振り返りと導入

- [TODO]

1 指数型分布族の構造

$\mathcal{P}$ には自然な多様体構造が定まることをみる。

命題-定義 1.1. 指数型分布族 $\mathcal{P}$ に関し、次は同値である:

(1) ある最小次元実現 (V, T, μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}$ は $V^{\vee}$ で開である。

(2) すべての最小次元実現 (V, T, μ) に対し、$\Theta^{\mathcal{P}}$ は $V^{\vee}$ で開である。

$\mathcal{P}$ がこれらの同値な 2 条件をみたすとき、$\mathcal{P}$ は**開 (open)** であるという。

証明 (1) ⇒ (2) は**??**より従う。(2) ⇒ (1) は最小次元実現が存在することから従う。 □

命題-定義 1.2. $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、自然パラメータ付け P により、$\mathcal{P}$ 上に多様体構造と平坦アファイン接続を定めることができる。この多様体構造および平坦アファイン接続は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ の**自然な多様体構造**および**自然な平坦アファイン接続**と呼ぶ。

証明 下の (多様体の圏における) 図式の可換性と、P^{-1}, P'^{-1} が diffeo. であること、${}^{t}L$ が線型同型であることから従う。

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{P}, \mathcal{U}_{(V,T,\mu)}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & (\mathcal{P}, \mathcal{U}_{(V',T',\mu')}) \arrow[d, "P'^{-1}"] \\
\Theta^{\mathcal{P}} \arrow[r, "{}^{t}L"] & \Theta'^{\mathcal{P}}
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

□

命題-定義 1.3 ($\mathcal{P}$ の Fisher 計量)**.** $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、$\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の Fisher 計量 g を θ で引き戻して $\mathcal{P}$ 上の Riemann 計量 $\theta^{*}g$ が定まる。この計量は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ 上の **Fisher 計量**と呼ぶ。

証明 期待値と分散のペアリングの命題と同様の議論により、各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $g_{\theta(p)} = (L \otimes L) g'_{\theta'(p)}$ が成り立つ。

示すべきことは $\theta^{*}g = \theta'^{*}g'$ が成り立つことである。各 $p \in \mathcal{P}$, $u, v \in T_p\mathcal{P}$ に対し

$$\begin{aligned}
(\theta^{*}g)_p(u, v) &= g_{\theta(p)}(d\theta_p(u), d\theta_p(v)) & (1.2)\\
&= \left\langle g_{\theta(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle & (1.3)\\
&= \left\langle (L \otimes L) g'_{\theta'(p)}, d\theta_p(u) \otimes d\theta_p(v) \right\rangle & (1.4)\\
&= \left\langle g'_{\theta'(p)}, {}^{t}L \circ d\theta_p(u) \otimes {}^{t}L \circ d\theta_p(v) \right\rangle & (1.5)
\end{aligned}$$

$$= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d({}^tL \circ \theta)_p(u) \otimes d({}^tL \circ \theta)_p(v) \right\rangle \tag{1.6}$$
$$= \left\langle g'_{\theta'(p)}, d\theta'_p(u) \otimes d\theta'_p(v) \right\rangle \tag{1.7}$$
$$= g'_p(d\theta'_p(u), d\theta'_p(v)) \tag{1.8}$$
$$= (\theta'^* g')_p(u, v) \tag{1.9}$$

が成り立つ。 □

2 Amari-Chentsov テンソル

Amari-Chentsov テンソルを定義する。

命題-定義 2.1 (Amari-Chentsov テンソル). $\mathcal{P}$ は開であるとし、D を $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の標準的な [TODO] とは?平坦アファイン接続、θ^i $(i = 1, \ldots, m)$ を $\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の D-アファイン座標とする。$\Theta^{\mathcal{P}}$ 上の写像 $S\colon \Theta^{\mathcal{P}} \to T^{(0,3)}\Theta^{\mathcal{P}}$ を

$$\theta \mapsto S_\theta := E_{P(\theta)}[(T - E_{P(\theta)}[T])^{\otimes 3}] \tag{2.1}$$

で定めると [TODO] 値域あってる?、座標 θ^i に関する S の成分表示は

$$S = \partial_i \partial_j \partial_k \psi \, d\theta^i d\theta^j d\theta^k \tag{2.2}$$

となる。とくに ψ の C^∞ 性より S は対称 $(0,3)$-テンソル場となる。S を **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** と呼ぶ。

証明 成分表示は `0516_資料.pdf` の系 2.4 を使って式変形すればわかる。 □

命題-定義 2.2 ($\mathcal{P}$ の Amari-Chentsov テンソル). $\mathcal{P}$ は開であるとする。$\mathcal{P}$ の最小次元実現 (V, T, μ) をひとつ選ぶと、$\Theta^{\mathcal{P}}_{(V,T,\mu)}$ 上の Amari-Chentsov テンソル S を θ で引き戻して $\mathcal{P}$ 上の対称 $(0,3)$-テンソル場 $\theta^* S$ が定まる。このテンソル場は最小次元実現のとり方によらない。これを $\mathcal{P}$ 上の **Amari-Chentsov テンソル (Amari-Chentsov tensor)** と呼ぶ。

