

振り返りと導入

今回は、指数型分布族にいくつかの構造を定め、Amari-Chentsov テンソルと α -接続を定義した。本稿では次のことを行う:

- 具体例の計算 (有限集合上の full support な確率分布の族)
- 具体例の計算 (正規分布族)

今回以降、次のように記法を変更する¹⁾。

定義 0.1 (パラメータの空間の記法の変更). 可測空間 X 上の指数型分布族 \mathcal{P} とその実現 (V, T, μ) に対し、

- 自然パラメータ空間 $\Theta_{(V, T, \mu)}$ を $\tilde{\Theta}_{(V, T, \mu)}$ と書くことにし、
- 真パラメータ空間 $\Theta_{(V, T, \mu)}^{\mathcal{P}}$ を $\Theta_{(V, T, \mu)}$ と書くことにする。

文脈から明らかな場合は添字を省略することがある。

1 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族

本節では、有限集合上の full support な確率分布の族について、 α -接続に関する測地線方程式を求めている。

設定 1.1 (有限集合上の full support な確率分布の族). $X := \{1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \delta^i \in \mathcal{P}(X) \mid 0 < p_i < 1 \ (i = 1, \dots, n) \right\} \quad (1.1)$$

とおく。ただし δ^i は 1 点 $i \in X$ での Dirac 測度である。これが X 上の指数型分布族であることは [0425_資料.pdf](#) 例 3.1 で確かめた。

命題 1.2 (最小次元実現の構成および \mathcal{P} が開であることの確認).

(1) (V, T, γ) を次のように定めると、これは \mathcal{P} の実現となる:

$$V := \mathbb{R}^{n-1}, \quad (1.2)$$

$$T: X \rightarrow V, \quad k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \dots, \delta_{(n-1)k}), \quad (1.3)$$

$$\gamma: \text{数え上げ測度} \quad (1.4)$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi: \tilde{\Theta} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = \log \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i \right)$ となる。

(3) 写像 $P := P_{(V, T, \gamma)}: \tilde{\Theta} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は次をみたす:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i) \delta^i + \delta^n \right) \quad (1.5)$$

(4) $\Theta = \tilde{\Theta} = V$ が成り立つ。

1) [BN78] での記法によった。

(5) 次の写像 $\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta$ は P の逆写像である:

$$\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta, \quad \sum_{i=1}^n p_i \delta^i \mapsto \left(\log \frac{p_1}{p_n}, \dots, \log \frac{p_{n-1}}{p_n} \right) \quad (1.6)$$

(6) (V, T, γ) は最小次元実現である。とくに \mathcal{P} は開である。

証明 (1) (V, T, γ) が実現であることは 0425_コメント.pdf 演習問題 0.1 で確かめた。

(2) 対数分配関数の定義より

$$\psi(\theta) = \log \int_X \exp \langle \theta, T(x) \rangle \gamma(dx) \quad (1.7)$$

$$= \log \sum_{i=1}^n \exp \left(\sum_{l=1}^{n-1} \theta^l \delta_{li} \right) \quad (1.8)$$

$$= \log \left(\sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i + 1 \right) \quad (1.9)$$

である。

(3) P の定義 $P(\theta) = \exp(\langle \theta, T(k) \rangle - \psi(\theta)) \gamma(dk)$ を直接計算すれば確かめられる。

(4) 可積分性を考えると明らかに $\tilde{\Theta} = V$ である。また P が (3) のように表せることから $P(\tilde{\Theta}) \subset \mathcal{P}$ がわかる。したがって $V = \tilde{\Theta} \subset P^{-1}(\mathcal{P}) = \Theta$ である。よって $\Theta = \tilde{\Theta} = V$ である。

(5) $P \circ \theta, \theta \circ P$ を直接計算すれば確かめられる。

(6) 最小次元実現の特徴づけを確かめればよい。条件 A(3) が成り立つことは、いま V の任意のアフィン部分空間に対し「 $T(x) \in W$ μ -a.e. x 」と「 $T(x) \in W \forall x$ 」が同値であることから明らか。条件 B が成り立つことは $\Theta = V$ よりわかる。 \square

以降、 \mathcal{P} には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、 \mathcal{P} 上の自然な平坦アフィン接続を ∇ 、Fisher 計量を g とおく。また、 $\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta$ は多様体 \mathcal{P} 上の座標とみなす。

