

第1章 向き

多様体の向きについて定義する。多様体の向きは、次章で多様体上での積分を定義するにあたり不可欠な概念である。向きに関する用語の定義は微妙で捉えがたいところがあって難しい。

1.1 ベクトル空間の向き

この章の後半では多様体の向きを接空間の向きに基づいて決める。そこで、まずベクトル空間の向きを定義する。

定義 1.1.1 (ベクトル空間の向き). V を 1 次元以上のベクトル空間とする。 V の順序基底全体の集合上の同値関係 \sim を

$$B \sim B' \quad :\Leftrightarrow \quad B \text{ から } B' \text{ への基底の変換行列の行列式が正} \quad (1.1.1)$$

と定める。この同値関係に関する同値類を V のベクトル空間としての**向き (orientation)** という。

定義から明らかに V の向きはちょうど 2 通り存在する。そこで O, O' を V の向きとして次のように用語を定める:

- $O = O'$ のとき、 O は O' と**同じ向き**であるという。
- $O \neq O'$ のとき、 O は O' と**異なる向き**あるいは**逆の向き**であるという。

V の順序基底 B, B' に対しても同様に用語を定める。

ベクトル空間の向きは 0 でない最高次の線型形式により定めることができる。

命題 1.1.2 (最高次の線型形式により定まる向き). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, V を r 次元ベクトル空間、 $\omega \in \bigwedge^r V^*$, $\omega \neq 0$ とする。このとき、 V の順序基底 B, B' に関し $B \sim B'$ であることと $\omega(B)/\omega(B') > 0$ であることは同値である。したがってとくに $\omega \neq 0$ が与えられたとき $\omega(B) > 0$ となる順序基底 B をひとつ選ぶことで V の向きが well-defined に決まる。

証明 [TODO]

□

定義 1.1.3 (向きづけられたベクトル空間). V を 1 次元以上のベクトル空間とする。 V が**向きづけられた (oriented)** ベクトル空間であるとは、 V の向きがひとつ与えられていることをいう。この向きを V の**正の向き (positive orientation)** といい、正の向きと逆の向きを**負の向き (negative orientation)** という。

\mathbb{R}^r には標準的な向きが存在する。

定義 1.1.4 (標準的な向き). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。 \mathbb{R}^r の標準基底により定まる向きを \mathbb{R}^r の**標準的な向き (standard orientation)** という。

定義 1.1.5 (向きを保つ線型写像). $(V, O), (V', O')$ を向きづけられた 1 次元以上のベクトル空間とする。線型写像 $f: V \rightarrow V'$ がベクトル空間の向きを保つ (**orientation-preserving**) とは、順序基底 $B \in O, B' \in O'$ をひとつずつ選んだとき f の B, B' に関する行列表示の行列式が正であることをいう。これは B, B' の選び方によらず well-defined である。

同様に、行列式が負になるとき向きを反転する (**orientation-reversing**) という。

1.2 ベクトル束の向き

ベクトル束の向きを定義する。ベクトル束の向きとは、各ファイバーへの"連続的"な向きの割り当てに他ならない。

定義 1.2.1 (ベクトル束の向き¹⁾). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E \rightarrow M$ をランク r のベクトル束とする。 E のベクトル束としての向き (**orientation**) とは、各 $x \in M$ に対し E_x の (ベクトル空間としての) 向き O_x を割り当てる対応 O であって次をみたすものをいう:

- (1) 各 $x \in M$ に対し、 x のある開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} M$ と U 上の E のある局所自明化 $\varphi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ が存在して、各 $x' \in U$ に対し線型写像 $\varphi(x'): E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^r$ は向きを保つ。ただし $E_{x'}$ は $O_{x'}$ で向きづけられているとし、右辺は \mathbb{R}^r の標準的な向きを考える。

E の向き O, O' がすべての $x \in M$ に対し E_x の同じ向きを割り当てるとき、 O, O' は**同じ向き**であるといい、同じ向きでないとき**異なる向き**であるという。

各ファイバーの向きを保つ局所自明化を整合的であるという。

定義 1.2.2 (整合的な局所自明化). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E \rightarrow M$ をランク r のベクトル束、 O を E の向きとする。局所自明化 (U, φ) が向き O と**整合的**であるとは、すべての $x \in U$ に対し線型写像 $\varphi(x): E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$ が向きを保つことをいう。ただし E_x は O_x で向きづけられているとし、右辺は \mathbb{R}^r の標準的な向きを考える。

ベクトル空間の場合と異なり、一般にベクトル束は向きを持つとは限らない。

定義 1.2.3 (ベクトル束の向きづけ可能性). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E \rightarrow M$ をランク r のベクトル束とする。 E がベクトル束として**向きづけ可能** (**orientable**) であるとは、 E のベクトル束としての向きが少なくともひとつ存在することをいう。 E が向きづけ可能でないとき、 E は**向きづけ不可能** (**nonorientable**) であるという。

定義 1.2.4 (向きづけられたベクトル束). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, E \rightarrow M$ をランク r のベクトル束とする。 E が**向き付けられた** (**oriented**) ベクトル束であるとは、 E の向きがひとつ与えられていることをいう。

E の向きづけ可能性は様々な方法で特徴付けることができる。

定理 1.2.5 (ベクトル束の向きづけ可能性の特徴付け). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, M$ をパラコンパクトな多様体、 $\pi: E \rightarrow M$ をランク r ベクトル束とする。このとき次は同値である:

1) この定義は [MS74] に依った。

- (1) E はベクトル束として向きづけ可能である。
 (2) $\bigcup U_\alpha = M$ なる E の局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在し、これにより定まる変換関数 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ について

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \text{に対し} \quad \det \varphi_{\alpha\beta} > 0 \quad (\text{on } U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.2.1)$$

が成り立つ。

- (3) $\bigwedge^r E$ は自明束である²⁾。
 (4) $\bigwedge^r E^*$ は自明束である。
 (5) nonvanishing な $\bigwedge^r E^*$ の大域切断が存在する。

ただし切断 ω が **nonvanishing** であるとは、定義域の各点 x に対し「 ω_x は零写像でない」が成り立つことをいう。

証明 (1) \Rightarrow (2) 明らか。

(2) \Rightarrow (1) 各 $x \in M$ に対し、 x の属するチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ をひとつ選んで線型写像 $\varphi(x)^{-1}: \{x\} \times \mathbb{R}^r \rightarrow E_x$ が向きを保つように E_x の向きを定めればよい。これは $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の選び方によらず well-defined である。

(3) \Rightarrow (2) [TODO] 書き直す

(2) \Rightarrow (3) [TODO] ここでパラコンパクト性を用いる

(3) \Leftrightarrow (4) $\bigwedge^r E$ が自明であることと $\bigwedge^r E^*$ が自明であることは同値である。[TODO] 本当に？

(4) \Leftrightarrow (5) nonvanishing な $\bigwedge^r E^*$ の大域切断は $\bigwedge^r E^*$ の大域フレームに他ならない。したがって、そのような大域切断が存在することは $\bigwedge^r E^*$ が自明束であることと同値である。

[TODO]

□

定理 1.2.5 の証明によれば、局所自明化の族を与えることでベクトル束を向きづけできることがわかる。

定義 1.2.6 (局所自明化の族が定める向き). 局所自明化の族 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が定理 1.2.5 の (2) の条件をみたすとき、 \mathcal{U} は E に向きを定める という。さらにこのとき、定理 1.2.5 の (2) の証明のようにして定まる E の向きを \mathcal{U} の定める E の向き という。

[TODO] self-contained に書く

1.3 多様体の向き

多様体の向きは接束のベクトル束としての向きとして定義される。

定義 1.3.1 (多様体の向き). M を多様体とする。 TM の向きを M の多様体としての向き (orientation) という。 M の多様体としての向きに関する用語は TM のベクトル束としての向きに関する用語を援用して定義する。

多様体に向きが定まると、それぞれのチャートが多様体の向きと整合的かどうかという概念が定義できる。

2) 最高次の外積束 $\bigwedge^r E$ は行列式直線束 (determinant line bundle) と呼ばれる。cf. ??

定義 1.3.2 (整合的なチャート). M を r 次元多様体、 O を TM の向きとする。 M のチャート (U, φ) が向き O と整合的であるとは、各 $x \in U$ に対し線型写像 $d\varphi_x: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$ が向きを保つことをいう。ただし $T_x M$ は O_x で向きづけられているとし、右辺は \mathbb{R}^r の標準的な向きを考える。

多様体の向きづけ可能性は座標変換の Jacobi 行列を用いて特徴付けることができる。

命題 1.3.3 (多様体の向きづけ可能性の特徴付け). M を多様体とする。次は同値である:

- (1) M は多様体として向きづけ可能である。
- (2) M のあるアトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在して、これにより定まる変換関数 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ について

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \text{に対し} \quad \det D\varphi_{\alpha\beta} > 0 \quad \text{on } \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.3.1)$$

が成り立つ。

証明 M のアトラスと TM の局所自明化の族の対応から明らか。 □

ベクトル束の場合と同様に、上の命題のようなアトラスを与えることで多様体を向きづけできることがわかる。

定義 1.3.4 (アトラスが定める向き). アトラス $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が上の命題の (2) の条件をみたすとき、 \mathcal{U} は M に向きを定める という。さらにこのとき、上の命題の証明のようにして定まる M の向きを \mathcal{U} の定める M の向き という。

また、体積形式とよばれる微分形式でも多様体を向きづけることができる。

定義 1.3.5 (体積形式). M を向きづけられた多様体とする。 M 上の nonvanishing な最高次形式を M の体積形式 (volume form) といい、 $d\text{vol}$ や vol と書く。

定義 1.3.6 (体積形式が定める向き). M を向きづけ可能な n 次元多様体、 ω を M の体積形式とする。このとき、次のようにして M に向きを定めることができる。

各 U_α が連結であるような TM の局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ をひとつ選び、 $(E_{\alpha 1}, \dots, E_{\alpha n})$ を φ_α により定まる TM の局所フレームとする。このとき、連結性より各 U_α 上で $s_\alpha := \omega(E_{\alpha 1}, \dots, E_{\alpha n})$ の値はつねに正またはつねに負である。そこで

$$(B_{\alpha 1}, \dots, B_{\alpha n}) := \begin{cases} (E_{\alpha 1}, E_{\alpha 2}, \dots, E_{\alpha n}) & (s_\alpha > 0) \\ (-E_{\alpha 1}, E_{\alpha 2}, \dots, E_{\alpha n}) & (s_\alpha < 0) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

