0516_資料.pdf で述べた微分と積分の順序交換について、exp を他の関数に置き換えた場合、どのくらい同じことがいえるかを考えてみる。

♤ **演習問題 0.1.** $\mathcal{X}$ を可測空間、μ を $\mathcal{X}$ 上の測度、V を m 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$T\colon \mathcal{X} \to V$ を可測関数、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数、$h\colon V^\vee \times \mathcal{X} \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto f(\langle t, T(x)\rangle)$ とし、$V^\vee$ のある開部分集合 Θ 上で $\lambda\colon \Theta \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_{\mathcal{X}} h(t,x)\,\mu(dx)$ が定義されているとする。このとき、$\lambda'(t) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\,\mu(dx)$ $(t \in \Theta)$ が成り立つような f の条件 (C^1 級、凸など) はどのようなものか？あるいは、どのような反例があるか？

もう少し簡単な設定で考えてみる。

♤ **演習問題 0.2.** $\mathcal{X}$ を可測空間、μ を $\mathcal{X}$ 上の測度、$T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ を可測関数、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能な凸関数、$h\colon \mathbb{R}\times\mathcal{X} \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto f(tT(x))$ とし、$\mathbb{R}$ のある開部分集合 Θ 上で $\lambda\colon \Theta \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_{\mathcal{X}} h(t,x)\,\mu(dx)$ が定義されているとする。このとき、$\lambda'(t) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\,\mu(dx)$ $(t \in \Theta)$ は成り立つか？

演習問題 0.2 の解答. $t \in \Theta$ とし、$\lambda'(t) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\,\mu(dx)$ が成り立つことを示す。そのために示すべきことは偏導関数に対する優関数の存在、すなわち

(A) t のある開近傍 $U \overset{\text{open}}{\subset} \Theta$ と、ある μ-可積分関数 $\Phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が存在し、すべての $t' \in U$ に対し $\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t',x)\right| \leq \Phi(x)$ a.e.x が成り立つ。

である。

<u>Step 1: U, Φ の構成</u>　$r > 0$ を十分小さく選び、$\mathbb{R}$ の閉区間

$$A_{2r} := [t-2r, t+2r], \quad A_r := [t-r, t+r] \tag{0.1}$$

が Θ に含まれるようにしておく。そこで $U := \mathrm{Int}_\Theta A_r = (t-r, t+r)$ とおき、$\Phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ を

$$\Phi(x) := \frac{1}{r}\Big(|h(t+2r,x)| + |h(t+r,x)| + |h(t-r,x)| + |h(t-2r,x)|\Big) \tag{0.2}$$

と定める。以下、この U, Φ が条件 (A) をみたすものであることを示す。

まず U は Θ における t の開近傍であり、また $t \pm r, t \pm 2r \in \Theta$ ゆえに $h(t\pm r,\cdot), h(t\pm 2r,\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ は μ-可積分だから、Φ は μ-可積分である。したがって残りの示すべきことは、すべての $t' \in U$ に対し $\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t',x)\right| \leq \Phi(x)$ a.e.x すなわち $|f'(t'T(x))T(x)| \leq \Phi(x)$ a.e.x が成り立つことである。

<u>Step 2: Φ による不等式評価</u>　$t' \in U$ とする。まず各 $x \in \mathcal{X}$ に対し、$T(x)$ の符号で場合分けして不等式評価を与える。

$T(x) > 0$ の場合、$(t-2r)T(x) < (t-r)T(x) < t'T(x) < (t+r)T(x) < (t+2r)T(x)$ だから、f の凸性より

$$\frac{f((t-r)T(x)) - f((t-2r)T(x))}{(t-r)T(x) - (t-2r)T(x)} \leq f'(t'T(x)) \leq \frac{f((t+2r)T(x)) - f((t+r)T(x))}{(t+2r)T(x) - (t+r)T(x)} \tag{0.3}$$

$T(x) > 0$ より

$$\frac{f((t-r)T(x)) - f((t-2r)T(x))}{r} \leq f'(t'T(x))T(x) \leq \frac{f((t+2r)T(x)) - f((t+r)T(x))}{r} \tag{0.4}$$

が成り立つ。さらに $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (resp. $\mathbb{R}_{\leq 0}$) 上での $|\cdot|$ の単調増加性 (resp. 単調減少性) より

$$f'(t'T(x))T(x) \geq 0 \implies |f'(t'T(x))T(x)| \leq \frac{1}{r}\,|f((t+2r)T(x)) - f((t+r)T(x))|\,, \tag{0.5}$$

$$f'(t'T(x))T(x) < 0 \implies |f'(t'T(x))T(x)| \leq \frac{1}{r}\,|f((t-r)T(x)) - f((t-2r)T(x))| \tag{0.6}$$

が成り立つ。したがって、これら 2 つの不等式を合わせて

$$\begin{aligned}
|f'(t'T(x))T(x)| &\leq \frac{1}{r}\Big(|f((t+2r)T(x)) - f((t+r)T(x))| + |f((t-r)T(x)) - f((t-2r)T(x))|\Big) && (0.7)\\
&\leq \frac{1}{r}\Big(|f((t+2r)T(x))| + |f((t+r)T(x))| + |f((t-r)T(x))| + |f((t-2r)T(x))|\Big) && (0.8)\\
&= \frac{1}{r}\Big(|h(t+2r,x)| + |h(t+r,x)| + |h(t-r,x)| + |h(t-2r,x)|\Big) && (0.9)\\
&= \Phi(x) && (0.10)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$T(x) < 0$ の場合も同様にして $|f'(t'T(x))T(x)| \leq \Phi(x)$ が成り立ち、また $T(x) = 0$ の場合も明らかに成り立つ。したがって U, Φ が条件 (A) をみたすことが示されて、証明が完了した。 □