位相空間論

Yahata

概要

本稿では位相空間と距離空間について整理する。主に [Wil04] を参考にしている。

目次

第 I 部

位相空間

第 1 章　位相

定義 1.0.1 (位相空間). X を集合、$\mathcal{O}$ を X の部分集合系とする。このとき $\mathcal{O}$ が X の**開集合系 (open sets)** あるいは**位相 (topology)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- **(T1)** $\varnothing, X \in \mathcal{O}$
- **(T2)** $\mathcal{O}$ の元の有限個の交わりはまた $\mathcal{O}$ の元である。
- **(T3)** $\mathcal{O}$ の元の任意個の和集合はまた $\mathcal{O}$ の元である。

組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間 (topological space)** という。

命題 1.0.2 (位相空間としての空集合). 空集合 $\varnothing$ について次が成り立つ:

(1) $\varnothing$ の位相は $\{\varnothing\}$ ただひとつである。
(2) (initial object) X を位相空間とする。$\varnothing$ から X への連続写像がただひとつ存在する。
(3) (strict initial object) X を空でない位相空間とする。X から $\varnothing$ への連続写像は存在しない。

証明 [TODO] □

定義 1.0.3 (内部、閉包、境界). X を位相空間、$A \subset X$ とする。

- A に含まれる (X の) 最大の開集合を $\mathrm{Int}_X A$ と書き、X における A の**内部 (interior)** という。
- A を含む (X の) 最小の閉集合を $\mathrm{Cl}_X A$ と書き、X における A の**閉包 (closure)** という。
- $\mathrm{Cl}_X A \setminus \mathrm{Int}_X A$ を $\partial_X A$ と書き、X における A の**境界 (boundary)** という。

どこにおける内部や閉包なのかが明らかな場合は内部を $\mathrm{Int}\, A, \mathring{A}$、閉包を $\mathrm{Cl}\, A, \overline{A}$、境界を ∂A と書くこともある。

命題 1.0.4 (内部、閉包、境界の特徴付け). [TODO]

証明 [TODO] □

第 2 章　近傍基と開基

定義に基づいて空間に位相を与えるには、開集合系のすべての元、すなわちすべての開集合を記述しなければならず現実的でない。この苦労を回避するために近傍基と開基の概念を導入する。

2.1　近傍基

"等質的"な位相、すなわち各点ごとに局所的な位相の様子に違いが無いような位相を扱う場合には近傍基の概念が有効である。

定義 2.1.1 (近傍)**.** [TODO]

定義 2.1.2 (近傍系)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$x \in X$ とする。x の近傍全部の集合系 $\mathcal{N}_x$ を x の**近傍系 (neighborhood system)** という。

定義 2.1.3 (近傍基)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$x \in X$ とする。x の近傍系 $\mathcal{N}_x$ の部分系 $\mathcal{B}_x$ が x の**近傍基 (neighborhood base)** であるとは、任意の $N \in \mathcal{N}_x$ に対し、ある $B \in \mathcal{B}_x$ が存在して、$B \subset N$ が成り立つことをいう。

[TODO] 第 1 可算な空間では、ネットの収束性を点列で述べることができる？

定義 2.1.4 (第 1 可算)**.** [TODO]

2.2　開基と準開基

開基は開集合系の定義の (T3) を取り除いたものとみなせる。

定義 2.2.1 (開基)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ とする。このとき $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の**開基 (base)** であるとは、任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対し、ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して、$x \in B \subset O$ が成り立つことをいう。

与えられた部分集合系が開基となるかどうかには注意を払わなければならないが、その場合には次の特徴付けを使うことができる。

命題 2.2.2 (開基の特徴付け)**.** [TODO]

証明　[TODO] □

準開基は開集合系の定義の (T2), (T3) を取り除いたものとみなせる。

定義 2.2.3 (準開基)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ とする。このとき $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の**準開基 (subbase)** であるとは、$\mathcal{B}$ の元の有限個の交わり全部の集合系が $\mathcal{O}$ の開基であることをいう。

例 2.2.4 (順序位相). $(X, \leq)$ を全順序集合とする。X の準開基 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} \coloneqq \{(a, \to), (\leftarrow, b) \subset X \mid a, b \in X\} \tag{2.2.1}$$

で定める。このとき、$\mathcal{B}$ により定まる開基 $\mathcal{B}'$ は

$$\mathcal{B}' \coloneqq \{(a, \to), (\leftarrow, b), (a, b) \subset X \mid a, b \in X\} \tag{2.2.2}$$

と表せる。

$\because$ [TODO] //

以上により定まる X の位相を $(X, \leq)$ の**順序位相 (order topology)** という。

定義 2.2.5 (第 2 可算). [TODO]

第 3 章　連続写像

3.1　連続写像

定義 3.1.1 (連続写像). X, Y を位相空間、$f\colon X \to Y$ を写像とする。

- $x_0 \in X$ とする。f が **x_0 で連続 (continuous at x_0)** であるとは、Y における $f(x_0)$ の任意の近傍 $V \subset Y$ に対し、X における x_0 のある近傍 $U \subset X$ が存在して、$f(U) \subset V$ が成り立つことをいう。
- f が**連続 (continuous)** であるとは、任意の $V \overset{\text{open}}{\subset} Y$ に対し、$f^{-1}(V) \overset{\text{open}}{\subset} X$ であることをいう。

1 点での連続性と全体での連続性は次のように互いに言い換えることができる。

命題 3.1.2 (1 点での連続性と全体での連続性). X, Y を位相空間とする。このとき、写像 $f\colon X \to Y$ に関し次は同値である:

(1)　f はすべての点 $x \in X$ で連続である。
(2)　f は連続である。

証明　(1) ⇒(2)　$V \overset{\text{open}}{\subset} Y$ とする。$f^{-1}(V) \overset{\text{open}}{\subset} X$ を示す。そこで $x \in f^{-1}(V)$ とすると、f が x で連続であることより X における x のある近傍 $U_x \subset X$ が存在して $f(U_x) \subset V$、したがって $U_x \subset f^{-1}(f(U_x)) \subset f^{-1}(V)$ が成り立つ。よって $x \in \mathring{U}_x \subset U_x \subset f^{-1}(V)$ である。したがって $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \mathring{U}_x \overset{\text{open}}{\subset} X$ がいえた。

(2) ⇒(1)　$x \in X$ とする。f が x で連続であることを示す。そこで V を Y における $f(x)$ の近傍とすると、いま f は連続だから $x \in f^{-1}(\mathring{V}) \overset{\text{open}}{\subset} X$ となる。そこで $U := f^{-1}(\mathring{V})$ とおけば U は X における x の近傍であって $f(U) = f(f^{-1}(\mathring{V})) \subset \mathring{V} \subset V$ が成り立つ。したがって f は x で連続である。 □

定義 3.1.3 (局所同相写像). X, Y を位相空間とする。連続写像 $f\colon X \to Y$ が**局所同相写像 (local homeomorphism)** であるとは、各 $x \in X$ に対し、$x \in \exists U \overset{\text{open}}{\subset} X$ および $f(x) \in \exists V \overset{\text{open}}{\subset} Y$ であって、$f|_U$ が V の上への同相写像となるものが存在することをいう。

定義 3.1.4 (位相的埋め込み). X, Y を包含関係があるとは限らない 2 つの位相空間とし、$f\colon X \to Y$ を連続写像とする。f が X から $f(X)$ への同相写像であるとき、f は**位相的埋め込み (topological embedding)** であるという。単に埋め込みともいう。埋め込み $f\colon X \to Y$ が存在するとき、X は Y に**埋め込まれる**といい、X を Y の部分集合とみなすことがある（！）。

例 3.1.5 (埋め込みの例). 包含写像はすべて埋め込みである。

区分的に定義された写像の連続性をいうために便利な補題が次である。

補題 3.1.6 (貼り合わせ補題)**.** X, Y を位相空間、$f\colon X \to Y$ を連続写像、$A, B \subset X$ をいずれも閉部分集合 (あるいはいずれも開部分集合) とし、$X = A \cup B$ とする。このとき、$f|_A\colon A \to Y$ および $f|_B\colon B \to Y$ がいずれも連続ならば、f も連続である。

証明 [TODO] □

[TODO] 何に使う？

定義 3.1.7 (固有写像)**.** $f\colon X \to Y$ を連続写像とする。f が**固有 (proper)** であるとは、Y の任意のコンパクト部分集合の f による逆像が X のコンパクト部分集合であることをいう。

定義 3.1.8 (商写像)**.** X, Y を位相空間、$\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y$ をそれぞれの開集合系とする。全射 $p\colon X \to Y$ が**商写像 (quotient map)** あるいは**等化写像 (identification map)** であるとは、

$$V \in \mathscr{O}_Y \iff p^{-1}(V) \in \mathscr{O}_X \quad (V \subset Y) \tag{3.1.1}$$

が成り立つことをいう。

第 4 章　収束性

4.1　点列の収束

点列の収束の概念を定義する。

定義 4.1.1 (点列の収束). X を位相空間、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列、$b \in X$ とする。$(a_n)_n$ が b に**収束 (converge)** するとは、次が成り立つことをいう:

- X における b の任意の近傍 $U \subset X$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N$ なるすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in U$ である。

注意 4.1.2. 一般に、点列は 2 個以上の点に収束しないとは限らないことに注意すべきである。実際、たとえば $\mathbb{N}$ に密着位相を入れると $\mathbb{N}$ の任意の点列は任意の点に収束する。

点列は"点が少なすぎる"ため、一般には点列に対する振る舞いのみで写像の連続性を特徴づけることはできない (すなわち、点列連続であっても連続とは限らない)。しかし、第 1 可算空間においては写像の連続性を点列の収束で特徴づけることができる。

命題 4.1.3 (連続写像の特徴付け). X, Y を第 1 可算な位相空間とする。このとき、写像 $f\colon X \to Y$ に関して次は同値である:

(1)　f は連続である。

(2)　任意の $x \in X$ と x に収束する X 内の任意の点列 $(x_n)_n$ に対し、Y 内の点列 $(f(x_n))_n$ は $f(x)$ に収束する。

証明　[TODO] □

4.2　ネットの収束

ネットは点列の一般化である。

定義 4.2.1 (ネット). X を位相空間、$(\Lambda, \leq)$ を有向集合とする。写像 $P\colon \Lambda \to X$、すなわち Λ によって添字付けられた X の点の族 $P = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X 内の**ネット (net)** という。

