振り返りと導入

前回は、指数型分布族にいくつかの構造を定め、Amari-Chentsov テンソルと α-接続を定義した。本稿では次のことを行う:

- 具体例の計算 (有限集合上の full support な確率分布の族)
- 具体例の計算 (正規分布族)

今回以降、次のように記法を変更する[1)]。

定義 0.1 (パラメータの空間の記法の変更). 可測空間 $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族 $\mathcal{P}$ とその実現 (V, T, μ) に対し、

- 自然パラメータ空間 $\Theta_{(V,T,\mu)}$ を $\widetilde{\Theta}_{(V,T,\mu)}$ と書くことにし、
- 真パラメータ空間 $\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ を $\Theta_{(V,T,\mu)}$ と書くことにする。

文脈から明らかな場合は添字を省略することがある。

1 具体例: 有限集合上の full support な確率分布の族

本節では、有限集合上の full support な確率分布の族について、α-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

設定 1.1 (有限集合上の full support な確率分布の族). $\mathcal{X} := \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, 0 < p_i < 1 \ (i = 1, \ldots, n) \right\} \tag{1.1}$$

とおく。ただし δ^i は 1 点 $i \in \mathcal{X}$ での Dirac 測度である。これが $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることは `0425_資料.pdf` 例 3.1 で確かめた。

命題 1.2 (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認).

(1) (V, T, γ) を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$V := \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.2}$$
$$T : \mathcal{X} \to V, \quad k \mapsto {}^t(\delta_{1k}, \ldots, \delta_{(n-1)k}), \tag{1.3}$$
$$\gamma : \text{数え上げ測度} \tag{1.4}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi : \widetilde{\Theta} \to \mathbb{R}$ は $\psi(\theta) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i\right)$ となる。

(3) 写像 $P := P_{(V,T,\gamma)} : \widetilde{\Theta} \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ は次をみたす:

$$P(\theta) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i) \delta^i + \delta^n \right) \tag{1.5}$$

(4) $\Theta = \widetilde{\Theta} = V^\vee$ が成り立つ。

1) [BN78] での記法によった。

(5) 次の写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は P の逆写像である:

$$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \delta^i \mapsto \left(\log \frac{p_1}{p_n}, \dots, \log \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) \tag{1.6}$$

(6) (V, T, γ) は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

証明 (1) (V, T, γ) が実現であることは 0425_コメント.pdf 演習問題 0.1 に記した。

(2) 対数分配関数の定義より

$$\psi(\theta) = \log \int_X \exp \langle \theta, T(k) \rangle \, \gamma(dk) \tag{1.7}$$

$$= \log \sum_{i=1}^{n} \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} \theta^j \delta_{ji} \right) \tag{1.8}$$

$$= \log \left(\sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i + 1 \right) \tag{1.9}$$

である。

(3) P の定義より

$$P(\theta) = \exp(\langle \theta, T(k) \rangle - \psi(\theta))\gamma \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i} \exp \left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta^i \delta_{ik} \right) \gamma \tag{1.11}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp \theta^i} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\exp \theta^i) \delta^i + \delta^n \right) \tag{1.12}$$

である。

(4) 可積分性を考えると明らかに $\widetilde{\Theta} = V^\vee$ である。また P が (3) のように表せることから $P(\widetilde{\Theta}) \subset \mathcal{P}$ がわかる。したがって $V^\vee = \widetilde{\Theta} \subset P^{-1}(\mathcal{P}) = \Theta$ である。よって $\Theta = \widetilde{\Theta} = V^\vee$ である。

(5) $P \circ \theta$, $\theta \circ P$ を直接計算すれば確かめられる。

(6) 最小次元実現の特徴づけを確かめればよい。条件 A(3) が成り立つことは、いま V の任意のアファイン部分空間に対し「$T(x) \in W$ γ-a.e.x」と「$T(x) \in W$ $\forall x$」が同値であることから明らか。条件 B が成り立つことは $\Theta = V^\vee$ よりわかる。 □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を ∇、Fisher 計量を g、$(0,3), (1,2)$ 型の Amari-Chentsov テンソルをそれぞれ S, A とおく。また、$\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は多様体 $\mathcal{P}$ の座標とみなす。

