Analysis 1 & 2

von O. Baumgartner, obaumgartner@ethz.ch

Grundlagen

Quantoren

$\forall x, A(x)$	Für alle x gilt $A(x)$
$\exists x, A(x)$	Es existiert min. ein x, wo $A(x)$ gilt.
$\exists! x, A(x)$	Es existiert genau ein x, wo $A(x)$ gilt.
$\nexists x, A(x)$	Es existiert kein x, wo $A(x)$ gilt.

Negation: $\boxed{\neg(\forall x, A(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg A(x) \quad \neg(\exists x, A(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg A(x)}$

Logik

$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B (oder beide)
$A \Rightarrow B$	A hat zur Folge B
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann wenn B

i) Wahre Implikation: $A \Rightarrow B$ ("A ist hinreichend für B").
ii) Wahre Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ ("A gilt genau dann, wenn B gilt").

Negation der Implikation: $\boxed{\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B}$

Kontraposition

Falls $A \Rightarrow B$, so gilt auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ ("B ist notwendig für A").

Indirekter Beweis

Zum Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ genügt es die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch zu führen.

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage mit $n \in \mathbb{N}$.

i) Induktions-Verankerung: Zeige, dass $A(1)$ gilt.
ii) Induktions-Annahme: Annahme, dass $A(n)$ gilt.
iii) Induktionsschritt: Beweise, dass $A(n+1)$ gilt unter der Annahme, dass A_n gilt. Achtung, nichts unbewiesenes gleichsetzen!

Mengenlehre

Eine Menge wird oft bestimmt durch eine Bedingung $A(b)$ wobei $b \in X$:

$$\boxed{Y = \{b \in X; A(b)\}}$$

Notation	Definition
$\{\dots\}$	Set: Sammlung von ungeordneten Elemente
$(\dots)$	Tupel: Sammlung von geordneten Elementen
$A \cup B$	Vereinigungsmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \vee (x \in B)\}$
$A \cap B$	Schnittmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$A \setminus B$	Differenzmenge $:= \{x \in \mathbb{R}; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
A^C	Komplement, alle Elemente die nicht in A sind
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge (oder gleich) von B
$\emptyset$	Leeres Set

Mitternachtsformel

Die Nullstellen von $az^2 + bz + c = 0$ sind für $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{z_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Binomischer Lehrsatz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \quad \text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Partialbruchzerlegung

Nützlich um Integrale der Form $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ zu berechnen

1. Polynomdivison (falls $n > m$) mit Rest (ganzrational + echt gebrochen)
2. Nullstellen von $Q_m(x)$ berechnen
3. Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen
   - reelle r-fache Nullstelle x_0
   $$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$
   - komplexe r-fache Nullstelle
   $$\frac{A_1x + B_1}{(x^2+2ax+b)} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2+2ax+b)^2} + \dots + \frac{A_rx + B_r}{(x^2+2ax+b)^r}$$
4. Gleichung aufstellen
5. Trick: Nullstellen einsetzen und so die Zähler einfacher Nullstellen bzw. höchster Nullstellen berechnen

   Beispiel

   $$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)} \qquad x = A(x-1) + B(x+1)$$
   $$(x_0 = 1) \quad 1 = 0 + 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$
   $$(x_1 = -1) \quad -1 = -2A + 0 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$
6. Koeffizientenvergleich

Funktionen (Abbildungen)

Eine Abbildung f mit Definitionsbereich X und Bild-/Wertebereich Y:

$$\boxed{f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)}$$

Definition	Beschreibung
Urbild von $B \subset Y$	$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$
Identität	$id_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x = id_X(x)$

Komposition

Sei $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$. Dann ist die Komposition von f und g:

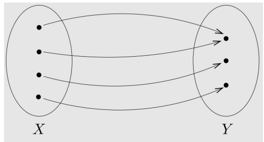
$$\boxed{F := g \circ f : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto g(f(x))}$$

Die Komposition ist Assoziativ: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Surjektiv

f heisst surjektiv falls jedes $y \in Y$ *mindestens* ein Urbild hat, d.h.:

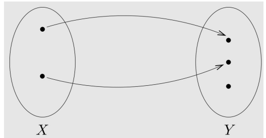
$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$



Injektiv

f heisst injektiv falls jedes $y \in Y$ *höchstens* ein Urbild hat, d.h.:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Bijektiv und Umkehrabbildung

f heisst bijektiv, falls jedes $y \in Y$ *genau* ein Urbild hat, d.h. f ist surjektiv und injektiv.
Ist f bijektiv, dann kann man eine *Umkehrabbildung* f^{-1} einführen:

$$\boxed{f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto f(y)}$$

Reelle Zahlen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$
Irrationale Zahlen	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} + \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
$]a, b[\Leftrightarrow (a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{R}$ ist *Ordnungsvollständig*, dass heisst: $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b}$

Dreiecksungleichung

Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$

Archimedisches Prinzip

Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$.

Daraus folgt: ∞ und $-\infty$ ist keine reelle Zahl.

Supremum und Infimum

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leq b$$

wobei b eine obere Schranke genannt wird, die kleinste obere Schranke ist das **Supremum**.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \sup\{A; x \in \mathbb{R}\}$$

Wird das Supremum angenommen in A, dann ist es das **Maximum**.

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst nach unten beschränkt, falls gilt

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \geq b$$

wobei b eine untere Schranke genannt wird, die kleinste untere Schranke ist das **Infimum**.

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \inf\{A; x \in \mathbb{R}\}$$

Wird das Infimum angenommen in A, dann ist es das **Minimum**.

Potenzen und Wurzel

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Die reelle Wurzel ist definiert auf $\mathbb{R}^+$.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (a^n)^m = a^{n\cdot m} \qquad b^0 = 1$$

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n} \qquad b^{-1} = \frac{1}{b^n} \qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a} \qquad \sqrt[n]{1} = 1$$

Achtung: Beim Wurzel ziehen, immer $\pm$ vor der Wurzel!

Logarithmus

Der Logarithmus ist definiert auf $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Eigenschaften:

$$\log(a\cdot b) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^n) = n\cdot\log(a)$$

$$e^{\log(a)} = a \qquad \log(e) = 1 \qquad \log(1) = 0$$

Bemerkung: $x = e^n \Leftrightarrow \log(x) = n$

Die Exponentialfunktion ($\exp(x) = e^x$)

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \exp^{-1}(y) = \log(y)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Trigonometrische- und Hyperbelfunktionen

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Vektoren

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$
Addition	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\ x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$
Skalarmultiplikation	$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),\ x_i \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
Skalarprodukt	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
Euklidische Norm	$\lvert\lvert x\rvert\rvert := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Cauchy-Schwarz

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}$$

Komplexe Zahlen

$$\boxed{\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}} \text{ wobei } \boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = a = \frac{z + \overline{z}}{2}$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
Komplexe Konjugation	$\overline{z} = a - ib$
	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$
Absolutbetrag	$\lvert z\rvert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$
	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$
Phase	$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$

Eulersche Formel und Eulers Identität

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \qquad \boxed{e^{i\pi} = -1} \qquad \boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

Polarform

In der Polardarstellung $z = |z|e^{i\varphi}$ gelten folgende Rechenregel:

Realteil	$\mathrm{Re}(z) = \cos(\varphi)$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) = \sin(\varphi)$
Komplex Konjugation	$\overline{z} = \lvert z\rvert e^{-i\varphi} = \lvert z\rvert \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	$(\lvert z\rvert e^{i\varphi})^n = \lvert z\rvert^n \cdot e^{i(n\cdot\varphi)}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})},\ k = 0, \ldots, n-1$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Damit ist $\mathbb{C}$ im Unterschied zu $\mathbb{R}$ **algebraisch vollständig**.

Sonstiges

Bei Ungleichungen muss man bei einer **Multiplikation mit negativen Zahlen das Relationszeichen umdrehen**!

Zum herausfinden einer Rekursivformel ist eine Primfaktorzerlegung sehr hilfreich!

