数学講究 XB レポート

シンプレクティック多様体において $C^\infty(M, \mathbb{R})$ が Poisson 括弧により Lie 代数となることの証明

05-220542
Keiji Yahata

本レポートでは、シンプレクティック多様体 (M,ω) において $C^\infty(M,\mathbb{R})$ が Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}$ により Lie 代数となることを証明する。まずいくつか用語の定義を整理しておく。

定義 1.1 (シンプレクティック多様体). M を有限次元 C^∞ 多様体、ω を M 上の 2-形式とする。組 (M,ω) が**シンプレクティック多様体**であるとは、$\omega^n \neq 0$ かつ $d\omega = 0$ が成り立つことをいう。ただし ω^n は $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ のことである。

命題-定義 1.2 (C^∞ 関数の Hamilton ベクトル場). (M,ω) をシンプレクティック多様体とする。このとき、各 $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対し、あるベクトル場 $H_f \in \mathfrak{X}(M)$ がただひとつ存在して、任意のベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\omega(H_f, Y) = df(Y) \tag{1.1}$$

をみたす。この H_f を **f の Hamilton ベクトル場**という。

証明 [TODO] □

定義 1.3 (Poisson 括弧). (M,ω) をシンプレクティック多様体とする。各 $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対し、f,g の **Poisson 括弧** $\{f,g\} \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ を

$$\{f,g\} := \omega(H_f, H_g) \tag{1.2}$$

と定義する。

目標の定理を示す。

定理 1.4. (M,ω) をシンプレクティック多様体とする。このとき、$C^\infty(M,\mathbb{R})$ は Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}$ を括弧積として Lie 代数となる。

証明 示すべきことは、Poisson 括弧が次をみたすことである:

- **($\mathbb{R}$-双線型性)** 任意の $f,g,h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ と $a,b \in \mathbb{R}$ に対して、$\{af+bg,h\} = a\{f,h\}+b\{g,h\}$ および $\{h,af+bg\} = a\{h,f\}+b\{h,g\}$ が成り立つ。
- **(反対称性)** 任意の $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対して、$\{f,g\} = -\{g,f\}$ が成り立つ。
- **(Jacobi 恒等式)** 任意の $f,g,h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対して、$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\} = 0$ が成り立つ。

[TODO] □