数学講究 XB レポート
Gromov-Hausdorff 距離が距離であることの証明

05-220542
Keiji Yahata

本レポートでは Gromov-Hausdorff 距離が距離であることの証明を与える。まず Gromov-Hausdorff 距離の定義を行う。

命題-定義 1.1 (Gromov-Hausdorff 距離). コンパクト距離空間の同型類全体の集合を CMet と書く。ただし「同型」とは等長同型 $\cong$ の意味である。このとき、CMet 上の 2 変数関数 $d_{\mathrm{GH}}\colon \mathrm{CMet}\times\mathrm{CMet}\to[0,+\infty]$ であって次をみたすものがただひとつ存在する:

- 各 $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathrm{CMet}$ に対し、代表元 $X\in\mathcal{X}$, $Y\in\mathcal{Y}$ をひとつずつ選ぶと

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \inf\{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0} \mid \exists d\colon \text{metric on } X\sqcup Y \text{ s.t. } d|_X = d_X,\ d|_Y = d_Y,& \\ \forall x\in X,\ \exists y\in Y,\ d(x,y)<\varepsilon,& \\ \forall y\in Y,\ \exists x\in X,\ d(x,y)<\varepsilon\}& \end{aligned} \tag{1.1}$$

  が成り立つ。ただし d_X, d_Y はそれぞれ X, Y に定まっている距離である。

d_{GH} を **Gromov-Hausdorff 距離**という。

証明　用語および記法の準備として、正実数 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ とコンパクト距離空間 X, Y に対し、$X\sqcup Y$ 上の距離 d に関する条件

$$\begin{cases} d|_X = d_X, \quad d|_Y = d_Y \\ \forall x\in X,\ \exists y\in Y,\ d(x,y)<\varepsilon \\ \forall y\in Y,\ \exists x\in X,\ d(x,y)<\varepsilon \end{cases} \tag{1.2}$$

を条件 $P(\varepsilon, X, Y)$ と呼ぶことにし、集合 $A_{X,Y}\subset\mathbb{R}_{>0}$ を

$$A_{X,Y} \coloneqq \{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0} \mid X\sqcup Y \text{ 上の距離 } d \text{ で条件 } P(\varepsilon,X,Y) \text{ をみたすものが存在する}\} \tag{1.3}$$

と定める。すると式 (1.1) の右辺は $\inf A_{X,Y}$ と表せることに注意しておく。

d_{GH} を式 (1.1) で定義するために、まず well-defined 性を示す。すなわち、$\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathrm{CMet}$ を任意とし、$\inf A_{X,Y}$ の値は代表元の選び方によらないことを示す。そのためには、$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ の任意の代表元 $X, X'\in\mathcal{X}$, $Y, Y'\in\mathcal{Y}$ に対し $A_{X,Y} = A_{X',Y'}$ が成り立つことをいえば十分である。さらに X, Y と X', Y' の立場を入れ替えても同様の議論が成り立つから、$A_{X,Y}\subset A_{X',Y'}$ を示せばよい。そこで $\varepsilon\in A_{X,Y}$ を任意とする。すると $A_{X,Y}$ の定義より、$X\sqcup Y$ 上の距離 d であって条件 $P(\varepsilon,X,Y)$ をみたすものが存在する。目標である $\varepsilon\in A_{X',Y'}$ を示すためには、$X'\sqcup Y'$ 上の距離 d' であって条件 $P(\varepsilon,X',Y')$ をみたすものを構成すればよい。

Step 1: 距離 d' の構成　等長同型写像 $f\colon X\cong X'$, $g\colon Y\cong Y'$ をひとつずつ選び、写像 $d'\colon (X'\sqcup Y')\times(X'\sqcup Y')\to[0,+\infty)$ を $d'(s',t')\coloneqq d((f\sqcup g)^{-1}(s'),(f\sqcup g)^{-1}(t'))$ で定める。すると、d が $X\sqcup Y$ 上の距離であることから d' は正値性、対称性、三角不等式をみたし、さらに $f\sqcup g$ が $X\sqcup Y\to X'\sqcup Y'$ の全単射であることから、d' は非退化性もみたす。したがって d' は $X'\sqcup Y'$ 上の距離となる。