定義 4.2.2 (ネットの収束). X を位相空間、$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X 内のネット、$b \in X$ とする。$(a_\lambda)_\lambda$ が b に**収束 (converge)** するとは、次が成り立つことをいう:

- X における b の任意の近傍 $U \subset X$ に対し、ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して、$\lambda \geq \lambda_0$ なるすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $a_\lambda \in U$ となる。

注意 4.2.3. 点列の収束のところで注意したように、ネットも 2 個以上の点に収束しないとは限らないことに注意すべきである。

ネットの最も重要な例は近傍基である。

例 4.2.4 (近傍基により定まるネット). X を位相空間、$\mathcal{B}_x$ を $x \in X$ の近傍基とする。$\mathcal{B}_x$ 上の 2 項関係 $B \preceq B' :\Leftrightarrow B \supset B'$ により $(\mathcal{B}_x, \preceq)$ は有向集合となる。このとき、選択公理により選択関数 $P \colon \mathcal{B}_x \to \bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} B,\ B \mapsto x_B \in B$ が存在し、これは x に収束する X 内のネットとなる。実際、近傍基の定義より x の任意の近傍 N に対し $B \subset N$ なる $B \in \mathcal{B}_x$ が存在し、$B' \succeq B$ なる任意の B' に対し $x_{B'} \in B' \subset B \subset N$ が成り立つ。

写像の 1 点における連続性はネットの収束によって特徴付けられる。

定理 4.2.5 (1 点における連続性の特徴付け). X, Y を位相空間、$x_0 \in X$ とする。このとき、写像 $f \colon X \to Y$ に関して次は同値である:

(1) f は x_0 において連続である。
(2) x_0 に収束する X 内の任意のネット $(x_\lambda)_\lambda$ に対し、Y 内のネット $(f(x_\lambda))_\lambda$ は $f(x_0)$ に収束する。

証明 [TODO] □

系 4.2.6 (連続写像の特徴付け). X, Y を位相空間とする。このとき、写像 $f \colon X \to Y$ に関して次は同値である:

(1) f は連続である。
(2) 任意の $x \in X$ と x に収束する X 内の任意のネット $(x_\lambda)_\lambda$ に対し、Y 内のネット $(f(x_\lambda))_\lambda$ は $f(x)$ に収束する。

証明 [TODO] □

位相空間の閉集合はネットの言葉で特徴づけることができる。

定理 4.2.7. 次は同値である:

(1) A は閉集合である。
(2) A 内の任意のネットの任意の収束先は A に属する。

証明 [TODO] □

第 5 章　New from Old

5.1　始位相と終位相

定義 5.1.1 (始位相). X を集合、$\{(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族、$\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする。X 上の位相 $\mathcal{O}$ であって、すべての f_λ が連続となるようなもののうち最も粗いものを、$\{f_\lambda\}_\lambda$ による X の**始位相 (initial topology)** という。

定義 5.1.2 (終位相). X を集合、$\{(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族、$\{f_\lambda : Y_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする。X 上の位相 $\mathcal{O}$ であって、すべての f_λ が連続となるようなもののうち最も細かいものを、$\{f_\lambda\}_\lambda$ による X の**終位相 (final topology)** という。

命題 5.1.3 (終位相の具体的な表示). X を集合、$\{(Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族、$\{f_\lambda : Y_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする。このとき、X の終位相 $\mathcal{O}$ は次のように表される:

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid \forall\lambda \in \Lambda \colon f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\lambda\}. \tag{5.1.1}$$

証明　[TODO] □

5.2　部分空間

定理 5.2.1 (部分位相の普遍性). X を位相空間、$A \subset X$ を部分空間とする。inclusion $A \to X$ を i とおく。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, g \colon Z \to X \colon \ \text{連続 with } g(Z) \subset A \tag{5.2.1}$$

$$\exists!\, f \colon Z \to A \colon \text{連続} \quad \text{s.t.} \tag{5.2.2}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & X \\ & A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{5.2.3}$$

証明　[TODO] □

5.3 直積空間

定理 5.3.1 (積位相の普遍性)**.** X_α $(\alpha \in A)$ を位相空間の族とし、各 α に対し標準射影 $\prod_{\beta\in A} X_\beta \to X_\alpha$ を p_α とおく。このとき次が成り立つ:

$$\forall\, \{g_\alpha\colon Z \to X_\alpha\}_{\alpha\in A}\colon\ \text{連続写像の族} \tag{5.3.1}$$

$$\exists!\ f\colon Z \to \prod_{\beta\in A} X_\beta\colon \text{連続}\quad \text{s.t.} \tag{5.3.2}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & X_\alpha \\ & \prod_{\beta\in A} X_\beta \arrow[u, "p_\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in A) \tag{5.3.3}$$

証明　[TODO] □

5.4 商空間

定理 5.4.1 (商位相の普遍性)**.** X を位相空間、$\sim$ を X 上の同値関係とし、標準射影 $X \to X/{\sim}$ を q とおく。このとき次が成り立つ:

$$\forall\ g\colon X \to Z\colon\ \text{連続}\quad \text{with}\quad q(x) = q(y) \Rightarrow g(x) = g(y) \tag{5.4.1}$$

$$\exists!\ f\colon X/{\sim} \to Z\colon \text{連続 s.t.} \tag{5.4.2}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & Z \\ X/{\sim} \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{5.4.3}$$

証明　[TODO] □

5.5 接着空間と wedge 和

[TODO] もうちょっと整理したい

定義 5.5.1 (接着空間)**.** X, Y を位相空間、$A \subset Y$ を閉部分集合、$f\colon A \to X$ を連続写像とするとき、以下のように構成される空間 $X \cup_f Y$ を、(f に沿って) Y を X に接着して得られた**接着空間 (adjunction space)** という。

- 直和 $X \amalg Y$ 上の同値関係 $\sim$ を $a \sim f(a)$ $(\forall a \in A)$ で定め、
- $X \cup_f Y := (X \amalg Y)/{\sim}$ と定める。

f は**接着写像 (attaching map)** と呼ばれる。

[TODO] 点付き空間の概念を先に導入しておきたい

定義 5.5.2 (wedge 和). X, Y を位相空間、$x_0 \in X, y_0 \in Y$ とする。以下のように構成される空間 $X \vee Y$ を、X と Y の **wedge 和 (wedge sum)** という。

- 集合 $X \amalg Y$ 上の同値関係 $\sim$ を $x_0 \sim y_0$ で定め、
- $X \vee Y := (X \amalg Y)/\sim$ と定める。

注意 5.5.3 (接着空間と wedge 和の違い). 一見すると、wedge 和は接着空間の定義で $f\colon \{x_0\} \to Y, x \mapsto y_0$ とおいた特別な場合のように見えるが、そうではない。実際、$\{x_0\}$ は X の閉集合とは限らない。

5.6 柱・錐・懸垂

定義 5.6.1 (1 点に縮めた空間). X を位相空間とし、$A \subset X$ とする。$\Delta(X) \cup A \times A$ をグラフとする X の同値関係 $\sim$[1] による商空間を X/A と表し、X において A を **1 点に縮めた空間**と呼ぶ。

定義 5.6.2 (柱、錐、懸垂). X を位相空間とする。

- 直積 $X \times I$ を ZX と書き、X の**柱 (cylinder)** と呼ぶ。
- ZX の部分集合 $X \times \{0\}$ を 1 点に縮めて得られる空間を CX と書き、X の**錐 (cone)** という。
- ZX の部分集合 $X \times \{0\}$ および $X \times \{1\}$ を 1 点に縮めて得られる空間を ΣX と書き、X の**懸垂 (suspension)** という。

例 5.6.3 (柱、錐、懸垂の例). [TODO]

例 5.6.4 (球面の懸垂). 球面 S^n の懸垂 ΣS^n は S^{n+1} と同相である (**??**)。

定義 5.6.5 (写像柱、写像錐). $f\colon X \to Y$ を連続写像とする。

- 直和 $ZX \sqcup Y$ を $(x, 1) \sim f(x)$ $(x \in X)$ で生成された同値関係で割って得られる空間を Z_f と書き、**写像柱 (mapping cylinder)** と呼ぶ。
- $CX \sqcup Y$ を $x \sim f(x)$ $(x \in X)$ で生成された同値関係で割って得られる空間を C_f と書き、**写像錐 (mapping cone)** と呼ぶ。

例 5.6.6 (写像錐の例). $f\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$ の写像錐 C_f は実射影平面に同相である。イメージとしては、円錐のふちの対蹠点同士を貼り合わせたものである。[TODO]

---

1) $\Delta(X) \cup A \times A$ をグラフとする X の同値関係 $\sim$ とは、すなわち $x, y \in X$ に対し

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y \vee (x \in A \wedge y \in A)) \tag{5.6.1}$$

ということである。

第 6 章　分離公理

6.1　Hausdorff 性

定義 6.1.1 (Hausdorff). [TODO]

命題 6.1.2 (Hausdorff 空間の非交和は Hausdorff). [TODO]

証明　[TODO] □

定理 6.1.3 (Hausdorff 空間の特徴付け). [TODO]

証明　[TODO] □

系 6.1.4 (Hausdorff 空間の不動点集合は閉). X を Hausdorff 空間、$f: X \to X$ を連続写像とする。f の不動点全体の集合 $A = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ は X の閉集合である。

証明　A は連続写像 $X \to X \times X,\ x \mapsto (x, f(x))$ による対角集合の逆像である。X が Hausdorff であることの特徴付けより X の対角集合は $X \times X$ の閉集合だから、A は X の閉集合である。 □

Hausdorff 空間は収束性に関して次の重要な性質を持つ。

命題 6.1.5 (極限の一意性). X を位相空間、$(\Lambda, \leq)$ を有向集合、$P: \Lambda \to X$ をネットとする。このとき X が Hausdorff ならば、P の収束する点は (存在すれば) 一意である。

証明　P が $b, b' \in X$ に収束するとし、$b = b'$ を示せばよい。$b \neq b'$ と仮定して矛盾を導く。いま X は Hausdorff だから b, b' を分離する開集合 U, U' が存在する。するとネットの収束の定義より

$$\begin{cases} \exists \lambda_0 \in \Lambda \quad \text{s.t.} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{に対し} \quad P(\lambda) \in U \\ \exists \lambda'_0 \in \Lambda \quad \text{s.t.} \quad \forall \lambda \geq \lambda'_0 \quad \text{に対し} \quad P(\lambda) \in U' \end{cases} \tag{6.1.1}$$