Die Bernouillische Ungleichung

$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Wallisches Produkt

Die irrationale Zahl π wird approximiert durch:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2}$$

Gerade und Ungerade Funktionen

Eine Funktion $f(t)$ heisst:

i) *gerade* falls $f(t) = f(-t)$ (Symmetrisch zur y-Achse).

ii) *ungerade* falls $f(t) = -f(-t)$ (Punktsymm. zum Ursprung).

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Das Produkt zweier geraden oder ungeraden Funktionen ist gerade.
- Das Produkt einer geraden und ungeraden Funktion ist ungerade.
- Falls $f(t)$ gerade ist, gilt $\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$.
- Falls $f(t)$ ungerade ist, gilt $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Trigonometrische Funktionen: Wertetabelle

deg/rad	$0°/0$	$30°/\frac{\pi}{6}$	$45°/\frac{\pi}{4}$	$60°/\frac{\pi}{3}$	$90°/\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

deg/rad	$120°/\frac{2\pi}{3}$	$135°/\frac{3\pi}{4}$	$150°/\frac{5\pi}{6}$	$180°/\pi$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Trigonometrische und Hyperbolische Identitäten

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1} \qquad \boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \qquad \boxed{\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}$$

Hyperbolische Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$\cosh(x) = \cos(ix)$	$\sinh(x) = -i\sin(ix)$
$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$	$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$

Berechnen von Grenzwerten

Dominanzen

Die Sachen die links stehen wachsen langsamer als die Sachen die rechts stehen:
$\log(n) \prec \log^2(n) \prec \cdots \prec n^{\frac{1}{3}} \prec \sqrt{n} \prec n \prec n^2 \prec \cdots \prec e^n \prec n! \prec n^n$

Brüche

$x \to \infty$: Durch die groesste Potenz des Zaehlers/Nenners teilen
$x \to 0$: Durch die kleinste Potenz des Zaehlers/Nenners teilen

Beträge

Beträge vereinfachen indem man sich überlegt, ob das Argument im Betrag grösser bzw. kleiner 0 ist

Beispiel

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} (2+x) = 4$$

Wurzelterme

Wurzelterme kann man meistens mithilfe der 3. binomischen Formel erweitern

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

Beschränktheit einer Funktion

Man kann die Beschränktheit einer Funktion (v.a. trig. Fkt.) ausnutzen um Grenzwerte zu berechnen

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Sandwich-Theorem

Seien $(x_n), (y_n), (z_n)$ Folgen so dass $x_n \le y_n \le z_n$
mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c$, dann muss auch $\lim_{n\to\infty} y_n = c$

Potenzreihen

Falls die Potenzreihe der Funktion bekannt ist, kann man sie durch die Potenzreihe darstellen

Bernouilli de l'Hôpital

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. Sei $g'(x_0) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ und $f(a) = 0 = g(a)$ oder $f(a) = \pm\infty = g(a)$. Existiert

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > a$, und es gilt

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

"exp-log" Methode

$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} h(x) \cdot \ln(g(x))\right)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} (1+3\sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin(x))}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x)}{1+3\sin(x)}\right) \\ &= e^3 \end{aligned}$$

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$	$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$
$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \log(a)$	$\lim_{n\to 0} \frac{a^n-1}{n} = \log(a)$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	
$\lim_{t\to\infty} t\sin(\frac{1}{t}) = 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$
$\lim_{t\to\infty} t\log(1+\frac{1}{t}) = 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2(1-\cos(\frac{1}{t}))} = 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{1-\cos(t)} = 2$
$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\sin(\frac{1}{t})} = 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$
$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$	$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+2t)}{\log(1+t)} = 2$

Tipps Grenzwertberechnung

Verschiedene mögliche Ansätze:

- Bei Grenzwerten, welche eingesetzt $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ geben, L'hopital anwenden!
- Wurzelterme: 3te Binomische Formel versuchen
- Schwieriger $\lim_{n\to 0}(\dots)$: Taylorformel mit Entwicklungspunkt 0 benutzen (getrennt für Nenner und Zähler anwenden!!!). Dies funktioniert, da die Approximation im Entwicklungspunkt exakt ist.
- Grenzwerten mit vielen Funktionen: So umformen zu versuchen, dass man die Grenzwerte unter 'Wichtige Grenzwerte' verwenden kann!
  - Bei $\lim_{n\to\infty}(\dots)^n$ muss man fast immer ausschliesslich $e^{n\cdot log(\dots)}$ als erste Umformung benutzen!

Grenzwert und Kompositionen stetiger Funktionen

Wird der Grenzwert einer Komposition stetiger Funktionen genommen, so darf man den Grenzwert auf die innere Funktion anwenden. Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \exp(\tfrac{1}{x}\log(\cos(x))) = \exp(\lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}\log(\cos(x)))$$

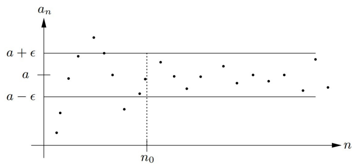
Folgen und Reihen

Grenzwert einer Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert a für $n \to \infty$, falls

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \ge N : |a_n - a| < \epsilon}$$

Wenn dies gilt, schreibt man: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a(n \to \infty)$



i) Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt.

ii) Besitzt die Folge keinen Grenzwert heisst sie *divergent*.

Monotonie bei Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $n \mapsto a_n$ heisst ..., wenn

monoton wachsend:	$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_n$
monoton fallend:	$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_{n-1} \ge a_n$
streng monoton wachsend:	$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$
streng monoton fallend:	$a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n$

Konvergenzkriterien

Monotone Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ eine nach oben beschränkte monton wachsende Folge bzw. eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}}(A) & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf_{n\in\mathbb{N}}(A) & \text{falls monoton fallend} \end{cases}}$$

Satz: Rechenregeln unter Konvergenzbedingung

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit den Grenzwerten a bzw. b. Dann

i)	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a+b$
ii)	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$
iii)	Falls $\forall n: b\neq 0\neq b_n$, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$
iv)	Falls $a_n\leq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so ist auch $a\leq b$

Teilfolgen und Häufungspunkte

Teilfolge

Eine Teilfolge ist eine Folge, die entsteht, wenn man von der ursprünglichen Folge nur bestimmte Glieder auswählt.
Sei $l: N\to\mathbb{N}$ streng monoton wachsende Abzählung, dann ist $(a_{l(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Häufungspunkt

Ein Punkt $a\in\mathbb{R}$ heisst *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a eine konvergente Teilfolge besitzt:

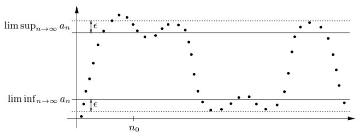
$$a=\lim_{l\to\infty}a_{l(n)}$$

a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, genau dann wenn

$$\boxed{\forall\epsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists l\geq n: |a-a_{l(n)}|<\epsilon}$$

Limes superior und inferior

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann ist Limes superior und Limes inferior:



$$\liminf_{n\to\infty}a_n:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n}a_k$$
$$\limsup_{n\to\infty}a_n:=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n}a_k$$

wobei Limes superior und Limes inferior beides Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Ausserdem gilt:

i) Eine beschränkte Folge konvergiert $\Leftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$

ii) Eine beschränkte Folge, welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

Bolzano Weierstrass

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

Cauchy Folge und Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\boxed{\forall\epsilon>0\ \exists n_0(\epsilon)\in\mathbb{N}\text{ s.d. }\forall m,n\geq n_0(\epsilon): |a_m-a_n|<\epsilon}$$

D.h. wenn es zu jedem $\epsilon>0$ einen Index $n_0(\epsilon)$ gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ϵ voneinander entfernt sind.