とおき、各 $x \in U_\alpha$ に対し E_x の順序基底 $(B_{\alpha 1}(x), \dots, B_{\alpha n}(x))$ により定まる向きを割り当てることで TM に向きを定める。これで M の多様体としての向きが定まった。この向きは局所自明化の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ の選び方によらず well-defined である。

このように定まる M の向きを ω の定める M の向き という。

微分が全単射な C^∞ 写像は接空間の基底を基底に写すから、向きを保つ C^∞ 写像という概念が定義できる。

定義 1.3.7 (向きを保つはめ込み). $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, M, N を向きづけられた r 次元多様体、 $f: M \rightarrow N$ をはめ込みとする。

- f が向きを保つ (**orientation-preserving**) とは、各 $p \in M$ に対し線型写像 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ が向きを保つことをいう。
- f が向きを反転する (**orientation-reversing**) とは、各 $p \in M$ に対し線型写像 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ が向きを反転することをいう。

開部分多様体など、余次元 0 の部分多様体には自然に向きが定まる。

定義 1.3.8 (余次元 0 の部分多様体に自然に定まる向き). [TODO]

境界付き多様体の境界には自然なやり方で向きが定まる。

定義 1.3.9 (境界としての向き). M を n 次元境界付き多様体とし、 M はアトラス $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ により向きづけられているとする。

- (1) \mathbb{R}_+^n の標準的な座標を $x = (x^1, \dots, x^n)$ とおく。このとき、 $\partial \mathbb{R}_+^n$ のアトラス $\{(\partial \mathbb{R}_+^n, (x^2, \dots, x^n))\}$ は $\partial \mathbb{R}_+^n$ に向きを定める。この向きを \mathbb{R}_+^n の境界としての $\partial \mathbb{R}_+^n$ の向きという。
- (2) ∂M のアトラス $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を

$$V_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \partial \mathbb{R}_+^n) \quad (1.3.3)$$

$$\psi_\alpha := \varphi_\alpha|_{V_\alpha} \quad (1.3.4)$$

で定めると、これは ∂M に向きを定める。これを M の境界としての ∂M の向き という。

証明 [TODO]

□

1.4 演習問題

◇ 演習問題 1.1 (幾何学 III 問 4.1.6). 次を示せ:

- (1) 自明束はベクトル束として向きづけ可能である。
- (2) $\pi: E \rightarrow S^1$ を Möbius 束とすると E は向きづけ不可能であることを示せ。

演習問題 1.1 の解答. (1) $E \rightarrow M$ を自明束とすると大域自明化 $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^r$ が存在する。 $\varphi \circ \varphi^{-1}: M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M \times \mathbb{R}^r$ は恒等写像だから、各 $p \in M$ に対し $\det(\varphi \circ \varphi^{-1}(p)) = \det I_r = 1 > 0$ が成り立つ。したがって E は向きづけ可能である。

(2) E が向きづけ可能であったとすると、 E はランク 1 ゆえに自明束となるから $S^1 \times \mathbb{R}$ と微分同相、とくに同相となり位相空間の一般論に矛盾する。□

◇ 演習問題 1.2 (幾何学 III 問 4.1.7). ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ が向きづけ可能ならば双対束 $\pi^*: E^* \rightarrow M$ も向きづけ可能であることを示せ。

演習問題 1.2 の解答. [TODO] □

◇ 演習問題 1.3 (幾何学 III 問 5.2.6). M を多様体とする。 M が連結かつ向きづけ可能ならば向きはちょうど 2 通りあることを示せ。

演習問題 1.3 の解答. [TODO] □

◇ 演習問題 1.4 (幾何学 III 演習問題 2 1.2). M, N を次元の等しい多様体とし、いずれも向きづけられているとする。はめ込み $f: M \rightarrow N$ が向きを保つことと、任意の $p \in M$ について p の周りの M の向きと整合的なチャート (U, φ) を $f|_U$ が埋め込みであるように選んだとき、 $f(p)$ の周りの座標近傍 $(f(U), \varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})$ が N の向きと整合的であることは同値であることを示せ。

演習問題 1.4 の解答. (\Rightarrow) $f(x) \in f(U)$ とする。 $d(\varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)} = d\varphi_x \circ d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)}$ であるが、 (U, φ) が M に与えられた向きと整合的であることから $d\varphi_x$ は向きを保ち、また f が向きを保つはめ込みであることから $d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$ も向きを保つので $d(\varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(x)}$ は向きを保つ。したがって $(f(U), \varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})$ は N の向きと整合的である。

(\Leftarrow) $p \in M$ とし、 M に与えられた向きと整合的なチャート (U, φ) をひとつ選ぶ。 f ははめ込みだから df_p は単射であるが、いま $\dim M = \dim N$ だから df_p は全単射である。したがって逆関数定理 (??) より f は局所微分同相である。そこで必要ならば U を小さくとりなおして $f|_U: U \rightarrow f(U)$ は微分同相であるとしてよい。このとき $(f(U), \varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})$ は N のチャートとなるが、問題の仮定よりこれは N に与えられた向きと整合的である。したがって $d(\varphi \circ f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)} = d\varphi_p \circ d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)}$ は向きを保つ。このことと $d\varphi_p$ が向きを保つ ($\because (U, \varphi)$ は M の向きと整合的) ことから $(df_p)^{-1} = d(f^{-1}|_{f(U)})_{f(p)}$ は向きを保ち、したがって df_p は向きを保つ。よって f は向きを保つ。□

♠ 演習問題 1.5 (東大数理 2006B). 3次元ユークリッド空間内の単位球面を考える。単位球面上の円全体の集合を M とする。ただし、単位球面上の円とは、3次元ユークリッド空間内の平面と単位球面との共通部分で、空集合でも1点でもないものである。以下、 n 次元実射影空間を $\mathbb{R}P^n$ であらわす。

- (1) M から2次元実射影空間 $\mathbb{R}P^2$ への全射を具体的に一つ構成せよ。全射であることも示せ。
- (2) M から3次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ への単射で、像が $\mathbb{R}P^3$ の開集合となるものを具体的に一つ構成せよ。単射で、像が開集合であることも示せ。
- (3) M に (2) の対応で与えられる $\mathbb{R}P^3$ の開集合としての微分可能多様体の構造を考える。 M は向き付け可能であるかどうか理由とともに述べよ。

演習問題 1.5 の解答. [TODO]

□

第2章 多様体上の積分

多様体上の積分を定義する。

2.1 積分

多様体上での積分として、コンパクト台をもつ最高次形式の積分を定義する。

A. 積分の定義と基本性質

まず Euclid 空間における最高次形式の積分を定義する。これが一般の多様体における積分の定義の基礎となる。

定義 2.1.1 (コンパクト台を持つ最高次形式の積分 (Euclid 空間)). \mathbb{R}^n の標準的な座標を $x = (x_1, \dots, x_n)$ 、 ω をコンパクト台を持つ \mathbb{R}^n 上の (連続) 最高次形式とする。このとき ω は

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (2.1.1)$$

の形に一意的に表せる。さて、 $\text{supp } \omega \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] =: I$ なる多重有界閉区間 $I \subset \mathbb{R}^n$ をひとつ選び、 ω の \mathbb{R}^n 上の**積分 (integration)** を

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.1.2)$$

で定義する。ただし、右辺は \mathbb{R}^n の Lebesgue 測度に関する積分である。このとき $\int_{\mathbb{R}^n} \omega$ の値は I の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

[TODO] Lebesgue 積分で定義するならわざわざ多重有界閉区間を持ち出さずとも可測集合 $\text{supp } \omega$ 上の積分で定義すればよいのでは？

証明 [TODO]

□

Euclid 空間の最高次形式の積分は向きを保つ/反転する微分同相に関し次の性質を持つ。

命題 2.1.2. $U, V \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ 、 ω を V 上のコンパクト台をもつ最高次形式とする。このとき、 $G: U \rightarrow V$ を向きを保つ微分同相とすると

$$\int_V \omega = \int_U G^* \omega \quad (2.1.3)$$

が成り立ち、 $G: U \rightarrow V$ を向きを反転する微分同相とすると

$$\int_V \omega = - \int_U G^* \omega \quad (2.1.4)$$

が成り立つ。

証明 [TODO]

□

2. 多様体上の積分

Euclid 空間の最高次形式の積分を用いて多様体上の最高次形式の積分を定義する。

定義 2.1.3 (コンパクト台を持つ最高次形式の積分 (多様体)). M を向きづけられた n 次元多様体、 ω をコンパクト台を持つ M 上の (連続) 最高次形式とする。 M の向きと整合的な有限個のチャートの族 $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ であって $\text{supp } \omega = \bigcup_i U_i$ なるものをひとつ選び、さらに \mathcal{U} に従属する 1 の分割 $\{\rho_i\}_i$ をひとつ選ぶ。 ω の M 上の積分 (integration) を

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega) \quad (2.1.5)$$

で定義する。ただし、 $(\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega)$ は定義域の外での値を 0 とおくことで \mathbb{R}^n 上まで拡張する。このとき、 $\int_M \omega$ の値は \mathcal{U} や $\{\rho_i\}$ の選び方によらず well-defined に定まる (このあと示す)。

証明 [TODO]

□

最高次形式の積分は次の性質を持つ。

命題 2.1.4 (積分の基本性質). M, N を向きづけられた n 次元多様体、 ω, η を M 上のコンパクト台をもつ最高次形式とする。このとき次が成り立つ:

(1) (線型性) $a, b \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta \quad (2.1.6)$$

が成り立つ。

(2) (向きの反転) M と反対の向きを持つ多様体を $-M$ と書くことにすれば

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega \quad (2.1.7)$$

が成り立つ。

(3) (正値性) ω が常に正の向きの体積形式 [TODO] とは? ならば

$$\int_M \omega > 0 \quad (2.1.8)$$

が成り立つ。

(4) (微分同相不変性; Diffeomorphism Invariance) $F: N \rightarrow M$ を向きを保つ微分同相とすると

$$\int_M \omega = \int_N F^* \omega \quad (2.1.9)$$

が成り立ち、 $F: N \rightarrow M$ を向きを反転する微分同相とすると

$$\int_M \omega = - \int_N F^* \omega \quad (2.1.10)$$

が成り立つ。

証明 [TODO]