が成り立つ。このとき有向集合の定義より λ_0, λ'_0 の共通上界 λ_1 が存在するが、$\lambda_1 \geq \lambda_0,\ \lambda_1 \geq \lambda'_0$ より $P(\lambda_1) \in U \cap U' = \emptyset$ だから不合理である。背理法より $b = b'$ がいえた。 □

6.2　正規空間

正規空間は、その直積や部分空間が正規空間になるとは限らないという点では扱いづらい空間だが、3 つの有用な特徴付けを持つ。

定義 6.2.1 (正規空間). [TODO]

定理 6.2.2 (Urysohn の補題). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 6.2.3 (Tietze の拡張定理). [TODO]

証明 [TODO] □

定理 6.2.4 (開被覆の縮小可能性). [TODO]

証明 [TODO] □

6.3 演習問題

♤ **演習問題 6.1.** 順序位相は Hausdorff であることを示せ。

第 7 章　連結性

位相空間の連結性を定義する。この節で導入する大域的・局所的な連結性の間には含意がほとんどないことに注意すべきである。実際、一方が成り立っても他方は成り立たないような様々な興味深い反例が存在する。その相互関係を下図に挙げておく。破線とそのラベルは含意が成り立たない反例を示している。

$$
\begin{tikzcd}
\text{連結} \arrow[rr, dashed, shift left, "\text{topologist's sine curve}", "\times"{marking}] \arrow[d, dashed, shift left, "\text{topologist's sine curve}", "\times"{marking}] & & \text{弧状連結} \arrow[ll, Rightarrow, shift left] \arrow[d, dashed, shift left, "\text{くし空間}", "\times"{marking}] \\
\text{局所連結} \arrow[u, dashed, shift left, "{[0,1]\cup[2,3]}", "\times"{marking}] \arrow[rr, dashed, shift left, "\text{補有限位相}", "\times"{marking}] & & \text{局所弧状連結} \arrow[ll, Rightarrow, shift left] \arrow[u, dashed, shift left, "{[0,1]\cup[2,3]}", "\times"{marking}]
\end{tikzcd}
\tag{7.0.1}
$$

7.1　連結空間

定義 7.1.1 (連結)**.** 位相空間 X が**連結 (connected)** であるとは、任意の $U, V \overset{\text{open}}{\subset} X$ に対し

(1)　$U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \varnothing$ ならば U, V のちょうど一方が空集合である。

が成り立つことをいう。

注意 7.1.2. 空集合 $\varnothing$ は連結でない [1)]。

定義 7.1.3 (局所連結)**.** [TODO]

次の特徴付けは連結性を用いる証明でよく使われる。

命題 7.1.4 (連結性の特徴付け)**.** 位相空間 X に関し次は同値である:

(1)　X は連結である。

(2)　部分空間 $A \subset X$ に関し、$A = X$ であることと $A \neq \varnothing$ であることは同値である。

証明　[TODO]　□

1)　文献によっては空集合も連結とみなすことがあり、その場合は定義の「ちょうど一方」を「少なくとも一方」に置き換えればよい。

第 8 章　コンパクト性

8.1　コンパクト性

コンパクト性を定義する。コンパクト性の定義にはネットの収束性による定義と被覆の有限性による定義という 2 通りの同値な定義がある。これらのうち大学教養レベルの教科書では後者が採用されることが多い。

定義 8.1.1 (開被覆). X を位相空間、$A \subset X$ とする。X の開部分集合の族 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をみたすものを **X における A の開被覆 (open cover of A in X)** という。$A = X$ の場合は $\mathcal{U}$ を単に X の開被覆という。

定義 8.1.2 (コンパクト). X を位相空間とする。X が**コンパクト (compact)** であるとは、次の互いに同値な定義のうち少なくとも 1 つ (したがって両方) が成り立つことをいう:

(1)　(Bolzano-Weierstrass 性) X 内の任意のネットは X 上の点に収束する部分ネットを持つ。
(2)　(Heine-Borel 性) X の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ。

同値性の証明.　[TODO]　□

部分集合のコンパクト性は次のように特徴付けられる。

命題 8.1.3 (部分集合のコンパクト性の特徴付け). X を位相空間、$A \subset X$ とする。このとき次は同値である:

(1)　A は (部分空間として) コンパクトである。
(2)　X における A の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ。

証明　[TODO]　□

補題 8.1.4. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである。

証明　K をコンパクト空間、$A \overset{\text{closed}}{\subset} K$ とする。$\mathcal{U} = \{U_\lambda \overset{\text{open}}{\subset} A\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、A の部分位相の定義よりある $V_\lambda \overset{\text{open}}{\subset} K$ が存在して $U_\lambda = V_\lambda \cap A$ と表せることから $U_\lambda \cup A^c = V_\lambda \cup A^c$ は K の開部分集合である。したがって $\{U_\lambda \cup A^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ は K の開被覆だから、K のコンパクト性より有限部分被覆 $U_1 \cup A^c, \dots, U_n \cup A^c$ が存在する。すると各 $x \in A$ に対しある $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在して $x \in U_i \cup A^c$、したがって $x \in U_i$ となる。これは $U_1, \dots, U_n$ が $\mathcal{U}$ の有限部分被覆であることを意味する。したがって A はコンパクトである。　□

補題 8.1.5. コンパクト空間の連続像はコンパクトである。

証明 K をコンパクト空間、$f\colon K \to f(K)$ を連続写像とする。$\mathcal{V} := \{V_\lambda \overset{\text{open}}{\subset} f(K)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $f(K)$ の任意の開被覆とする。ここで f は連続写像だから $\mathcal{U} := \{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は K の開被覆である。したがって K のコンパクト性より $\mathcal{U}$ の有限部分被覆 $f^{-1}(V_1),\dots,f^{-1}(V_n)$ が存在する。このとき $\{V_1,\dots,V_n\}$ は $\mathcal{V}$ の有限部分被覆になっている。実際、$y \in f(K)$ とすると $y = f(x)$ $(\exists x \in K)$ と表せて、$f^{-1}(V_1),\dots,f^{-1}(V_n)$ が K の被覆であることよりある $i \in \{1,\dots,n\}$ が存在して $x \in f^{-1}(V_i)$、したがって $y = f(x) \in V_i$ となるからである。よって $f(K)$ はコンパクトである。 □

補題 8.1.6. Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉である。

証明 X を Hausdorff 空間、$A \subset X$ をコンパクト部分集合とする。A が X の閉集合であることを示すには $\mathrm{Cl}_X A = A$ を示せばよい。背理法のために $\mathrm{Cl}_X A \supsetneq A$ と仮定すると、ある $x \in \mathrm{Cl}_X A \setminus A$ が存在する。ここで X の Hausdorff 性より、各 $y \in A$ に対し x, y を分離する X の開集合 U_y, V_y が存在する。すると $(V_y)_{y\in A}$ は X における A の開被覆であるから、A のコンパクト性より有限部分被覆 $V_{y_1},\dots,V_{y_n}$ が存在する。このとき各 U_{y_i} $(i = 1,\dots,n)$ は X における x の開近傍であるから、その共通部分 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ も X における x の開近傍である。よって、$x \in \mathrm{Cl}_X A$ であることとあわせて $\displaystyle\left(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}\right) \neq \varnothing$ となる。そこで $\displaystyle b \in \left(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}\right)$ をひとつ選ぶと b はある V_{y_i} に含まれるが、一方で b は U_{y_i} にも含まれるから $U_{y_i} \cap V_{y_i} \neq \varnothing$ となり、U_{y_i}, V_{y_i} が交わりをもたないことに矛盾する。背理法より $\mathrm{Cl}_X A = A$ である。 □

次の定理は種々の空間の同相を示すために (筆舌に尽くしがたいほど) 有用である。

定理 8.1.7 (コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉)**.** コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像であり、とくに中への同相写像である。

証明 上の一連の補題より従う。 □

Tube lemma と呼ばれる汎用的な補題を以下に示す。Tube lemma は Tychonoff の定理の有限直積の場合の証明にも利用できる。証明の流れは [Rot98, p.189] によった。

補題 8.1.8 (Tube lemma)**.** X, Y を位相空間、$U \overset{\text{open}}{\subset} X \times Y$ とし、$K \subset Y$ をコンパクト集合とする。このとき、集合 $A = \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\}$ は X の開集合である。

証明 $x_0 \in A$ とする。A の定義より $\{x_0\} \times K \subset U$ である。いま $U \overset{\text{open}}{\subset} X \times Y$ ゆえに各 $(x_0, y) \in \{x_0\} \times K$ は $X \times Y$ における U の内点だから、ある $x_0 \in \exists L_y \overset{\text{open}}{\subset} X$ と $y \in \exists N_y \overset{\text{open}}{\subset} Y$ が存在して $(x_0, y) \in L_y \times N_y \subset U$ が成り立つ。とくに $\{N_y\}_{y\in K}$ は Y における K の開被覆だから、K のコンパクト性より有限部分被覆 $N_{y_1},\dots,N_{y_n}$ が存在する。そこで $\displaystyle L := \bigcap_{i=1}^n L_{y_i}$ とおくと $L \overset{\text{open}}{\subset} X$ であり、また $\displaystyle \{x_0\} \times K \subset L \times \bigcup_{i=1}^n N_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^n (L \times N_{y_i}) \subset U$ したがって $x_0 \in L \subset A$ が成り立つ。よって x_0 は X における A の内点である。以上より A は X の開集合である。 □

定理 8.1.9 (Tychonoff). [TODO]

証明 [TODO] □

8.2 局所コンパクト性

局所コンパクト性を定義する。

定義 8.2.1 (局所コンパクト). 位相空間 X が**局所コンパクト (locally compact)** であるとは、任意の $x \in X$ と x の X における任意の開近傍 U に対し、x の X における開近傍 W であって

(1) $x \in W \subset \mathrm{Cl}_X W \subset U$ である。
(2) $\mathrm{Cl}_X W$ はコンパクトである。

が成り立つものが存在することをいう。

局所コンパクト性を定義にしたがって確かめるにはすべての開近傍 U に対して W の存在を言わなければならないが、Hausdorff 空間においてはこの労力を劇的に削減できる。

命題 8.2.2 (Hausdorff 空間における局所コンパクト性の特徴付け). Hausdorff 位相空間 X に関し次は同値である:

(1) X は局所コンパクトである。
(2) 各 $x \in X$ はコンパクトな近傍を持つ。

証明 [TODO] □

8.3 パラコンパクト性

パラコンパクト性はコンパクト性の一般化である。定義から直接にはその有用性が見えにくいが、多様体論において重要な役割を果たす性質である。

まず開被覆に関する用語を準備する。

定義 8.3.1 (局所有限). X を位相空間、$Y \subset X$、$\mathcal{U}$ を Y の開被覆とする。$\mathcal{U}$ が**局所有限 (locally finite)** であるとは、各 $x \in Y$ に対し x のある近傍 N_x であって N_x と交わる $U \in \mathcal{U}$ がたかだか有限個であるようなものが存在することをいう。