図形的には、 P は \mathbb{R}^{n-1} から \mathbb{R}^n 内の $(n-1)$ -単体 (の内部) への微分同相写像になっている。

注意 1.3 (\mathcal{P} の 2通りの位相と多様体構造). \mathcal{P} 上の位相 (resp. 多様体構造) として、 X 上の符号付き測度全体のなすベクトル空間 $\mathcal{S}(X) \cong \mathbb{R}^n$ の位相部分空間 (resp. 部分多様体) としてのものと、指数型分布族としての自然なものの 2通りを考えられるが、これらは互いに一致する。なぜならば、いずれの位相 (resp. 多様体構造) に関しても写像 $\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta$ は同相 (resp. 微分同相) 写像だからである。

命題 1.4 (Fisher 計量の成分). 座標 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ に関する Fisher 計量 g の成分は

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} p_i - p_i p_j \quad (p \in \mathcal{P}, i, j = 1, \dots, n-1) \quad (1.10)$$

となる。

証明 命題 1.2 の (V, T, γ) に関する Fisher 計量を \tilde{g} とおくと、各点 $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \quad (1.11)$$

$$= (\theta^* \tilde{g})_p \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \quad (1.12)$$

$$= \tilde{g}_{\theta(p)} \left(d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \right), d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \right) \quad (1.13)$$

$$= (\text{Hess } \psi)_{\theta(p)} \left(d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \right), d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) \right) \quad (1.14)$$

$$= (\text{Var}_p[T])(e^i, e^j) \quad (1.15)$$

$$= E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])] \quad (1.16)$$

$$= \sum_{l=1}^n (\delta_{il} - p_i)(\delta_{jl} - p_j)p_l \quad (1.17)$$

$$= \delta_{ij}p_i - p_i p_j \quad (1.18)$$

が成り立つ。 □

命題 1.5 (AC テンソルの成分). 座標 θ に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{ijk} = p_i \delta_{ij} \delta_{jk} - p_i p_k \delta_{ij} - p_i p_j \delta_{jk} - p_j p_k \delta_{ik} + 2p_i p_j p_k \quad (p \in \mathcal{P}, i, j, k = 1, \dots, n-1) \quad (1.19)$$

となる。

証明 前回 (0613_資料.pdf) の命題 1.9 を用いると

$$S_{ijk}(p) = E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])(T^k - E_p[T^k])] \quad (1.20)$$

となるから、命題 1.4 と同様に直接計算して命題の主張の等式が得られる。 □

以降、 $n = 3$ の場合を考える。

命題 1.6 ($n = 3$ での g, S, A の計算). 座標 θ に関し、 g の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})_{i,j} = \frac{1}{p_3} \begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \frac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

となる。 S の成分は

$$S_{111} = p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3, \quad (1.22)$$

$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = -p_1 p_2 + 2p_1^2 p_2, \quad (1.23)$$

$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = -p_1 p_2 + 2p_1 p_2^2, \quad (1.24)$$

$$S_{222} = p_2 - 3p_2^2 + 2p_2^3 \quad (1.25)$$

となる。 A の成分は

$$A_{11}^1 = 1 - 2p_1, \quad A_{11}^2 = 0 \quad (1.26)$$

$$A_{12}^1 = A_{21}^1 = -p_2, \quad A_{12}^2 = A_{21}^2 = -p_1 \quad (1.27)$$

$$A_{22}^1 = 0, \quad A_{22}^2 = 1 - 2p_2 \quad (1.28)$$

となる。

証明 g の行列表示は命題 1.4 よりわかる。その逆行列は直接計算よりわかる。 S の成分は命題 1.5 よりわかる。 A の成分は「 $A_{ij}^k = g^{kl} S_{ijl}$ 」を用いて求める。具体的には以下の行列を直接計算すればわかる:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{22}^1 \\ A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{p_3} \begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \frac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{111} & S_{121} & S_{221} \\ S_{112} & S_{122} & S_{222} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

□

命題 1.7 ($n = 3$ での測地線方程式). 各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、座標 θ に関する $\nabla^{(\alpha)}$ -測地線の方程式は

$$\ddot{\theta}^1 = -\frac{1-\alpha}{2} \left(\left(1 - \frac{2 \exp \theta^1}{1 + \exp \theta^1 + \exp \theta^2} \right) \dot{\theta}^1{}^2 - \frac{2 \exp \theta^2}{1 + \exp \theta^1 + \exp \theta^2} \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 \right) \quad (1.30)$$

$$\ddot{\theta}^2 = -\frac{1-\alpha}{2} \left(-\frac{2 \exp \theta^1}{1 + \exp \theta^1 + \exp \theta^2} \dot{\theta}^1 \dot{\theta}^2 + \left(1 - \frac{2 \exp \theta^2}{1 + \exp \theta^1 + \exp \theta^2} \right) \dot{\theta}^2{}^2 \right) \quad (1.31)$$

