2017 A6. (1) $\dim \operatorname{Ker} A \neq \dim \operatorname{Ker} B \implies [A] \neq [B]$ より $X = \{[O]\} \sqcup \{[I]\} \sqcup \{[A] : \dim \operatorname{Ker} A = 1\}$ だから、$\{[A] : \dim \operatorname{Ker} A = 1\}$ が $\mathbb{R}P^1$ に同相であることを示せばよい。

claim 集合として次のような一致が成り立つ:

$$\{[A] \in X : \dim \operatorname{Ker} A = 1\} = \left\{ [P_\theta] \in X \,\middle|\, P_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\} \tag{0.1}$$

∵ 「⊃」は明らかなので、「⊂」を示す。各 $\alpha \in X$ に対し、$\alpha = [A]$ となる $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ をひとつ選ぶ。このとき $\dim(\operatorname{Ker} f_A)^\perp = 2 - \dim \operatorname{Ker} f_A = 1$ ゆえに $(\operatorname{Ker} f_A)^\perp$ は $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線だから、ある $\theta \in \mathbb{R}$ であって $(\operatorname{Ker} f_A)^\perp = \mathbb{R}e^{i\theta}$ なるものが存在する。このとき P_θ は $(\operatorname{Ker} f_A)^\perp$ への直交射影である。したがって $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P_\theta$ だから $\alpha = [A] = [P_\theta]$ となる。これで「⊂」が示されて、claim の証明が完了した。 //

あとは $X' := \{[P_\theta] : \theta \in \mathbb{R}\}$ とおいて $X' \approx \mathbb{R}P^1$ を示せばよい。まず写像 $\mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$, $\theta \mapsto P_\theta$ は連続かつ $2\pi\mathbb{Z}$ の作用で不変だから、連続写像 $S^1 \to M_2(\mathbb{R})$, $e^{i\theta} \mapsto P_\theta$ が誘導される。これより連続全射 $S^1 \to X'$, $e^{i\theta} \mapsto [P_\theta]$ が得られる。これは $\{\pm 1\}$ の作用で不変 (∵ $P_{-\theta}$ は $\mathbb{R}\,{}^t(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = \mathbb{R}\,{}^t e^{i\theta}$ への直交射影ゆえに $\operatorname{Ker} P_{-\theta} = \operatorname{Ker} P_\theta$) だから、連続全射 $\mathbb{R}P^1 \to X'$, $[e^{i\theta}]_{\mathrm{proj}} \mapsto [P_\theta]$ が誘導される。ここで、この写像は単射である。

∵ $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ に関し、$[P_\theta] = [P_{\theta'}]$ ならば $\operatorname{Ker} P_\theta = \operatorname{Ker} P_{\theta'}$ ゆえに $(\operatorname{Ker} P_\theta)^\perp = (\operatorname{Ker} P_{\theta'})^\perp$ であり、$e^{i\theta} \in (\operatorname{Ker} P_\theta)^\perp$, $e^{i\theta'} \in (\operatorname{Ker} P_{\theta'})^\perp$ であることとあわせて $e^{i\theta}, e^{i\theta'}$ は同じ直線上にあることがわかる。したがって $[e^{i\theta}]_{\mathrm{proj}} = [e^{i\theta'}]_{\mathrm{proj}}$ である。 //

コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続全単射は同相であるから、$\mathbb{R}P^1 \approx X'$ が示された。

(2) $[O] \in U \overset{\text{open}}{\subset} X$ とすると、$O \in \pi^{-1}(U) \overset{\text{open}}{\subset} M_2(\mathbb{R})$ である。ここで、任意の $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対し、ある $c > 0$ であって $cA \in \pi^{-1}(U)$ となるものが存在することに注意すれば、$[A] = [cA] \in U$ である。したがって $U = X$ である。

(3) 次のことが成り立つ:

- $\{[O]\}$ は X の開集合でなく、閉集合である。$\{[O]\}$ を含む開集合は X 全体のみである。
- $\{[I]\}$ は X の開集合であり、閉集合でない。
- X' は X の開集合でない。X' を含む開集合として $X \setminus \{[O]\}$ が存在する。

したがって X の自己同相写像は $[O], [I]$ を固定する。よって、(1) の同相 $\mathbb{R}P^1 \to X'$ を F とおけば、各 $\varphi \in \operatorname{Homeo}(X)$ に対し $F^{-1} \circ (\varphi|_{X'}) \circ F \in \operatorname{Homeo}(\mathbb{R}P^1)$ を割り当てる対応が全単射 $\operatorname{Homeo}(X) \to \operatorname{Homeo}(\mathbb{R}P^1)$ を与える。 □