定義 8.3.2 (開細分). X を位相空間、$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を X の開被覆とする。$\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の**開細分 (open refinement)** であるとは、各 $U \in \mathcal{U}$ に対し $U \subset V$ なる $V \in \mathcal{V}$ が存在することをいう。

パラコンパクト性を定義する。

定義 8.3.3 (パラコンパクト)**.** X を位相空間とする。X が**パラコンパクト (paracompact)** であるとは、X の任意の開被覆が局所有限な開細分を持つことをいう。

命題 8.3.4 (パラコンパクト性の特徴付け)**.** [TODO]

証明 [TODO] □

8.4 演習問題

♤ **演習問題 8.1.** コンパクトだが閉でない部分集合を持つような位相空間は存在するか？正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

第 9 章　商空間再訪

商空間について改めて考えよう。ここで saturated set とよばれる集合論的な概念を導入する。saturated set は商写像の性質を調べる上で重要な概念である。

定義 9.0.1 (saturated set). $f: X \to Y$ を写像とする。$A \subset X$ が f **に関し saturated** であるとは、$A = f^{-1}(f(A))$ が成り立つことをいう。

命題 9.0.2 (saturated set の性質). $f: X \to Y$ を写像、$S, T \subset X$ を部分集合とする。S または T が f に関し saturated ならば $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ が成り立つ。

証明　S が f に関し saturated である場合を示せば十分。$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$ は明らかだから逆向きの包含を示す。$y \in f(S) \cap f(T)$ とする。ある $t \in T$ が存在して $y = f(t)$ をみたす。S は f に関し saturated だから $t \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(S)) = S$ である。したがって $t \in S \cap T$、ゆえに $y = f(t) \in f(S \cap T)$ である。 □

定理 9.0.3 (商写像の制限). $q: X \to Y$ を商写像とする。$U \subset X$ が q に関し saturated な開 (あるいは閉) 部分集合ならば制限 $q|_U: U \to q(U)$ は商写像である。

注意 9.0.4. 反例は??を参照。[TODO] どういう反例？

証明　開の場合のみ示す。$q|_U: U \to q(U)$ が連続かつ全射であることは明らか。$V \subset q(U)$ に関し V が open in $q(U)$ であることと $(q|_U)^{-1}(V)$ が open in U であることが同値であることを示す。V が open in $q(U)$ とすると、ある $V' \overset{\text{open}}{\subset} Y$ が存在して $V = V' \cap q(U)$ と書ける。すると

$$
\begin{aligned}
(q|_U)^{-1}(V) &= (q|_U)^{-1}(V' \cap q(U)) && (9.0.1)\\
&= (q|_U)^{-1}(V') \cap (q|_U)^{-1}(q(U)) && (9.0.2)\\
&= (q|_U)^{-1}(V') \cap U && (9.0.3)\\
&= q^{-1}(V') \cap U && (9.0.4)
\end{aligned}
$$

だから $(q|_U)^{-1}(V)$ は open in U である。逆に $(q|_U)^{-1}(V)$ が open in U とすると、U が open in X であることとあわせて $(q|_U)^{-1}(V)$ は open in X である。ところで U は q に関し saturated だから

$$
\begin{aligned}
(q|_U)^{-1}(V) &= q^{-1}(V) \cap U && (9.0.5)\\
&= q^{-1}(V) \cap q^{-1}(q(U)) && (9.0.6)\\
&= q^{-1}(V \cap q(U)) && (9.0.7)\\
&= q^{-1}(V) && (9.0.8)
\end{aligned}
$$

したがって $q^{-1}(V)$ は open in X である。q は商写像だから V が open in Y となる。このことと $V = V \cap q(U)$

より V は open in $q(U)$ である。以上で同値がいえた。 □

次の命題は写像が商写像であるための十分条件を与える。ただし必要条件ではない。[TODO] saturated と関係ありそう？

命題 9.0.5 (全射連続な開/閉写像は商写像)**.** 次が成り立つ:

(1) 全射連続な開写像は商写像である。

(2) 全射連続な閉写像は商写像である。

証明 (1) は明らかだから (2) を示す。$f\colon X \to Y$ を全射かつ連続な閉写像とする。$V \subset Y$ とし、$f^{-1}(V) \overset{\text{open}}{\subset} X$ とする。

$$
\begin{aligned}
Y \setminus V &= f(f^{-1}(Y \setminus V)) \quad (f\colon \text{全射}) && (9.0.9)\\
&= f(X \setminus f^{-1}(V)) && (9.0.10)
\end{aligned}
$$

であり、$X \setminus f^{-1}(V)$ が closed in X であることと f が閉写像であることから、右辺、したがって左辺 $Y \setminus V$ は closed in Y である。したがって V は open in Y である。よって V は商写像である。 □

商空間にホモトピーを誘導するために便利な J. H. C. Whitehead の補題を紹介しよう。

定理 9.0.6 (J. H. C. Whitehead の補題)**.** J, X, Y を位相空間とし、$p\colon X \to Y$ を等化写像とする。J が局所コンパクトならば、$p \times \mathrm{id}_J\colon X \times J \to Y \times J$ は等化写像である。

証明 $p \times \mathrm{id}_J$ が全射かつ連続であることは明らか。あとは $Y \times J$ の部分集合 B であって $A := (p \times \mathrm{id}_J)^{-1}(B)$ が $X \times J$ の開集合となるものが任意に与えられたとし、B が $Y \times J$ の開集合となることを示せばよい。$(y_0, t_0) \in B$ とし、(y_0, t_0) が $Y \times J$ における B の内点であることを示す。$(x_0, t_0) \in (p \times \mathrm{id}_J)^{-1}(\{(y_0, t_0)\}) \subset A$ をひとつ選ぶ。(x_0, t_0) は $X \times J$ における A の内点だから、ある $x_0 \in \exists L \overset{\text{open}}{\subset} X$ と $t_0 \in \exists N \overset{\text{open}}{\subset} J$ が存在して $(x_0, t_0) \in L \times N \subset A$ が成り立つ。ここで J の局所コンパクト性よりある $W \overset{\text{open}}{\subset} J$ が存在して $t_0 \in W \subset \overline{W} \subset J$ が成り立つ。このとき tube lemma より集合 $U_A := \{x \in X \mid \{x\} \times \overline{W} \subset A\}$ は X の開集合である。ここで $x \in X$ に関し $p(x) \in p(A)$ であることと $x \in A$ であることとは同値である。実際、

$$
\begin{aligned}
p(x) \in p(U_A) &\implies \exists u \in U_A \quad \text{s.t.} \quad p(x) = p(u) && (9.0.11)\\
&\implies \{p(x)\} \times \overline{W} \subset B \quad (\because \{u\} \times \overline{W} \subset A) && (9.0.12)\\
&\implies \{x\} \times \overline{W} \subset A \quad (\because\ p \times \mathrm{id}_J \text{ で逆像をとった}) && (9.0.13)\\
&\implies x \in U_A && (9.0.14)\\
&\implies p(x) \in p(U_A) && (9.0.15)
\end{aligned}
$$

だからである。したがって $p^{-1}(p(U_A)) = U_A$ である。p は等化写像であったから、U_A が X の開集合であることより $p(U_A)$ が Y の開集合であることが従う。よって $p(U_A) \times W$ は $Y \times J$ の開集合である。U_A はとくに x_0 も含むから $(y_0, t_0) = (p(x_0), t_0) \in p(U_A) \times W \subset B$ が成り立つ。したがって (y_0, t_0) は $Y \times J$ における B の内点である。以上より B は $Y \times J$ の開集合であることがいえた。 □

第 10 章　位相群の作用

定義 10.0.1 (軌道空間). G を位相群、X を位相空間とし、G は X に左から作用しているとする。このとき、G の作用で写り合う X の点を同値とみなして X の商空間を考えたものを X/G と書き[2)]、G の作用による X の**軌道空間 (orbit space)** という。

命題 10.0.2 (軌道空間への商写像は開写像). [TODO]

定義 10.0.3 (固有作用). G を位相群、X を位相空間とし、G は X に左から作用しているとする。G の作用が**固有 (proper)** であるとは、写像

$$G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x) \tag{10.0.1}$$

が固有写像であることをいう。

命題 10.0.4 (軌道空間が Hausdorff となる十分条件). G を位相群、X を局所コンパクト Hausdorff 位相空間とし、G は X に左から作用しているとする。このとき、軌道空間 X/G は Hausdorff である。

証明　[TODO] □

[TODO] 離散群を考えるのは被覆空間のため？

定義 10.0.5 (固有不連続). G を位相群、X を位相空間とし、G は X に左から作用しているとする。このとき、G の作用が**固有不連続 (properly discontinuous)** であるとは、次が成り立つことをいう: X の任意のコンパクト部分集合 K に対し、K と gK が交わりを持つような $g \in G$ は有限個しかない。[TODO] この用語は避けたい

2)　G の作用が左からであることを明示するために $G \backslash X$ と書く流儀もある。

第 II 部

距離空間

第 11 章　実数と複素数

この章では、距離空間の定義の準備として実数について考える。実数とは、「連続の公理」などと呼ばれるある種の完備性を備えた順序体のことである。ここで順序体とは、演算と整合的な全順序を備えた体のことである。一般に全順序集合には順序位相が入るから、順序体は位相空間とみなすことができる。また、順序体の元に絶対値が定まることを用いて (一般化) 距離の構造を導入することもできる。このように順序体は、すぐに挙げられるものだけでも体・順序集合・位相空間・(一般化) 距離空間という 4 つの顔を持つ、非常に彩り豊かな対象である。そこで第 1 節ではこれらの観点から順序体の性質を調べる。なお、一般的な大学教養レベルの微分積分学の教科書では、代数学や位相空間論などの知識は仮定せずに微分や積分の定義に向かうことが多いと思うが、本稿ではそれらの知識を仮定して話を進めることにする。

第 2 節では実数を具体的に構成する。実数の定義は [杉 80] のように公理的に導入することもできるが、ここでは有理数の存在を前提として実数の具体的な構成を与えることにする。