となる。とくに $\alpha = 1$ のとき

$$\ddot{\theta}^1 = 0, \quad \ddot{\theta}^2 = 0 \quad (1.32)$$

である。

証明 測地線の方程式

$$\ddot{\theta}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{\theta}^i \dot{\theta}^j \quad (1.33)$$

に、前回 (0613_資料.pdf) の命題 1.11 の等式 $\Gamma_{ij}^{(\alpha)k} = \frac{1-\alpha}{2} A_{ij}^k$ を代入して得られる。 □

$\alpha \neq 1$ の場合に上の測地線方程式を解くのは難しいように思う。数値計算の結果を資料末尾の付録に載せた。

2 具体例: 正規分布族

本節では、正規分布族について、 α -接続に関する測地線方程式を求めてみる。

設定 2.1 (正規分布族). $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \lambda(dx) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mid (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \right\} \quad (2.1)$$

とおく。これが \mathcal{X} 上の指数型分布族であることは 0425_資料.pdf 例 3.2 で確かめた。

以降、次の事実をしばしば用いる:

事実 2.2. 次の 2 つの写像は互いに逆な C^∞ 写像である:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}, \quad (\mu, \sigma) \mapsto \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (\theta^1, \theta^2) \mapsto \left(-\frac{\theta^1}{2\theta^2}, \sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}} \right) \quad (2.3)$$

□

命題 2.3 (最小次元実現の構成および \mathcal{P} が開であることの確認).

(1) (V, T, λ) を次のように定めると、これは \mathcal{P} の実現となる:

$$V = \mathbb{R}^2, \quad (2.4)$$

$$T: \mathcal{X} \rightarrow V, \quad x \mapsto {}^t(x, x^2), \quad (2.5)$$

$$\lambda: \text{Lebesgue 測度}. \quad (2.6)$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi: \tilde{\Theta} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = -\frac{(\theta^1)^2}{4\theta^2} - \frac{1}{2} \log(-\theta^2) + \frac{1}{2} \log \pi$ となる。

(3) $\Theta = \tilde{\Theta} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ が成り立つ。

(4) 次の写像 $\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta$ は $P := P_{(V, T, \lambda)}$ の逆写像である:

$$\theta: \mathcal{P} \rightarrow \Theta, \quad p \mapsto \left(\frac{E_p[x]}{\text{Var}_p[x]}, -\frac{1}{2 \text{Var}_p[x]} \right) \quad (2.7)$$

(5) (V, T, λ) は最小次元実現である。とくに \mathcal{P} は開である。

証明 (1) 実現であることは [0425_資料.pdf](#) 例 3.2 で確かめた。

(2) 対数分配関数の定義から直接計算よりわかる。

(3) $\theta^2 \geq 0$ だと $\exp(\theta^1 x + \theta^2 x^2 - \psi(\theta))$ は積分可能でないから $\Theta \subset \tilde{\Theta} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。逆に写像 $P := P_{(V, T, \lambda)}$ について、すべての $p \in P(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0})$ は $p(dx) = \exp(\theta^1 x + \theta^2 x^2 - \psi(\theta)) \lambda(dx)$ ($\exists (\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$) と表せるから、 $(\mu, \sigma) := \left(-\frac{\theta^1}{2\theta^2}, \sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}} \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ とおけば $p(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \lambda(dx)$ と表せることになり $p \in \mathcal{P}$ がわかる。したがって $P(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}) \subset \mathcal{P}$ をみたすから $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \subset P^{-1}(\mathcal{P}) = \Theta$ である。よって $\Theta = \tilde{\Theta} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。

(4) $(\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ と $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ の対応に注意すれば直接計算よりわかる。

(5) 最小次元実現の特徴づけの条件 A(3) と条件 B が成り立つことから、最小次元実現であることがわかる。 □

命題 2.4. Fisher 計量 g について

(1) 座標 (θ^1, θ^2) に関する g の成分は

$$g_{ij} = \left(-\frac{1}{2\theta^2} d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2} d\theta^2 \right) d\theta^1 + \left(\frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2} d\theta^1 + \left(\frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3} \right) d\theta^2 \right) d\theta^2 \quad (2.8)$$

