1 A

2021 A1. V の基底 $1, x, x^2, x^3$ の双対基底を $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in V^*$ とおく。各 $a \in \mathbb{R}$ に対し、$\operatorname{Ker} g_a, \operatorname{Ker} h_a$ を双対基底を使って書き直しておくと

$$\operatorname{Ker} g_a = \left(\mathbb{R}(a^3\omega_3 + a^2\omega_2 + a\omega_1 + \omega_0)\right)^\perp, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{Ker} h_a = \left(\mathbb{R}(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1)\right)^\perp \tag{1.2}$$

となる。

(1) 問題文の和空間は、各項について

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} g_1 &= (\mathbb{R}\omega_0)^\perp \cap (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0))^\perp && (1.3)\\
&= \{\mathbb{R}\omega_0 \oplus \mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0)\}^\perp && (1.4)\\
&= \{\mathbb{R}\omega_0 \oplus \mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1)\}^\perp && (1.5)\\
\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2 &= (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0))^\perp \cap (\mathbb{R}(8\omega_3 + 4\omega_2 + 2\omega_1))^\perp && (1.6)\\
&= \{\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0) \oplus \mathbb{R}(8\omega_3 + 4\omega_2 + 2\omega_1 + \omega_0)\}^\perp && (1.7)\\
&= \{\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0) \oplus \mathbb{R}(7\omega_3 + 3\omega_2 + \omega_1)\}^\perp && (1.8)
\end{aligned}$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} g_1) + (\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2) && (1.9)\\
&= \{(\mathbb{R}\omega_0 \oplus \mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1)) \cap (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0) \oplus \mathbb{R}(7\omega_3 + 3\omega_2 + \omega_1))\}^\perp && (1.10)
\end{aligned}$$

となる。直接計算より波括弧 $\{\cdots\}$ の中身は $\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0)$ に一致するから、

$$(\operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} g_1) + (\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2) = \{\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0)\}^\perp \tag{1.11}$$

である。したがって、この空間の次元は $\dim V - \dim\{\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0)\} = 4 - 1 = 3$ であり、基底のひとつは $1 - x,\ x - x^2,\ x^2 - x^3$ である。

(2) 問題文の和空間の第 1 項と第 2 項の共通部分が 0 とならない実数 a を求めればよい。そこで共通部分を式変形すると

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} h_a) \cap (\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} h_0) && (1.12)\\
&= (\mathbb{R}\omega_0)^\perp \cap (\mathbb{R}(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1))^\perp \cap (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0))^\perp \cap (\mathbb{R}\omega_1)^\perp && (1.13)
\end{aligned}$$

第 2 項以外をまとめて

$$\begin{aligned}
&= (\mathbb{R}(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1))^\perp \cap \{(\mathbb{R}\omega_0) \oplus (\mathbb{R}\omega_1) \oplus (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + \omega_0))\}^\perp && (1.14)\\
&= (\mathbb{R}(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1))^\perp \cap \{(\mathbb{R}\omega_0) \oplus (\mathbb{R}\omega_1) \oplus (\mathbb{R}(\omega_3 + \omega_2))\}^\perp && (1.15)\\
&= (\mathbb{R}(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1))^\perp \cap \mathbb{R}(x^2 - x^3) && (1.16)
\end{aligned}$$

となる。この共通部分が 0 とならないための必要十分条件は $(3a^2\omega_3 + 2a\omega_2 + \omega_1)(x^2 - x^3) = 0$ すなわち $-3a^2 + 2a = 0$ が成り立つことである。したがって、$a = 0, \dfrac{2}{3}$ が求める答えである。 □

2021 A3. (1) f は $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 上の数え上げ測度に関する積分とみなす。f, g それぞれについて、$\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $\dfrac{\sin tx}{t^2}$ の x に関する連続性と、優関数 $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{t^2}$ の存在より、優収束定理を用いて絶対収束性と連続性が従う。