注意 1.3 ($\mathcal{P}$ の 2 通りの位相 & 多様体構造). $\mathcal{P}$ 上の位相 & 多様体構造として、$\mathcal{X}$ 上の符号付き測度全体のなすベクトル空間 $\mathcal{S}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{R}^n$ の部分多様体としてのものと、指数型分布族としての自然なものの 2 通りを考えられるが、これらは互いに一致する。なぜならば、いずれの位相 & 多様体構造に関しても写像 $\theta\colon \mathcal{P} \to \Theta$ は微分同相写像だからである。

命題 1.4 (Fisher 計量の成分). 座標 $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ に関する Fisher 計量 g の成分は

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} p_i - p_i p_j \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j = 1, \dots, n-1) \tag{1.13}$$

となる。

証明 微分同相写像 θ により g を Θ 上のテンソル場とみなして計算すれば、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= (\mathrm{Var}_p[T])(e^i, e^j) &(1.14)\\ &= E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])] &(1.15)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} - p_i)(\delta_{jk} - p_j) p_k &(1.16)\\ &= \delta_{ij} p_i - p_i p_j &(1.17) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

命題 1.5 (AC テンソルの成分). 座標 θ に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{ijk}(p) = p_i \delta_{ij} \delta_{jk} - p_i p_k \delta_{ij} - p_i p_j \delta_{jk} - p_j p_k \delta_{ik} + 2 p_i p_j p_k \qquad (p \in \mathcal{P},\ i, j, k = 1, \dots, n-1) \tag{1.18}$$

となる。

証明 前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.9 を用いると

$$S_{ijk}(p) = E_p[(T^i - E_p[T^i])(T^j - E_p[T^j])(T^k - E_p[T^k])] \tag{1.19}$$

となるから、命題 1.4 と同様に直接計算して命題の主張の等式が得られる。 □

以降、$n = 3$ の場合を考える。

命題 1.6 ($n = 3$ での g, S, A の計算). 座標 θ に関し、g の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})_{i,j} = \frac{1}{p_3} \begin{pmatrix} \dfrac{p_3}{p_1} + 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{p_3}{p_2} + 1 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

となる。S の成分は

$$\begin{aligned} S_{111} &= p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3, &(1.21)\\ S_{112} = S_{121} = S_{211} &= -p_1 p_2 + 2p_1^2 p_2, &(1.22)\\ S_{122} = S_{212} = S_{221} &= -p_1 p_2 + 2p_1 p_2^2, &(1.23)\\ S_{222} &= p_2 - 3p_2^2 + 2p_2^3 &(1.24) \end{aligned}$$

となる。A の成分は

$$A_{11}{}^{1} = 1 - 2p_1, \qquad\qquad A_{11}{}^{2} = 0 \tag{1.25}$$

$$A_{12}{}^{1} = A_{21}{}^{1} = -p_2, \qquad A_{12}{}^{2} = A_{21}{}^{2} = -p_1 \tag{1.26}$$

$$A_{22}{}^{1} = 0, \qquad A_{22}{}^{2} = 1 - 2p_2 \tag{1.27}$$

となる。

証明 g の行列表示は命題 1.4 よりわかる。その逆行列は直接計算よりわかる。S の成分は命題 1.5 よりわかる。A の成分は「$A_{ij}{}^{k} = g^{kl}S_{ijl}$」を用いて求める。具体的には以下の行列を直接計算すればわかる:

$$\begin{pmatrix} A_{11}{}^{1} & A_{12}{}^{1} & A_{22}{}^{1} \\ A_{11}{}^{2} & A_{12}{}^{2} & A_{22}{}^{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_3}\begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1}+1 & 1 \\ 1 & \frac{p_3}{p_2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{111} & S_{121} & S_{221} \\ S_{112} & S_{122} & S_{222} \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

□

命題 1.7 ($n = 3$ での測地線方程式). 各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、座標 θ に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\ddot{\theta}^1 = -\frac{1-\alpha}{2}\left(\left(1 - \frac{2\exp\theta^1}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\right)(\dot{\theta}^1)^2 - \frac{2\exp\theta^2}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\right) \tag{1.29}$$

$$\ddot{\theta}^2 = -\frac{1-\alpha}{2}\left(-\frac{2\exp\theta^1}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\dot{\theta}^1\dot{\theta}^2 + \left(1 - \frac{2\exp\theta^2}{1+\exp\theta^1+\exp\theta^2}\right)(\dot{\theta}^2)^2\right) \tag{1.30}$$