Satz: Cauchy-Kriterium

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ sind äquivalent:

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ konvergiert }\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ ist Cauchy}}$$

Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Sei $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{a}_n=(a_n^1,\dots,a_n^d)\in\mathbb{R}^d$. Es gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_n=\mathbf{a}\text{ falls }\lim_{n\to\infty}||\mathbf{a}_n-\mathbf{a}||=0}$$

Es sind äquivalent: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{a}_n=\mathbf{a}\Leftrightarrow\forall i\in\{1,\dots,d\}: \lim\limits_{n\to\infty}a_n^i=a^i$

Beschränkt in $\mathbb{R}^d$

Eine vektorwertige Folge $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^d$ ist *beschränkt*, falls gilt

$$\boxed{\exists C\in\mathbb{R}\text{ so dass }\forall n\in\mathbb{N}: ||\mathbf{a}_n||\leq C}$$

Reihen

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen* ist

$$S_n=a_1+\dots+a_n=\sum_{k=1}^n a_k,\quad n\in\mathbb{N}$$

Man sagt die Reihe ist *konvergent*, falls $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ existiert.

Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ ist konvergent *genau dann, wenn* gilt:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^m a_k\right|\to 0\qquad(n\geq l, l\to\infty)}$$

Konvergenzkriterien für Reihen

Die Bedingung Nullfolge ($a_k\xrightarrow{k\to\infty}0$) ist **notwendig**, aber *nicht* hinreichend für die Konvergenz einer Reihe.

Quotientenkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $a_k\neq 0$ und $k\in\mathbb{N}$. Es gilt:

$$\boxed{Q=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\begin{cases}<1 & S_n\text{ konvergiert absolut,}\\ >1 & S_n\text{ divergiert}\end{cases}}$$

Wurzelkriterium

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

$$\boxed{L=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\begin{cases}<1 & S_n\text{ konvergiert absolut,}\\ >1 & S_n\text{ divergiert}\end{cases}}$$

Minorantenkriterium

Sei $b_n\leq a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ divergent $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ ist auch divergent.

Majorantenkriterium

Sei $|a_n|\leq b_n$ und $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ konvergent $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ ist auch konvergent.

Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *konvergiert absolut*, falls $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergiert.

Satz

Seien die Reihen $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum\limits_{k=1}^\infty b_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolut mit

$$\boxed{\sum_{n,k=1}^\infty a_nb_k=\sum_{n=1}^\infty a_n\cdot\sum_{k=1}^\infty b_k}$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge.

Satz: Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle *Nullfolge*. Dass heisst

$$\boxed{a_{n+1}\leq a_n\quad\forall n\in\mathbb{N}_0\text{ und }\lim_{n\to\infty}a_n=0}$$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty(-1)^n a_n$ konvergent.

Standard Reihenabschätzung

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|\leq n\cdot\max_{1\leq k\leq n}|a_k|}$$

Geometrische Reihe

Die Geometrische Reihe ist für $|z|<1$ konvergent und es gilt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^\infty z^k=\frac{1}{1-z}}\qquad\boxed{\sum_{k=0}^n z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$$

Wichtige Reihen

Harmonische Reihe:	$\sum\limits_{k=1}^\infty\frac{1}{k}$	divergent
Riemann'sche ζ-Funkt.:	$\zeta(s)=\sum\limits_{k=1}^\infty\frac{1}{k^s}$	$\begin{cases}0<s\leq 1 & \text{divergent}\\ 1<s & \text{konvergent}\end{cases}$

Potenzreihen

Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der folgenden Form nennt man eine Potenzreihe:

$$\boxed{p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}$$

Konvergenzradius

Eine Potenzreihe ist konvergent für alle $|z| < \rho$ und es gilt:

$$\boxed{\rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}} \begin{cases} |z| < \rho & \text{konvergiert absolut} \\ |z| = \rho & \text{keine Aussage} \\ |z| > \rho & \text{divergiert} \end{cases}$$

Innerhalb von ρ darf man Limes, Ableitung, Integral austauschen! ***Anmerkungen***

i.) Der Konvergenzradius ρ berechnet sich aus dem Wurzel und Quotientenkriterium =

$$\frac{1}{R} = Q = L$$

ii.) Der Rand muss seperat betrachtet werden.

Potenzreihen konvergieren gleichmässig

Sei eine Potenzreihe $p(z)$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert

$$\boxed{p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}$$

gleichmässig gegen $p(z)$ auf $B_r(0)$ für jedes $r < p$.

Potenzreihen sind differenzierbar

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist im Inneren ihres Konvergenzradius *gliedweise* differenzierbar. Die Ableitung von $f(x)$ ist

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}}$$

Ausserdem bestizt die Ableitung $f'(x)$ den *gleichen* Konvergenzradius.

Potenzreihen sind integrierbar

Eine Potenzreihen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist innerhalb ihres Konvergenzradius *gliedweise* integrierbar. Das Integral von $f(x)$ ist

$$\boxed{\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}}$$

und die Stammfunktion $F(x)$ besitzt den *gleichen* Konvergenzradius ρ.

Cauchy-Produktformel

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Stetigkeit auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^d$

Grenzwert einer Funktion

Der Abschluss

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Der Abschluss von Ω ist die Menge:

$$\boxed{\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega, \lim_{k\to\infty} x_k = x\}}$$

In Worten formuliert: Der Abschluss sind alle Punkte x_0, die durch Punkte in Ω erreichbar sind.

Bem: Offenbar gilt $\Omega \subset \overline{\Omega}$.

Definition: Grenzwert einer Funktion

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \overline{\Omega}$. f hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}^n$, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω mit

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0 \text{ gilt } f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} a.$$

Ist dies der Fall und $x_0 \in \Omega$, dann muss gelten $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Stetig in x_0 und stetig ergänzbar

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Man sagt:

i) Sei $x_0 \in \Omega$. f ist *stetig* in x_0, falls f in x_0 einen Grenzwert besitzt.

ii) Sei $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. f heisst an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar*, falls f in x_0 einen Grenzwert besitzt. Notation: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} = a$

Für $\mathbb{R}$: Links- und Rechtsseitiger Grenzwert

Nähert man sich von Links an x_0 an, d.h. $x < x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Nähert man sich von Rechts an x_0 an, d.h. $x > x_0$ dann gilt:

$$\boxed{f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

Satz

Sei $]a, b[\to \mathbb{R}$ monoton wachsend oder monoton fallend. Dann existieren für jedes $x_0 \in]a, b[$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Für $\mathbb{R}$: Monotonie bei Funktionen

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst streng monoton wachsend, falls gilt

$$\boxed{a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) < f(y)}$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst streng monoton fallend, falls gilt

$$\boxed{a \leq x < y \leq b \Rightarrow f(x) > f(y)}$$

Für $\mathbb{R}^d$: Grenzwert in $\mathbb{R}^d$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$. Die Folge x_k konvergiert gegen x, falls

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} ||x_k - x|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^j = x^j}$$

wobei $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^d)$ und $x = (x^1, \ldots, x^d)$ beide in $\mathbb{R}^d$ definiert sind. **Trick**: In R^d kann in Polarkoordinaten substituiert werden und der Grenzwert berechnet werden: Wenn der Grenzwert nur von r abhängt, dann ist die Funktion stetig.

Stetige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann sagt man:

f heisst **stetig auf** $\Omega \subset \mathbb{R}$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

Lipschitz stetig

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. f heisst *L-Lipschitz stetig* mit der Lipschitzkonstante $0 \leq L$, falls

$$\boxed{\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \text{ gilt } ||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|| \leq L \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||}$$

Bemerkung: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ Gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

Satz

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *L-Lipschitz stetig* $\Rightarrow$ f ist stetig ergänzbar in $x_0 \in \overline{\Omega}$.

Kompakt

$K \subset \mathbb{R}^d$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ einen Häufungspunkt in K besitzt. Ausserdem gilt folgende Äquivalenz:

$$\boxed{\text{K kompakt} \Leftrightarrow K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}}$$

Bem: Das eine Menge nicht Kompakt ist, zeigt man am besten, indem man eine unbeschränkte Folge findet (Folge ohne HP).

