## 振り返りと導入

前回は KL ダイバージェンスの双対平坦多様体への一般化を考え始めた。本稿では次のことを行う:

- 双対平坦構造の canonical ダイバージェンスを定義する。
- 双対平坦構造からシンプレクティック構造が定まることをみる。

## 1 canonical ダイバージェンス

**定義 1.1** (∇-凸集合)**.** 部分集合 $S \subset M$ が **∇-凸 (∇-convex)** であるとは、任意の $p, q \in S$ に対し、$p$ から $q$ への $S$ 内の ∇-測地線がただひとつ存在することをいう。

**定義 1.2** ($g$-凸集合)**.** 部分集合 $S \subset M$ が **$g$-凸 ($g$-convex)** であるとは、任意の $p, q \in S$ に対し、$p$ から $q$ への $M$ 内の $\nabla^g$-測地線で最短なものがただひとつ存在し、かつそれが $S$ 内に含まれることをいう。

**定義 1.3** (canonical ダイバージェンスの定義域)**.**

$$\mathcal{U} := \left\{ (p,q) \in M \times M \;\middle|\; \begin{array}{c} p, q \text{ を含む } g\text{-凸開集合を含む} \\ \nabla\text{-凸または } \nabla^*\text{-凸な双対アファインチャートが存在する} \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

**補題 1.4** ($g$-凸開近傍の存在)**.** 各 $p \in M$ に対し、ある $R > 0$ が存在して、任意の $r \in (0, R)$ に対し $B_r(p) \subset M$ は $g$-凸である。

**証明** [TODO] cf. Riemann 多様体の教科書 □

**補題 1.5** ($\mathcal{U}$ の多様体構造)**.** $\mathcal{U}$ は $\Delta_M$ を含む $M \times M$ の開集合である。したがって $\mathcal{U}$ には $M \times M$ の開部分多様体の構造が入る。

**証明** 開集合となることは定義から明らか。また、各 $p_0 \in M$ に対し、$p_0$ のまわりの双対アファインチャート $(U, \theta, \eta)$ が存在するから、$p_0$ の ∇-凸開近傍 $U'$ を $U' \subset U$ となるようにとれば、補題より $U'$ は $p_0$ の $g$-凸開近傍を含む。したがって $U' \times U'$ は $M \times M$ における $p_0$ の近傍であり、$\mathcal{U}$ に含まれる。よって $\mathcal{U}$ は $\Delta_M$ を含む。 □

**命題 1.6.** 次は同値である:

(1) $U$ は ∇-凸であり、$U$ 上の双対アファイン座標が存在する。
(2) $U$ は ∇-凸であり、$U$ 上の ∇-アファイン座標が存在する。

**証明** [TODO] □

**定義 1.7** (双対ポテンシャル)**.** [TODO]

**命題-定義 1.8** (canonical ダイバージェンス). 関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を次のように定める: $(p,q) \in \mathcal{U}$ を固定し、$p,q$ を含む $g$-凸開集合を含む $\nabla$-凸または $\nabla^*$-凸な双対アファインチャート $(U,\theta,\eta)$ をひとつ選び、その双対ポテンシャル $(\psi,\varphi)$ を 1 組選ぶ。このとき、点 $(p,q)$ における

$$\psi(q) + \varphi(p) - \langle \theta(q), \eta(p) \rangle \tag{1.2}$$

の値は $(U,\theta,\eta)$ や $(\psi,\varphi)$ の選び方によらない。この値を $D(p\|q)$ と記す。以上により定まる関数 $D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を双対平坦構造 $(g,\nabla,\nabla^*)$ の **canonical ダイバージェンス** と呼ぶ。

**証明** [TODO] □

**命題 1.9** (canonical ダイバージェンスの性質). $(g,\nabla^*,\nabla)$ の canonical ダイバージェンスを $D^*$ として

(1) $D$ は $C^\infty$ 関数である。
(2) $D(p\|q) \geq 0$
(3) $D(p\|q) = 0 \iff p = q$
(4) $D(p\|q) = D^*(q\|p)$

**証明** [TODO] □

## 2 双対平坦構造とシンプレクティック構造

**命題 2.1** (双対平坦構造のシンプレクティック構造). $M$ を多様体、$(g,\nabla,\nabla^*)$ を $M$ 上の双対平坦構造、$D\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ を canonical ダイバージェンス、$\omega_0 \in \Omega^2(T^\vee M)$ を $T^\vee M$ 上の自然シンプレクティック形式とする。写像 $d_1 D\colon \mathcal{U} \to T^\vee M$ を第 1 成分に関する微分、すなわち $d_1 D := D(\frac{\partial}{\partial x^i}\|)\, dx^i$ で定め、$\mathcal{U}$ 上の 2-形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{U})$ を $\omega := (d_1 D)^*(\omega_0)$ で定める。このとき次が成り立つ:

(1) $M$ の任意の局所座標 $x = (x_i)_i$ に対し、$x^* := x$ とおいて $\mathcal{U}$ の局所座標 $(x, x^*) = (x^1, \ldots, x^n, x^{*1}, \ldots, x^{*n})$ を定めると、$\omega$ の成分表示は

$$\omega = D(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\|\tfrac{\partial}{\partial x^{*j}})\, dx^i \wedge dx^{*j} \tag{2.1}$$

となる。

(2) $\omega$ は $\mathcal{U}$ 上のシンプレクティック形式である。

(3)

**証明** (1) 前回示した。

(2) □

**例 2.2** ($\mathbb{R}^n$ の場合). [TODO]

## 今後の予定

- 双対平坦構造のシンプレクティック構造と双対アファイン座標

# 参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).

[野 20] 知宣 野田, **シンプレクティック幾何的視点での BAYES の定理について (部分多様体の幾何学の深化と展開)**, 数理解析研究所講究録 **2152** (2020), 29–43 (jpn).