となる。とくに $\alpha = 1$ のとき

$$\ddot{\theta}^1 = 0, \quad \ddot{\theta}^2 = 0 \tag{1.31}$$

である。

証明 測地線の方程式

$$\ddot{\theta}^k = -\Gamma^k_{ij}\dot{\theta}^i\dot{\theta}^j \tag{1.32}$$

に、前回 (`0613_資料.pdf`) の命題 1.11 の等式 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} = \frac{1-\alpha}{2}A_{ij}{}^{k}$ を代入して得られる。 □

$\alpha \neq 1$ の場合に上の測地線方程式を解くのは難しいように思う。数値計算の結果を資料末尾の付録に載せた。

2 具体例: 正規分布族

本節では、正規分布族について、α-接続に関する測地線方程式を求めてみる。

設定 2.1 (正規分布族). $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ とし、

$$\mathcal{P} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\lambda(dx) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \,\middle|\, (\mu,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \right\} \tag{2.1}$$

とおく。これが $\mathcal{X}$ 上の指数型分布族であることは `0425_資料.pdf` 例 3.2 で確かめた。

以降、次の事実をしばしば用いる:

事実 2.2. 次の 2 つの写像は互いに逆な C^∞ 写像である:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0},\qquad (\mu,\sigma)\mapsto\left(\frac{\mu}{\sigma^2},-\frac{1}{2\sigma^2}\right),\tag{2.2}$$

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0},\qquad (\theta^1,\theta^2)\mapsto\left(-\frac{\theta^1}{2\theta^2},\sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}\right)\tag{2.3}$$

□

命題 2.3 (最小次元実現の構成および $\mathcal{P}$ が開であることの確認)**.**

(1) (V,T,λ) を次のように定めると、これは $\mathcal{P}$ の実現となる:

$$V=\mathbb{R}^2,\tag{2.4}$$

$$T\colon\mathcal{X}\to V,\quad x\mapsto {}^t(x,x^2),\tag{2.5}$$

$$\lambda\colon \text{Lebesgue 測度}.\tag{2.6}$$

(2) この実現の対数分配関数 $\psi\colon\widetilde{\Theta}\to\mathbb{R}$ は $\psi(\theta)=-\frac{(\theta^1)^2}{4\theta^2}-\frac{1}{2}\log(-\theta^2)+\frac{1}{2}\log\pi$ となる。

(3) $\Theta=\widetilde{\Theta}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ が成り立つ。

(4) 次の写像 $\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta$ は $P:=P_{(V,T,\lambda)}$ の逆写像である:

$$\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta,\quad p\mapsto\left(\frac{E_p[x]}{\mathrm{Var}_p[x]},-\frac{1}{2\,\mathrm{Var}_p[x]}\right)\tag{2.7}$$

(5) (V,T,λ) は最小次元実現である。とくに $\mathcal{P}$ は開である。

証明 (1) 実現であることは `0425_資料.pdf` 例 3.2 で確かめた。

(2) 対数分配関数の定義から直接計算よりわかる。

(3) $\theta^2\geq 0$ だと $\exp\left(\theta^1x+\theta^2x^2-\psi(\theta)\right)$ は積分可能でないから $\Theta\subset\widetilde{\Theta}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ である。逆に写像 $P:=P_{(V,T,\lambda)}$ について、すべての $p\in P(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})$ は $p(dx)=\exp(\theta^1x+\theta^2x^2-\psi(\theta))\lambda(dx)$ $(\exists(\theta^1,\theta^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})$ と表せるから、$(\mu,\sigma):=\left(-\frac{\theta^1}{2\theta^2},\sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ とおけば $p(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\lambda(dx)$ と表せることになり $p\in\mathcal{P}$ がわかる。したがって $P(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0})\subset\mathcal{P}$ をみたすから $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}\subset P^{-1}(\mathcal{P})=\Theta$ である。よって $\Theta=\widetilde{\Theta}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ である。

(4) $(\theta^1,\theta^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0}$ と $(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ の対応に注意すれば直接計算よりわかる。

(5) 最小次元実現の特徴づけの条件 A(3) と条件 B が成り立つことから、最小次元実現であることがわかる。 □

以降、$\mathcal{P}$ には自然な位相および多様体構造が入っているものとして扱い、$\mathcal{P}$ 上の自然な平坦アファイン接続を ∇、Fisher 計量を g、$(0,3),(1,2)$ 型の Amari-Chentsov テンソルをそれぞれ S,A とおく。また、$\theta\colon\mathcal{P}\to\Theta$ は多様体 $\mathcal{P}$ の座標とみなす。