証明 S の定義より $L^{\otimes 3} S'_{\theta'} = S_\theta$ が成り立つから、Fisher 計量の場合と同様の議論により $\theta^* S = \theta'^* S'$ が成り立つ。 □

3 期待値パラメータ空間

定義 3.1 (期待値パラメータ空間). 集合 $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$

$$\mathcal{M}_{(V,T,\nu)} := \left\{ \mu \in V \mid \exists\, p\colon \mathcal{X} \text{ 上の確率分布 s.t. } p \ll \nu,\ E_p[T] = \mu \right\} \tag{3.1}$$

を (V, T, ν) の**期待値パラメータ空間 (mean parameter space)** という。

期待値パラメータ空間 $\mathcal{M}$ は、$\mathcal{P}$ に属する確率分布に関する T の期待値をすべて含んでいる (一般には真に含んでいる)。

命題 3.2. $\mu \in V$ がある $p \in \mathcal{P}$ に関する T の期待値ならば (すなわち $\mu = E_p[T]$ ならば)、μ は $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ に属する。

証明 [TODO] □

命題 3.3 ($\mathcal{M}$ は凸集合)**.** $\mathcal{M}_{(V,T,\nu)}$ は V の凸集合である。

証明 [TODO] □

4 Fisher 計量

例 4.1 (正規分布族)**.** [TODO] ちゃんと書く $\mathcal{P}$ を $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上の正規分布族とし、実現 (V,T,μ) を $V = \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x,x^2)$, $\mu = \lambda$ とおく。これは条件 A をみたす。

自然パラメータ空間は $\Theta = \Theta^\circ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$ である。

対数分配関数は

$$\psi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{4.1}$$

である。ただし $\theta^1 = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta^2 = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$ とおいた。よって

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\mu}{\sigma^2}d\mu + \frac{\sigma^2-\mu^2}{\sigma^3}d\sigma &(4.2)\\ &= -\frac{\theta^1}{2\theta^2}d\theta^1 + \left(-\frac{1}{2\theta^2} + \frac{(\theta^1)^2}{4(\theta^2)^2}\right)d\theta^2 &(4.3)\\ \operatorname{Hess}\psi &= Dd\psi &(4.4)\\ &= \left(-\frac{1}{2\theta^2}d\theta^1 + \frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^2\right)d\theta^1 + \left(\frac{\theta^1}{2(\theta^2)^2}d\theta^1 + \left(\frac{1}{2(\theta^2)^2} - \frac{(\theta^1)^2}{2(\theta^2)^3}\right)d\theta^2\right)d\theta^2 &(4.5)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}(d\mu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}(d\sigma)^2 &(4.6) \end{aligned}$$

である。Fisher 計量 $g := \operatorname{Hess}\psi$ から定まる Levi-Civita 接続 $\nabla^{(g)}$ の、座標 μ,σ に関する接続係数を求めてみる。

$$\begin{aligned} &{\Gamma^{(g)}}^1_{11} = 0, \quad {\Gamma^{(g)}}^1_{12} = {\Gamma^{(g)}}^1_{21} = -\frac{1}{\sigma}, \quad {\Gamma^{(g)}}^1_{22} = 0, &(4.7)\\ &{\Gamma^{(g)}}^2_{11} = \frac{1}{2\sigma}, \quad {\Gamma^{(g)}}^2_{12} = {\Gamma^{(g)}}^2_{21} = 0, \quad {\Gamma^{(g)}}^2_{22} = -\frac{1}{\sigma} &(4.8) \end{aligned}$$

測地線の方程式は

$$\begin{cases} x'' - \dfrac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \dfrac{1}{2y}(x')^2 - \dfrac{1}{y}(y')^2 = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

である。これを直接解くのは少し大変である。その代わりに、既知の Riemann 多様体との間の等長同型を利用して測地線を求める。(Θ, g) は、上半平面 H に計量 $\breve{g} = \dfrac{(dx)^2+(dy)^2}{2y^2}$ を入れた Riemann 多様体との間に等長同型 $(\Theta, g) \to (H, \breve{g})$, $(x,y) \mapsto (x, \sqrt{2}y)$ を持つ。Levi-Civita 接続に関する測地線は等長同型で保たれるから、$(H,\breve{g})$ の測地線を求めればよい。$(H,\breve{g})$ の測地線は、y 軸に平行な直線と x 軸上に中心を持つ半円で尽く

> されることが知られている。これらを等長同型で写して、(Θ, g) の測地線として y 軸に平行な直線と x 軸上に長軸を持つ半楕円が得られる。

今後の予定

- [TODO]

参考文献

[Ama16] Shun-ichi Amari, **Information Geometry and Its Applications**, Applied Mathematical Sciences, vol. 194, Springer Japan, Tokyo, 2016 (en).