto (x^i, \dfrac{\partial L}{\partial v^i})$ となる。$\mathrm{Hess}(L|_{W_x}) > 0$ よりこの座標表示の Jacobi 行列は正則であるから、$\mathbb{F}L$ は局所微分同相となる。以上より $\mathbb{F}L$ は単射かつ局所微分同相、したがって像への微分同相である。 □

3 双対平坦構造に付随するシンプレクティック構造と Legendre 変換

本節では、2 通りの方法で $\mathcal{U} \subset T^\vee M$ とみなし、それぞれの場合で L, H と ψ, φ との関係性を調べる。以下、簡単のため M が単一の g-凸な双対アファインチャートで覆われる場合を考える。

命題 3.1 (L, H が ψ, φ と"整合"する ver.). M 上の双対アファインチャート (M, θ, η) をひとつ選び固定する。このとき次が成り立つ:

(1) 写像

$$\Phi\colon \mathcal{U} \to T^\vee M, \qquad (p, q) \mapsto (p, \theta^i(q) d\eta_{i_p}) \tag{3.1}$$

は像への微分同相写像となる。また $T^\vee M$ 上の自然なシンプレクティック構造 ω_0 に対し $\Phi^*\omega_0 = -\omega$ が成り立つ。

以下 $W' := \Phi(\mathcal{U})$ とおく。(M, θ, η) の双対ポテンシャル (ψ, φ) を 1 組選び固定する。このとき次が成り立つ:

(2) 関数

$$H\colon W' \to \mathbb{R}, \qquad (p, \theta^i(q) d\eta_i) \mapsto \psi(q) \tag{3.2}$$

の fiber derivative $\mathbb{F}H\colon W' \to T^{\vee\vee}M = TM$ は

$$\mathbb{F}H(p, \theta^i(q) d\eta_i) = (p, \eta_i(q) \tfrac{\partial}{\partial \eta_i}), \qquad (p, q) \in \mathcal{U} \tag{3.3}$$

をみたす。

(3) H の Legendre 変換 $L\colon W \to \mathbb{R}$, $W := \mathbb{F}H(W')$ は

$$L(p, \eta_i(q) \tfrac{\partial}{\partial \eta_i}) + H(p, \theta^i(q) d\eta_i) = \langle \theta(q), \eta(q) \rangle, \qquad (p, q) \in \mathcal{U} \tag{3.4}$$

をみたす。したがって $L(p, \eta_i(q) \frac{\partial}{\partial \eta_i}) = \varphi(q)$ が成り立ち、この意味で L, H は ψ, φ と"整合"する。

証明 (1) 像への微分同相であることは明らか。また、η により定まる $T^\vee M$ 上の自然な座標を (η_i, ξ^i) とおけば

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega_0 &= \Phi^*(d\eta_i \wedge d\xi^i) &(3.5)\\
&= d(\eta_i \circ \Phi) \wedge d(\xi^i \circ \Phi) &(3.6)\\
&= d\eta_i \wedge d\theta^{*i} &(3.7)\\
&= -\omega &(3.8)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(2)

$$\left\langle \mathbb{F}H(p,\theta^i(q)d\eta_i), d\eta_j \right\rangle = \frac{d}{dt}H(p,\theta^i(q)d\eta_i + td\eta_j)\Big|_{t=0} \tag{3.9}$$
$$= \frac{d}{dt}\psi\circ\theta^{-1}\left(\theta^1(q),\dots,\theta^j(q)+t,\dots,\theta^n(q)\right)\Big|_{t=0} \tag{3.10}$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial\theta^j}(q) \tag{3.11}$$
$$= \eta_j(q) \tag{3.12}$$

より従う。

(3) H の Legendre 変換の定義と (2) より

$$L(p,\eta_i(q)\tfrac{\partial}{\partial\eta_i}) = \langle\theta(p),\eta(q)\rangle - H(p,\theta^i(q)d\eta_i) \tag{3.13}$$

が成り立つ。 □

命題 3.2 (L, H が ψ,φ と"整合"しない ver.). 次が成り立つ:

(1) 写像 $d_1D\colon \mathcal{U}\to T^\vee M$ は像へのシンプレクティック同相写像となる。

以下 $W' := d_1D(\mathcal{U})$ とおく。M 上の双対アファインチャート (M,θ,η) をひとつ選び固定し、さらに (M,θ,η) の双対ポテンシャル (ψ,φ) を 1 組選び固定する。このとき次が成り立つ:

