第 1 章　群

群について述べる。

1.1　群

定義 1.1.1 (モノイド). M を集合、$e \in M$、$\cdot\colon M \times M \to M$ を写像とし、各 $x, y \in M$ に対し $\cdot(x, y)$ を $x \cdot y$ や xy と書くことにする。組 $(M, \cdot, e)$ が**モノイド (monoid)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(M1) 結合律　各 $x, y, z \in M$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ が成り立つ。
(M2) 単位元　各 $x \in M$ に対して $x \cdot e = x = e \cdot x$ が成り立つ。

組 $(M, \cdot, e)$ のことを記号の濫用で単に $(M, \cdot)$ や M と書くことがある。さらに

- e を M の**単位元 (unit)** という。

定義 1.1.2 (群). モノイド $(G, \cdot, e)$ が**群 (group)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(G1) 逆元　各 $x \in G$ に対してある $y \in G$ が存在して $x \cdot y = e = y \cdot x$ が成り立つ。

さらに

- y を x の**逆元 (inverse)** といい、x^{-1} と書く。

定義 1.1.3 (アーベル群). 群 $(G, +, 0)$ が**アーベル群 (abelian group)** であるとは、次が成り立つことをいう:

(A1) 可換性　各 $x, y \in G$ に対して $x + y = y + x$ が成り立つ。

定義 1.1.4 (群準同型). [TODO]

1.2　部分群

命題 1.2.1 (部分群の特徴付け). [TODO]

証明. [TODO] □

定義 1.2.2 (生成された部分群). G を群、$S \subset G$ とする。このとき、集合

$$\langle S \rangle \coloneqq \{g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ g_i \in S,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\} \tag{1.2.1}$$

は定義から明らかに G の部分群となる。$\langle S \rangle$ を **S により生成された G の部分群 (subgroup of G generated by S)** といい、S を $\langle S \rangle$ の**生成系 (generating set)** という。

G が有限集合 S により生成されるとき、$G = \langle S \rangle$ は**有限生成 (finitely generated)** であるといい、さらに S が 1 点集合 $S = \{x\}$ のとき波括弧を省略して $\langle x \rangle$ と書き、$G = \langle x \rangle$ は a **巡回群 (cyclic group)** であるという。

命題 1.2.3 (生成された部分群の特徴付け)**.** G を群、$S \subset G$ とする。このとき

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{G' \subset G:\ \text{部分群} \\ G' \supset S}} G' \tag{1.2.2}$$

が成り立つ。

証明. [TODO] □

1.3 群作用

群の作用について述べる。

定義 1.3.1 (作用)**.** G を群、X を集合とする。写像

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx \tag{1.3.1}$$

が与えられていて

(1) 各 $g_1, g_2 \in G,\ x \in X$ に対して $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ が成り立つ。
(2) 各 $x \in X$ に対して $e_G x = x$ が成り立つ。

をみたすとき、G は X に左から**作用 (act)** するという。G が左から作用している集合を**左 G-集合 (left G-set)** という。右からの作用も同様に定まる。

定義 1.3.2 (軌道)**.** G を群、X を左 G-集合とする。X 上の同値関係を

$$x \text{ と } y \text{ が同値} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G \quad \text{s.t.} \quad gx = y \tag{1.3.2}$$

で定めることができ、この同値関係に関する同値類を**軌道 (orbit)** という。

定義 1.3.3 (固定部分群)**.** G を群、X を左 G-集合とする。各 $x \in X$ に対し、G の部分群

$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \colon xg = x\} \tag{1.3.3}$$

を x の**固定部分群 (stabilizer)** という。

定義 1.3.4 (忠実作用)**.** G を群、X を左 G-集合とする。G の X への作用が**忠実 (faithful)** あるいは**効果的 (effective)** であるとは、次が成り立つことをいう:

- すべての $x \in X$ を固定する $g \in G$ は単位元のみである。

定義から明らかに、作用が忠実であることは作用の定める表現 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が単射であることと同値である。

定義 1.3.5 (自由作用)**.** G を群、X を左 G-集合とする。G の X への作用が**自由 (free)** であるとは、単位元以外の $g \in G$ はすべての $x \in X$ を動かすように作用すること、すなわち

$$\forall g \in G \ (g \neq 1 \Rightarrow (\forall x \in X \ (xg \neq x))) \tag{1.3.4}$$

が成り立つことをいう。これはすべての $x \in X$ に対し $\mathrm{Stab}_G(x)$ が自明群であることと同値である。

定義 1.3.6 (推移的作用)**.** G を群、X を左 G-集合とする。各 $x \in X$ に対し $xG := \{xg \in X : g \in G\}$ と書く。G の X への作用が**推移的 (transitive)** であるとは、

$$X = xG \quad (\forall x \in X) \tag{1.3.5}$$

が成り立つことをいう。これは次と同値である：

- $\forall x_0 \in X$ を固定すると、$\forall y \in X$ に対し $\exists g \in G$ がとれて $y = x_0 g$ が成り立つ。

A. G-torsor

定義 1.3.7 (G-torsor)**.** G を群、X を非空な左 G-集合とする。**shear map** と呼ばれる写像

$$G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x) \tag{1.3.6}$$

が全単射であるとき、X を **G-torsor** という。

命題 1.3.8 (G-torsor の特徴付け)**.** G を群、X を左 G-集合とする。このとき、次は同値である:

(1) X は G-torsor である。
(2) G の X への作用は推移的かつ自由である。
(3) G の X への作用は推移的であり、さらに固定部分群が自明群であるような $x \in X$ が存在する。
(4) X と G は左 G-集合として同型である。

証明. [TODO] □

定理 1.3.9 (類等式)**.** [TODO]

証明. [TODO] □

定理 1.3.10 (Lagrange)**.** [TODO]

証明. [TODO] □

1.4 商群

1.5 準同型定理

定理 1.5.1 (準同型定理). [TODO]

証明. [TODO] □

定理 1.5.2 (部分群の対応原理). [TODO]

証明. [TODO] □

1.6 Sylow の定理

定理 1.6.1 (Sylow). [TODO]

証明. [TODO] □

1.7 群の表現

[TODO] 群の作用とはどう違う？

定義 1.7.1 (群の表現). G を群、C を圏とする。G は、射を群の元とし単一の対象 $*$ からなる圏とみなせる。C における G の**表現 (representation)** とは、圏 G から C への関手のことである。$T\colon G \to C$ を表現とするとき、各射 $T(g)$ は C の対象 $X := T(*)$ 上の自己同型射を与えるから、群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(X)$ が定まる。この群準同型も**表現 (representation)** と呼ぶ。

注意 1.7.2. 群の作用は集合の圏における群の表現 (これを**置換表現 (permutation representation)** という) に他ならない。

例 1.7.3.

- 有限群の表現
- 位相群の表現
- Lie 群の表現
- [TODO]

1.8 自由群

1.9 自由積と融合積

1.10 アーベル化

定理 1.10.1 (アーベル化の普遍性)**.** [TODO]

証明. [TODO] □

1.11 可解群

第 2 章　基本的な群

2.1　対称群

2.2　2 面体群

2.3　4 元数群

2.4　一般線型群