(4) $F: N \rightarrow M$ を向きを保つ微分同相とする。まず $\text{supp } \omega$ が M の向きと整合的なひとつのチャート (U, φ) に含まれる場合を考えておく。このとき $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ は N の向きと整合的なチャートである。

(\because) 実際、各 $x \in F^{-1}(U)$ に対し $d(\varphi \circ F)_x = d\varphi_{F(x)} \circ dF_x$ は向きを保つ。なぜならば、 φ が M の向きと整合的なチャートゆえに $d\varphi_{F(x)}$ は向きを保ち、また F が向きを保つ微分同相ゆえに dF_x も向きを保つからである。 //

また $\text{supp } F^* \omega \subset F^{-1}(U)$ である。

(\because) $x \notin F^{-1}(U) \implies F(x) \notin U \implies F(x) \notin \text{supp } \omega \implies \omega_{F(x)} = 0 \implies (F^* \omega)_x = 0$ //

よって

$$\int_{F^{-1}(U)} F^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} ((\varphi \circ F)^{-1})^* F^* \omega \quad (\because \text{[TODO] 1 の分割をどうとった?}) \quad (2.1.11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* (F^{-1})^* F^* \omega \quad (2.1.12)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega \quad (2.1.13)$$

$$= \int_U \omega \quad (\because \text{[TODO] 1 の分割をどうとった?}) \quad (2.1.14)$$

が成り立つ。

さて、 M の向きと整合的な有限個のチャートの族 $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ であって $\text{supp } \omega = \bigcup_i U_i$ なるものをひとつ選び、さらに \mathcal{U} に従属する 1 の分割 $\{\rho_i\}_i$ をひとつ選ぶ。すると

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* (\rho_i \omega) \quad (\because \text{定義 2.1.3}) \quad (2.1.15)$$

$$= \sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega \quad (\because \text{定義 2.1.3}) \quad (2.1.16)$$

$$= \sum_i \int_{F^{-1}(U_i)} F^* (\rho_i \omega) \quad (\because \text{前段落の議論}) \quad (2.1.17)$$

$$= \sum_i \int_{F^{-1}(U_i)} \rho_i \circ F F^* \omega \quad (\because \text{引き戻しの定義}) \quad (2.1.18)$$

$$= \int_N F^* \omega \quad (\because \text{定義 2.1.3}) \quad (2.1.19)$$

を得る。ただし最後の式変形では $\{\rho_i \circ F\}_i$ が $\text{supp } F^* \omega$ の開被覆 $\{F^{-1}(U_i)\}_i$ に従属する 1 の分割であることを用いた。

F が向きを反転する場合は、 $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を向きを反転する微分同相として $(F^{-1}(U), \sigma \circ \varphi \circ F)$ が N の向きと整合的なチャートとなるから、命題 2.1.2 より式 (2.1.11) の部分で符号が反転して最終的に $\int_m \omega = - \int_N F^* \omega$ が得られる。 \square

命題 2.1.5 (Integration Over Parametrizations). [TODO]

証明 省略

\square

例 2.1.6 (積分計算の例). [TODO] cf. [Lee] p.409

B. 線積分

線積分は \mathbb{R} の有界閉区間上の微分形式の積分である。

定義 2.1.7 (線積分). [TODO] 直接の場合と曲線で引き戻した場合

定義 2.1.8 (区分的に C^∞ な曲線). M を多様体、 $J = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\gamma: J \rightarrow M$ を連続写像とする。 γ が区分的に C^∞ な曲線 (piecewise smooth curve) であるとは、 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ なる $t_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と C^∞ 曲線 $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ ($1 \leq i \leq k$) が存在し

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & (t \in [t_0, t_1]) \\ \gamma_2(t) & (t \in [t_1, t_2]) \\ \dots \\ \gamma_k(t) & (t \in [t_{k-1}, t_k]) \end{cases} \quad (2.1.20)$$

が成り立つことをいう。

C. 関数の積分

体積形式を用いれば、多様体上で関数の積分ができるようになる。

定義 2.1.9 (体積形式による積分). [TODO]

定義 2.1.10 (体積). M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとし、 $\mu \in \Omega^n(M)$ を体積形式とする。このとき、 μ に関する M の体積 (volume) を

$$\text{vol}_\mu(M) := \int_M \mu \quad (2.1.21)$$

で定める。

2.2 Poincaré の補題

定義 2.2.1 (閉形式と完全形式). M を多様体、 $\omega \in A^p(M)$ とする。

- ω が $d\omega = 0$ をみたすとき、 ω は閉 (closed) であるという。
- M 上の $(p-1)$ -形式 θ が存在して $\omega = d\theta$ と書けるとき、 ω は完全 (exact) であるという。

外微分作用素の性質により $dd\theta = 0$ だから、完全形式は閉形式である。

補題 2.2.2 (ホモトピー作用素 K). M を多様体とし、単位区間 I を境界をもつ多様体とみなす。写像 j_0, j_1 を

$$j_0: M \rightarrow I \times M, \quad x \mapsto (0, x) \quad (2.2.1)$$

$$j_1: M \rightarrow I \times M, \quad x \mapsto (1, x) \quad (2.2.2)$$

とおく。各 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し写像 $K: A^{p+1}(I \times M) \rightarrow A^p(M)$ を次のように定める:

- (1) $I \times M$ の局所座標を (t, x^1, \dots, x^n) とおく³⁾。
- (2) $\omega \in A^{p+1}(I \times M)$ は、いずれも dt を含まない $(p+1)$ -形式 ω_1 と p -形式 ω_2 により

$$\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2 \quad (2.2.3)$$

と一意的に表せる。

- (3) $K\omega$ を

$$K\omega := \int_0^1 dt \omega_2 \quad (2.2.4)$$

で定める。すなわち、 ω_2 を

$$\omega_2 = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.5)$$

と表したとき

$$K\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\int_0^1 a_{i_1 \dots i_p}(t, x) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.6)$$

と定める⁴⁾。

このとき

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^* \omega - j_0^* \omega \quad (\omega \in A^{p+1}(I \times M), p \geq 0) \quad (2.2.7)$$

が成り立つ⁵⁾。

証明 添字を簡素化して

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_{p+1}} a_{j_1 \dots j_{p+1}}(t, x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} + \sum_{h_1 < \dots < h_p} a_{h_1 \dots h_p}(t, x) dt \wedge dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p} \quad (2.2.8)$$

$$= \sum_J a_J(t, x) dx^J + \sum_H a_H(t, x) dt \wedge dx^H \quad (2.2.9)$$

と書く (第 1 項、第 2 項をそれぞれ $\omega_1, dt \wedge \omega_2$ とおく)。 K の \mathbb{R} -線型性より

$$K(d\omega) = K \left(\sum_J da_J \wedge dx^J + \sum_H da_H \wedge dt \wedge dx^H \right) \quad (2.2.10)$$

3) もう少し正確には、 I の chart $t: U_I \rightarrow \mathbb{R}$ と M の chart $\varphi = (x^1, \dots, x^n): U_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を用いた $I \times M$ の chart $t \times \varphi = (\tau, y^1, \dots, y^n): U_I \times U_M \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ を、同じ記号で $(\tau, y^1, \dots, y^n) = (t, x^1, \dots, x^n)$ と書いたものである。

4) 積分 $\int_0^1 a(t, x) dt$ は微分形式 $a(t, x) dt$ の積分であるが、 I の chart $t: U_I \rightarrow \mathbb{R}$ として普通の包含写像をとれば Euclid 空間での普通の積分とみなすことができる。

5) 補題のような K をチェイン写像 $j_0^*, j_1^*: A^*(M) \rightarrow A^*(M)$ の間のチェインホモトピー (chain homotopy) という。

$$= K \left(\sum_J \frac{\partial a_J}{\partial t} dt \wedge dx^J + \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J - \sum_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \wedge dx^i \wedge dx^H \right) \quad (2.2.11)$$

$$= \sum_J a_J(1, x) dx^J - \sum_J a_J(0, x) dx^J - \sum_H \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^H \quad (2.2.12)$$

および

$$d(K\omega) = d \left(\sum_H \left(\int_0^1 a_H(t, x) dt \right) dx^H \right) \quad (2.2.13)$$

$$= \sum_H d \left(\int_0^1 a_H(t, x) dt \right) \wedge dx^H \quad (2.2.14)$$

$$= \sum_H \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^H \quad (2.2.15)$$

が成り立つ。したがって

$$K(d\omega) + d(K\omega) = \sum_J a_J(1, x) dx^J - \sum_J a_J(0, x) dx^J \quad (2.2.16)$$

$$= j_1^* \omega_1 - j_0^* \omega_1 \quad (2.2.17)$$

$$= j_1^* \omega - j_0^* \omega \quad (2.2.18)$$

である。

⊙ $j_0^* \omega$ について

$$j_0^* \omega = j_0^* \omega_1 + \underbrace{d(j_0^* t)}_{j_0^* t = t \circ j_0 = \text{const. より } 0} \wedge j_0^* \omega_2 \quad (2.2.19)$$

$$= j_0^* \omega_1 \quad (2.2.20)$$

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_{p+1}} a_{j_1 \dots j_{p+1}}(0, x) d(j_0^* x^1) \wedge \dots \wedge d(j_0^* x^n) \quad (2.2.21)$$

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_{p+1}} a_{j_1 \dots j_{p+1}}(0, x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.2.22)$$

ただし最後の変形では $I \times M$ 上の関数としての x^j を M 上の関数としての x^j に引き戻した。 $j_1^* \omega$ も同様。 //

□

定理 2.2.3 (Poincaré の補題). $U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ を可縮とする。 U 上の閉形式は完全形式である。すなわち、 $\omega \in A^{p+1}(U)$ が $d\omega = 0$ をみたすならば、或る $\theta \in A^p(U)$ が存在して $\omega = d\theta$ が成り立つ。