Step 2: 距離 d' が条件 $P(\varepsilon,X',Y')$ をみたすこと　$d'|_{X'} = d_{X'}$ であることは、各 $s',t'\in X'$ に対し

$$\begin{aligned} d'|_{X'}(s',t') &= d((f\sqcup g)^{-1}(s'),(f\sqcup g)^{-1}(t')) && (1.4)\\ &= d(f^{-1}(s'),f^{-1}(t')) \qquad (\because s',t'\in X') && (1.5)\\ &= d_X(f^{-1}(s'),f^{-1}(t')) \qquad (\because d|_X = d_X,\ f^{-1}(s'),f^{-1}(t')\in X) && (1.6)\\ &= d_{X'}(s',t') \qquad (\because f \text{ は等長同型写像}) && (1.7) \end{aligned}$$

となることより従う。$d'|_{Y'} = d_{Y'}$ についても同様である。さらに「$\forall x' \in X',\ \exists y' \in Y',\ d'(x', y') < \varepsilon$」について、各 $x' \in X'$ に対し、$f^{-1}(x') \in X$ ゆえにある $y \in Y$ が存在して $d(f^{-1}(x'), y) < \varepsilon$ となるから、$y' := g(y) \in Y'$ とおけば

$$
\begin{aligned}
d'(x', y') &= d((f \sqcup g)^{-1}(x'), (f \sqcup g)^{-1}(y')) && (1.8)\\
&= d(f^{-1}(x'), g^{-1}(y')) \qquad (\because x' \in X',\ y' \in Y') && (1.9)\\
&= d(f^{-1}(x'), y) && (1.10)\\
&< \varepsilon && (1.11)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。「$\forall y' \in Y',\ \exists x' \in X',\ d'(x', y') < \varepsilon$」についても同様である。

以上で $\varepsilon \in A_{X',Y'}$ がいえた。したがって $A_{X,Y} \subset A_{X',Y'}$ ひいては $A_{X,Y} = A_{X',Y'}$ が示され、$\inf A_{X,Y}$ の値は代表元の選び方によらないことが示された。 □

Gromov-Hausdorff 距離が距離であることを示す。

定理 1.2 (Gromov-Hausdorff 距離は距離). Gromov-Hausdorff 距離 d_{GH} は CMet 上の距離である。

この定理の証明はいくつかの補題に分けて行う。まず三角不等式を示す。

補題 1.3. d_{GH} は三角不等式をみたす。

証明 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathcal{M}$ とし、$a := d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}),\ b := d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),\ c := d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ とおく。示すべき不等式は $a \leq b + c$ である。$b = \infty$ または $c = \infty$ の場合は明らかだから、$b, c < \infty$ の場合を考える。

$Y = \emptyset$ の場合は $b, c < \infty$ より $X = \emptyset,\ Z = \emptyset$ となるから、$a = b = c = 0$ となり証明は終わる。

以降 $Y \neq \emptyset$ の場合を考える。すると $a \leq b + c$ を示すためには、任意の $s > b,\ t > c$ に対し $a \leq s + t$ が成り立つことを示せばよく、そのためには $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ の代表元 X, Y, Z をひとつずつ選んで $s + t \in A_{X,Z}$ を示せばよい ($A_{X,Z}$ は (1.3) で定義したもの)。そこで、$X \sqcup Z$ 上の距離 $d_{X \sqcup Z}$ であって条件 $P(s + t, X, Z)$ をみたすものを構成することを考える。

Step 1: $d_{X \sqcup Z}$ の構成　いま $s > b,\ t > c$ ゆえに $s \in A_{X,Y},\ t \in A_{Y,Z}$ だから、$X \sqcup Y$ 上の距離 $d_{X \sqcup Y}$ であって条件 $P(s, X, Y)$ をみたすものと、$Y \sqcup Z$ 上の距離 $d_{Y \sqcup Z}$ であって条件 $P(t, Y, Z)$ をみたすものがそれぞれ存在する。これらを用いて写像 $d_{X \sqcup Z} \colon (X \sqcup Z) \times (X \sqcup Z) \to [0, +\infty)$ を

$$
\begin{aligned}
d_{X \sqcup Z}(x, x') &:= d_{X \sqcup Y}(x, x') \qquad (x, x' \in X) && (1.12)\\
d_{X \sqcup Z}(z, z') &:= d_{Y \sqcup Z}(z, z') \qquad (z, z' \in Z) && (1.13)\\
d_{X \sqcup Z}(x, z) &:= d_{X \sqcup Z}(z, x) := \inf_{y \in Y} \{d_{X \sqcup Y}(x, y) + d_{Y \sqcup Z}(y, z)\} \qquad (x \in X,\ z \in Z) && (1.14)
\end{aligned}
$$