(2) 関数

$$H\colon W'\to\mathbb{R},\qquad (p,\xi)\mapsto\psi(q),\qquad q:=\theta^{-1}\left(\theta^i(p)-\left\langle\xi,\tfrac{\partial}{\partial\eta_i}\right\rangle\right)_{i=1}^n \tag{3.14}$$

の fiber derivative $\mathbb{F}H\colon W'\to T^{\vee\vee}M = TM$ は

$$\mathbb{F}H(p,(\theta^i(p)-\theta^i(q))d\eta_i) = (p,\eta_i(q)\tfrac{\partial}{\partial\eta_i}),\qquad (p,q)\in\mathcal{U} \tag{3.15}$$

をみたす。

(3) H の Legendre 変換 $L\colon W\to\mathbb{R}$, $W := \mathbb{F}H(W')$ は

$$L(p,\eta_i(q)\tfrac{\partial}{\partial\eta_i}) + H(p,(\theta^i(p)-\theta^i(q))d\eta_i) = \langle\theta(p)-\theta(q),\eta(q)\rangle,\qquad (p,q)\in\mathcal{U} \tag{3.16}$$

をみたす。

証明 任意の (M,θ,η) に関し $d_1D(p,q) = (p,(\theta^i(p)-\theta^i(q))d\eta_i)$ が成り立つことに注意すれば命題 3.1 の証明と同様。 □

今後の予定

- 概複素構造と概 Kähler 構造
- Hamilton フロー
- モーメント写像

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[MR99] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu, **Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems**, Texts in Applied Mathematics, vol. 17, Springer, New York, NY, 1999 (en).

[Sil08] Ana Cannas da Silva, **Lectures on symplectic geometry**, corr. 2. print ed., Lecture notes in mathematics, no. 1764, Springer-Verlag, 2008.

[植 15] 一石 植田, **数物系のためのシンプレクティック幾何学入門**, 臨時別冊・数理科学, サイエンス社, 2015.

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).

A 付録

1.1 多様体上の構造

定義 A.1 (シンプレクティックベクトル空間). $2n$ 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 V と V 上の非退化交代形式 $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ の組 (V, ω) を**シンプレクティックベクトル空間 (symplectic vector space)** という。

定義 A.2 (シンプレクティック形式). M を $2n$ 次元多様体とする。$\omega \in \Omega^2(M)$ が M 上の**シンプレクティック形式 (symplectic form)** であるとは、ω が閉形式かつ各点 $x \in M$ で $(T_x M, \omega_x)$ がシンプレクティックベクトル空間であることをいう。

例 A.3 (標準シンプレクティック形式). $\mathbb{R}^{2n}$ の標準的な座標 $(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$ に対し $\omega_0 := dx^i \wedge dy_i \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック構造である。ω_0 を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の**標準シンプレクティック形式 (standard symplectic form)** という。

例 A.4 (余接束の自然シンプレクティック形式). M を n 次元多様体とする。余接束 $\pi\colon T^\vee M \to M$ 上の 1-形式 $\theta \in \Omega^1(T^\vee M)$ を

$$\theta_{(q,p)}(v) := p(d\pi_{(q,p)}(v)) \tag{A.1}$$

で定め、これを**トートロジカル 1-形式 (tautological 1-form)** と呼ぶ。このとき $\omega_0 := -d\theta \in \Omega^2(T^\vee M)$ は $T^\vee M$ 上のシンプレクティック構造となり、これを $T^\vee M$ 上の**自然シンプレクティック形式 (canonical symplectic form)** と呼ぶ。

命題 A.5 (自然シンプレクティック形式の成分表示). M を n 次元多様体、$x = (x^i)_i$ を M の局所座標とする。x により定まる $T^\vee M$ の局所座標を $(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ とおくと、これに関する自然シンプレクティック形式 ω_0 の成分表示は

$$\omega_0 = dx^i \wedge d\xi_i \tag{A.2}$$

となる。

証明 $\pi(q, p) = q$ ゆえ $d\pi^*(dx^i) = dx^i$ であることに注意すると、トートロジカル 1-形式の成分表示

$$\theta_{(q,p)} = d\pi^*_{(q,p)}(\xi_i dx^i) = \xi_i dx^i \tag{A.3}$$

より命題の等式が従う。 □

定義 A.6 (概複素構造). [TODO]