証明 可縮性より、(連続) ホモトピー $\varphi: I \times U \rightarrow U$ と 1 点 $x_0 \in U$ が存在して

$$\varphi(1, x) = x, \quad \varphi(0, x) = x_0 \quad (2.2.23)$$

が成り立つ。図式で書けば

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{id}_U & \\
 & \curvearrowright & \\
 U & \xrightarrow{j_1} & I \times U \xrightarrow{\varphi} U \\
 & \curvearrowleft & \\
 & c_{x_0} &
 \end{array}
 \quad (2.2.24)$$

である。このとき、 φ は C^∞ であるとしてよい⁶⁾。よって

$$j_1^* \varphi^* \omega = (\varphi \circ j_1)^* \omega = (\text{id}_U)^* \omega = \omega \quad (2.2.25)$$

$$j_0^* \varphi^* \omega = (\varphi \circ j_0)^* \omega = (c_{x_0})^* \omega = 0 \quad (2.2.26)$$

である。

(\because) $x \in U$ と $v_1, \dots, v_{p+1} \in T_x U$ に対し

$$((\text{id}_U)^* \omega)_x(v_1, \dots, v_{p+1}) = \omega_x((\text{id}_U)_* v_1, \dots) \quad (2.2.27)$$

$$= \omega_x(\text{id}_{T_x U}(v_1), \dots) \quad (2.2.28)$$

$$= \omega_x(v_1, \dots) \quad (2.2.29)$$

$$((c_{x_0})^* \omega)_x(v_1, \dots, v_{p+1}) = \omega_x((c_{x_0})_* v_1, \dots) \quad (2.2.30)$$

$$= \omega_x(0, \dots) \quad (2.2.31)$$

$$= 0 \quad (2.2.32)$$

より成り立つ。

//

補題より

$$Kd(\varphi^* \omega) + d(K\varphi^* \omega) = \omega \quad (2.2.33)$$

であるが、いま $d\omega = 0$ の仮定より $d(\varphi^* \omega) = \varphi^* d\omega = 0$ だから、 K の \mathbb{R} -線型性より $Kd(\varphi^* \omega) = 0$ である。したがって

$$\underbrace{d(K\varphi^* \omega)}_{\theta} = \omega \quad (2.2.34)$$

が成り立つ。

□

系 2.2.4 (Poincaré の補題 (星型領域の場合)). $U \subset^{\text{open}} \mathbb{R}^n$ を星型領域とする。 $\omega \in A^{p+1}(U)$ が閉形式ならば Poincaré の補題より $d\theta = \omega$ なる $\theta \in A^p(U)$ が上の証明のように構成できるが、 θ は

$$\theta = \frac{1}{p!} \sum_{i_0, \dots, i_p} \left(\int_0^1 a_{i_0 \dots i_p}(tx) t^p dt \right) x^{i_0} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.35)$$

と具体的に書ける。ただし、 ω の局所座標表示を

$$\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0, \dots, i_{p+1}} a_{i_0 \dots i_{p+1}}(x) dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+1}} \quad (2.2.36)$$

6) U 内の C^∞ なホモトピーがとれることの証明には Whitney の近似定理を用いる。cf. [Lee p.142]

とした。

証明 $\theta = K(\varphi^*\omega)$ なので右辺を計算すればよい。まず U は星型だから、定理の証明の $\varphi: I \times U \rightarrow U$ として

$$\varphi(t, x) = tx \quad (2.2.37)$$

がとれる。これは明らかに C^∞ である。引き戻しの局所座標表示の公式から

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0, \dots, i_p} a_{i_0 \dots i_p}(tx) \bigwedge_{k=0}^p d(\varphi^*x^{i_k}) \quad (2.2.38)$$

である。ここで、外積の各項について

$$d(\varphi^*x^i) = d(x^i \circ \varphi) = d(tx^i) = t dx^i + x^i dt \quad (2.2.39)$$

だから、 $dt \wedge dt = 0$ に注意すれば

$$\bigwedge_{k=0}^p d(\varphi^*dx^{i_k}) = t dx^{i_0} \wedge \dots \wedge t dx^{i_p} \quad (2.2.40)$$

$$+ x^{i_0} dt \wedge \dots \wedge t dx^{i_p} \quad (2.2.41)$$

$$+ \dots \quad (2.2.42)$$

$$+ t dx^{i_0} \wedge \dots \wedge x^{i_p} dt \quad (2.2.43)$$

と展開できる。そこで

$$((2.2.38)) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_0, \dots, i_p} a_{i_0 \dots i_p}(tx) t^{p+1} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.44)$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p \sum_{i_0, \dots, i_p} a_{i_0 \dots i_p}(tx) t^p x^{i_k} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.45)$$

dt を左に移動し、さらに $a_{i_0 \dots i_p}$ の交代性を用いて

$$= (\text{第1項}) \quad (2.2.46)$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p \sum_{i_0, \dots, i_p} a_{i_k i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_p}(tx) t^p x^{i_k} dt \wedge dx^{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (2.2.47)$$

内側の総和について添字を取り替えて

$$= (\text{第1項}) \quad (2.2.48)$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^p \sum_{j_0, \dots, j_p} a_{j_0 \dots j_p}(tx) t^p x^{j_0} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad (2.2.49)$$

$$= (\text{第1項}) \quad (2.2.50)$$

$$+ \frac{1}{p!} \sum_{j_0, \dots, j_p} a_{j_0 \dots j_p}(tx) t^p x^{j_0} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad (2.2.51)$$

となる。したがって K の定義より

$$\theta = K(\varphi^*\omega) = \frac{1}{p!} \sum_{j_0, \dots, j_p} \left(\int_0^1 a_{j_0 \dots j_p}(tx) t^p dt \right) x^{j_0} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad (2.2.52)$$

を得る。

□

2.3 Stokes の定理

Stokes の定理について述べる。Stokes の定理は Hopf 不変量の定義にも用いられるという点で、微分トポロジーに重要な定理である。

定理 2.3.1. M をコンパクトかつ向きづけられた n 次元多様体、 $\iota: \partial M \rightarrow M$ を包含写像とし、 ∂M には M の境界としての向きを入れる。このとき、任意の $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ に対し

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega = \int_M d\omega \quad (2.3.1)$$

が成り立つ。

注意 2.3.2. Stokes の定理は $\partial M = \emptyset$ の場合も成り立つ。

証明 [TODO]

□

命題 2.3.3 (閉形式の積分の C^∞ ホモトピー不変性). M を多様体、 η を M 上の k 次閉形式、 K をコンパクトかつ向きづけられた k 次元多様体、 $\varphi: K \rightarrow M$, $\psi: K \rightarrow M$ を互いに C^∞ ホモトピックな C^∞ 写像とする。このとき $\int_K \varphi^* \eta = \int_K \psi^* \eta$ が成り立つ。

証明 [TODO]

□

2.4 演習問題

♠ **演習問題 2.1** ([Lee] 16-2). $T^2 := S^1 \times S^1 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1\}$ を考える。 T^2 には S^1 の標準的な向きから定まる product orientation が入っているとす。次の ω に対し $\int_{T^2} \omega$ を計算せよ。

$$\omega = xyz dw \wedge dy \quad (2.4.1)$$

演習問題 2.1 の解答. $D := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ とおき、 $F: \bar{D} \rightarrow T^2$ を

$$F(\theta, \phi) := (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi) \quad (2.4.2)$$

で定める。 $F|_D$ は D から $F(D)$ への向きを保つ微分同相であり、 $\text{supp } \omega \subset \overline{F(D)} = T^2$ をみたま。よって

$$\int_{T^2} \omega = \int_D F^* \omega \quad (2.4.3)$$

が成り立つ。ここで

$$F^* \omega = \sin \theta \cos \phi \sin \phi d(w \circ F) \wedge d(y \circ F) \quad (\because ??) \quad (2.4.4)$$

$$= \sin \theta \cos \phi \sin \phi (-\sin \theta d\theta) \wedge (-\sin \phi d\phi) \quad (\because \text{関数の微分}) \quad (2.4.5)$$

$$= \sin^2 \theta \cos \phi \sin^2 \phi d\theta \wedge d\phi \quad (\because \text{テンソル場の } C^\infty(M)\text{-多重線型性}) \quad (2.4.6)$$

だから

$$\int_D F^* \omega = \int_D \sin^2 \theta \cos \phi \sin^2 \phi \, d\theta d\phi \quad (2.4.7)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \left(\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \, d\phi \right) d\theta \quad (2.4.8)$$

$$= 0 \quad (2.4.9)$$

である。

□

🔗 演習問題 2.2 (幾何学 III 演習問題 2.2.3). M を向きづけられた n 次元多様体、 $\varphi: I \rightarrow I$ を微分同相写像とする。[TODO]

演習問題 2.2 の解答. [TODO]

□

🔗 演習問題 2.3. (x, y, z) を \mathbb{R}^3 の標準的な座標とする。また、 \mathbb{R}^3 には標準的な向きを入れる。さて、 $D \subset \mathbb{R}^3$ を

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 100\} \quad (2.4.10)$$

と定める。 D には \mathbb{R}^3 の向きから自然に定まる向きを入れる。また、 ∂D には D の境界としての向きを入れる。 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ 上の 2 形式 ω を

$$\omega := \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy \quad (2.4.11)$$

により定めるとき、 $\int_{\partial D} \omega$ を求めよ。

演習問題 2.3 の解答. [TODO]

□

🔗 演習問題 2.4.

$$\int_M \omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^g \int_{a_i} \omega \int_{b_i} \eta - \int_{a_i} \eta \int_{b_i} \omega \quad (2.4.12)$$

[TODO] <https://math.stackexchange.com/questions/425522/integral-of-wedge-product-of-two-one-forms-on-a-riemann-surface>

演習問題 2.4 の解答. [TODO]

□

第3章 de Rham コホモロジーと Čech コホモロジー

3.1 de Rham コホモロジー

de Rham コホモロジーを定義する。

定義 3.1.1 (de Rham コホモロジー群). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 、 M を多様体とし、 M 上の p -形式を考える。

- 閉じた p -形式全体のなす \mathbb{R} -ベクトル空間 $\text{Ker } d^p$ を $Z^p(M)$ と書く。
- 完全な p -形式全体のなす \mathbb{R} -ベクトル空間 $\text{Im } d^{p-1}$ を $B^p(M)$ と書く。
- 商ベクトル空間 $H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M)$ を M の p 次の **de Rham コホモロジー群** (de Rham cohomology group) という。