と定義する。

Step 2: $d_{X \sqcup Z}$ が距離であること　$d_{X \sqcup Z}$ は定義から明らかに正値性、非退化性、対称律をみたすから、あとは三角不等式の成立を確かめればよい。$x, x' \in X,\ z \in Z$ として、経路 $x \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x'$ に沿った距離の和は

$$
\begin{aligned}
d_{X \sqcup Z}(x, z) + d_{X \sqcup Z}(z, x') &= \inf_{y \in Y} \{d_{X \sqcup Y}(x, y) + d_{Y \sqcup Z}(y, z)\} + \inf_{y' \in Y} \{d_{Y \sqcup Z}(z, y') + d_{X \sqcup Y}(y', x')\} && (1.15)\\
&= \inf_{y, y' \in Y} \{d_{X \sqcup Y}(x, y) + d_{Y \sqcup Z}(y, z) + d_{Y \sqcup Z}(z, y') + d_{X \sqcup Y}(y', x')\} && (1.16)
\end{aligned}
$$

$$\geq \inf_{y,y'\in Y}\{d_{X\sqcup Y}(x,y)+d_{Y\sqcup Z}(y,y')+d_{X\sqcup Y}(y',x')\} \tag{1.17}$$

$$= \inf_{y,y'\in Y}\{d_{X\sqcup Y}(x,y)+d_{X\sqcup Y}(y,y')+d_{X\sqcup Y}(y',x')\} \tag{1.18}$$

$$\geq d_{X\sqcup Y}(x,x') \tag{1.19}$$

より三角不等式をみたす。経路 $x \rightsquigarrow x' \rightsquigarrow z$ に沿った距離の和は

$$d_{X\sqcup Z}(x,x')+d_{X\sqcup Z}(x',z) = d_{X\sqcup Y}(x,x')+\inf_{y\in Y}\{d_{X\sqcup Y}(x',y)+d_{Y\sqcup Z}(y,z)\} \tag{1.20}$$

$$= \inf_{y\in Y}\{d_{X\sqcup Y}(x,x')+d_{X\sqcup Y}(x',y)+d_{Y\sqcup Z}(y,z)\} \tag{1.21}$$

$$\geq \inf_{y\in Y}\{d_{X\sqcup Y}(x,y)+d_{Y\sqcup Z}(y,z)\} \tag{1.22}$$

$$= d_{X\sqcup Z}(x,z) \tag{1.23}$$

より三角不等式をみたす。他の経路についても同様にして三角不等式をみたすことがわかる。したがって $d_{X\sqcup Z}$ は $X\sqcup Z$ 上の距離である。

Step 3: $d_{X\sqcup Z}$ が $P(s+t,X,Z)$ をみたすこと　$d_{X\sqcup Z}|_X = d_X$, $d_{X\sqcup Z}|_Z = d_Z$ は定義より明らかである。つぎに「$\forall x\in X$, $\exists z\in Z$, $d_{X\sqcup Z}(x,z) < s+t$」を示す。そこで $x\in X$ を任意とする。すると $d_{X\sqcup Y}$ が $P(s,X,Y)$ をみたすことから、ある $y\in Y$ が存在して $d_{X\sqcup Y}(x,y) < s$ となる。一方 $d_{Y\sqcup Z}$ が $P(t,Y,Z)$ をみたすことから、ある $z\in Z$ が存在して $d_{Y\sqcup Z}(y,z) < t$ となる。したがって

$$d_{X\sqcup Z}(x,z) \leq d_{X\sqcup Y}(x,y)+d_{Y\sqcup Z}(y,z) < s+t \tag{1.24}$$