である。

(2) 座標 (μ, σ) に関する g の成分は

$$g_{ij} = \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \quad (2.9)$$

である。

証明 微分同相写像 θ により g を Θ 上のテンソル場とみなして計算する。座標 (θ^1, θ^2) と座標 (μ, σ) の間の座標変換が $\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ および $\mu = -\frac{\theta^1}{2\theta^2}$, $\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}$ であることに注意すると

$$d\mu = -\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2, \quad d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-3/2}d\theta^2, \quad (2.10)$$

$$d\theta^1 = \frac{1}{\sigma^2}d\mu - \frac{2\mu}{\sigma^3}d\sigma, \quad d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^3}d\sigma, \quad (2.11)$$

さらに

$$(d\theta^1)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(d\mu)^2 - \frac{\mu}{\sigma^5}d\mu d\sigma + \frac{4\mu^2}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \quad (2.12)$$

$$d\theta^1 d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^5}d\mu d\sigma - \frac{2\mu}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \quad (2.13)$$

$$(d\theta^2)^2 = \frac{1}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \quad (2.14)$$

である。したがって、 Θ 上の標準的な平坦アファイン接続を D とおくと

$$Dd\mu = \frac{1}{(\theta^2)^2}d\theta^1 d\theta^2 - \frac{\theta^1}{(\theta^2)^3}(d\theta^2)^2 \quad (2.15)$$

$$= \frac{4}{\sigma}d\mu d\sigma, \quad (2.16)$$

$$Dd\sigma = \frac{3}{4\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-5/2}(d\theta^2)^2 \quad (2.17)$$

$$= \frac{3}{\sigma}(d\sigma)^2 \quad (2.18)$$

である。よって

$$d\psi = \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma, \quad (2.19)$$

$$\text{Hess } \psi = Dd\psi \quad (2.20)$$

$$= d\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)d\mu + \frac{\mu}{\sigma^2}Dd\mu + d\left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)Dd\sigma \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \quad (2.22)$$

である。座標変換により (θ^1, θ^2) に関する $\text{Hess } \psi$ の成分も得られる。 \square

命題 2.5 (AC テンソルの成分). 座標 (μ, σ) に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{111} = 0 \quad (2.23)$$

$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = \frac{2}{\sigma^3} \quad (2.24)$$

$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = 0 \quad (2.25)$$

$$S_{222} = \frac{8}{\sigma^3} \quad (2.26)$$

である。座標 (μ, σ) に関する A の成分は

$$A_{11}^1 = 0, \quad A_{11}^2 = \frac{1}{\sigma}, \quad (2.27)$$

$$A_{12}^1 = A_{21}^1 = \frac{2}{\sigma}, \quad A_{12}^2 = A_{21}^2 = 0, \quad (2.28)$$

$$A_{22}^1 = 0, \quad A_{22}^2 = \frac{4}{\sigma} \quad (2.29)$$

である。

証明 微分同相写像 θ により S, A を Θ 上のテンソル場とみなして計算する。 Θ 上の標準的な平坦アファイン接続を D とおくと

$$DDd\psi = D \left(\frac{1}{\sigma^2} (d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2} (d\sigma)^2 \right) \quad (2.30)$$

$$= -\frac{2}{\sigma^3} (d\mu)^2 d\sigma + \frac{1}{\sigma^2} D(d\mu)^2 - \frac{4}{\sigma^3} (d\sigma)^3 + \frac{2}{\sigma^2} D(d\sigma)^2 \quad (2.31)$$

ここで

$$D(d\mu)^2 = 2d\mu Dd\mu = \frac{8}{\sigma} (d\mu)^2 d\sigma, \quad (2.32)$$

$$D(d\sigma)^2 = 2d\sigma Dd\sigma = \frac{6}{\sigma} (d\sigma)^3 \quad (2.33)$$

だから

$$DDd\psi = \frac{6}{\sigma^3} (d\mu)^2 d\sigma + \frac{8}{\sigma^3} (d\sigma)^3 \quad (2.34)$$

である。これより命題の主張の式が得られる。 A の成分は直接計算より得られる。 \square

命題 2.6 (接続係数).

