発表中にコメントがあった事柄を整理する。

公理 0.1 (分出公理 (axiom schema of specification)). x を自由変項にもつ任意の論理式 $\phi(x)$ に対し

$$\forall x \exists y \forall z \left[z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z) \right]. \tag{0.1}$$

この公理により、x を自由変項にもつ任意の論理式 $\phi(x)$ と任意の集合 A に対し、$\phi(a)$ を満たす元 $a \in A$ 全体の集合がただひとつ存在する。これを $\{a \in A \mid \phi(a)\}$ と書く。

公理 0.2 (置換公理 (axiom schema of replacement)). [TODO] $\phi(x, y)$ を 1 変項関数論理式とする。任意の集合 A に対し、A の元 a の ϕ による《像》であるような z の全体は集合である。

命題 0.3. 有限集合上の full support な確率分布の族について、$n = 3$ のとき、$\nabla^{(\alpha)}$ のスカラー曲率 $S^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) は

$$S^{(\alpha)}(p) = \frac{1-\alpha}{p_3}\left(-2(p_1^2 + p_2^2) + 3(p_1 + p_2) - 2\right) = -\frac{2(1-\alpha)}{p_3}\left((p_1 - 3/4)^2 + (p_2 - 3/4)^2 - 1/8\right) \tag{0.2}$$

をみたす。さらに、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$\operatorname{sgn} S^{(\alpha)}(p) = \begin{cases} +1 & \alpha > 1 \\ 0 & \alpha = 1 \\ -1 & \alpha < 1 \end{cases} \tag{0.3}$$

が成り立つ。

証明　スカラー曲率が命題の主張の式で表せることは直接計算によりわかる。さらに $0 < p_1 < 1,\ 0 < p_2 < 1,\ 0 < p_1 + p_2 < 1$ より $(p_1 - 3/4)^2 + (p_2 - 3/4)^2 - 1/8 > 0$ だから、$S^{(\alpha)}(p)$ の符号は命題の主張のようになる。 □