が成り立つ。同様にして「$\forall z\in Z$, $\exists x\in X$, $d_{X\sqcup Z}(x,z) < s+t$」も示される。したがって $d_{X\sqcup Z}$ は $P(s+t,X,Z)$ をみたす。

以上より $s+t\in A_{X,Z}$ が示された。したがって d_{GH} は三角不等式をみたす。□

非退化性の一方を示す。

補題 1.4. $\mathcal{X}=\mathcal{Y} \implies d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$ が成り立つ。

証明　$\mathcal{X}=\mathcal{Y}$ とする。$d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$ を示すには、$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ の代表元 X,Y をひとつずつ選んで、すべての $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $\frac{1}{n}\in A_{X,Y}$ が成り立つことをいえば十分である ($A_{X,Y}$ は (1.3) で定義したもの)。そのためには、$X\sqcup Y$ 上の距離 $d_{X\sqcup Y}$ であって条件 $P(\frac{1}{n},X,Y)$ をみたすものを構成すればよい。そこで、写像 $d_{X\sqcup Y}\colon (X\sqcup Y)\times(X\sqcup Y)\to[0,+\infty)$ を次のように定める。まず $\mathcal{X}=\mathcal{Y}$ より $X\cong Y$ であるから、等長同型写像 $f\colon X\xrightarrow{\sim} Y$ をひとつ選ぶことができる。これを用いて

$$d_{X\sqcup Y}(x,x') := d_X(x,x') \qquad (x,x'\in X) \tag{1.25}$$

$$d_{X\sqcup Y}(y,y') := d_Y(y,y') \qquad (y,y'\in Y) \tag{1.26}$$

$$d_{X\sqcup Y}(x,y) := d_{X\sqcup Y}(y,x) := d_Y(f(x),y)+\frac{1}{2n} \qquad (x\in X,\ y\in Y) \tag{1.27}$$

と定める。すると $d_{X\sqcup Y}$ は明らかに正値性、非退化性、対称律、三角不等式をみたし、$X\sqcup Y$ 上の距離となる。

$d_{X\sqcup Y}$ が条件 $P(\frac{1}{n},X,Y)$ をみたすことを確かめる。まず $d_{X\sqcup Y}|_X = d_X$, $d_{X\sqcup Y}|_Y = d_Y$ は定義より明らかであ

る。つぎに「$\forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ d_{X \sqcup Y}(x, y) < \frac{1}{n}$」を示す。各 $x \in X$ に対し、$y \coloneqq f(x)$ とおけば

$$
\begin{aligned}
d_{X \sqcup Y}(x, y) &= d_Y(f(x), y) + \frac{1}{2n} && (1.28)\\
&= d_X(x, x) + \frac{1}{2n} \qquad (\because f \text{ は等長}) && (1.29)\\
&< \frac{1}{n} && (1.30)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。最後に「$\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ d_{X \sqcup Y}(x, y) < \frac{1}{n}$」を示す。各 $y \in Y$ に対し、$x \coloneqq f^{-1}(y)$ とおけば (ここで f が逆写像を持つことを用いた)

$$
\begin{aligned}
d_{X \sqcup Y}(x, y) &= d_Y(f(x), y) + \frac{1}{2n} && (1.31)\\
&= d_Y(y, y) + \frac{1}{2n} \qquad (\because f \text{ は等長}) && (1.32)\\
&< \frac{1}{n} && (1.33)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。したがって $d_{X \sqcup Y}$ は条件 $P(\frac{1}{n}, X, Y)$ をみたす。

以上より、すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $\frac{1}{n} \in A_{X,Y}$ が成り立つことがわかった。したがって $d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \inf A_{X,Y} = 0$ である。 □

非退化性のもう一方を示すため、次の補題を用意しておく。

補題 1.5. $d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ とする。このとき、各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し、ある写像 $f_n \colon X \to Y$ であって次をみたすものが存在する:

(1) すべての $x, x' \in X$ に対し $|d_X(x, x') - d_Y(f_n(x), f_n(x'))| < \frac{1}{n}$ が成り立つ。