命題 2.4. 座標 (μ, σ) に関する g の行列表示は

$$(g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

となる。

証明 微分同相写像 θ により g を Θ 上のテンソル場とみなして計算する。座標 (θ^1, θ^2) と座標 (μ, σ) の間の座標変換が $\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ および $\mu = -\frac{\theta^1}{2\theta^2}$, $\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2\theta^2}}$ であることに注意すると

$$d\mu = -\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2, \qquad d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-3/2}d\theta^2, \tag{2.9}$$

$$d\theta^1 = \frac{1}{\sigma^2}d\mu - \frac{2\mu}{\sigma^3}d\sigma, \qquad d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^3}d\sigma, \tag{2.10}$$

さらに

$$(d\theta^1)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(d\mu)^2 - \frac{\mu}{\sigma^5}d\mu d\sigma + \frac{4\mu^2}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \tag{2.11}$$

$$d\theta^1 d\theta^2 = \frac{1}{\sigma^5}d\mu d\sigma - \frac{2\mu}{\sigma^6}(d\sigma)^2, \tag{2.12}$$

$$(d\theta^2)^2 = \frac{1}{\sigma^6}(d\sigma)^2 \tag{2.13}$$

である。したがって、Θ 上の標準的な平坦アファイン接続を D とおくと

$$Dd\mu = \frac{1}{(\theta^2)^2}d\theta^1 d\theta^2 - \frac{\theta^1}{(\theta^2)^3}(d\theta^2)^2 = \frac{4}{\sigma}d\mu d\sigma, \tag{2.14}$$

$$Dd\sigma = \frac{3}{4\sqrt{2}}(-\theta^2)^{-5/2}(d\theta^2)^2 = \frac{3}{\sigma}(d\sigma)^2 \tag{2.15}$$

である。よって

$$d\psi = \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{Hess}\psi = Dd\psi \tag{2.17}$$

$$= d\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)d\mu + \frac{\mu}{\sigma^2}Dd\mu + d\left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)d\sigma + \left(-\frac{\mu^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma}\right)Dd\sigma \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 \tag{2.19}$$

である。これより命題の主張が従う。 □

命題 2.5 (AC テンソルの成分). 座標 (μ, σ) に関する AC テンソル S の成分は

$$S_{111} = 0 \tag{2.20}$$

$$S_{112} = S_{121} = S_{211} = \frac{2}{\sigma^3} \tag{2.21}$$

$$S_{122} = S_{212} = S_{221} = 0 \tag{2.22}$$

$$S_{222} = \frac{8}{\sigma^3} \tag{2.23}$$

である。座標 (μ, σ) に関する A の成分は

$$A_{11}{}^1 = 0, \qquad A_{11}{}^2 = \frac{1}{\sigma}, \tag{2.24}$$
$$A_{12}{}^1 = A_{21}{}^1 = \frac{2}{\sigma}, \qquad A_{12}{}^2 = A_{21}{}^2 = 0, \tag{2.25}$$
$$A_{22}{}^1 = 0, \qquad A_{22}{}^2 = \frac{4}{\sigma} \tag{2.26}$$

である。

証明 微分同相写像 θ により S, A を Θ 上のテンソル場とみなして計算する。Θ 上の標準的な平坦アファイン接続を D とおくと

$$DDd\psi = D\left(\frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2\right) \tag{2.27}$$
$$= -\frac{2}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{1}{\sigma^2}D(d\mu)^2 - \frac{4}{\sigma^3}(d\sigma)^3 + \frac{2}{\sigma^2}D(d\sigma)^2 \tag{2.28}$$

ここで

$$D(d\mu)^2 = 2d\mu Dd\mu = \frac{8}{\sigma}(d\mu)^2 d\sigma, \tag{2.29}$$
$$D(d\sigma)^2 = 2d\sigma Dd\sigma = \frac{6}{\sigma}(d\sigma)^3 \tag{2.30}$$

だから

$$DDd\psi = \frac{6}{\sigma^3}(d\mu)^2 d\sigma + \frac{8}{\sigma^3}(d\sigma)^3 \tag{2.31}$$

である。これより命題の主張の式が得られる。A の成分は「$A_{ij}{}^k = g^{kl}S_{ijl}$」を用いて直接計算より得られる。

□

命題 2.6 (接続係数).