注意 3.1.2. de Rham コホモロジーの言葉で Poincaré の補題を言い換えると

$U \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ が可縮ならば $H^p(U) = 0$ ($p \geq 1$) である。

となる。

命題 3.1.3 (0 次 de Rham コホモロジーと連結成分). M を k 個の連結成分をもつ n 次元多様体とする。このとき $H_{\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}^k$ が成り立つ。

証明 $\omega \in Z_{\text{dR}}^0(M) = H_{\text{dR}}^0(M)$ とする。 ω は $d\omega = 0$ なる $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ の元である。局所座標で表せば

$$0 = d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x^i} dx^i \quad (3.1.1)$$

より $\frac{\partial \omega}{\partial x^i} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) が従う。したがって ω は局所定数である。よって ω は M の各連結成分上で定数であり、 $H_{\text{dR}}^0(M)$ から \mathbb{R}^k への全単射、より強く \mathbb{R} -線型同型を得る。□

定義 3.1.4 (de Rham コホモロジー環). 上の定義の状況を引き継ぐ。

- 直和ベクトル空間

$$A(M) := \bigoplus_{p \geq 0} A^p(M) \quad (3.1.2)$$

には積を外積 \wedge 、単位元を定値写像 $1 \in A^0(M)$ として環の構造が入り、 \mathbb{R} -代数となる。

- 直和ベクトル空間

$$Z(M) := \bigoplus_{p \geq 0} Z^p(M) \quad (3.1.3)$$

は外微分と外積の関係 $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta \pm \omega \wedge d\eta$ から明らかに $A(M)$ の部分環となる。

- 直和ベクトル空間

$$B(M) := \bigoplus_{p \geq 0} B^p(M) \quad (3.1.4)$$

は $Z(M)$ の両側イデアルとなる。実際、同じ公式から

$$\omega = d\theta \in B(M), \eta \in Z(M) \implies \omega \wedge \eta = d\theta \wedge \eta = d(\theta \wedge \eta) \mp \theta \wedge d\eta \quad (3.1.5)$$

が成り立つ (左からの積も同様)。

- 以上により得られる \mathbb{R} -多元環

$$H(M) := Z(M)/B(M) \quad (3.1.6)$$

を **de Rham コホモロジー環 (de Rham cohomology ring)** という。

- $H(M)$ に誘導される積を

$$\alpha \cup \beta := [\omega \wedge \eta] \quad (\alpha = [\omega], \beta = [\eta] \in H(M)) \quad (3.1.7)$$

と書いて、 α, β の **カップ積 (cup product)** という。

A. コンパクト台の de Rham コホモロジー

コンパクト台の de Rham コホモロジーを定義する。

定義 3.1.5 (コンパクト台の de Rham コホモロジー). M を多様体とする。各 $p \geq 0$ に対し

$$\Omega_c^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \text{supp } \omega \text{ はコンパクト}\} \quad (3.1.8)$$

とおくと、 $(\Omega_c^p(M), d)$ はチェイン複体となる。このチェイン複体に関するホモロジー群を $H_{\text{dR},c}^p(M)$ と書き、 M の **コンパクト台の de Rham コホモロジー (de Rham cohomology with compact support)** という。

命題 3.1.6. M は連結かつ境界をもたない n 次元多様体で向きづけられているものとする。このとき自然な \mathbb{R} -線型写像

$$\int_M : H_{\text{dR},c}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega \quad (3.1.9)$$

が定まり、さらにこれは同型である。

証明 well-defined 性は Stokes の定理から従う。[TODO] 全単射性は 2 つの補題を用いる

□

命題 3.1.7 (0 次 de Rham コホモロジー (コンパクト台 ver.)). M を連結かつ境界を持たない n 次元多様体で向きづけられているものとする。このとき次が成り立つ:

- (1) M がコンパクトならば $H_c^0(M) \cong \mathbb{R}$
- (2) M がコンパクトでないならば $H_c^0(M) = 0$

証明 (1) は通常の de Rham コホモロジーの 0 次の場合である。

(2) を示す。 $\omega \in \Omega_c^0(M)$, $d\omega = 0$ とする。 ω は局所定数だから、 M の連結性より ω は M 上定数である。一方 $\text{supp } \omega$ はコンパクトだから ω の値が 0 である点が存在しなければならない。したがって $\omega = 0$ である。

□

B. 基本コホモロジー類

定義 3.1.8 (基本コホモロジー類). M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとし、体積形式 $\mu \in \Omega^n(M)$ をひとつえらんで

$$[M] := \frac{1}{\text{vol}_\mu(M)} [\mu] \in H^n(M) \quad (3.1.10)$$

と定め、これを M の**基本コホモロジー類** という。

補題 3.1.9. M を連結な n 次元閉多様体で向きづけられているものとする。このとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle: H^{n-p}(M) \times H^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\langle [\omega], [\alpha] \rangle := \int_M \omega \wedge \alpha$ で定めると $\langle [M], 1 \rangle = 1$ が成り立つ。

証明 基本コホモロジー類の定義より明らか。

□

3.2 Čech コホモロジー

Čech コホモロジーを定義する。本節で述べる de Rham の定理は、Čech コホモロジーが de Rham コホモロジーと同型であることを主張する驚くべき定理である。de Rham コホモロジーは大域的なデータ (= 微分形式) により定義されるため具体的な計算には不便であるが、Čech コホモロジーは局所的なデータにより定義されるため計算しやすいという利点がある。この意味で、de Rham の定理は de Rham コホモロジーの具体的計算のために重要な役割を果たす。

定義 3.2.1 (Čech コホモロジー). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, X を位相空間とし、 X は局所有限で可縮な開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つとする⁷⁾。

- $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$ のとき、順序組 $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ を Čech の **p -次元単体 (p -simplex)** と呼ぶ。
- 順序組 $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ を実数 $c_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ に対応させる写像 c であって交代性

$$c_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_p} = -c_{\alpha_0 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_p} \quad (3.2.1)$$

をみたすものを Čech の **p -次元双対鎖 (p -cochain)** と呼ぶ。

- 各 $p \geq 0$ に対し、 p -cochain の全体の集合は普通の和とスカラー倍を演算、零写像を零ベクトルとして \mathbb{R} -ベクトル空間となる。これを

$$C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \quad (3.2.2)$$

と書く。

- 写像 $\delta = \delta^p: C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ を

$$(\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+1}} \quad (3.2.3)$$

と定め、これを**双対境界作用素 (coboundary operator)** という。これは明らかに \mathbb{R} -線型写像であり、また具体的計算により $\delta \circ \delta = 0$ をみたすこともわかる。

- 商ベクトル空間

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) := \begin{cases} \text{Ker } \delta^p / \text{Im } \delta^{p-1} & (p \geq 1) \\ \text{Ker } \delta^p & (p = 0) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

を被覆 \mathfrak{U} に関する **Čech コホモロジー群 (Čech cohomology group)** という。

定義 3.2.2. $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。上の定義で $c_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ を $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ 上の q -形式 $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ に取り替えたものを考え、 $C^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, $H^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ のかわりに $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q)$, $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q)$ と書く (ここでは \mathcal{A}^q 自体には特に意味はない⁸⁾)。 $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q)$ を被覆 \mathfrak{U} に関する層 \mathcal{A}^q を係数にもつ **Čech コホモロジー群 (Čech cohomology groups with sheaf coefficients \mathcal{A}^q)** という。

補題 3.2.3. $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, M を多様体とする。 M は局所有限な開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を持つとし、 $\{\rho_\alpha\}$ をそれに対応する 1 の分割とする。写像 $L: C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q) \rightarrow C^{p-1}(M, \mathcal{A}^q)$ を

$$(L\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} := \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} \quad (\omega = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q)) \quad (3.2.5)$$

と定める。ただし各 $\rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$ は定義域外での値を 0 と定めて $U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$ 上の微分形式と考える。このとき

$$\delta(L\omega) + L(\delta\omega) = \omega \quad (\omega = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q)) \quad (3.2.6)$$

が成り立つ。

注意 3.2.4. この議論は \mathcal{A}^q を \mathbb{R} に取り替えた場合に対しては適用できない。それは $\rho_\alpha c_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$ がもはや定数ではないからである。

証明 省略。定義に従って計算すればよい。

□

次の補題により、層係数 Čech コホモロジーは微分形式の空間 $A(M)$ と関連付けられる。

補題 3.2.5. M を多様体とし、 M は局所有限な開被覆 \mathfrak{U} を持つとする。このとき各 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^q) = \begin{cases} 0 & (p \geq 1) \\ A^q(M) & (p = 0) \end{cases} \quad (3.2.7)$$

が成り立つ。

7) 開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が**可縮 (contractible)** であるとは、 \mathfrak{U} の任意の有限個の元 $U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_p}$ の交わりが空または可縮であることをいう。可縮な開被覆を **good cover** ともいう。パラコンパクトな多様体は可縮な開被覆を持つことが知られているらしい。[TODO] 局所有限「かつ」可縮にとれるか?