(2) $Y = \bar{B}_{\frac{1}{n}}(f_n(X))$ が成り立つ。ただし $\bar{B}_{\frac{1}{n}}(\cdot)$ は $\frac{1}{n}$-閉近傍を表す。

証明 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、写像 f_n の構成を行う。まず $d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ より、$X \sqcup Y$ 上の距離 $d_{X \sqcup Y}$ であって条件 $P(\frac{1}{2n}, X, Y)$ をみたすものが存在する。これを用いて、各 $x \in X$ に対し、$d_{X \sqcup Y}(x, y) < \frac{1}{2n}$ をみたす $y \in Y$ をひとつ選んで $f_n(x) \coloneqq y$ と定める。すると、各 $x, x' \in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|d_X(x, x') - d_Y(f_n(x), f_n(x'))| && (1.34)\\
&= |d_{X \sqcup Y}(x, x') - d_{X \sqcup Y}(f_n(x), f_n(x'))| && (1.35)\\
&= |d_{X \sqcup Y}(x, x') - d_{X \sqcup Y}(x, f_n(x')) + d_{X \sqcup Y}(f_n(x), f_n(x')) - d_{X \sqcup Y}(x, f_n(x'))| && (1.36)\\
&\leq |d_{X \sqcup Y}(x, x') - d_{X \sqcup Y}(x, f_n(x'))| + |d_{X \sqcup Y}(f_n(x), f_n(x')) - d_{X \sqcup Y}(x, f_n(x'))| && (1.37)\\
&\leq d_{X \sqcup Y}(x', f_n(x')) + d_{X \sqcup Y}(f_n(x), x) && (1.38)\\
&< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} && (1.39)\\
&= \frac{1}{n} && (1.40)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これで (1) がいえた。

また、各 $y \in Y$ に対し、$d_{X \sqcup Y}(x, y) < \frac{1}{2n}$ をみたす $x \in X$ をひとつ選ぶことができ、

$$
d_Y(y, f_n(x)) = d_{X \sqcup Y}(y, f_n(x)) \tag{1.41}
$$

$$\leq d_{X \sqcup Y}(y, x) + d_{X \sqcup Y}(x, f_n(x)) \tag{1.42}$$
$$\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \tag{1.43}$$
$$= \frac{1}{n} \tag{1.44}$$

が成り立つ。これで (2) がいえた。

したがってこの f_n が求める写像である。 □

補題 1.6. $d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0 \implies \mathcal{X} = \mathcal{Y}$ が成り立つ。

証明 補題を示すためには、$d_{\mathrm{GH}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ とし、$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の代表元 X, Y をひとつずつ選んで等長同型写像 $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ を構成すればよい。そこで、補題 1.5 の f_n たちを用いて求める等長同型写像 f を構成する。いま X はコンパクト距離空間だからとくに可分である。すなわち、X のある稠密部分集合であって高々加算なものが存在する。そのひとつを選んで $\{x_k \in X \mid k \in \mathbb{N}\}$ とおく。さらに Y はコンパクト距離空間だから、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、Y の点列 $(f_n(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ は収束部分列を持つ。したがって対角線論法により、関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ のある部分列 $(f_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、$(f_{n(j)}(x_k))_{j \in \mathbb{N}}$ は Y 内の点に収束する。このことを用いて写像 $f\colon \{x_k \in X \mid k \in \mathbb{N}\} \to Y$ を $f(x_k) := \lim_{j \to \infty} f_{n(j)}(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ と定める。すると f は距離空間 X の稠密部分集合 $\{x_k \in X \mid k \in \mathbb{N}\}$ から完備距離空間 Y への一様連続写像だから、X 上への連続拡張 $f\colon X \to Y$ が一意に存在する。このとき、補題 1.5 の (1), (2) より明らかに f は等長かつ全射となるから、等長同型写像である。よって $X \cong Y$ したがって $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ である。 □

最後に目標の定理を証明する。

定理 1.2 の証明. d_{GH} が CMet 上の距離であることを示すには、正値性、非退化性、対称律、三角不等式を示せばよい。正値性と対称律は d_{GH} の定義から明らかである。また、三角不等式と非退化性は補題 1.3, 1.4, 1.6 で示した。したがって d_{GH} は CMet 上の距離である。 □