(1) 座標 (μ, σ) に関する ∇^g の接続係数は

$$\Gamma^{g}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{g}{}^1_{12} = \Gamma^{g}{}^1_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \qquad \Gamma^{g}{}^1_{22} = 0, \tag{2.32}$$
$$\Gamma^{g}{}^2_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{g}{}^2_{12} = \Gamma^{g}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{g}{}^2_{22} = -\frac{1}{\sigma} \tag{2.33}$$

である。

(2) 座標 (μ, σ) に関する $\nabla^{(\alpha)}$ の接続係数は

$$\Gamma^{(\alpha)}{}^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{12} = \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{21} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^1_{22} = 0, \tag{2.34}$$
$$\Gamma^{(\alpha)}{}^2_{11} = \frac{1-\alpha}{2\sigma}, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{12} = \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^{(\alpha)}{}^2_{22} = -\frac{1+2\alpha}{\sigma} \tag{2.35}$$

である。

証明 Γ^g は $\Gamma^{g}{}_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right)$ を直接計算することで得られる。$\Gamma^{(\alpha)}$ は $\Gamma^{(\alpha)}{}_{ij}^{k} = \Gamma^{g}{}_{ij}^{k} - \frac{\alpha}{2} A_{ij}{}^{k}$ より得られる。 □

命題 2.7 (測地線方程式). (μ, σ) 座標に関する $\nabla^{(\alpha)}$-測地線の方程式は

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \frac{2(1+\alpha)}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \frac{1-\alpha}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1+2\alpha}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

である。とくに $\alpha = 0$ のとき

$$\begin{cases} \ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \\ \ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

である。

証明 測地線の方程式「$\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j$」に接続係数を代入して得られる。 □

命題 2.8. ∇^g-測地線の像は、楕円

$$\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}} \right)^2 + y^2 = r^2 \qquad (x_0 \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_{>0}) \tag{2.38}$$

の一部または y 軸に平行な直線の一部である。

証明[2)] 測地線の方程式

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0, \tag{2.39}$$

$$\ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \tag{2.40}$$

を変形していく。

$\dot{\mu} = 0$ の場合は $\mu = \text{const.}$ ゆえに測地線は y 軸に平行な直線の一部である。

以下、$\dot{\mu} \neq 0$ の場合を考える。(2.39) の両辺を $\dot{\mu}$ で割って

$$\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} - 2 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0 \tag{2.41}$$

これより $\log \dot{\mu} = 2 \log \sigma + \text{const.}$ したがって

$$\dot{\mu} = k \sigma^2 \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{2.42}$$

である。一方、∇^g は g の Levi-Civita 接続であるから、測地線の速度ベクトルの g に関する大きさは一定、すなわち

$$\frac{\dot{\mu}^2 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = r^2 \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{2.43}$$

である。(2.43) に (2.42) を代入して

$$\frac{k^2 \sigma^4 + 2\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} = a^2 \tag{2.44}$$

$$\dot{\sigma} = \pm\sigma\sqrt{\frac{a^2 - k^2\sigma^2}{2}} \tag{2.45}$$

を得る。これと (2.42) より

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\sigma}} = \frac{k\sigma^2}{\pm\sigma\sqrt{\frac{a^2-k^2\sigma^2}{2}}} \tag{2.46}$$

$$= \mp\frac{\sqrt{2}|a|}{k}\frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma^2}} \tag{2.47}$$

$$\therefore\ \mu = \mp\frac{\sqrt{2}|a|}{k}\sqrt{1-\left(\frac{k}{a}\right)^2\sigma^2} + \mu_0 \qquad (\mu_0 \in \mathbb{R}) \tag{2.48}$$

を得る。よって

$$(\mu - \mu_0)^2 = \frac{2a^2}{k^2} - 2\sigma^2 \tag{2.49}$$

$r := \dfrac{a}{k}$ とおいて整理すれば

$$\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sigma^2 = r^2 \tag{2.50}$$

が得られる。 □

今後の予定

- 未定 (ダイバージェンス, 期待値パラメータ, etc.)

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[BN78] O. E. Barndorff-Nielsen, **Information and exponential families: In statistical theory**, Wiley, 1978.

[Tu17] Loring W. Tu, **Differential geometry**, Springer, 2017.