8) \mathcal{A}^q は X 上のアーベル群の層である。

証明 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

$p \geq 1$ のとき $\omega \in \text{Ker } \delta^p$ とする。すると $\delta\omega = 0$ だから上の補題より $\delta(L\omega) = \omega$ となる。よって $\omega \in \text{Im } \delta^{p-1}$ である。したがって $\text{Ker } \delta^p = \text{Im } \delta^{p-1}$ 、よって $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q) = 0$ である。

$p = 0$ のとき $\omega \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q) (= \text{Ker } \delta_0)$ とする。すると $\delta\omega = 0$ である。すなわち任意の $\alpha_0, \alpha_1 \in A$, $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \neq \emptyset$ に対し

$$0 = (\delta\omega)_{\alpha_0\alpha_1} = \omega_{\alpha_1} - \omega_{\alpha_0} \quad \text{i.e.} \quad \omega_{\alpha_0} = \omega_{\alpha_1} \quad \text{on} \quad U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \quad (3.2.8)$$

が成り立つ。したがって、 ω_α ($\alpha \in A$) は互いに貼りあって M 上の q -形式を定める。この対応は \mathbb{R} -ベクトル空間の同型 $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q) \cong A^q(M)$ を与える。 \square

定理 3.2.6 (de Rham の定理). $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, M を多様体とし、 M は局所有限で可縮な開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をもつとする。このとき、Čech コホモロジー群 $H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ と de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ の間に自然な⁹⁾ 同型対応が存在する。

A. Weil の証明のスケッチ.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \\
 C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \\
 C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow \\
 C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^0) & \xrightarrow{d} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & \cdots \xrightarrow{d} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^p)
 \end{array} \quad (3.2.9)$$

(i は実数を定値写像とみなす写像)

$p \geq 0$ とする。同型写像 $H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M)$ を構成する。そこで

$$[c] \in H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}), \quad c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \quad (3.2.10)$$

とする。 c から始めて

$$\begin{array}{c}
 \cdot \xrightarrow{i \text{ or } d} \cdot \\
 \downarrow \text{補題 3.2.5} \\
 \cdot
 \end{array} \quad (3.2.11)$$

の向きに順繰りに元を選んでいくと、最終的に $\omega^{(0,p)} \in C^0(M, \mathcal{A}^p)$ が得られる。 $\omega^{(0,p)}$ は $Z^p(M)$ の元と同一視できる。このようにして、 $[c] \in H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ を $[\omega^{(0,p)}] \in H^p(M)$ に対応させる。この写像は well-defined で、準同型になっている。補題 3.2.5 を使うところで \mathcal{U} の局所有限性を用いた。逆写像の構成は以下のように行う。まず

$$[\omega] \in H^p(M), \quad \omega \in Z^p(M) \quad (3.2.12)$$

9) 自然とは？

とする。 ω は $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^p)$ の元と同一視できる。 ω から始めて

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \uparrow \delta \\ \cdot \end{array} \xleftarrow{\text{Poincaré}} \cdot \quad (3.2.13)$$

の向きに順繰りに元を選んでいくと、最終的に $c \in C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ が得られる。このようにして、 $[\omega] \in H^p(M)$ を $[c] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ に対応させる。Poincaré の補題を使うところで \mathfrak{U} の可縮性を用いた。 \square

上で de Rham コホモロジーと Čech コホモロジーの間の同型対応をみたが、実は de Rham コホモロジーと C^∞ 特異コホモロジーの間にも同型が成り立つ。

注意 3.2.7 (de Rham コホモロジーと特異コホモロジー). M をパラコンパクトな多様体とする。 p 次元 C^∞ 特異単体 $\sigma: \Delta^p \rightarrow M$ と $\omega \in A^p(M)$ に対し

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^p} \sigma^* \omega \quad (3.2.14)$$

と定義する。これにより \mathbb{R} -双線型写像

$$Z_{\text{dR}}^p(M) \times Z_{\text{sing},p}(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.15)$$

が定まる (定義域を単体からチェーンへ \mathbb{R} -線型に拡張した後、サイクルに制限した)。すなわち

$$Z_{\text{dR}}^p(M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Z_{\text{sing},p}(M), \mathbb{R}) \quad (3.2.16)$$

が定まる。このとき Stokes の定理を用いて

$$H_{\text{dR}}^p(M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{sing},p}(M), \mathbb{R}) = H_{\text{sing}}^p(M) \quad (3.2.17)$$

が誘導され、これは \mathbb{R} -ベクトル空間の同型を与える (cf. [Lee p.480])。

3.3 演習問題

◇ 演習問題 3.1 (幾何学 III 問 2.3.6). M, N を多様体、 $f: M \rightarrow N$ を C^∞ 写像とし、 g を N の計量とする。

- (1) f^*g が M の計量ならば $\dim M \leq \dim N$ であることを示せ。
- (2) 逆は成り立たないことを示せ。
- (3) f が diffeo ならば、 f^*g は M の計量であって、 $\operatorname{sgn} f^*g$ が定まり $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ となることを示せ。

演習問題 3.1 の解答. (1) 対偶を示す。 $m := \dim M$, $n := \dim N$ とおき、 $m > n$ と仮定する。 $p \in M$ とし、 p のまわりの M の局所座標 x^1, \dots, x^m と $f(p)$ のまわりの N の局所座標 y^1, \dots, y^n をとる。

$$(f^*g)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g_{f(p)} \left(f_* \frac{\partial}{\partial x^i}, f_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (3.3.1)$$

$$= g_{f(p)} \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \quad (3.3.2)$$

$$= \frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p) g_{f(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p) \quad (3.3.3)$$

より

$$\left((f^*g)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)_{i,j} = {}^t \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p) \right)_{k,i} \left(g_{f(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \right)_{k,l} \left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p) \right)_{l,j} \quad (3.3.4)$$

だから、左辺の階数は $\leq n < m$ である。よって $(f^*g)_p$ は非退化でなく、したがって f^*g は M の計量でない。これで対偶がいえた。

(2) 反例を挙げる。 $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ とし、 g は \mathbb{R}^2 の Euclid 計量、 $f: M \rightarrow N$, $x \mapsto 0$ とすれば $f^*g = 0$ だから (f^*g) は M の計量でない。

(3) (1) の記号を用いて

$$\left((f^*g)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)_{i,j} = {}^t \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(p) \right)_{k,i} \left(g_{f(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \right)_{k,l} \left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j}(p) \right)_{l,j} \quad (3.3.5)$$

だから、 f が diffeo であることより右辺に現れる 3 つの行列はすべて正則だから左辺も正則である。したがって f^*g は M の計量である。さらに Sylvester の慣性法則より $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ である。 \square

第 4 章 Lie 群

この章では Lie 群とその Lie 代数について述べる。物理学では Lie 群は多様体へ作用する変換の集合としてよく現れる。

4.1 Lie 群の基本概念

定義 4.1.1 (Lie 群). 多様体 G が次をみたすとき、 G を **Lie 群 (lie group)** という。

- (1) G は群である。
- (2) 積 $\mu: G \times G \rightarrow G$ と逆元 $i: G \rightarrow G$ は C^∞ である。

例 4.1.2 (Lie 群の例). [TODO]

定義 4.1.3 (Lie 群準同型). G, H を Lie 群とする。 C^∞ 写像 $f: G \rightarrow H$ が群準同型でもあるとき、 f を **Lie 群準同型 (Lie group homomorphism)** という。

例 4.1.4 (Lie 群準同型の例). [TODO]

4.2 Lie 群の作用

A. Lie 群の作用

位相空間への位相群の連続作用が考えられるのと同様に、多様体への Lie 群の C^∞ 作用が考えられる。

定義 4.2.1 (C^∞ 作用). M を多様体、 G を Lie 群とする。 G の M への左からの群作用が **C^∞ 作用 (smooth action)** であるとは、写像

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto gx \tag{4.2.1}$$

が C^∞ であることをいう¹⁰⁾。右作用についても同様に定義される。

定義 4.2.2 (proper 作用). $G \times M \rightarrow M \times M, (g, x) \mapsto (gx, x)$ が proper であるとき、 G の M への作用は **proper (proper)** であるという。

命題 4.2.3 (proper な作用の特徴づけ). M を多様体、 G を Lie 群であって M に連続に作用しているとする。このとき、次は同値である:

10) C^∞ 作用の定義を表現 $G \rightarrow \text{Aut}(M)$ が C^∞ であることとする流儀もあるが、その場合 $\text{Aut}(M)$ の多様体構造を考えなければならず、無限次元の場合に面倒である。

- (1) G の M への作用は proper である。
- (2) [TODO] 点列の収束
- (3) 任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対し、集合 $G_K := \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ はコンパクトである。

すなわち Lie 群の作用が proper であることは、直感的には「 M のコンパクト集合は G の"ほとんど" (i.e. あるコンパクト集合を除いて) の元により自分自身と分離される」ということを言っている¹⁾。

証明 [TODO]

□

B. 離散 Lie 群の場合

0 次元 Lie 群、すなわち離散 Lie 群の場合がとくに基本的である。

命題 4.2.4 (離散 Lie 群における proper な作用の特徴づけ). M を多様体、 G を離散 Lie 群であって M に連続に作用しているとする。このとき、次は同値である:

- (1) G の M への作用は proper である。
- (2) 任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対し、集合 $G_K := \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ は有限集合である。

証明 一般の Lie 群に関する命題より従う。

□

とくに積による部分群の作用の場合は、proper であることの判定は非常に簡単である。ここで proper 性は位相的性質であることに注意されたい。

定理 4.2.5 (積による作用が proper であることの特徴づけ). G を Lie 群、 Γ を G の部分群とする。このとき、次は同値である:

- (1) Γ は G の位相部分空間として離散的である。
- (2) [TODO]
- (3) [TODO]
- (4) Γ に離散位相を入れたとき、積による作用 $\Gamma \curvearrowright G$ は proper である。

証明 [TODO]

□

系 4.2.6. G を Lie 群、 Γ を G の離散部分群とし、 Γ を 0 次元 Lie 群とみなす。このとき、積による作用 $\Gamma \curvearrowright G$ は C^∞ かつ free かつ proper である。

証明 $\Gamma \times G$ は $G \times G$ の部分多様体だから、 G の乗法が C^∞ であることより $\Gamma \curvearrowright G$ は C^∞ である。free であることは作用が群の演算であることより明らか。proper であることは上の定理より従う。

□

1) cf. <https://math.stackexchange.com/a/989168>

C. 商多様体

Lie 群の作用による商空間が多様体となるための条件を考えたい。

定理 4.2.7 (商多様体定理). M を多様体、 G を M に C^∞ に作用する Lie 群とする。このとき、 G の作用が free かつ proper ならば、 M/G は等化写像 $\pi: M \rightarrow M/G$ が沈め込みとなるような多様体構造をただひとつ持つ。

証明 [TODO]

□

とくに重要なものは被覆空間である。予備的考察として次の定理を述べておく。

定理 4.2.8 (被覆変換群の作用). M を多様体、 $\pi: E \rightarrow M$ を被覆空間とする。このとき、 $\text{Aut}_\pi(E)$ に離散位相を入れると 0-次元 Lie 群となり、 E への作用は free かつ proper かつ C^∞ となる。

この定理の主張する作用の 3 性質はそれぞれ

- free: 代数的
- proper: 位相的
- C^∞ : 微分幾何的

という特徴を持っている。

証明 [TODO]