第 3 節では複素数を構成する。

11.1　順序体

順序体を定義する。

定義 11.1.1 (順序体)**.** $A \neq 0$ を環、$\leq$ を A 上の全順序とする。組 $(A, \leq)$ が**順序環 (ordered ring)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(O1)　各 $x, y, z \in A$ に対し、$x < y \implies x + z < y + z$ である。

(O2)　各 $x, y, z \in A$ に対し、$x < y,\ 0 < z \implies xz < yz,\ zx < zy$ である。

とくに A が体のとき**順序体 (ordered field)** という。各 $x \in A$ は $x > 0$ ならば**正 (positive)**、$x < 0$ ならば**負 (negative)** であるという。

順序体の順序に関する基本的な補題を示しておく。

補題 11.1.2. $(A, \leq)$ を順序環とする。

(1)　各 $x \in A,\ x \neq 0$ に対し、x と $-x$ のちょうど一方のみが正で他方は負である。

(2)　$0 < 1$ である。

証明　(1)　全順序の性質より $x > 0$ または $x < 0$ である。$x > 0$ なら (O1) より各辺に $-x$ を加えて $0 > -x$ を得る。他方の場合も同様。したがって x と $-x$ のちょうど一方のみが正である。

(2)　$A \neq 0$ ゆえに $1 \neq 0$ だから、全順序の性質より $1 > 0$ または $1 < 0$ である。$1 < 0$ であったとすると (1) より $0 < -1$ だから、(O2) より $1 \cdot 0 < 0 \cdot (-1)$ すなわち $0 < 0$ となり矛盾する。背理法より $1 > 0$ である。　□

上の補題より絶対値が定義できる。

定義 11.1.3 (絶対値). $(A, \leq)$ を順序環とする。各 $x \in A$ に対し、x の**絶対値 (absolute value)** $|x|$ を次のように定める。

- $x \neq 0$ ならば x と $-x$ のうち正の元を $|x|$ とする。
- $x = 0$ ならば $|x| = 0$ とする。

絶対値は次の性質を持つ。

命題 11.1.4 (絶対値の基本性質). [TODO]

証明 [TODO] □

ここで次のことが成り立つ。

命題 11.1.5. 順序体の標数は 0 である。

証明 $(K, \leq)$ を順序体とする。すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $n1_K > 0_K$ となることを帰納法で示す。$1_K > 0_K$ はすでに示した。また、(O1) と帰納法の仮定より $n1_K = (n-1)1_K + 1_K > 1_K > 0_K$ だから帰納法が完成した。したがって $(-n)1_K = -(n1_K) < 0_K$ も成り立つ。よって、自然な環準同型 $\mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto n1_K$ の Ker は 0 である。したがって K の標数は 0 である。 □

命題 11.1.5 より $\mathbb{Q}$ は K に埋め込まれているとみなすことができる [TODO] なぜ？どういう意味で？。

定義 11.1.6 (Archimedes 的). $(K, \leq)$ を順序体とする。K が **Archimedes 的 (Archimedean)** であるとは、任意の $x \in K$ に対し、$n > x$ なる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在することをいう。

Archimedes 的な順序体は次の性質を持つ。

命題 11.1.7. $(K, \leq)$ を Archimedes 的な順序体とする。このとき、$\mathbb{Q}$ は K で稠密である。

証明 [TODO] □

定義 11.1.8 (Cauchy 完備). K を順序体とし、通常の方法で一般化距離空間かつ位相空間とみなす。K の任意の Cauchy 点列が収束するとき、K は **Cauchy 完備** であるという。

定義 11.1.9 (Weierstrass の公理). 順序体 K に関する次の条件を **Weierstrass の公理 (Weierstrass' axiom)** という:

- K の上に有界な空でない任意の部分集合は K に上限を持つ。

命題 11.1.10. 順序体 K に関し次は同値である:

(1) K は Archimedes 的かつ Cauchy 完備である。
(2) K は Weierstrass の公理をみたす。

証明 [TODO] □

11.2 実数の構成

実数の構成には様々な方法がある [noa23]。

(1) (Dedekind) 切断を用いて $\mathbb{Q}$ を順序完備化する方法
(2) (Cantor-Méray) $\mathbb{Q}$ の Cauchy 列を Cauchy 完備化する方法
(3) 超実数の方法
(4) (Schanuel) Eudoxus 実数の方法

これらの構成法により得られる実数体はいずれも順序体として同型であることが知られている。ここでは Cantor-Méray の方法を用いて実数を構成する。

定義 11.2.1 (集合としての $\mathbb{R}$). $\mathbb{Q}$ の Cauchy 列全部の集合を C とおき、C 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める。すなわち、$(a_n)_n \sim (b_n)_n$ であるとは次が成り立つこととする:

- 任意の $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$m, n \geq N$ なる任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $|a_n - b_m| \leq \varepsilon$ が成り立つ。

商集合 $C/\sim$ を $\mathbb{R}$ とおく。

定義 11.2.2 (体としての $\mathbb{R}$). [TODO] 演算を定める

定義 11.2.3 (順序体としての $\mathbb{R}$). [TODO] 順序を定める

命題 11.2.4. $\mathbb{R}$ は Archimedes 的かつ Cauchy 完備な順序体である。

証明 [TODO] □

11.3 上限と下限の性質

実数体の部分集合の下限については次の性質が成り立つ。上限についても同様である。

命題 11.3.1. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ とし、A は $\mathbb{R}$ 内に下限を持つとする。このとき

$$\inf(A + c) = \inf A + c \tag{11.3.1}$$

が成り立つ。ただし $A + c := \{a + c \mid a \in A\}$ の意味である。

証明 すべての $a \in A$ に対し $\inf A \le a$ ゆえに $\inf A + c \le a + c$ が成り立つ (順序体の性質) から、$\inf A + c$ は $A + c$ の下界である。また、$A + c$ の任意の下界 $t \in \mathbb{R}$ に対し、$t - c$ は A の下界となるから、$\inf A$ が A の下界の最大元であることより $t - c \le \inf A$、したがって $t \le \inf A + c$ が成り立つ。よって $\inf A + c$ は $A + c$ の下界の最大元である。以上より $\inf A + c = \inf(A + c)$ が成り立つ。 □

命題 11.3.2. $A, B \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$ とし、A, B は $\mathbb{R}$ 内に下限を持つとする。このとき、すべての $a \in A,\ b \in B$ に対し $a \le b$ が成り立つならば、$\inf A \le \inf B$ である。[TODO] 自明すぎて意味のない主張では？

証明 $\inf A > \inf B$ であったと仮定して矛盾を導く。$\alpha := (\inf A + \inf B)/2$ とおく。$\alpha \le \inf A$ より α は A の下界だから、$a \in A$ をひとつ選ぶと $\alpha \le a$ が成り立つ。一方 $\alpha > \inf B$ だから、$\inf B$ が B の最大の下界であることとあわせて、ある $b \in B$ が存在して $\alpha > b$ が成り立つ。したがって $b < \alpha \le a$ となり、命題の仮定 $a \le b$ に矛盾する。したがって $\inf A \le \inf B$ である。 □

命題 11.3.3 (和の下限と下限の和)**.** $A, B \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$ とする。A, B がともに下に有界であるとき

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B \tag{11.3.2}$$

が成り立つ。ただし $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ の意味である。

証明 まず任意の $a \in A,\ b \in B$ に対し、$a \le \inf A,\ b \le \inf B$ ゆえに $a + b \le \inf A + \inf B$ が成り立つから、$\inf A + \inf B$ は $A + B$ の下界である。つぎに任意の $\varepsilon > 0$ に対し、下限の特徴付けよりある $a_0 \in A,\ b_0 \in B$ が存在して $a_0 - \inf A < \frac{\varepsilon}{2},\ b_0 - \inf B < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。よって $a_0 + b_0 - (\inf A + \inf B) < \varepsilon$ が成り立つから、ふたたび下限の特徴付けより $\inf A + \inf B$ は $A + B$ の下界の最大元、すなわち下限である。 □

11.4 実数列の極限

[TODO]

11.5 複素数の構成

定義 11.5.1 (複素数)**.** [TODO] $\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$

11.6　演習問題

♤ **演習問題 11.1** (東大数理 2006A). $\mathbb{R}^2$ における同値関係 $\sim$ を以下のように定義する。

$$(x,y)\sim(x',y'),\qquad (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2 \tag{11.6.1}$$

とは、整数 n と有理数 ξ が存在して

$$x'=x+n,\qquad y'=y+\xi \tag{11.6.2}$$

と表されること、とする。この同値関係による同値類の集合を $X:=\mathbb{R}^2/\sim$ とおき、$\pi\colon\mathbb{R}^2\to X$ を自然な射影とする。X の要素 a_1,a_2 について，$\pi(x_1)=a_1,\pi(x_2)=a_2$ となる $x_1,x_2\in\mathbb{R}^2$ に対する $\|x_1-x_2\|$ の下限を $d(a_1,a_2)$ とおく。つまり、

$$d(a_1,a_2)=\inf\{\|x_1-x_2\|\mid\pi(x_1)=a_1,\pi(x_2)=a_2\} \tag{11.6.3}$$

とする。ここで $\|x\|$ はベクトル x の通常のノルムを表す。

(1)　$a,b,c\in X$ に対して、不等式

$$d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c) \tag{11.6.4}$$

を示せ。

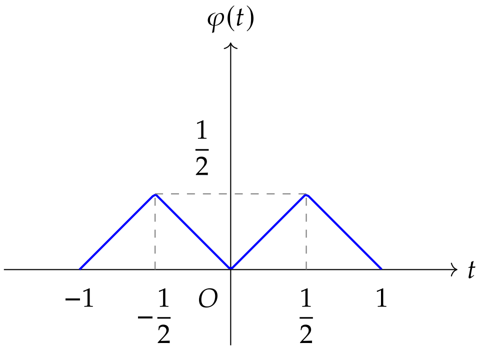
(2)　$a,b\in X$ に対して、$d(a,b)=0$ ならば $a=b$ が成立するかどうかを述べよ。

証明　(1)　まず X の元の "x-座標" として写像 $f\colon X\to[0,1)$ を次のように定義する。すなわち、各同値類 $a\in X$ に対し、代表元 $(s,t)\in\pi^{-1}(a)$ であって $s\in[0,1)$ なるものをひとつ選んで $f(a):=s$ と定義する。ただし、このような s は同値関係 $\sim$ の定義より確かに存在し、また範囲を $[0,1)$ としたことにより一意に決まる。

まず関数 d をより簡単な形で書くことを考える。そこで、関数 $\varphi\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi(t):=\begin{cases}|t| & (|t|\le 1/2)\\ 1-|t| & (|t|>1/2)\end{cases} \tag{11.6.5}$$