Lemma

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist K beschränkt und es $\exists a, b \in K$ mit

$$\boxed{-\infty < a = \inf(K) = \min(K) \qquad \max(K) = \sup(K) = b < \infty}$$

Satz: Extremumsatz

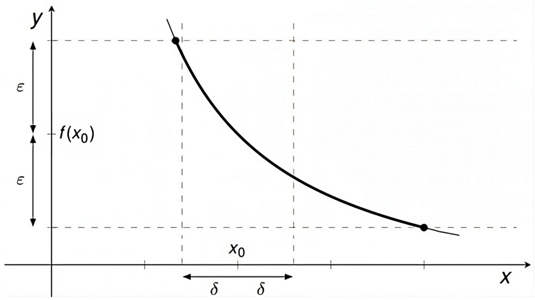
Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist auch das Bild der Funktion $f : K \to \mathbb{R}^n$ kompakt. Insbesondere gilt:

$$\boxed{f : K \to \mathbb{R}^n \text{ nimmt ihr } \textit{Maximum und Minimum} \text{ auf } K \text{ an}}$$

Für $\mathbb{R}$: Weierstrass'sches Kriterium für Stetigkeit

$f : \Omega \in \mathbb{R}$ ist an der Stelle x_0 stetig *genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$$



Vorgehen: Wie finde ich zu jedem $\varepsilon > 0$ das passende δ?

1. Beginne mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ und finde einen Ausdruck so dass: $|f(x) - f(x_0)| \leq ...|x - x_0|... < \varepsilon$
2. Setze ein: $|x - x_0| < \delta$
3. $|f(x) - f(x_0)| \leq ...|x - x_0|... < ...\delta... < \varepsilon$
4. Benutze $...\delta... < \varepsilon$ um $\delta(x_0, \varepsilon)$ zu finden
5. Zeige, dass wirklich $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Für $\mathbb{R}$: Der Zwischenwertsatz

Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y$$

In Worten: "Das Bild einer stetigen Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, ist ein Intervall."

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend/fallend. Setze $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

$f : [a, b] \to [c, d]$ ist bijektiv, und f^{-1} ist stetig sowie streng monoton wachsend/fallend

Satz

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend/fallend mit

$$-\infty \leq c := \lim_{x \to a^+} f(x) < \lim_{x \to b^-} f(x) =: d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv, und f^{-1} ist stetig sowie streng monoton wachsend/fallend.

Gleichmässige Stetigkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig stetig, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x, y \in \Omega : |x - y| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

Bemerkung: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ Gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig

Satz

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt auf Ω.

Sätze

i) Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f \in C^0(K, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig.

ii) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig $\Rightarrow f$ ist auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar.

iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf $\overline{\Omega}$ stetig ergänzbar. $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig.

Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Supremumsnorm

Sei $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist die Supremumsnorm

$$||f||_{C^0} := \sup_{x \in \Omega} ||f(x)|| < \infty$$

Punktweise Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, und $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, falls

$$\forall x \in \Omega : \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$

Gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, und $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in \Omega} ||f_k(x) - f(x)|| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz

Satz

Sei $f_k \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und f_k konvergiert gleichmässig $\Rightarrow f$ ist auf Ω stetig.

Topologie

Offene Mengen

Der offene Ball

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $r > 0$. Der offene Ball mit Radius r und Zentrum x_0 ist

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d; ||x - x_0|| < r\}$$

Definition: Offene Menge und Innerer Punkt

Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heisst *innerer Punkt* von der Menge Ω, falls

$$\exists r > 0 : B_r(x_0) \subset \Omega$$

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heisst **offen**, falls jedes $x_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt ist.

Satz: Eigenschaften offener Mengen

Es gelten folgenden Eigenschaften für offene Mengen:

i) $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen $\Rightarrow$ Schnittmenge $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ist offen.

ii) $\Omega_l \subset \mathbb{R}^d$ offen, $l \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_l$ offen.

iii) Endliche offene Mengen $(A_i)_{i \in I} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ offen.

Abgeschlossene Mengen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst **abgeschlossen**, falls das Komplement $A^C = \mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

Satz: Eigenschaften abgeschlossener Mengen

i) A_1, A_2 abgeschlossen $\Rightarrow$ Vereinigungsmenge $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

ii) $A_l \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, $l \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_l$ abgeschlossen.

iii) Endliche abgeschlossene Mengen $(A_i)_{i \in I} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Bemerkungen

i) Die zwei Mengen $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ sind sowohl offen, als auch abgeschlossen.

ii) Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind!

Das Innere, der Abschluss und der Rand einer Menge

Das Innere

Die Menge der inneren Punkte von Ω

$$int(\Omega) = \mathring{\Omega} := \{x \in \Omega; \exists r > 0 \text{ s.d. } B_R(x) \subset \Omega\} = \bigcup_{U \subset \Omega,\ U \text{ offen}} U$$

heisst **offener Kern** oder das **Innere** von Ω.

Der Abschluss

Der **Abschluss** einer Menge ist

$$clos(\Omega) = \overline{\Omega} := \bigcap_{A \subset \Omega,\ A \text{ abgeschlossen}} A$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\Omega} = \{x_0 \in \mathbb{R}^d; \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega,\ \lim_{k \to \infty} x_k = x_0\}$$

Der Rand

Der **Rand** einer Menge ist

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0 : B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \neq B_r(x) \setminus \Omega\}$$

Satz: Eigenschaften

i) Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen.

ii) Aus $\mathring{\Omega} \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}$ folgt $\overline{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$ und die Zerlegung ist disjunkt.

iii) Es folgt das Kriterium: Ω abgeschlossen $\Leftrightarrow \Omega = \overline{\Omega} \Leftrightarrow \partial\Omega \subset \Omega$

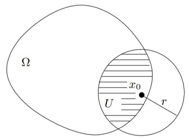
iv) Es gilt ausserdem $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega}$, sowie $\mathring{\mathring{\Omega}} = \mathring{\Omega}$

Topologisches Kriterium für Stetigkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$. Man sagt:

i) $U \subset \Omega$ heisst **Umgebung** von x_0 relativ zu Ω, falls

$$\boxed{\exists r > 0 \text{ mit } (B_r(x_0) \cap \Omega) \subset U}$$



ii) Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ offen. $U \subset \Omega$ heisst **relativ offen**, falls $U = E \cap \Omega$.

iii) $A \subset \Omega$ heisst **relativ abgeschlossen**, falls $\Omega \setminus A$ relativ offen ist.

Satz: Weierstrass'sches Kriterium für Stetigkeit

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \Omega$. Es sind äquivalent:

f ist an der Stelle x_0 stetig gemäss Folgekriterium.

$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d $\forall x \in \Omega : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

$\Leftrightarrow$ Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in Ω.

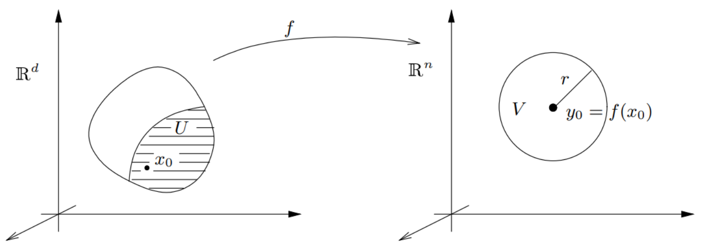
Topologisches Kriterium für Stetigkeit

Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

f ist stetig ($f \in C^0$).

$\Leftrightarrow$ Das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ offen.

$\Leftrightarrow$ Das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ abgeschlossen.



Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Differential

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in \Omega$. f heisst *differenzierbar* an der Stelle x_0 falls folgender Grenzwert exisitert:

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

$f'(x)$ heisst *Ableitung* (oder Differential) von f an der Stelle x_0.

Bemerkung: Analoges gilt für $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (Vektorwertige Funktion), einfach Komponentenweise.

Geometrische Bedeutung

i) Der Differentialquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x)), (x_0, f(x_0))$.

ii) Die Ableitung $f'(x_0)$ entspricht der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Satz

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.

Eigenschaften des Differentials

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

Summenregel	$(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$
Produktregel	$(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
Quotientregel	$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$
Kettenregel	$(g(x_0) \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Bei der Quotientregel muss natürlich $g(x_0) \neq 0$ sein.

Der Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. Dann existiert $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Korollar

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gilt:

i) Falls $f'(x) \equiv 0$ auf $]a, b[$, dann ist f konstant

ii) Falls $f'(x) \geq 0$ auf $]a, b[$, dann ist f monoton wachsend.

iii) Falls $f'(x) > 0$ auf $]a, b[$, dann ist f streng monton wachsend.