(1) 座標 (μ, σ) に関する Γ^g の成分は

$$\Gamma_{11}^{g1} = 0, \quad \Gamma_{12}^{g1} = \Gamma_{21}^{g1} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \Gamma_{22}^{g1} = 0, \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{11}^{g2} = \frac{1}{2\sigma}, \quad \Gamma_{12}^{g2} = \Gamma_{21}^{g2} = 0, \quad \Gamma_{22}^{g2} = -\frac{1}{\sigma} \quad (2.36)$$

である。

(2) 座標 (μ, σ) に関する $\Gamma^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) の成分は

$$\Gamma_{11}^{(\alpha)1} = 0, \quad \Gamma_{12}^{(\alpha)1} = \Gamma_{21}^{(\alpha)1} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}, \quad \Gamma_{22}^{(\alpha)1} = 0, \quad (2.37)$$

$$\Gamma_{11}^{(\alpha)2} = \frac{1-\alpha}{2\sigma}, \quad \Gamma_{12}^{(\alpha)2} = \Gamma_{21}^{(\alpha)2} = 0, \quad \Gamma_{22}^{(\alpha)2} = -\frac{1+2\alpha}{\sigma} \quad (2.38)$$

である。

証明 Γ^g は $\Gamma_{ij}^g = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$ を直接計算することで得られる。 $\Gamma^{(\alpha)}$ は $\Gamma_{ij}^{(\alpha)} = \Gamma_{ij}^g - \frac{\alpha}{2}A_{ij}^k$ より得られる。□

命題 2.7 (測地線方程式). (μ, σ) 座標に関する $\nabla^{(\alpha)}$ -測地線の方程式は

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \frac{2(1+\alpha)}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \frac{1-\alpha}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1+2\alpha}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

である。とくに $\alpha = 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

である。

証明 測地線の方程式「 $\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$ 」に接続係数を代入して得られる。□

命題 2.8. ∇^g -測地線の像は、楕円

$$\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = r^2 \quad (x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}) \quad (2.41)$$

の一部または y 軸に平行な直線の一部である。

証明 測地線の方程式

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \quad (2.42)$$

$$\ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \quad (2.43)$$

を変形していく。

$\dot{\mu} = 0$ の場合は $\mu = \text{const.}$ ゆえに測地線は y 軸に平行な直線の一部である。

以下、 $\dot{\mu} \neq 0$ の場合を考える。(2.42) の両辺を $\dot{\mu}$ で割って

$$\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} - 2\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0 \quad (2.44)$$

これより $\log \dot{\mu} = 2 \log \sigma + \text{const.}$ したがって

$$\dot{\mu} = k\sigma^2 \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (2.45)$$

である。一方、 ∇^g は g の Levi-Civita 接続であるから、測地線の速度ベクトルの g に関する大きさは一定、すなわち

$$\frac{\dot{\mu}^2 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = r^2 \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (2.46)$$

である。(2.46) に (2.45) を代入して

$$\frac{k^2\sigma^4 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = a^2 \quad (2.47)$$

$$\dot{\sigma} = \pm \sigma \sqrt{\frac{a^2 - k^2 \sigma^2}{2}} \quad (2.48)$$

を得る。これと (2.45) より

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\sigma}} = \frac{k\sigma^2}{\pm \sigma \sqrt{\frac{a^2 - k^2 \sigma^2}{2}}} \quad (2.49)$$

$$= \mp \frac{\sqrt{2}|a|}{k} \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2 \sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{a}\right)^2 \sigma^2}} \quad (2.50)$$

$$\therefore \mu = \mp \frac{\sqrt{2}|a|}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{a}\right)^2 \sigma^2} + \mu_0 \quad (\mu_0 \in \mathbb{R}) \quad (2.51)$$

を得る。よって

$$(\mu - \mu_0)^2 = \frac{2a^2}{k^2} - 2\sigma^2 \quad (2.52)$$

$r := \frac{a}{k}$ とおいて整理すれば

$$\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sigma^2 = r^2 \quad (2.53)$$