とおく。φ のグラフは下図のようになる。



したがって、すべての $t\in(-1,1)$ に対し $\varphi(t)<|t|$ および $\varphi(t)\le 1-|t|$ が成り立つ。さて、関数 $h\colon X\times X\to\mathbb{R}$ を $h(a,b):=\varphi(f(a)-f(b))$ と定義する。以下、すべての $a,b\in X$ に対し $d(a,b)=h(a,b)$ が成り立つことを示す。

まず $h(a,b)$ が集合 $\{\|x_1-x_2\|\mid\pi(x_1)=a,\pi(x_2)=b\}$ の下界であることを示す。そこで $x=(s,t)\in\pi^{-1}(a)$, $y=(u,v)\in\pi^{-1}(b)$ とする。f の定義より $(f(a),t)\in\pi^{-1}(a)$, $(f(b),v)\in\pi^{-1}(b)$ であるから、同値関係 $\sim$ の定義

より $s = f(a) + n,\ u = f(b) + m$ なる整数 n, m が存在する。したがって

$$
\begin{aligned}
\|x-y\| &\geq |s-u| && (11.6.6)\\
&= |(f(a)+n) - (f(b)+m)| && (11.6.7)\\
&= |f(a) - f(b) + (n-m)| && (11.6.8)\\
&\geq \big|\,|f(a)-f(b)| - |n-m|\,\big| && (11.6.9)\\
&\geq \begin{cases} |f(a)-f(b)| & (n=m) \\ |n-m| - |f(a)-f(b)| & (n \neq m) \end{cases} && (11.6.10)\\
&\geq \begin{cases} |f(a)-f(b)| & (n=m) \\ 1 - |f(a)-f(b)| & (n \neq m) \end{cases} && (11.6.11)\\
&\geq \varphi(f(a)-f(b)) && (11.6.12)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、最後の不等号では $f(a) - f(b) \in (-1, 1)$ であることを用いた。よって $h(a, b)$ は集合 $\{\|x_1 - x_2\| \mid \pi(x_1) = a, \pi(x_2) = b\}$ の下界である。

つぎに $h(a, b)$ が $\{\|x_1 - x_2\| \mid \pi(x_1) = a, \pi(x_2) = b\}$ の最大の下界であること、すなわち $d(a, b) = h(a, b)$ を示す。そのためには $\varepsilon > 0$ とし、$\|x-y\| - h(a, b) < \varepsilon$ なる $x \in \pi^{-1}(a),\ y \in \pi^{-1}(b)$ が存在することを示せばよい。これは $f(a) \geq f(b)$ の場合に示せば十分であるから、以下 $f(a) \geq f(b)$ とする。

> ∵ $f(a) \geq f(b)$ なるすべての a, b に対し示せたとする。すると $f(a) \leq f(b)$ の場合 $d(b, a) = h(b, a)$ が成り立つことになるが、d, h はいずれも 2 つの引数の入れ替えで値が変わらないから、$d(a, b) = h(a, b)$ が従う。 //

f の定義より、$(f(a), t) \in \pi^{-1}(a),\ (f(b), v) \in \pi^{-1}(b)$ なる $t, v \in \mathbb{R}$ をひとつずつ選ぶことができる。さらに有理数の稠密性より $|t-q| < \dfrac{\varepsilon}{2},\ \ |v-r| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ なる $q, r \in \mathbb{Q}$ が存在する。

$|f(a) - f(b)| \geq \dfrac{1}{2}$ の場合を考える。$x \coloneqq (f(a) - 1, t - q),\ y \coloneqq (f(b), v - r)$ とおくと $x \in \pi^{-1}(a),\ y \in \pi^{-1}(b)$ が成り立つ。この x, y が求めるものであることをいうために、$\|x-y\| - h(a, b) < \varepsilon$ を示す。

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= |f(a) - 1 - f(b)|^2 + |t - q - (v - r)|^2 && (11.6.13)\\
&= (1 - |f(a)-f(b)|)^2 + (t - q - (v - r))^2 && (11.6.14)\\
&< (1 - |f(a)-f(b)|)^2 + \varepsilon^2 && (11.6.15)\\
&\leq (1 - |f(a)-f(b)| + \varepsilon)^2 && (11.6.16)
\end{aligned}
$$

ゆえに $\|x-y\| \leq 1 - |f(a)-f(b)| + \varepsilon$ である。いま $|f(a)-f(b)| \geq \dfrac{1}{2}$ ゆえに $1 - |f(a)-f(b)| = h(a, b)$ だから、$\|x-y\| - h(a, b) < \varepsilon$ が示せた。

$|f(a) - f(b)| < \dfrac{1}{2}$ の場合も、$x \coloneqq (f(a), t - q),\ y \coloneqq (f(b), v - r)$ とおけば同様にして $\|x-y\| - h(a, b) < \varepsilon$ が示せる。以上で $d(a, b) = h(a, b)$ がいえた。

最後に $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ を示す。

- $|f(a) - f(b)| \leq \dfrac{1}{2},\ |f(b) - f(c)| \leq \dfrac{1}{2}$ の場合、

$$
\begin{aligned}
d(a, b) + d(b, c) &= h(a, b) + h(b, c) && (11.6.17)\\
&= |f(a)-f(b)| + |f(b)-f(c)| && (11.6.18)
\end{aligned}
$$

$$\geq |f(a) - f(c)| \tag{11.6.19}$$
$$\geq h(a,c) \tag{11.6.20}$$
$$= d(a,c) \tag{11.6.21}$$

- $|f(a) - f(b)| > \dfrac{1}{2}$, $|f(b) - f(c)| \leq \dfrac{1}{2}$ の場合、

$$d(a,b) + d(b,c) = h(a,b) + h(b,c) \tag{11.6.22}$$
$$= 1 - |f(a) - f(b)| + |f(b) - f(c)| \tag{11.6.23}$$
$$= 1 - (|f(a) - f(b)| - |f(b) - f(c)|) \tag{11.6.24}$$
$$\geq 1 - |f(a) - f(c)| \tag{11.6.25}$$
$$\geq h(a,c) \tag{11.6.26}$$
$$= d(a,c) \tag{11.6.27}$$

- $|f(a) - f(b)| \leq \dfrac{1}{2}$, $|f(b) - f(c)| > \dfrac{1}{2}$ の場合、

$$d(a,b) + d(b,c) = h(a,b) + h(b,c) \tag{11.6.28}$$
$$= |f(a) - f(b)| + 1 - |f(b) - f(c)| \tag{11.6.29}$$
$$= 1 - (|f(b) - f(c)| - |f(a) - f(b)|) \tag{11.6.30}$$
$$\geq 1 - |f(a) - f(c)| \tag{11.6.31}$$
$$\geq h(a,c) \tag{11.6.32}$$
$$= d(a,c) \tag{11.6.33}$$

- $|f(a) - f(b)| > \dfrac{1}{2}$, $|f(b) - f(c)| > \dfrac{1}{2}$ の場合、$f(a), f(b), f(c) \in [0,1)$ ゆえに $|f(a) - f(c)| \leq \dfrac{1}{2}$ であるから、

$$d(a,c) - d(a,b) = h(a,c) - h(a,b) \tag{11.6.34}$$
$$= 1 - |f(a) - f(c)| - |f(a) - f(b)| \tag{11.6.35}$$
$$= 1 - (|f(a) - f(c)| + |f(a) - f(b)|) \tag{11.6.36}$$
$$\leq 1 - |f(b) - f(c)| \tag{11.6.37}$$
$$= h(b,c) \tag{11.6.38}$$
$$= d(b,c) \tag{11.6.39}$$

よって $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ である。

以上で $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ が示せた。

<u>(2)</u>　反例を挙げる。$a := \pi(0, \sqrt{2}/2)$, $b := \pi(0, 1/2)$ とおくと、$d(a,b) = h(a,b) = |0-0| = 0$ であるが、$\sqrt{2}/2 - 1/2 \notin \mathbb{Q}$ ゆえに $(0, \sqrt{2}/2) \nsim (0, 1/2)$ だから $a \neq b$ である。したがってこれが反例となっている。 □

第 12 章　関数

この章では関数について考える。ここで「関数」や「写像」という術語についてひとつ注意しておこう。多様体論などでは $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}$ に値をもつ写像だけを「関数」と呼んで一般の写像と区別することがある。そのような立場から見ると、この章でしばしば扱うような一般の Hausdorff 空間に値をもつ写像などは「関数」ではなく「写像」と呼ぶべきかもしれない。しかし、この章で述べる内容は後で $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}$ に値をもつ写像へ応用することがまず念頭にあるから、ここでは呼び方に区別をつけずにすべて「関数」と呼ぶことにする。

12.1　関数の極限

関数の極限はネットの収束で定義される。

定義 12.1.1 (関数の極限). X を位相空間、Y を Hausdorff 空間、$f\colon X \to Y$ を関数、$A \subset X$、$a \in \mathrm{Cl}_X A$、$b \in Y$ とする。**x が A 内で a に近づくときの $f(x)$ の極限** が b であるとは、X 内の任意のネット $(x_\lambda)_\lambda$ であって条件

(1)　$(x_\lambda)_\lambda$ は a に収束する。
(2)　各 λ に対し $x_\lambda \in A$ である。

をみたすものに対し、Y 内のネット $(f(x_\lambda))_\lambda$ が b に収束することをいう。このことを $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ と書いて表す。$A = X$ の場合は「A 内で」という言葉を省略し、単に $\lim_{x \to a} f(x) = b$ と書く。

X, Y が一般化距離空間の場合、関数の極限は次のように特徴付けられる。一般的な微分積分学の教科書 ([杉 80] など) ではむしろこちらが定義になっていると思う。

命題 12.1.2 (関数の極限の特徴付け). $(X, d_X\colon X \times X \to F)$, $(Y, d_Y\colon Y \times Y \to G)$ を一般化距離空間、$A \subset X$、$a \in \mathrm{Cl}_X A$、$b \in Y$ とする。このとき、関数 $f\colon X \to Y$ に関し次は同値である:

(1)　$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$
(2)　任意の $\varepsilon > 0_G$ に対し、ある $\delta > 0_F$ が存在して、$d_X(x, a) < \delta$ なる任意の $x \in A$ に対し、$d_Y(f(x), b) < \varepsilon$ が成り立つ。