Der Umkehrsatz

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ auf $]a, b[$. Seien

$$-\infty \leq c = \inf_{a<x<b} f(x) < \sup_{a<x<b} f(x) = d \leq \infty$$

Dann ist $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} :]c, d[\to]a, b[$ ist differenzierbar für $y \in]c, d[$ und das Differential ist

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Funktionen der Klasse C^1

Sei Ω ein offenes Intervall und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f heisst von der Klasse $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, falls die Ableitung $f'(x)$ stetig ist. Es gilt also

$$\boxed{C^1(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f, f' \text{ stetig}\}}$$

Satz

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$f_k \xrightarrow{glm} f, f'_k \xrightarrow{glm} g \quad (k \to \infty)$$

wobei $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $f' = g$.

Höhere Ableitungen

Sei $m \in \mathbb{N}$. f heisst auf Ω m-Mal differenzierbar, falls die m-te Ableitung von f existiert und wird folgendermassen notiert:

$$f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m}$$

Funktionen der Klasse C^m

Sei Ω ein offenes Intervall und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ m-Mal differenzierbar. f heisst von der Klasse $C^m(\Omega, \mathbb{R})$, falls $f^m(x)$ stetig ist. Es gilt also

$$\boxed{C^m(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ ist } m\text{-mal diffbar}, f, \ldots, f^{(m)} \text{ stetig}\}}$$

Bemerkung: Falls $f \in C^m(\Omega, \mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann schreibt man $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Solche Funktionen nennt man "Glatte Funktionen".

Taylor Entwicklung

Sei $f \in C^{(m+1)}([a, b], \mathbb{R})$ auf $]a, b[$ m-Mal differenzierbar. Die Taylorentwicklung m-ter Ordnung von f am Entwicklungspunkt a ist

$$\boxed{T_m f(x; a) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a) \frac{(x - a)^k}{k!} + \underbrace{f^{(m+1)}(\xi) \frac{(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!}}_{\text{Restterm}}}$$

Wobei $\xi \in]a, b[$ ist, d.h. eine beliebige Zahl im Definitionsbereich.

Beste Approximation

Je näher x bei a liegt, desto besser approximiert das Taylorpolynom $T_m f(x; a)$ an der Stelle x die Funktion f. Für $a < x < b$ gilt

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m f(x, a)}{(x - a)^m} = 0}$$

Abschätzung vom Restterm

Der Restterm $r_m f(x; a)$ besitzt folgende Abschätzung:

$$\boxed{|r_m f(x, a)| \leq \sup_{a<\xi<x} |f^{(m+1)}(\xi)| \frac{(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!}}$$

Lokale Extrema

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ein $x_0 \in \Omega$ heisst (*strikte*) lokale Minimalstelle von f, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in U \quad (\text{bzw. } f(x) > f(x_0), \forall x \in U \setminus \{x_0\})$$

Analoges gilt für lokale Maximastellen.

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \Omega$. Es gilt folgendes:

i) Wenn $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein lokales Extrema.
ii) Sind $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Minimum.
iii) Sind $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Maximum.

Achtung: Randpunkte vom Definitionsbereich nicht vergessen!

Allgemeinerer Satz

Sei $f \in \mathbb{C}^n(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

i) Ist n gerade sowie $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Minimum.
ii) Ist n gerade sowie $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ein lokales Maximum.
iii) Ist n ungerade, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Konvexe Funktionen

Sei $f \in C^2(]a,b[, \mathbb{R})$ mit $f'' \geq 0$. Ein Funktion f heisst *konvex*, falls für alle $x_0, x_1 \in]a,b[$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\boxed{f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_0) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_0)}$$

Die Funktionen für welche dies gilt heissen Konvex.

Bemerkung: Wenn $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist konvex.

Integralrechnung auf $\mathbb{R}$

Stammfunktionen (SF)

$F \in C^1(]a,b[)$ heisst Stammfunktion zu f, falls für alle $x \in]a,b[$ gilt:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \qquad F'(x) = f(x)}$$

Satz: Integrationskonstante

Zwei Stammfunktionen $F_1, F_2 \in C^1(]a,b[)$ einer Funktion unterscheiden sich nur durch eine Integrationskonstante voneinander: $F_1 - F_2 \equiv c \in \mathbb{R}$

Das Integral

Sei $F \in C^1(]a,b[, \mathbb{R})$ eine SF von f. Das Integral von f über $[a,b]$ ist:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt := F(b) - F(a)}$$

Eigenschaften vom Integral (und R-Integral)

Linearität

Seien $f, g \in C^0(]a,b[)$ mit SFs $F, G \in C^1(]a,b[)$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx}$$

Monotonie

Seien $f, g \in C^0(]a,b[)$ mit SFs $F, G \in C^1(]a,b[)$, und $f \leq g$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_1} g(t)dt}$$

Gebietsadditivität

Sei $f \in C^0(]a,b[)$ mit SF $F \in C^1(]a,b[)$. Für $a < x_0 \leq x_1 \leq x_2 < b$ gilt:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx}$$

Standardabschätzung

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gilt folgende Abschätzung

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq ||f(x)||_{C^0}(b-a)}$$

Korollar bezüglich glm. Konveregenz

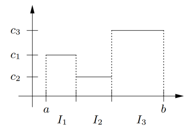
Seien $f, f_k \in C^0([a,b])$ mit $f_k \xrightarrow{glm} f \ (k \to \infty)$. Dann gilt

$$\boxed{\left| \int_a^b f_k dx - \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f_k - f|dx \leq (b-a)\,||f_k - f||_{C^0} \to 0 (k \to \infty)}$$

Treppenfunktionen

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls für eine Zerlegung $I = [a,b]$ in disjunkte (abgeschlossene, offene, halboffene) Teilintervalle $I_1, \ldots, I_K$ mit dazugehörigen *Konstanten* $c_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{I_k} \text{ mit } \chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in I_k \\ 0 & , x \notin I_k \end{cases}}$$



Sei $|I_k|$ die Länge von I_k. Das Integral einer Treppenfunktion $f(x)$ ist

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{I_k} \right) dx = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot |I_k|}$$

Die Riemannsche Summe

Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gilt für eine beliebige Folge von disjunkte Zerlegung von I in Teilintervalle $I_k^n, 1 \leq k \leq K_n$ mit *Feinheit*

$$\delta_n = \sup_{1 \leq k \leq K_n} |I_k^n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und eine beliebigen Auswahl an Punkten $x_k^n \in I_k^n$, $1 \leq k \leq K_n$, stets

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{K_n} f(x_k^n) \chi_{I_k^n} \right) dx = \sum_{k=1}^{K_n} f(x_k^n)|I_k^n| \to \int_a^b f(x)dx \, (n \to \infty)}$$

Wenn das Intervall $[0,1]$ zerlegt wird, sieht das Riemannintegral folgendermassen aus:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Wenn die Grenzen a und b betrachtet werden:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\,dx$$

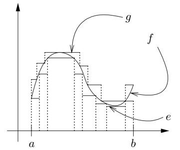
Das Riemannsche Integral (R-Integral)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und seien $e(x), g(x)$ Treppenfunktionen.

Untere Riemann-Integral von f: $\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{e(x) \leq f(x)} \int_a^b e(x)dx}$

Obere Riemann-Integral von f: $\boxed{\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{g(x) \geq f(x)} \int_a^b g(x)dx}$

Ein solches $f(x)$ heisst über $[a,b]$ Riemann-integrabel, falls



$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx}$$

Sätze

i) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, beschränkt $\Rightarrow f$ ist über $[a,b]$ R-integrabel.

ii) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $(f \in C^0([a,b], \mathbb{R})) \Rightarrow f$ ist über $[a,b]$ R-integrabel.