(2) $C = 2$ が求める定数のひとつであることを示す。そのために $x > 0$ とし、$h_x \colon [1, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \dfrac{\sin yx}{y^2}$ と定めると、示すべきことは、すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $n \leq t \leq n+1$ なる $t \in \mathbb{R}$ に対し $|h_x(t) - h_x(n)| \leq \dfrac{2x}{n^2}$ が成り立つことである。$n = t$ の場合は明らかだから、$n < t$ の場合を考える。そこで区間 $[n, t]$ 上で h_x に平均値定理を用いると、ある $t' \in (n, t)$ が存在して $\dfrac{h_x(t) - h_x(n)}{t - n} = h'_x(t')$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} |h_x(t) - h_x(n)| &= |t - n| \left| -\frac{2x \cos t'x}{t'^3} \right| && (1.17) \\ &\leq \frac{2(t-n)x}{t^3} && (1.18) \\ &\leq \frac{2x}{n^2} && (1.19) \end{aligned}$$

となり、目的の不等式が得られた。

(3) (1) で示した g の連続性より $g(x) \to g(0) = 0$ as $x \to +0$ である。そこで L'Hôpital の定理を用いるため、g の $\mathbb{R}_{>0}$ 上での微分可能性を確かめる。まず部分積分と変数変換により $g(x) = \sin x + x \displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$ $(x \in \mathbb{R})$ である。この右辺の積分について、$\dfrac{\cos t}{t}$ の $\mathbb{R}_{>0}$ 上の原始関数は $\log t + \alpha(t)$ (α は $\mathbb{R}$ 上の解析関数) の形であるから、そのひとつを選んで $G(t)$ とおけば $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt = \lim_{t\to\infty} G(t) - G(x)$ $(x > 0)$ が成り立つ。このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} G(t)$ は x によらない実定数だから、これを $c \coloneqq \displaystyle\lim_{t\to\infty} G(t) \in \mathbb{R}$ とおく。すると $g(x) = \sin x + x(c - G(x))$ $(x > 0)$ が成り立つから、g は $\mathbb{R}_{>0}$ 上微分可能である。さらに g の具体的な形より

$$\frac{g'(x)}{\left(x \log \frac{1}{x}\right)'} = \frac{\cos x + c - G(x) - xG'(x)}{-\log x + x^2} = \frac{\cos x + c - \log x - \alpha(x) - 1 - x\alpha'(x)}{-\log x + x^2} \to 1 \quad \text{as} \quad x \to +0 \tag{1.20}$$

となるから、L'Hôpital の定理より $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{g(x)}{x \log \frac{1}{x}} = 1$ を得る。

(4) (2) より、すべての $x > 0,\ t \geq 1$ に対し $\left| \dfrac{\sin tx}{t^2} - \dfrac{\sin \lfloor t \rfloor x}{\lfloor t \rfloor^2} \right| \leq \dfrac{Cx}{\lfloor t \rfloor^2}$ が成り立つ ($\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数) から、すべての $x > 0$ に対し

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \int_1^\infty \left(\frac{\sin tx}{t^2} - \frac{\sin \lfloor t \rfloor x}{\lfloor t \rfloor^2} \right) dt \right| && (1.21) \\ &\leq \int_1^\infty \left| \frac{\sin tx}{t^2} - \frac{\sin \lfloor t \rfloor x}{\lfloor t \rfloor^2} \right| dt && (1.22) \\ &\leq \int_1^\infty \frac{Cx}{\lfloor t \rfloor^2}\, dt && (1.23) \\ &= Cx \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} && (1.24) \end{aligned}$$

したがって $\beta \coloneqq \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$ とおいて

$$\left| \frac{f(x)}{x \log \frac{1}{x}} - \frac{g(x)}{x \log \frac{1}{x}} \right| \leq \left| \frac{C\beta x}{x \log \frac{1}{x}} \right| = C\beta \frac{1}{\left|\log \frac{1}{x}\right|} \to 0 \quad \text{as} \quad x \to +0 \tag{1.25}$$

が成り立つ。よって $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x \log \frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{g(x)}{x \log \frac{1}{x}} = 1$ を得る。 □