□

上の命題の部分的な逆を主張するのが次の定理である。

定理 4.2.9. E を連結な多様体、 Γ を離散的な Lie 群とする。このとき、 Γ が E に free かつ proper かつ C^∞ に作用しているならば、 E/Γ は多様体となり、 $\pi: E \rightarrow E/\Gamma$ は正規被覆空間となる。

証明 [TODO]

□

4.3 Lie 群の接束

Lie 群の接束について考える。とくに Lie 群の単位元における接空間は重要である。

A. 左不変性

左不変性とは、テンソル場が Lie 群の演算と両立していることを表す概念である。左不変性は Lie 群の作用による商多様体を考える際に重要となる。

まずベクトル場の左不変性を定義する。

定義 4.3.1 (左不変ベクトル場). G を Lie 群とする。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が **左不変 (left-invariant)** であるとは、

すべての $g \in G$ に対し $(L_g)_*X = X$ が成り立つこと、すなわちすべての $g \in G$ に対し図式

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{d(L_g)} & TG \\ \uparrow X & & \uparrow X \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array} \quad (4.3.1)$$

が可換となることをいう。

微分形式などの共変テンソル場にも左不変性を定義することができる。

定義 4.3.2 (左不変共変テンソル場). G を Lie 群とする。 G 上の共変テンソル場 A が**左不変 (left-invariant)** であるとは、すべての $g \in G$ に対し

$$L_g^* A = A \quad (4.3.2)$$

が成り立つことをいう。

補題 4.3.3. G を Lie 群とする。 $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ を左不変ベクトル場とすると、次が成り立つ:

- (1) 各 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $aX + bY$ は左不変ベクトル場である。
- (2) $[X, Y]$ は左不変ベクトル場である。

証明 幾何学 I で扱ったので省略。 □

命題 4.3.4 (TG は Lie 群). G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\iota: G \rightarrow G$ とする。 TG は $d\mu: TG \times TG \rightarrow TG$, $d\iota: TG \rightarrow TG$ によって Lie 群となる。ただし、 $d\mu$ の定義域について $T(G \times G) \cong TG \times TG$ の同一視をしている。

証明 省略 □

注意 4.3.5. 上の命題の状況で、 G, \mathfrak{g} はいずれも TG の部分群 [TODO] Lie 部分群? と同一視できることに注意する。実際、 G は zero section $g \mapsto (g, 0)$ により TG に埋め込まれ、 \mathfrak{g} は $A \mapsto (e, A_e)$ により TG に埋め込まれる。

命題 4.3.6 (TG 上の演算). G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ μ, ι とする。このとき、各 $p, q \in G$ と $u \in T_p G$, $v \in T_q G$ に対し

$$(d\mu)_{(p,q)}(u, v) = (dR_q)_p(u) + (dL_p)_q(v) \quad (4.3.3)$$

$$(d\iota)_p(u) = -(dR_{p^{-1}})_1(dL_{p^{-1}})_p(u) \quad (4.3.4)$$

が成り立つ。

証明 省略 □

系 4.3.7 (T_1G 上の演算). 上の命題の状況で、各 $u, v \in T_1G$ に対し

$$(d\mu)_{(1,1)}(u, v) = u + v \quad (4.3.5)$$

$$(d\iota)_1(u) = -u \quad (4.3.6)$$

が成り立つ。

証明 明らか。

□

B. Lie 代数

多様体の接空間は、多様体の"線型モデル"であった。同様に、Lie 群の Lie 代数は Lie 群の"線型モデル"である。

[TODO] 単位元以外のところでも線型モデルになっているのか？

[TODO] 一般的な Lie 代数の定義

定義 4.3.8 (Lie 群の Lie 代数). G を Lie 群とする。 G 上の左不変ベクトル場全体の集合に交換子括弧を入れたものは Lie 代数となる。これを $\text{Lie}(G)$ と書き、 **G の Lie 代数 (Lie algebra of G)** と呼ぶ。

次の命題により、 $\text{Lie}(G)$ は G の単位元における接空間 T_eG と同一視できる。

命題 4.3.9 ($\text{Lie}(G)$ は T_eG と同型). G を Lie 群とする。評価写像 $\varepsilon: \text{Lie}(G) \rightarrow T_eG$ はベクトル空間の同型である。

証明 cf. [Lee] p.191

□

例 4.3.10 (Lie 群の Lie 代数の例). [TODO]

C. Maurer-Cartan 形式

[TODO] どういうモチベーション？

Maurer-Cartan 形式を定義する。

定義 4.3.11 (Maurer-Cartan 形式). G を Lie 群とする。 G 上の \mathfrak{g} 値の 1 次微分形式 θ を

$$\theta_s(u) = s^{-1}u \quad (s \in G, u \in T_sG) \quad (4.3.7)$$

で定義する。 θ を **Maurer-Cartan 形式 (Maurer-Cartan form)** という。

Maurer-Cartan 形式は左不変である。

命題 4.3.12 (Maurer-Cartan 形式の左不変性). G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ μ, ι とする。Maurer-Cartan 形式 θ は左不変である。

証明 $g, s \in G, u \in T_s G$ とする。まず

$$\theta_s(u) = s^{-1}u \quad (4.3.8)$$

$$= (s, 0)^{-1}(s, u) \quad (4.3.9)$$

$$= (s^{-1}, 0)(s, u) \quad (4.3.10)$$

$$= (1, (dR_s)_{s^{-1}}(0) + (dL_{s^{-1}})_s(u)) \quad (4.3.11)$$

$$= (1, (dL_{s^{-1}})_s(u)) \quad (4.3.12)$$

である。また、 L_g による引き戻しは

$$(L_g^* \theta)_s(u) = \theta_{gs}((dL_g)_s(u)) \quad (4.3.13)$$

$$= (gs)^{-1}(dL_g)_s(u) \quad (4.3.14)$$

$$= (gs, 0)^{-1}(gs, (dL_g)_s(u)) \quad (4.3.15)$$

$$= ((gs)^{-1}, 0)(gs, (dL_g)_s(u)) \quad (4.3.16)$$

$$= (1, (dR_{gs})_{(gs)^{-1}}(0) + (dL_{(gs)^{-1}})_{gs}((dL_g)_s(u))) \quad (4.3.17)$$

$$= (1, (dL_{(gs)^{-1}})_{gs}(dL_g)_s(u)) \quad (4.3.18)$$

$$= (1, (dL_{s^{-1}})_s(u)) \quad (4.3.19)$$

をみtas。したがって $L_g^* \theta = \theta$ だから θ は左不変である。 \square

実は逆も成り立つ。すなわち、 \mathfrak{g} 値の左不変 1 形式は Maurer-Cartan 形式である。

命題 4.3.13. [TODO]

証明 [TODO] \square

D. 随伴表現

[TODO] なぜここに書いてある？

定義 4.3.14 (随伴表現). G を Lie 群とする。

- $g \in G$ の共役作用 $G \rightarrow G$ を c_g とおくとき、単位元 e における c_g の微分 $(d(c_g))_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を $\text{Ad}(g)$ と書く。このとき、 $\text{Ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ を **G の随伴表現 (adjoint representation of G)** という。
- 写像 $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を

$$\text{ad}(X)Y := [X, Y] \quad (4.3.20)$$

で定める。このとき、 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ を **\mathfrak{g} の随伴表現 (adjoint representation of \mathfrak{g})** という。

E. 接束上に誘導される作用

Lie 群の作用 (とくに Lie 群の演算も含む) から誘導される接束上の作用を具体的に計算するために便利な公式を与えておく。

補題 4.3.15 ("全微分"の公式). M, G を多様体とし、 C^∞ 写像 $\alpha: M \times G \rightarrow M$ が与えられているとし、各 $x \in M, g \in G$ に対し

$$L_x: G \rightarrow M, \quad g \mapsto \alpha(x, g) \quad (4.3.21)$$

$$R_g: M \rightarrow M, \quad x \mapsto \alpha(x, g) \quad (4.3.22)$$

と定める。このとき、 $d\alpha: TM \times TG \rightarrow TM$ は

$$d\alpha((x, u), (g, v)) = (\alpha(x, g), d(L_x)v + d(R_g)u) \quad ((x, u) \in TM, (g, v) \in TG) \quad (4.3.23)$$

をみたす。ただし、 $TM \times TG \cong T(M \times G)$ の同一視のもとで $d\alpha$ は $TM \times TG$ 上の写像とみなしており、また本来 $d(L_x)_g$ などと書くべきところを添字を省略して $d(L_x)$ などと書いている。

証明 $(x, u) \in TM, (g, v) \in TG$ とする。 M, G 内のある C^∞ 曲線 γ, β が存在して

$$\gamma(0) = x, \quad [\gamma] = u \quad (4.3.24)$$

$$\beta(0) = g, \quad [\beta] = v \quad (4.3.25)$$

が成り立つ ($[\]$ は曲線の類を表す)。さて、示すべき式の左辺を変形すると

$$d\alpha((x, u), (g, v)) = d\alpha((x, [\gamma]), (g, [\beta])) \quad (4.3.26)$$

$$= d\alpha((x, [\gamma]), (g, 0)) + d\alpha((x, 0), (g, [\beta])) \quad (4.3.27)$$

となる。ここで M, G 内で定値 x, g をとる曲線をそれぞれ c_x, c_g とおけば

$$[c_x] = 0_{T_x M}, \quad [c_g] = 0_{T_g G} \quad (4.3.28)$$

となる。よって

$$d\alpha((x, [\gamma]), (g, 0)) = d\alpha((x, [\gamma]), (g, [c_g])) \quad (4.3.29)$$

$$= \left(\alpha(x, g), \frac{d}{dt} \alpha(\gamma(t), c_g(t)) \Big|_{t=0} \right) \quad (4.3.30)$$

$$= \left(\alpha(x, g), \frac{d}{dt} \alpha(\gamma(t), g) \Big|_{t=0} \right) \quad (4.3.31)$$

$$= \left(\alpha(x, g), \frac{d}{dt} R_g(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \quad (4.3.32)$$

$$= (\alpha(x, g), d(R_g)[\gamma]) \quad (4.3.33)$$

$$= (\alpha(x, g), d(R_g)u) \quad (4.3.34)$$

を得る。同様にして

$$d\alpha((x, 0), (g, [\beta])) = (\alpha(x, g), d(L_x)v) \quad (4.3.35)$$

を得る。したがって

$$d\alpha((x, u), (g, v)) = (\alpha(x, g), d(L_x)v + d(R_g)u) \quad (4.3.36)$$

がいえた。 \square

補題 4.3.16 (TG の Lie 群構造). G を Lie 群とし、積と逆元をそれぞれ $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\iota: G \rightarrow G$ とおく。 TG は $d\mu: TG \times TG \rightarrow TG$ を積、 $(1, 0) \in TG$ を単位元として Lie 群となり、逆元は $d\iota: TG \rightarrow TG$ で与えられる。