Substitutionsregel

Seien $f, g \in C^1(]a,b[)$. Dann gilt für $a < x_0 < x_1 < b$:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f'(\underbrace{g(x)}_{=u}) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{=du} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u)du}$$

Partielle Integration

Seien $u, v \in C^1(]a,b[)$, so dass $u(x) \cdot v'(x)$ eine SF besitzt. Dann besitzt $u'(x) \cdot v(x)$ auch eine SF und es gilt

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Bei periodischen Funktion

Bei Partieller Integration von zwei periodischen Funktionen geht man eine Periode durch und sotiert dann das "ursprüngliche Integral" auf die Linke Seite und kann so, dass Integral berechnen.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. So ist für jedes $c \in [a,b]$ die Integralfunktion

$$\boxed{F : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ mit } F(x) = \int_c^x f(t)dt}$$

differenzierbar und es gilt für alle $x \in [a,b]$: $F'(x) = f(x)$.

Anwendung: Parameterintegral

$$\frac{d}{dt}\int_a^{h(t)} g(x)dx = \frac{d}{dt}[G(x)]_a^{h(t)} = g(h(t)) \cdot h'(t)$$

Uneigentliches Riemann-Integral

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ über jedes kompakte Intervall $[c,d] \subset]a,b[$ R-integrabel. f ist über $]a,b[$ *uneigentlich R-integrabel*, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+}\int_c^0 f(x)dx + \lim_{d \to b^-}\int_0^d f(x)dx}$$

Satz: Reihenkonvergenz

Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ *monoton fallend.* Dann gilt

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} f(x) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert}}$$

Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen (GDG)

Differentialgleichungen 1ter Ordnung

Homogene Lösung

Die Homogene Differentialgleichung 1ter Ordnung hat die Form:

$$\boxed{y'(x) - a(x)y(x) = 0}$$

Den Lösungsansatz nennt man *Seperation der Variablen*:

i) $y'(x) - a(x)y(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a(x)y(x)$

ii) Umformen auf folgende Form:

$$\tfrac{1}{y(x)}dy = a(x)dx$$

iii) Auf beiden Seiten integrieren:

$$\int \frac{1}{y(x)}dy = \int a(x)dx \Rightarrow \log(y(x)) = A(x) + C$$

iv) Auf beide Seiten e^x anwenden:

$$\boxed{y_h(x) = e^{A(x)} \cdot C}$$

Bemerkung: $A(x)$ ist die SF von $a(x)$ und C die Integrationskonstante.

Inhomogene Differentialgleichungen 1ter Ordnung

Eine Inhomogene Differentialgleichung 1ter Ordnung hat die Form:

$$\boxed{y'(x) - a(x)y(x) = b(x)}$$

Den Lösungsansatz nennt man *Variation der Konstanten*:

i) Die homogene Lösung $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ berechnen.

ii) Man macht den Ansatz, dass C von x abhängt:

$$y_h(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$$

iii) Man berechnet $y_h'(x)$:

$$y_h'(x) = C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)}$$

iv) $y_h'(x)$ und $y_h(x)$ in die ursprüngliche DGL einsetzen:

$$C'(x)e^{A(x)} \underbrace{+C(x)a(x)e^{A(x)} - C(x)a(x)e^{A(x)}}_{=0} = b(x)$$

v) Gleichung umstellen und dann Integrieren:

$$C'(x) = \frac{b(x)}{e^{A(x)}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx + K$$

vi) Gefundes $C(x)$ in $y_h(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$ einsetzen, dies ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

DGL n-ter Ordnung

Eine lineare DGL der n-ten Ordnung hat folgende Form

$$a_0 y^{(0)} + \cdots + a_n y^{(n)} = q(x)$$

Anmerkung

i) $q(x)$ bezeichnet die Inhomogenität

ii) Da die DGL linear ist, gilt für die Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

wobei y_h die homogene und y_p die partikuläre Lösung ist

Homogene Lösung ($q(x) = 0$)

1. Man setzt die Inhomogenität 0

$$a_0 y^{(0)} + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$$

2. Mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ folgt das charakteristische Polynom

$$\text{Chp}(\lambda) = a_0\lambda^0 + a_1\lambda^1 + \cdots + a_n\lambda^n = 0$$

3. Nullstellen in den Ansatz einsetzen
   - λ_i k-fache reelle Nullstelle

$$y_i(x) = x^0 e^{\lambda_i x}, \ldots,\ y_{i+k}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

   - λ_i und λ_j reelle betragsmässig gleiche Nullstelle ($\lambda = \pm a$)

$$y_i(x) = \cosh(ax),\ y_j(x) = \sinh(ax)$$

   - λ_i und λ_j komplexe Nullstelle ($\lambda = a \pm bi$)

$$y_i(x) = e^{ax}\cos(bx),\ y_j(x) = e^{ax}\sin(bx)$$

4. Die einzelnen Teillösungen zusammensetzen ($C_i \in \mathbb{R}$)

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

Allgemeines Vorgehen zur Berechnung der partikulären Lösung

Die partikuläre Lösung $F_{part}(t) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ löst folgende Gleichung:

$$\boxed{\dot{F}_{part} = AF_{part}(t) + B(t) \qquad \text{bzw. } f^{(n)} + \cdots + a_0 f = b(t)}$$

Das Vorgehen ist, wie folgt:

i) Den der Störfunktion $b(t)$ entsprechenden Ansatz suchen.
ii) Ableitungen des Ansatzes f_{part} berechnen.
iii) f_{part} mit ihren Ableitungen in die GDG einsetzen.
iv) Die Koeffizienten vom Lösungsansatz durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen.

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz**
$b(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$	$y_p(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$ falls 0 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ falls 0 eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ falls α keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ falls α eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = \cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$ $b(x) = \sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$	$y_p(x) = \cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ $+ \sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ $+ x^k\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$ $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ $+ e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)$ falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ $+ x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)$ falls $\alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.

Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen

Wenn wir einen Vektor $F(t) \in \mathbb{R}^n$ von Funktionen betrachten, kann folgende DGL 1. Ordnung betrachtet werden:

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = A \cdot F(t)}$$

Die Loesung des Anfangswertproblems $F(0) = F_0$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = A \cdot F(t), \quad F(0) = F_0}$$

diese besitzt *genau* eine Lösung $F \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$.

Die Fundamentallösung

Folgende Matrix-wertige Funktion $\Phi(t) \in C^1(\mathbb{R}, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$

$$\boxed{t \mapsto \Phi(t) := Exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}}$$

besitzt die erwünschten Eigenschaften

$$\frac{d\Phi}{d} = A \cdot \Phi(t),\ \Phi(0) = id$$

Sie heisst Fundamentallösung von dem System $\dot{F} = AF(t)$.

Matrixexponential

Das Matrixexponential einer nxn Matrix A ist definiert als:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Loesungsarten:

- **Nilpotente Matrix** ($A^n = 0,\ n \in \mathbb{N}$):
  Berechnung folgt direkt aus der Definition des Matrixexponentials.
- **Diagonalmatrix** Exponentialfunktion kann auf alle Diagonalelemente einzeln angewendet werden.
- **Diagonalisierbare Matrix** (A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix):
  Sei $A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$, wobei T die n Eigenvektoren von A als Spaltenvektoren enthält.
  Die Fundamentallösung nimmt folgende Form an:

$$\Phi(t) = Exp(tA) = T \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Reduktion der Ordnung

Die Allgemeine Form einer DGL n-ter Ordnung ist:

$$\boxed{f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{f} + a_0 f = 0}$$

Die Reduktion zu einem System 1.Ordnung ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung

Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Sei $F_{part} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine beliebige "*partikuläre*" Lösung von

$$\boxed{\dot{F} = AF(t) + B(t)}$$

Dann ist jede dazugehörige Lösung F von der Form

$$\boxed{F(t) = F_{part}(t) + F_{hom}(t)}$$

wobei F_{hom} eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{F} = AF(t)$ ist.

Eindeutigkeitssatz: Insbesondere gibt es zu jedem $F_0 \in \mathbb{R}^n$ stets genau eine Lösung $F(t)$ mit $F(0) = F_0$.