定義 A.7 (概 Kähler 構造). [TODO]

1.2 canonical ダイバージェンスの定義域

定義 A.8 (∇-凸集合)**.** 部分集合 $S \subset M$ が **∇-凸 (∇-convex)** であるとは、任意の $p, q \in S$ に対し、p から q への S 内の ∇-測地線がただひとつ存在することをいう。

定義 A.9 (g-凸集合)**.** 部分集合 $S \subset M$ が **g-凸 (g-convex)** であるとは、任意の $p, q \in S$ に対し、p から q への M 内の ∇^g-測地線で最短なものがただひとつ存在し、かつそれが S 内に含まれることをいう。

定義 A.10 (canonical ダイバージェンスの定義域)**.**

$$\mathcal{U} := \left\{ (p,q) \in M \times M \;\middle|\; \begin{array}{c} p, q \text{ を含む } g\text{-凸開集合を含む、} \\ \nabla\text{-凸または } \nabla^*\text{-凸な双対アファインチャート } (U, \theta, \eta) \text{ が存在する} \end{array} \right\} \tag{A.4}$$

命題 A.11. 次は同値である:

(1) U は ∇-凸であり、U 上の双対アファイン座標が存在する。
(2) U は ∇-凸であり、U 上の ∇-アファイン座標が存在する。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) 明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1) ∇-凸性より $\eta := (\eta_i)_i,\ \eta_i := \dfrac{\partial \psi}{\partial \theta^i}$ は U 上単射である。したがって η は U から像への微分同相であり、U 上の座標となる。このとき (θ, η) は U 上の双対アファイン座標となる。さらに $\varphi := \theta^i \eta_i - \psi$ とおけば (ψ, φ) は (U, θ, η) の双対ポテンシャルとなる。 □

注意 A.12. p, q を含む g-凸開集合が存在したとしても、それを含む ∇-凸または ∇^*-凸な双対アファインチャートが存在するとは限らない。たとえば、正規分布族を考え、自然パラメータ空間 (これは上半空間となる) から線分 $\{0\} \times (0, 2)$ を除いた空間を考えると、2 点 $p = (2, 1), q = (-2, 1)$ を含む g-凸開集合が存在する (上半楕円形にとればよい) が、2 点 p, q を結ぶ ∇-測地線も ∇^*-測地線も存在しない (∇-測地線は"水平線"、∇^*-測地線は"下に凸"な曲線) ため、2 点 p, q を含む ∇-凸または ∇^*-凸な双対アファインチャートは存在しない。

補題 A.13 (g-凸開近傍の存在)**.** 各 $p \in M$ に対し、ある $R > 0$ が存在して、任意の $r \in (0, R)$ に対し $B_r(p) \subset M$ は g-凸である。

証明 Riemann 多様体の教科書にある。 □

補題 A.14 ($\mathcal{U}$ の多様体構造)**.** $\mathcal{U}$ は Δ_M を含む $M \times M$ の開集合である。したがって $\mathcal{U}$ には $M \times M$ の開部分多様体の構造が入る。

証明 開集合となることは定義から明らか。また、各 $p_0 \in M$ に対し、p_0 のまわりの双対アファインチャート (U, θ, η) が存在するから、p_0 の ∇-凸開近傍 U' を $U' \subset U$ となるようにとれば、補題より U' は p_0 の g-凸開

近傍を含む。したがって $U' \times U'$ は $M \times M$ における p_0 の近傍であり、$\mathcal{U}$ に含まれる。よって $\mathcal{U}$ は Δ_M を含む。 □

1.3 canonical ダイバージェンス

命題-定義 A.15 (canonical ダイバージェンス). 関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を次のように定める: $(p,q) \in \mathcal{U}$ を固定し、p,q を含む g-凸開集合な双対アファインチャート (U,θ,η) をひとつ選び、その双対ポテンシャル (ψ,φ) を 1 組選ぶ。このとき、点 (p,q) における

$$\psi(q) + \varphi(p) - \langle \theta(q), \eta(p) \rangle \tag{A.5}$$

の値は (U,θ,η) や (ψ,φ) の選び方によらない。この値を $D(p\|q)$ と記す。以上により定まる関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を双対平坦構造 (g,∇,∇^*) の **canonical ダイバージェンス** と呼ぶ。

