第 1 章　2 階線型常微分方程式の級数解

同次の 2 階線型常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.0.1}$$

を考えよう。この方程式の解はべき級数として求めることができる。

1.1　正則点における級数解

定義 1.1.1 (4.1.1 正則点). 方程式 (1.0.1) の**正則点**とは、$|x-a| < {}^{\exists}R$ で $p(x), q(x)$ がべき級数で表せる点をいう。正則点でない点を**特異点**という。

定理 1.1.2 (4.1.2 正則点での級数解の存在). $x = a$ が方程式 (1.0.1) の正則点であるとき、級数解

$$\begin{gathered} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \\ (c_0 = y(a),\ c_1 = y'(a) \text{ は任意に決める}) \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

が一意的に存在し、$|x-a| < R$ で広義一様に絶対収束する。

展開係数は、もとの方程式にべき級数を代入することで漸化式の形で求まる。

証明.　まず必要条件から展開係数を決め、そうして定まった級数が或る $R > 0$ に対し $|x-a| < R$ で広義一様に絶対収束することを示せばよい。 □

1.2　確定特異点における級数解

定義 1.2.1 (4.2.1 確定特異点).

(1)　方程式 (1.0.1) の**確定特異点**とは、特異点であって、$0 < |x-a| < {}^{\exists}R$ で

$$\begin{aligned} (x-a)p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n \\ (x-a)^2 q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

と書ける点をいう。

(2)　多項式

$$f(t) := t(t-1) + p_0 t + q_0 \tag{1.2.2}$$

を**決定多項式**といい、その根を**特性指数**という。

定理 1.2.2 (4.2.2 確定特異点での級数解の存在). 任意の正整数 n に対し $f(\lambda+n)\neq 0$ のとき、級数解

$$y(x)=(x-a)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \tag{1.2.3}$$

が c_0 を決めると一意的に存在し、級数の部分は $|x-a|<R$ で広義一様に絶対収束する。

展開係数は、もとの方程式にべき級数を代入することで漸化式の形で求まる。

証明. まず必要条件から展開係数を決め、そうして定まった級数が或る $R>0$ に対し $|x-a|<R$ で広義一様に絶対収束することを示せばよい。 □

定理 4.2.2 の仮定からわかるように、確定特異点での級数解を求めるにあたっては、特性指数の差が整数か否かという点が重要である。以下、$N:=\lambda_+-\lambda_-\geq 0$ とおく。

系 1.2.3 (4.2.3 N が整数でない場合の基本解). N は整数でないとする。$c_0=d_0=1$ である級数解

$$\begin{aligned}y_+(x)&=(x-a)^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\\ y_-(x)&=(x-a)^{\lambda_-}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

が存在し、これらは $0<x-a<R$ における基本解をなす。

区間 $-R<x-a<0$ と $0<x-a<R$ ではそれぞれ独立に任意定数をとれるため、「$0<|x-a|<R$ で基本解をなす」と言うことはできない。

証明. 系の仮定より $f(\lambda_++n),\ f(\lambda_-+n)\neq 0$ であるから、定理 4.2.2 が適用できて、級数 (1.2.4) が構成できる。あとは線型独立性をいえばよい。 □

定理 1.2.4 (4.2.4 N が整数の場合の基本解). N は非負整数であるとする。$c_0=d_0=1,\ c=\mathrm{Const.}$ である級数解

(1) $N=0$ のとき

$$\begin{aligned}y_+(x)&=(x-a)^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\\ y_-(x)&=y_+(x)\log(x-a)+(x-a)^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

(2) $N>0$ のとき

$$\begin{aligned}y_+(x)&=(x-a)^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\\ y_-(x)&=cy_+(x)\log(x-a)+(x-a)^{\lambda_+}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

が存在し、これらは $0<x-a<R$ における基本解をなす。

証明. λ_+ の方は $f(\lambda_+ + n) \neq 0$ をみたすので、定理 4.2.2 によって $y_+(x)$ が構成できる。また、$y_-(x)$ が構成されたとすれば $y_\pm(x)$ は確かに線型独立であることが示せるので、あとは $y_-(x)$ を構成すればよい。 □

以上をまとめると、級数解を求める手順は以下の通りである。

(1) 考えている点が正則点か確定特異点かを判定し、
(2) （確定特異点の場合のみ）決定多項式から特性指数を求め、
(3) （確定特異点の場合のみ）特性指数の差が整数か否かに応じて基本解の形を決め、
(4) もとの微分方程式に代入して係数を決める。

なお、決定多項式を得るには p_0, q_0 を求めなければならないが、これらは $(x-a)\,p(x),\ (x-a)^2 q(x)$ に $x = a$ を代入した値に他ならない。

♤ **演習問題 1.1** (4.2.5). $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

$$x^2 y'' - (a+b-1)xy' + aby = 0 \tag{1.2.7}$$

の基本解を求めよ。

♤ **演習問題 1.2** (4.2.6). $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし、c は整数でないとする。このとき $x = 0$ のまわりでの

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 \tag{1.2.8}$$

の基本解を求めよ。

ポッホハマー記号 $(e)_n$

$$(e)_0 \coloneqq 1, \quad (e)_n \coloneqq e(e+1)\cdots(e+n-1) \quad (n \geq 1) \tag{1.2.9}$$

を用いて表される**ガウスの超幾何級数**

$$F(a,b,c;x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n (c)_n} x^n \tag{1.2.10}$$

を用いて解が表される。

♤ **演習問題 1.3** (合流型超幾何微分方程式). α, γ を定数とし、$\gamma \notin -\mathbb{N}$ とする。

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{1.2.11}$$

の $x = 0$ における特性指数 0 の解を求めよ。

♤ **演習問題 1.4.** **[?**] 第 5 章例題 1-3 を読者の演習問題とする。