Sonstiges

Harmonische Oszillatoren

Harmonische Oszillatoren besitzen folgende DGL:

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0,\ \omega_0^2 > 0 \quad \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1, 2 = \pm i\omega_0$$

Die Allgemeine Lösung hat, unter anderem, folgende Formen:

$$f(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \qquad f(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Die Reelle Lösung (Physikalische) bildet man durch die Summe und Differenz der ersten Lösung unter Anwendung der Eulerschen Formel (Koeffizienten A,B erst am Schluss anfügen).

Erzwungene Schwingungen

Die folgende DGL einer erzwungene Schwingung wandelt man, wie folgt, zur Berechnung der partikulären:

$$\ddot{f} + 2\delta\dot{f} + \omega_0^2 f = \beta_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \ddot{f} + 2\delta\dot{f} + \omega_0^2 f = \beta_0 e^{i\omega t}$$

Benutzt man den Ansatz $f_{part} = c \cdot e^{i\omega t}$. So bekommt man:

$$c = \frac{\beta_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = \beta_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

Drückt man dies in der Polarform $R \cdot e^{i\varphi}$ aus:

$$R = \frac{\beta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \in]-\pi, 0[$$

Und setzt c wieder ein in f_{part}:

$$f_{part} = c \cdot e^{i\omega t} = R \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Nun kann man noch den Realteil nehmen und hat dann die gesuchte partikuläre Lösung:

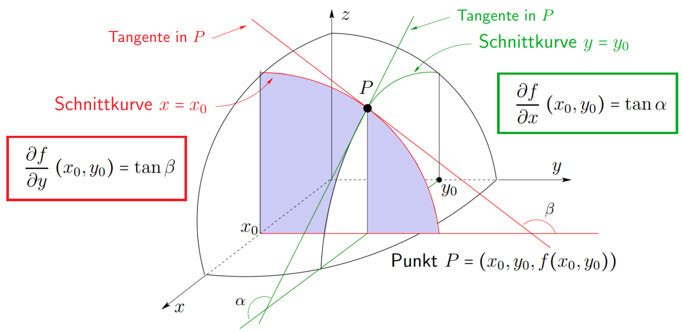
$$\tilde{f}_{part}(t) = \mathrm{Re}(f_{part}(t)) = R \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst in x_0 in Richtung $e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ partiell differenzierbar, falls folgender Grenzwert exisitert:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \partial_{x^i} f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_i) - f(x_0)}{h}}$$



Tangentialebene

Die Tangentialebene ist die beste Approximation einer 2D-Funktion in der Nähe von (x_0, y_0). Sie ist, wie folgt, definiert:

$$\boxed{g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

Differential

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)}{||x - x_0||} = 0}$$

Dann heisst $df_{x_0} := A$ (ein sogenannter co-Vektor) das Differential von f an der Stelle x_0 und desweiteren gilt

$$df_{x_0} \cdot (x - x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^0}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\right] \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Anmerkung

i) Bem: $dx^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$ sind die Basiselemente von df_{x_0}.
ii) Die Matrix A ist die Jacobi-Matrix von f.

Jacobi-Matrix (Ableitungsmatrix)

Das Differential mit Einheitsvektoren heisst *Jacobi-Matrix* ($M_{l\times n}(\mathbb{R})$):

$$\boxed{df_{(x_0)} = \begin{pmatrix} df^1_{(x_0)} \\ \vdots \\ df^l_{(x_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^l}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

Satz: Kriterium für C^1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst von der Klasse C^1, $f \in C^1(\Omega)$ falls:

i) f ist an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ in jede Richtung $\mathbf{e}_i$ partiell differenzierbar.

ii) Die Funktionen $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ sind auf Ω *stetig*.

Satz

$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ ist an jeder Stelle x_0 *differenzierbar und stetig* auf Ω.

Differentiationsregeln

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann gilt

Summenregel: $d(f+g)_{(x_0)} = df_{(x_0)} + dg_{(x_0)}$

Produktregel: $d(f \cdot g)_{(x_0)} = df_{(x_0)} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg_{(x_0)}$

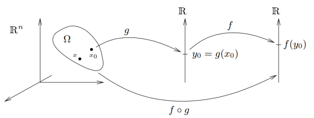
Quotientregel: $d\left(\dfrac{f}{g}\right)_{(x_0)} = \dfrac{df_{(x_0)} \cdot g(x_0) - f(x_0) dg_{(x_0)}}{[g(x_0)]^2}$

Anwendung der Produktregel: $df^n = n \cdot f^{n-1} \cdot df$

Satz: Kettenregel

Sei $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt

$$\boxed{\underbrace{d(g \circ f)_{(x_0)}}_{\text{co-Vektor}} = f'(g(x_0)) \cdot \underbrace{dg_{(x_0)}}_{\text{co-Vektor}}}$$



Kettenregel mit Jacobi-Matrix

Seien $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ an $g(x_0)$ differenzierbar.

$$\boxed{d(f \circ g)_{(x_0)} = \underbrace{df_{(g(x_0))}}_{\in M_{m \times l}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{dg_{(x_0)}}_{\in M_{l \times n}(\mathbb{R})}}$$

Anmerkung

i) Als erstes kann df ausgerechnet werden, dann wird $g(x_0)$ fuer die einzelnen Komponenten eingesetzt. Danach werden die beiden Matrizen multipliziert.

ii) Die Reihenfolge ist im Vergleich zur Kettenregl in 1D sehr wohl wichtig!

Richtungsableitungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist die Richtungsableitung eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ an einem Punkt x_0:

$$\boxed{\partial_{\mathbf{v}} f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s \cdot \mathbf{v}) - f(x_0)}{s}}$$

Die Richtungsableitung kann auch mithilfe des Gradienten berechnet werden. Es gilt:

- $\partial_e f(x_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(x_0)$ wobei $\vec{e}$ normiert ist (Länge 1)

Anmerkung

i) Gib es im Punkt x_0 eine Richtungsableitung, die nicht existiert, so ist f in x_0 nicht differenzierbar.

ii) Es kann sein, dass alle Richtungsableitungen existieren, aber f ist trotzdem nicht differenzierbar.

Satz

f ist differenzierbar in $x_0 \in \Omega \Rightarrow \partial_v f(x_0) = df_{(x_0)} \cdot \mathbf{v}$

Vektorfelder

Funktionen der Form $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heissen Vektorfelder. Jeder Stelle im Definitionsbereich wird ein Vektor zugeordnet.

Gradientenfeld

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit der dazugehörigen 1-Form $\lambda = df$. Das zur 1-Form zugehörige Vektorfeld heisst Gradientenfeld und ist

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}}$$

i) $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ gibt die Richtung des "steilsten Anstiegs" an.

ii) $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ist orthogonal zu den "Levelmengen".

Höhere Ableitungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist $f \in C^2(\Omega)$, falls

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^1(\Omega), \quad \forall 1 \le i \le n}$$

D.h. falls **alle** zweiten part. Ableitungen existieren und stetig auf Ω sind.

Satz von Hermann Schwarz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right), \quad \forall 1 \le i, j \le n}$$

Funktionen der Klasse C^m

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $f \in C^1(\Omega)$ heisst von der Klasse C^m, $f \in C^m(\Omega)$, falls

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^{m-1}(\Omega), \quad \forall 1 \le i \le n}$$

Notation (Multi-Index Schreibweise)

Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und $\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!$. Dann gelten für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ folgende Notationen:

i) $x^\alpha = x_1^{\alpha} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

ii) $\partial^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$

iii) $p(x) = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha x^\alpha$

Der Satz von Taylor

Sei $f \in C^m(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$. Für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $c \in [x, y]$, so dass

$$\boxed{f(y) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le (m-1)} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha}_{=: T_{m-1} f(y,x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(c)(y-x)^\alpha}_{\text{Restterm}}}$$

$T_k f(y, x)$ heisst das Taylor-Polynom $k - ter$ Ordnung von $f(y)$ mit dem Entwicklungspunkt x.
Allgemein gilt:

$$\boxed{T_n f(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x)\Big|_{x=a}}$$

Taylorentwicklung für $n = 2$ und $m = 2$

$$\begin{aligned} f(y) = {} & f(x) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x) \cdot (y_1 - x_1) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x) \cdot (y_2 - x_2) \\ & + \tfrac{1}{2!}\left[\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c)(y_1 - x_1)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c)(y_2 - x_2)^2\right. \\ & \left. + 2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c)(y_2 - x_2)(y_1 - x_1)\right] \end{aligned}$$

Korollar

Die Taylorentwicklung gibt die beste Approximation um x:

$$\boxed{\lim_{y \to x} \frac{f(y) - T_m f(y, x)}{||y - x||^m} = 0}$$

Hesse-Matrix

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(\Omega)$. Die Hesse-Matrix von f am Punkt x ist:

$$\boxed{Hess_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_i \partial y_i}\right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}$$

$Hess_f(x)$ ist symmetrisch $\Rightarrow Hess_f(x)$ *diagonalisierbar* mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Einschub: Definitheit einer Matrix

i) Eine Matrix ist **positiv definit**, falls alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$.
ii) Eine Matrix ist **negativ definit**, falls alle Eigenwerte $\lambda_i < 0$.
ii) Eine Matrix ist **indefinit**, falls positive und negative Eigenwerte.