[TODO] $a \in \mathrm{Cl}_X A$ であることをどこで使った？

証明　(1) ⇒(2)　(1) を仮定する。背理法のため (2) を否定すると、ある $\varepsilon > 0_G$ が存在して、任意の $\delta > 0_F$ に対し、ある $x_\delta \in A$ であって $d_X(x_\delta, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x_\delta), b) \geq \varepsilon$ なるものが存在する。したがって選択公理より X 内のネット $(x_\delta)_{\delta > 0_F}$ であって

(1)　$(x_\delta)_{\delta > 0_F}$ は a に収束する。
(2)　各 $\delta > 0_F$ に対し $x_\delta \in A$ である。
(3)　$(f(x_\delta))_{\delta > 0_F}$ は b に収束しない。

をみたすものが存在する。これは (1) に反するから、背理法より (2) が成り立つ。

(2) ⇒(1)　(2) を仮定する。背理法のため、a に収束する X 内のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in(\Lambda,\leq)}$, $x_\lambda \in A$ であって $(f(x_\lambda))_\lambda$ が b に収束しないものが存在したとする。すると仮定より、Y における b のある近傍 V であって、条件

$$\text{任意の } \lambda_0 \in \Lambda \text{ に対し、} \lambda_1 \geq \lambda_0 \text{ なるある } \lambda_1 \in \Lambda \text{ が存在して、} f(x_{\lambda_1}) \notin V \text{ となる} \tag{12.1.1}$$

をみたすものが存在する。明らかに V に含まれる任意の (b の) 近傍も条件 (12.1.1) をみたすから、必要ならば V を小さく取り直して、最初から $V = \{y \in Y \mid d_Y(y,b) < \varepsilon\}$ $(\exists\varepsilon > 0_G)$ の形であるとしてよい。すると、(2) の仮定よりある $\delta > 0_F$ が存在して、$d_X(x,a) < \delta$ なる任意の $x \in A$ に対し $f(x) \in V$ が成り立つ。すなわち、X における a の近傍 U を $U := \{x \in X \mid d_X(x,a) < \delta\}$ とおくとき $f(U \cap A) \subset V$ が成り立つ。いま $(x_\lambda)_\lambda$ は a に収束するネットであって $x_\lambda \in A$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$ をみたすから、ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して、すべての $\lambda \geq \lambda_0$ に対し $x_\lambda \in U \cap A$ が成り立つ。ここで条件 (12.1.1) より $\lambda_1 \geq \lambda_0$ なるある $\lambda_1 \in \Lambda$ が存在して $f(x_{\lambda_1}) \notin V$ となるが、一方 $\lambda_1 \geq \lambda_0$ ゆえに $x_{\lambda_1} \in U \cap A$ だから $f(x_{\lambda_1}) \in f(U \cap A) \subset V$ となり矛盾が従う。背理法より (1) が成り立つ。□

さらに一般化距離が Archimedes 的順序体に値をもつ場合は一般化距離位相が第 1 可算となる [TODO] 本当に？から、ネットの収束を点列の収束で特徴づけることができる。

命題 12.1.3. [TODO]

証明　[TODO] □

12.2　連続関数

関数の 1 点における連続性は関数の極限により特徴づけることができる。

定理 12.2.1 (1 点における連続性と関数の極限). X を位相空間、Y を Hausdorff 空間、$a \in X$ とする。このとき、関数 $f\colon X \to Y$ に関して次は同値である:

(1) f は a において連続である。
(2) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

証明　関数の 1 点における連続性のネットの収束による特徴付けより明らか。□

系 12.2.2. 上の定理の状況で次は同値である:

(1) f は X 上連続である。
(2) すべての $a \in X$ に対し $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

証明　定理と命題 3.1.2 より従う。□

第 13 章　級数

13.1　級数

定義 13.1.1 (級数). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ と定める。数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を a_n を第 n 項とする**級数 (series)** といい、s_n をこの級数の**第 n 部分和 (n-th partial sum)** という。級数 $(s_n)_n$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ や $\sum a_n$ と書いて表す。$\sum a_n$ が収束するとき、その極限も記号の濫用で $\sum a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$ と書く。

命題 13.1.2 (級数の三角不等式). [TODO]

定義 13.1.3 (並べ替え). [TODO]

定義 13.1.4 (絶対収束). [TODO]

定義 13.1.5 (無条件収束). [TODO]

$\mathbb{R}^n$ の点列の級数に対しては絶対収束と無条件収束は同じことである。

定理 13.1.6 (Riemann の級数定理). $\mathbb{R}^n$ の収束級数 $\sum a_n$ に関して次は同値である:

(1) $\sum a_n$ は絶対収束する。
(2) $\sum a_n$ は無条件収束する。

証明 [TODO] □

13.2　正項級数

級数のうちとくに重要なのが絶対収束級数である。そこで本節では正項級数の収束について調べる。

定義 13.2.1 (正項級数). 各項が非負の級数を**正項級数 (positive term series)** という。

第 14 章　距離空間

この章では距離空間について考える。距離空間とは、距離と呼ばれる関数を備えた集合のことである。したがって、距離空間の定義そのものは位相空間とは関係がないことに注意すべきである。一方、距離は (距離) 位相を誘導するという事実を以て距離空間は位相空間の一種だとみなすこともできる。しかし、距離は実数体 $\mathbb{R}$ に値をもつから $\mathbb{R}$ の性質に強く影響を受ける。たとえば、すべての距離位相は $\mathbb{R}$ における $\mathbb{Q}$ の稠密性によって必然的に第 1 可算性を備えている。そこで、この章では距離空間が $\mathbb{R}$ の性質からどのように影響を受けるのかを調べるため、$\mathbb{R}$ よりも一般の順序体に値をもつ一般化距離から議論を始めることにする。

14.1　一般化距離

定義 14.1.1 (一般化距離). $(K, \leq)$ を順序体、X を集合、$d\colon X \times X \to K$ を写像とする。d が X 上の**一般化距離 (generalized metric)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- **(GM1)**　(非退化性[3]) 各 $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = 0 \iff x = y$ である。
- **(GM2)**　(対称性) 各 $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$ である。
- **(GM3)**　(三角不等式) 各 $x, y, z \in X$ に対し $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ である。

このとき、組 (X, d) を**一般化距離空間 (generalized metric space)** という。

最も簡単な一般化距離空間の例は順序体自身である。

命題 14.1.2 (一般化距離空間としての順序体). $(K, \leq)$ を順序体とする。このとき、写像

$$d\colon K \times K \to K, \quad (x, y) \mapsto |x - y| \tag{14.1.1}$$

は K 上の一般化距離である。

証明　絶対値の性質より明らか。 □

開球と閉球を定義する。

定義 14.1.3 (開球と閉球). $(X, d\colon X \times X \to K)$ を一般化距離空間とする。各 $x \in X$ および $r > 0_K$ に対し、

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \quad \overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \tag{14.1.2}$$

をそれぞれ X における x を中心とする半径 r の**開球 (open ball)** および**閉球 (closed ball)** という。x を中心とする半径 r の開球を x の ***r*-近傍 (*r*-neighborhood)** とも呼ぶ。

Cauchy 列を定義する。

3)　$d(x, y) = 0 \implies x = y$ という条件を**不可識別者同一性 (identity of indiscernibles)** と呼ぶことがある。

定義 14.1.4 (Cauchy 列)**.** $(K, \leq)$ を順序体、(X, d), $d\colon X \times X \to K$ を一般化距離空間、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の元の列とする。このとき $(a_n)_n$ が **Cauchy 列 (Cauchy sequence)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- 任意の正の元 $\varepsilon \in K$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$m, n \geq N$ なる任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$ が成り立つ。

14.2 一般化距離位相

定義 14.2.1 (一般化距離位相)**.** K を順序体、$(X, d\colon X \times X \to K)$ を一般化距離空間とする。このとき、X の部分集合系

$$\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0_K,\ x \in X\}, \quad B_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\} \tag{14.2.1}$$

を開基として X に位相が入る (このあと示す)。これを d により誘導された X の**一般化距離位相 (generalized metric topology)** という。

注意 14.2.2. 今後断りのない限り、一般化距離空間には一般化距離位相が入っているものとみなし、例えば一般化距離位相に関してコンパクトな一般化距離空間を単にコンパクト一般化距離空間などと呼ぶことにする。

証明 K が自己稠密であることも用いる。[TODO] □

命題 14.2.3. $(X, d\colon X \times X \to K)$ を一般化距離空間とする。このとき K が Archimedes 的ならば、X の一般化距離位相は第 1 可算である。

証明 [TODO] □

命題 14.2.4. K を順序体とし、通常の方法で一般化距離空間とみなす。このとき、K の一般化距離位相と K の順序位相は一致する。

証明 [TODO] □

14.3 距離空間

定義 14.3.1 (距離空間)**.** 一般化距離空間 (X, d) において一般化距離 d が $\mathbb{R}$ に値を持つとき、d を X 上の**距離 (metric)** といい、(X, d) を**距離空間 (metric space)** という。

距離空間においては、実数の連続性によって部分集合の間の距離や部分集合の直径が定義できる。

定義 14.3.2 (部分集合の間の距離)**.** $A, B \subset X$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ とする。**部分集合の間の距離** を

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in A,\ y \in B\} \tag{14.3.1}$$

で定める。とくに A が 1 点集合 $A = \{x\}$ の場合、$d(\{x\}, B)$ を単に $d(x, B)$ と書く。

1 点と部分集合との間の距離について、次の意味で三角不等式のようなものが成り立つ。

補題 14.3.3. (X, d) を距離空間、$\varnothing \neq A \subset X$ とする。このとき、任意の $x, y \in X$ に対し

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \tag{14.3.2}$$

が成り立つ。

証明　下限の性質より、任意の $s, t \in X$ に対し

$$\begin{aligned} d(s, A) &= \inf\{d(s, u) \mid u \in A\} && (14.3.3)\\ &\leq \inf\{d(s, t) + d(t, u) \mid u \in A\} && (14.3.4)\\ &= d(s, t) + \inf\{d(t, u) \mid u \in A\} && (14.3.5)\\ &= d(s, t) + d(t, A) && (14.3.6) \end{aligned}$$

である。$x, y \in A$ とする。$d(x, A) - d(y, A) \geq 0$ の場合、

$$\begin{aligned} |d(x, A) - d(y, A)| &= d(x, A) - d(y, A) && (14.3.7)\\ &\leq d(x, y) && (14.3.8) \end{aligned}$$

である。$d(x, A) - d(y, A) < 0$ の場合、

$$\begin{aligned} |d(x, A) - d(y, A)| &= d(y, A) - d(x, A) && (14.3.9)\\ &\leq d(y, x) && (14.3.10)\\ &= d(x, y) && (14.3.11) \end{aligned}$$