証明 TG が多様体であることと、 $d\mu, d\iota$ が C^∞ であることは明らか。あとは $d\mu$ が群の演算の公理を満たすことと、 $d\iota$ が逆元を与えることを示せばよい。

結合律 $(g, u), (h, v), (i, w) \in TG$ とする。表記の簡略化のため $d\mu$ による二項演算を \cdot で書くことにすれば、

$$((g, u) \cdot (h, v)) \cdot (i, w) \quad (4.3.37)$$

$$= (gh, d(L_g)v + d(R_h)u) \cdot (i, w) \quad (4.3.38)$$

$$= (ghi, d(L_{gh})w + d(R_i)(d(L_g)v + d(R_h)u)) \quad (4.3.39)$$

$$= (ghi, d(L_{gh})w + d(L_g)d(R_i)v + d(R_{hi})u) \quad (4.3.40)$$

であり (合成の順序を交換するところで G の乗法の結合律を用いた)、一方

$$(g, u) \cdot ((h, v) \cdot (i, w)) \quad (4.3.41)$$

$$= (g, u) \cdot (hi, d(L_h)w + d(R_i)v) \quad (4.3.42)$$

$$= (ghi, d(L_g)(d(L_h)w + d(R_i)v) + d(R_{hi})u) \quad (4.3.43)$$

$$= (ghi, d(L_{gh})w + d(L_g)d(R_i)v + d(R_{hi})u) \quad (4.3.44)$$

となるから結合則がいえた。

単位元 $(g, u) \in TG$ に対し

$$(g, u) \cdot (1, 0) = (g, d(L_g)0 + d(R_1)u) \quad (4.3.45)$$

$$= (g, u) \quad (4.3.46)$$

$$(1, 0) \cdot (g, u) = (g, d(L_1)u + d(R_g)0) \quad (4.3.47)$$

$$= (g, u) \quad (4.3.48)$$

より $(1, 0)$ は単位元である。

逆元 $(g, [\gamma]) \in TG$ に対し

$$(g, [\gamma]) \cdot d\iota(g, [\gamma]) = (g, [\gamma]) \cdot (g^{-1}, d\iota[\gamma]) \quad (4.3.49)$$

$$= (g, [\gamma]) \cdot (g^{-1}, [\iota \circ \gamma]) \quad (4.3.50)$$

$$= \left(1, \frac{d}{dt} \mu(\gamma(t), \iota \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \quad (4.3.51)$$

$$= \left(1, \frac{d}{dt} 1 \Big|_{t=0} \right) \quad (4.3.52)$$

$$= (1, 0) \quad (4.3.53)$$

となる。左右逆の積についても同様。したがって $d\iota$ が逆元を与える。 \square

上の補題により TG が Lie 群となることがわかったが、群としての具体的な構造は次の命題で与えられる。

命題 4.3.17 (TG の群構造). G を Lie 群とし、 $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ とおく。さらに各 $a \in G$ に対し内部自己同型

$$G \rightarrow G, \quad g \mapsto aga^{-1} = L_a \circ R_{a^{-1}}(g) \quad (4.3.54)$$

の微分を Ad_a とおく。上の補題より TG は群だから **[TODO] ということ?**、写像 $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(TG)$ は群の表現となる¹²⁾。このとき、 TG は半直積群 $G \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ と群同型であり、群同型写像は

$$G \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{g} \rightarrow TG, \quad (a, X) \mapsto (a, d(R_a)X) \quad (4.3.55)$$

で与えられる。

証明 長いので省略。cf. <https://math.stackexchange.com/a/3585581/1026040> □

Lie 群の接束に群構造が誘導されるのと同様に、主 G 束の接束には群作用が誘導される。

補題 4.3.18. M を多様体、 $P \rightarrow M$ を主 G 束とし、 G の P への C^∞ 右作用を $\alpha: P \times G \rightarrow P$ とおく。このとき、 $d\alpha: TP \times TG \rightarrow TP$ は Lie 群 TG の TP への C^∞ 右作用を定める。

証明 $d\alpha$ が C^∞ であることは明らか。あとは $d\alpha$ が群作用の公理をみたすことを確かめればよいが、これは TG が Lie 群となることの証明と同様なので省略。 □

4.4 誘導準同型

定義 4.4.1 (誘導準同型). G, H を Lie 群とする。さらに $F: G \rightarrow H$ を Lie 群準同型とする。このとき、任意の $X \in \text{Lie}(G)$ に対し、図式

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{dF} & TH \\ \uparrow X & & \uparrow F_*X \\ G & \xrightarrow{F} & H \end{array} \quad (4.4.1)$$

を可換にする $F_*X \in \text{Lie}(H)$ がただひとつ存在する。 $F_*: \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ を誘導された Lie 代数準同型 (induced Lie algebra homomorphism) という。

注意 4.4.2 ($\text{Lie}(\square)$ の関手性). 対応付け $G \mapsto \text{Lie}(G)$ 、 $F \mapsto F_*$ は Lie 群の圏 **Lie** から有限次元 Lie 代数の圏 **lie** への共変関手である。

4.5 基本ベクトル場

基本ベクトル場を定義する。基本ベクトル場の概念は主ファイバー束の接続の定義に利用される。以下では Lie 群を接束へ埋め込んで同一視した議論が行われるから、埋め込み方について補題を述べておく。

12) 表現 Ad を随伴表現 (adjoint representation) という。**[TODO] 定義が重複してる?**

補題 4.5.1. G を Lie 群とすると、ゼロ切断

$$G \rightarrow TG, \quad p \mapsto (p, 0) \quad (4.5.1)$$

は Lie 群の埋め込みである。この同一視により $G \subset TG$ とみなす。 \square

証明 幾何学 I 演習で扱ったので省略。 \square

補題 4.5.2. G を Lie 群とすると、

$$\text{Lie}(G) \rightarrow T_1 G, \quad X \mapsto (1, X_1) \quad (4.5.2)$$

は Lie 代数として同型である。この同一視により $\text{Lie}(G) = T_1 G \subset TG$ とみなす。 \square

証明 幾何学 I 演習で扱ったので省略。 \square

基本ベクトル場を定義する。

定義 4.5.3 (基本ベクトル場). M を多様体、 $P \rightarrow M$ を主 G 束、 $A \in \text{Lie}(G)$ とする。上の補題より、 P 上のベクトル場 $A^* \in \mathfrak{X}(P)$ を

$$A_u^* := u.A = (u, 0).(1, A_1) = (u, d(L_u)A_1) \quad (u \in P) \quad (4.5.3)$$

で定めることができる¹³⁾。 A^* を A に対応する **基本ベクトル場 (fundamental vector field)** という。

補題 4.5.4 (左不変ベクトル場は完備). Lie 群 G の左不変ベクトル場は完備である。

証明のスケッチ. X を左不変ベクトル場とすると、単位元 1 のまわりで積分曲線の定義域に $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ が含まれ、左不変性よりすべての $g \in G$ のまわりで $(-\varepsilon, \varepsilon)$ が積分曲線の定義域に含まれる。あとはコンパクト台をもつベクトル場が完備であることの証明と同様の流れで示せる。詳しくは [Lee] p.216 を参照。 \square

定義 4.5.5 (1 助変数部分群). M を多様体、 $P \rightarrow M$ を主 G 束、 $A \in \text{Lie}(G)$ とする。上の補題より A は完備なので、 A の生成するフローは C^∞ 写像 $\mathbb{R} \times G \rightarrow G$ であり、さらにこれは G への C^∞ 左作用を定める。そこで、とくに単位元 $1 \in G$ を通る軌道 $\mathbb{R} \rightarrow G$ を e^{tA} あるいは $\exp tA$ と書くことにする。この曲線 $e^{tA}: \mathbb{R} \rightarrow G$ を、 A によって生成される **1 助変数部分群 (one-parameter subgroup)** という。

命題 4.5.6 (基本ベクトル場の幾何学的意味). 上の定義の状況で、 A に対応する基本ベクトル場 A^* の $u \in P$ での値は、 P 内の曲線

$$\mathbb{R} \rightarrow P, \quad t \mapsto u.e^{tA} \quad (4.5.4)$$

13) ここでの L_u は $G \rightarrow G$ でなく $G \rightarrow P$ の写像であることに注意。したがって " A の左不変性より $d(L_u)A_1 = A_u$ " という議論は誤りである。

の u での接ベクトルに等しい。すなわち

$$A_u^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u \cdot e^{tA} \quad (4.5.5)$$

が成り立つ。

証明 e^{tA} が A の積分曲線であることに注意して

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u \cdot e^{tA} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_u \circ e^{tA} \quad (4.5.6)$$

$$= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tA} \right) (L_u) \quad (4.5.7)$$

$$= A_1(L_u) \quad (4.5.8)$$

$$= d(L_u)A_1 \quad (4.5.9)$$

$$= A_u^* \quad (4.5.10)$$

を得る。

□

4.6 構造方程式

[TODO] Maurer-Cartan 形式との関連性？

命題 4.6.1. \mathfrak{g}^* は左不変 1-形式の空間である。[TODO]

証明 [TODO]

□

定義 4.6.2 (Lie 群の構造方程式). B_1, \dots, B_m を \mathfrak{g} の基底、 $\theta^1, \dots, \theta^m$ をその双対基底とする。

$$[B_j, B_k] = \sum c_{jk}^i B_i \quad (4.6.1)$$

で構造定数 (structure constant) $c_{jk}^i \in \mathbb{R}$ を定める。すると

$$d\theta^i = - \sum c_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \quad (4.6.2)$$

が成り立つ。これを G の構造方程式 (structure equation) という。

$$d\theta = -[\theta, \theta] \quad (4.6.3)$$

と書くこともある。[TODO] どういう意味？

証明 [TODO]

□