が得られる。

□

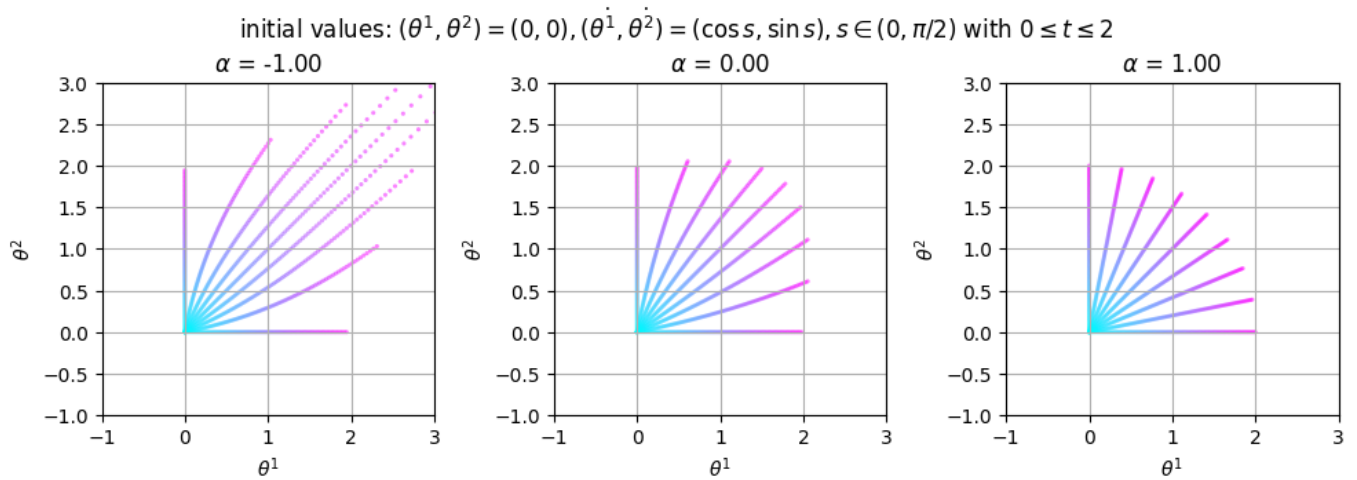
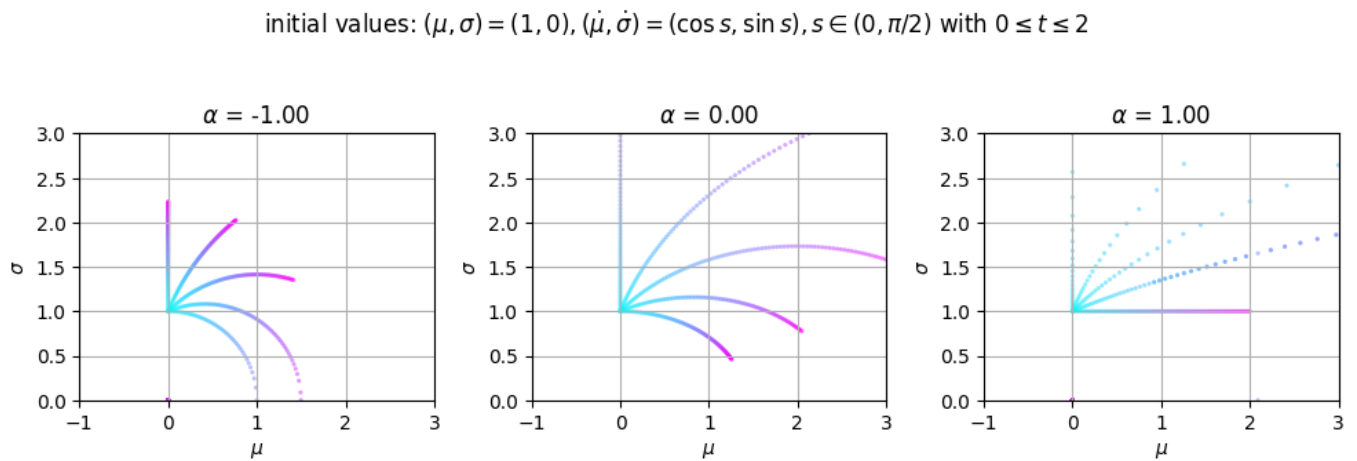
今後の予定

- 未定 (ダイバージェンス, 期待値パラメータ, etc.)

参考文献

- [Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).
- [BN78] O. E. Barndorff-Nielsen, **Information and exponential families: In statistical theory**, Wiley, 1978.

A 付録

図1 (有限集合上の確率分布族) α を変化させたときの $\nabla^{(\alpha)}$ -測地線の様子図2 (正規分布族) α を変化させたときの $\nabla^{(\alpha)}$ -測地線の様子