2) 証明の流れは [Tu17, Chap.3 14.4] を参考にした。

A 付録

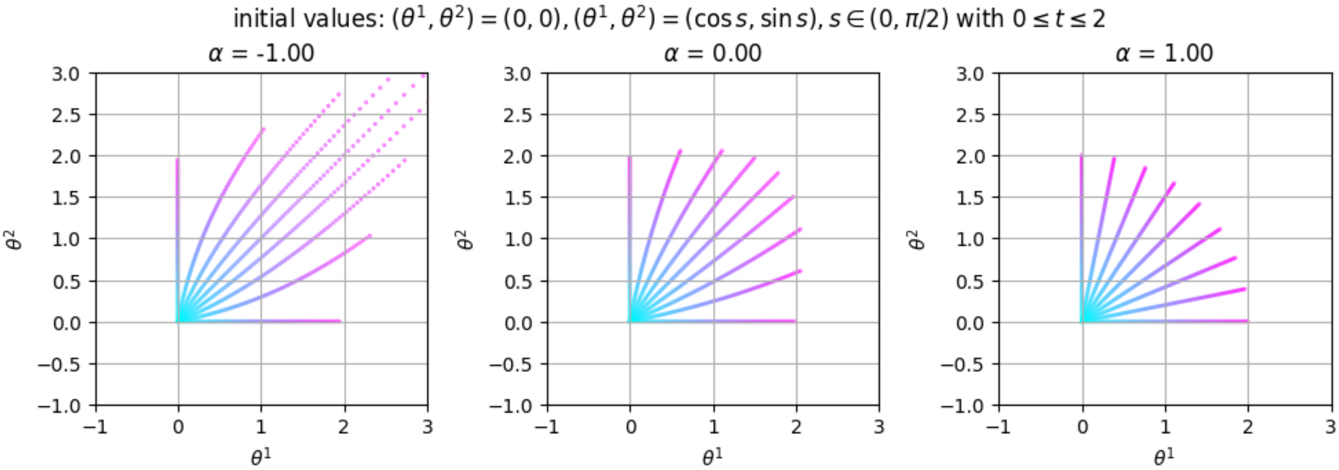

図 1 (有限集合上の確率分布族) α **を変化させたときの** $\nabla^{(\alpha)}$**-測地線の様子**

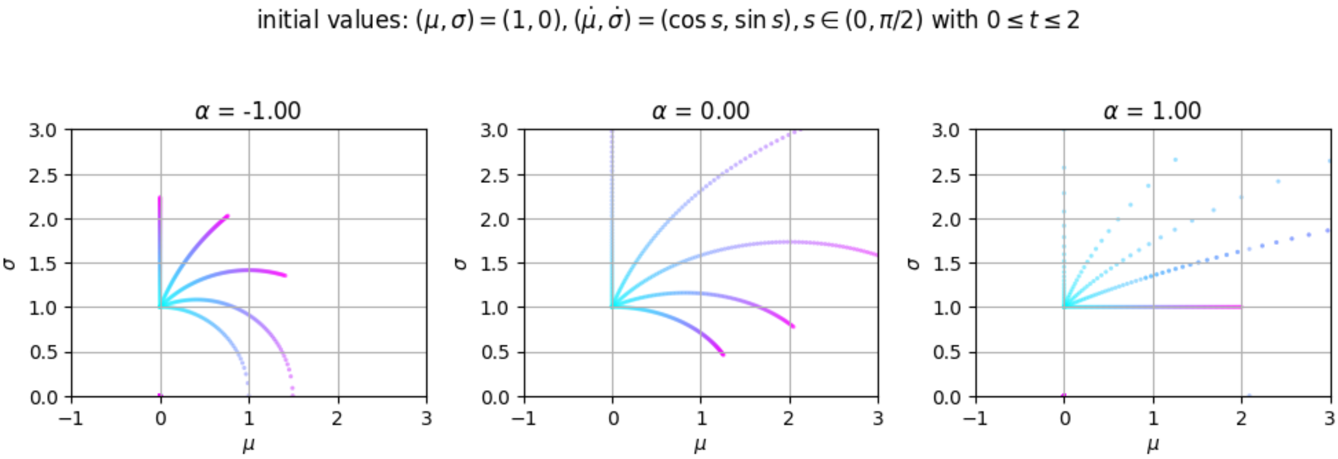

図 2 (正規分布族) α **を変化させたときの** $\nabla^{(\alpha)}$**-測地線の様子**