証明 $(p,q) \in \mathcal{U}$ とし、$(U,\theta,\eta),(U',\theta',\eta')$ をそれぞれ条件をみたす双対アファインチャート、$(\psi,\varphi),(\psi',\varphi')$ をそれぞれの双対ポテンシャルとする。$(p,q) \in \mathcal{U}$ ゆえ p,q を含む g-凸集合が存在するから、p から q への M 内の ∇^g-測地線 γ がただひとつ存在する。ここで U,U' は p,q を含む g-凸開集合を含んでいたから、$U \cap U'$ は γ の像を含む。このとき $U \cap U'$ の連結成分 C であって γ の像を含むものがただ 1 つ存在する。

C の連結性より $\psi'(q) - \psi(q) = (C$ 上の定数$) = \psi'(p) - \psi(p)$ が成り立つ。よって

$$\psi'(q) + \varphi'(p) - \langle \theta'(q), \eta'(p) \rangle = \psi'(q) - \psi'(p) - \langle \theta'(q) - \theta'(p), \eta'(p) \rangle \tag{A.6}$$
$$= \psi(q) - \psi(p) - \langle \theta'(q) - \theta'(p), \eta'(p) \rangle \tag{A.7}$$

が成り立つ。あとは $\langle \theta'(q) - \theta'(p), \eta'(p) \rangle = \langle \theta(q) - \theta(p), \eta(p) \rangle$ を示せばよい。

[TODO] locally const. の言葉で書き直す C の連結性より、組 $(A = (A_i^j)_{i,j}, b) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ であって $\theta'(r) = A\theta(r) + b$ $(\forall r \in C)$ をみたすものがただ 1 組存在する。よって任意の $r \in C$ に対し

$$\eta_i(r) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}(r) \qquad (\because d\psi = \eta_i d\theta^i) \tag{A.8}$$
$$= \frac{\partial \psi'}{\partial \theta^i}(r) \qquad (\because \psi' - \psi \text{ は } C \text{ 上定数}) \tag{A.9}$$
$$= \frac{\partial \theta'^j}{\partial \theta^i}(r) \frac{\partial \psi'}{\partial \theta'^j}(r) \tag{A.10}$$
$$= A_i^j \eta'_j(r) \qquad (\because d\psi' = \eta'_j d\theta'^j) \tag{A.11}$$
$$\therefore \eta(r) = A\eta'(r) \tag{A.12}$$

が成り立つ。さらに任意の $r \in C$ に対し

$$\theta'^i(r) = \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta'_i}(r) \qquad (\because d\varphi' = \theta'^i d\eta'_i) \tag{A.13}$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta'_i}(r) \qquad (\because \varphi' - \varphi \text{ は } C \text{ 上定数}) \tag{A.14}$$
$$= \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta'_i}(r) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j}(r) \tag{A.15}$$
$$= A_j^i \theta^j(r) \qquad (\because d\varphi = \theta^j d\eta_j,\ \eta = A\eta') \tag{A.16}$$
$$\therefore \theta'(r) = A\theta(r) \tag{A.17}$$

が成り立つ。したがって

$$\langle \theta'(q) - \theta'(p), \eta'(p) \rangle = \left\langle A(\theta(q) - \theta(p)), A^{-1}\eta(p) \right\rangle = \langle \theta(q) - \theta(p), \eta(p) \rangle \tag{A.18}$$

が示された。 □

命題 A.16 (canonical ダイバージェンスの性質). (g, ∇^*, ∇) の canonical ダイバージェンスを D^* として

(1) D は C^∞ 関数である。

(2) $D(p\|q) \geq 0$

(3) $D(p\|q) = 0 \iff p = q$

(4) $D(p\|q) = D^*(q\|p)$

証明 (1) 局所的な C^∞ 性を示せばよい。$(p, q) \in \mathcal{U}$ とし、(U, θ, η) を条件をみたす双対アファインチャートとすれば、(p, q) の近傍 $U \times U$ 上で D は C^∞ である。

(2), (3) ψ の ∇-凸性あるいは φ の ∇^*-凸性より従う。

(4) 定義より明らか。 □