である。したがって補題の主張が示せた。 □

1 点と部分集合との間の距離から定まる関数は連続である。

定理 14.3.4. (X, d) を距離空間、$\varnothing \neq A \subset X$ とする。このとき、関数

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, A) \tag{14.3.12}$$

は連続である。

証明　系 12.2.2 より各点 $x_0 \in X$ で $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$ を示せばよく、そのために命題 12.1.2 の特徴付けを用いる。$\varepsilon > 0$ とする。$\delta := \varepsilon$ とおく。上の補題より $d(x, x_0) < \delta$ なる任意の $x \in X$ に対し $|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0) < \delta = \varepsilon$ だから $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$ が成り立つ。したがって f は x_0 で、ひいては X 上で連続である。 □

定義 14.3.5 (集合の直径). (X, d) を距離空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対し

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) \in \mathbb{R} \mid x, y \in A\} \tag{14.3.13}$$

を A の**直径 (diameter)** という。ただし、$A = \varnothing$ のときは $\delta(\varnothing) = 0$ と約束する [4]。

距離空間のコンパクト部分集合においては開被覆の Lebesgue 数の概念が定義できる。

定理 14.3.6 (Lebesgue 数の補題). (X, d) を距離空間、$A \subset X$ をコンパクト部分集合とする。このとき、X における A の任意の開被覆 $\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $a \in A$ の X における δ-近傍は $\mathcal{U}$ のある元に含まれる。この δ を $\mathcal{U}$ の **Lebesgue 数 (Lebesgue number)** という。

証明　A はコンパクトだから $\mathcal{U}$ の有限部分被覆 $U_1, \dots, U_n$ が存在する。ここで、ある $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $U_i = X$ が成り立つならば、たとえば $\delta = 1$ とおけば各 $a \in A$ の X における δ-近傍は $U_i = X$ に含まれるから証明が完結する。

すべての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $U_i \neq X$ の場合を考える。各 i に対し $U_i \neq X$ ゆえに $U_i^c \neq \varnothing$ だから

$$f_i \colon A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, U_i^c) \tag{14.3.14}$$

と定めることができ、定理 14.3.4 より f_i は連続である。したがって $f(x) := f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ も連続である。ここで、$f(x) > 0$ $(\forall x \in A)$ であることを示す。まず、すべての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し f_i の定義より $f_i(x) \geq 0$ である。また、$U_1, \dots, U_n$ が X における A の被覆であることよりある $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $x \in U_i$ が成り立つ。したがって $f_i(x) = d(x, U_i^c) > 0$ である。

$\because$　もし $d(x, U_i^c) = 0$ ならば、1 点と部分集合との間の距離の定義より、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $y \in U_i^c$ が存在して $d(x, y) < \varepsilon$ が成り立つ。よって X における x の近傍はすべて U_i^c と交わる。したがって閉包の性質より $x \in \mathrm{Cl}_X U_i^c$ であるが、いま $U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$ ゆえに $U_i^c \overset{\text{closed}}{\subset} X$ だから $x \in \mathrm{Cl}_X U_i^c = U_i^c$ が成り立つ。これは $x \in U_i$ であることに矛盾。 //

したがって $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) > 0$ $(\forall x \in A)$ がいえた。さて、ここで $\alpha := \inf_{x \in A} f(x)$ とおくと $\alpha > 0$ である。

$\because$　$f > 0$ より $\alpha \geq 0$ であることはよい。$\alpha = 0$ であったとすると $0 = \alpha \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}} f(A)$ であるが、いま f はコンパクト空間 A から Hausdorff 空間 $\mathbb{R}$ への連続写像であるから閉写像であり (定理 8.1.7)、したがって $0 = \alpha \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}} f(A) = f(A)$ となり、$f(x) > 0$ $(\forall x \in A)$ に反する。 //

そこで $\delta := \dfrac{\alpha}{n}$ (> 0) とおき、これが求める δ となることを示す。そこで $a \in A$ とし、a の X における δ-近傍 $B_\delta(a)$ を考える。α の定義より $f(a) \geq \alpha$ だから、f の定義よりある $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在して $f_i(a) \geq \dfrac{\alpha}{n} = \delta$ が成り立つ。一方、開球の定義より各 $x \in B_\delta(a)$ は $d(x, a) < \delta$ をみたす。したがって補題 14.3.3 より $d(x, U_i^c) \geq d(a, U_i^c) - d(x, a) > \delta - \delta = 0$ が成り立つ。よって $x \in U_i$ であり、$B_\delta(a) \subset U_i$ がいえた。 □

定義 14.3.7 (全有界). (X, d) を距離空間とする。$A \subset X$ が**全有界 (totally bounded)** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、有限個の ε-開球で A を被覆できることをいう。

命題 14.3.8 (全有界ならば有界). 距離空間が全有界ならば有界である。逆は一般には成立しない。

4) $A = \varnothing$ の場合の直径の定義は文献によって異なり、$\delta(\varnothing) = \infty$ とする場合もある。

証明 [TODO] □

命題 14.3.9 (全有界と Cauchy 列). (X, d) を距離空間とする。このとき次は同値である:

(1) X は全有界である。
(2) X の任意の点列は Cauchy 部分列を持つ。

証明 (1) ⇒(2) X を被覆する有限個の ε-開球のうち少なくとも 1 個は点列の無限個の点を含むから、それを部分列とすればよい。

(2) ⇒(1) 対偶を示す。被覆の外にある点を選びながら ε-開球を 1 個ずつ付け加えていくことで点列を構成すればよい。 □

14.4 完備距離空間

距離空間の完備性を定義する。

定義 14.4.1 (完備). (X, d) を距離空間とする。X が**完備 (complete)** であるとは、X 内の任意の Cauchy 列が収束することをいう。

定理 14.4.2 (コンパクト空間の特徴づけ). (X, d) を距離空間とする。このとき次は同値である:

(1) X はコンパクトである。
(2) X は点列コンパクトである。
(3) X は完備かつ全有界である。

証明 (3) ⇒(2) 全有界性より命題 14.3.9 から任意の点列は Cauchy 部分列を持ち、完備性よりそれは収束する。よって点列コンパクトである。

[TODO] □

定理 14.4.3 (Arzelà-Ascoli). X をコンパクトハウスドルフ空間、$C(X)$ を X 上の実数値連続関数全体の集合に一様収束位相を入れた位相空間とする。このとき、関数列 $(f_n)_n \subset C(X)$ に関し次は同値である:

(1) $(f_n)_n$ は相対コンパクトである。すなわち、$(f_n)_n$ は X 上一様収束する部分列を持つ。
(2) $(f_n)_n$ は一様有界かつ同程度連続である。

証明 [TODO] □

14.5　演習問題

♤ **演習問題 14.1** (東大数理 2007A). A, B を $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分集合、U を $\mathbb{R}^2$ の開集合であって $A \times B \subset U$ なるものとする。このとき、$\mathbb{R}$ の開集合 V, W であって $A \times B \subset V \times W \subset U$ をみたすものが存在することを示せ。

演習問題の解答

演習問題 6.1 の解答. $(X, \leq)$ を全順序集合とし、順序位相を入れる。$x, y \in X$, $x \neq y$ とする。一般性を失うことなく $x < y$ としてよい。開区間 (x, y) が空集合の場合 $(\leftarrow, y) \cap (x, \rightarrow) = \varnothing$ だから、$(\leftarrow, y), (x, \rightarrow)$ が x, y を分離する開集合となる。(x, y) がある元 $z \in (x, y)$ を含む場合、$(\leftarrow, z), (z, \rightarrow)$ が x, y を分離する開集合となる。以上より $(X, \leq)$ の順序位相は Hausdorff であることがいえた。 □

演習問題 8.1 の解答. [TODO] 実数を使わない例？反例を挙げる。I_a, I_b を閉区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ の 2 つのコピーとする。直和 $I_a \amalg I_b =: X$ 上の同値関係 $\sim$ を $(a, t) \sim (b, t)$ $(t \in [0, 1))$ により生成されるもので定め、$\sim$ による等化空間を Y、標準射影 $X \to Y$ を π とおく。$\pi(I_a)$ はコンパクト空間 I_a の連続写像 π による像だからコンパクトである。一方、$\pi(I_a)$ は Y の閉集合でないことを示す。X の部分集合 $\{(a, 1)\}$ は X の開集合でないから、$\{\pi((a, 1))\}$ は Y の開集合でない。したがって $\pi(I_a) = Y \setminus \{\pi((a, 1))\}$ は Y の閉集合でない。よって Y が求める反例になっている。 □

演習問題 14.1 の解答. A, B は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合だから $A \times B$ は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である。いま $\{U\}$ は $\mathbb{R}^2$ における $A \times B$ の開被覆であるから、Lebesgue 数の補題よりある $\delta > 0$ が存在して、任意の $(a, b) \in A \times B$ に対し (a, b) の $\mathbb{R}^2$ における δ-近傍 $B_\delta(a, b)$ は U に含まれる。ここで $\mathbb{R}$ の開集合 V, W を $V := \bigcup_{a \in A} B_{\delta/2}(a)$, $W := \bigcup_{b \in B} B_{\delta/2}(b)$ で定める。これらが求める V, W であることを示す。まず $A \subset V$, $B \subset W$ より $A \times B \subset V \times W$ が成り立つ。つぎに $(v, w) \in V \times W$ とすると、V, W の定義よりある $a \in A$, $b \in B$ が存在して $v \in B_{\delta/2}(a)$, $w \in B_{\delta/2}(b)$ が成り立つ。したがって

$$
\begin{aligned}
\|(v, w) - (a, b)\|^2 &\leq (v - a)^2 + (w - b)^2 && (14.5.1)\\
&< \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 && (14.5.2)\\
&= \frac{\delta^2}{2} && (14.5.3)\\
&< \delta^2 && (14.5.4)\\
\therefore \quad \|(v, w) - (a, b)\| &< \delta && (14.5.5)
\end{aligned}
$$

を得る。よって $(v, w) \in B_\delta(a, b) \subset U$ である。したがって $V \times W \subset U$ もいえた。 □

参考文献

[noa23] **Construction of the real numbers**, February 2023, Page Version ID: 1136759173.

[Rot98] Joseph J. Rotman, **An introduction to algebraic topology**, Springer, 1998.

[Wil04] Stephen Willard, **General topology**, Dover Publications, 2004.

[杉 80] 光夫 杉浦, **解析入門 i（基礎数学 2）**, 東京大学出版会, 1980.

記号一覧

索引