Kritischer Punkt

Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $df_{(x_0)} = 0$ (*Koordinatenweise* $= 0$!) heisst kritischer Punkt von f.

Satz

Sei $f \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$. Ein kritischer Punkt x_0 ist eine

i) strikte lokale Minimastelle, falls $Hess_f(x_0)$ positiv definit ist.
ii) strikte lokale Maximastelle, falls $Hess_f(x_0)$ negativ definit ist.
iii) ein Sattelpunkt, falls $Hess_f(x_0)$ indefinit ist.

Bem: Bei degenerierten Punkten ($\det(Hess_f(x_0)) = 0$) kann man mit diesem Ansatz keine Aussage über lokales Min/Max/Sattelpunkt treffen!

Differentiationsregeln

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^l$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Es gilt

i) $d(f+g)_{x_0} = df_{(x_0)} + dg_{(x_0)}$
ii) $d\langle f, g\rangle_{(x_0)} = \sum_{i=1}^{l} \left(f^i(x_0) \cdot dg^i_{(x_0)} + g^i(x_0) \cdot df^i_{(x_0)} \right)$

Der Umkehrsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $df_{(x_0)} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar ($\det(df_{(x_0)}) \neq 0$) an einer Stelle $x_0 \in \Omega$. Dann existieren Umgebungen

$$\exists r > 0 \text{ so dass } f : \underbrace{B_r(x_0)}_{:=U} \to \underbrace{f(B_r(x_0))}_{:=V}$$

invertierbar ist und es existiert ein $g : V \to U$ so dass

$$g(f(x)) = x, \forall x \in U, \quad f(g(y)) = y, \forall y \in V$$

und $g \in C^1(V, U)$ wobei $dg_{(f(x))} = (df_{(x)})^{-1}$. ($^{-1} \triangleq$ Matrixinverse!)

Diffeomorphismus

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U; V)$. Die Abbildung Φ heisst ein *Diffeomorphismus* von U auf $\Phi(U) = V$, falls Φ *injektiv ist* und falls die Umkehrabbildung Φ^{-1} von der Klasse $C^1(V; U)$ ist.

Aus dem Umkehrsatz folgt: Eine differenzierbare Abbildung mit invertierbarem Differential ist *lokal* ein Diffeomorphismus.

Anwendung: Polarkoordinanten

Die Abbildung $f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad df_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

erfüllt die Bedingungen vom Umkehrsatz, da

$$\det(df_{(r,\varphi)}) = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r > 0$$

Man kann also *lokal* folgende Umkehrabbildung einführen:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

Implizite Funktionen

Sei $F \to \mathbb{R}$ eine implizite Funktion, mit $m < n$ und der dazugehörigen Menge M.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bei dem wir den Satz anwenden wollen.
1. Teile den Definitionsbereich in zwei Teile auf: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$. Seien dabei $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$.
2. Beschriebe den Punkt x_0 als $x_0 = (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$.
3. Bilde die Determinante der Ableitung nach den Variablen in q in x_0 und schaue ob diese Null ist. Die Ableitung ist immer eine quadratische $m \times m$ Matrix.

$$det(\tfrac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{x}_0))? = 0$$

4. Falls dies nicht der Fall ist, saget der Satz, dass sich lokal um $\mathbf{x}_0$, die m Variablen in q als Funktion der n-m Variablen in p darstellen lassen. Sogar der Funktionswert $f(\mathbf{p}_0)$ und die Ableitung $df(\mathbf{p}_0)$ können berechnet werden:

$$F(x) = F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = F(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})); df(\mathbf{p}_0) = -(\tfrac{dF}{d\mathbf{q}}(\mathbf{x}_0))^{-1} \cdot \tfrac{dF}{d\mathbf{p}}(\mathbf{x}_0)$$

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz: Lagrange-Multiplikatorenregel

Das Ziel ist es die Extrema einer Funktion f zu bestimmen, welche durch eine Nebenbedingung g eingeschränkt ist.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M = \{x \in U | g(x) = 0\}$ fuer g; $U \to \mathbb{R}^{n-k}$ (mit 0 ein regulärer Wert).
Die **Lagrange-Funktion** ist definiert als:

$$\boxed{L : (x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}^k \to L(x, \lambda) = f(x) - \textstyle\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g_i(x)}$$

Die Extrema von f unter der Nebenbedingung g sind die kritischen Punkte von L:

$$\boxed{DL(p_0) = DF(p_0) - \lambda * Dg(p_0) = 0}$$

Nebenbedingungen: Einfache Randmengen

Der Rand vom Einheitskreis ist: $\partial B_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Vorgehen: Globale Extremewerte bestimmen

1. Argumentieren, wieso die Menge Kompakt ist.
   - Abgeschlossenheit: Menge duch *stetige* Funktionen abgegrenzt, es folgt die Menge enthält alle Randpunkte.
   - Beschränktheit: Auf die Ungleichung verweisen.
   - Kompakt: Folgern das die Menge Kompakt ist und Extremumsatz gilt.
2. Kritische Punkte im Inneren bestimmen (Kandidaten für Extrema).
3. Alle Kandidaten für Extrema *auf dem Rand der Menge* bestimmen. Man kann hier entweder Lagrange verwenden oder das alternative Vorgehen (siehe unten).
4. Die Randpunkte, welche nicht erfasst werden können bestimmen, **auch Kandidaten**!
5. Alle Kandidaten in f einsetzen und Minimum/Maximum bestimmen.

Alternatives Vorgehen für das Bestimmen der Kandidaten auf dem Rand

Diese Vorgehen bietet sich gut an, wenn der Rand nicht durch eine einzige Nebenbedingungen darstellbar ist. Vorgehen:

1. Man parametrisiert den Rand mithilfe von Wegen $\gamma_i(t)$, $t \in [a, b]$.
2. Man betrachtet für jeden Weg γ_i die Funktion $f(\gamma_i)$ und analysiert, ob $f(\gamma_i)$ einen kritischen Punkt aufweist ($f'(\gamma_i) = 0$).
3. Man **überprüft**, ob der kritische Punkt überhaupt in t drinnen ist.
4. Man nimmt zusätzlich **alle Randpunkte der Wege** als Kandidaten auf, d.h. a, b eingesetzt in ihr γ_i sind auch Kandidaten!

Potentiale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\lambda \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine 1-Form. Es sind **äquivalent**:

i) $\exists f \in C^1(\Omega)$ mit $\boxed{\lambda = \nabla f}$ (f heisst "Potential von λ")

ii) Für je zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{stw}([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, d.h. mit *gleichen Anfangs- und Endpunkten*, gilt:

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

iii) Für jeden **geschlossenen** Weg $\gamma \in C^1_{stw}([a, b], \Omega)$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$:

$$\boxed{\int_{\gamma} \lambda = 0} \qquad \text{("}V\text{ ist } konservativ\text{")}$$

Bem: Potentiale sind bis auf die Addition einer Konstante bestimmt!

Verfahren zur Berechnung eines Potentials

Sei λ eine 1-Form. Das zugehörige Potential f, falls es existiert, kann man mit folgendem Verfahren ermitteln:

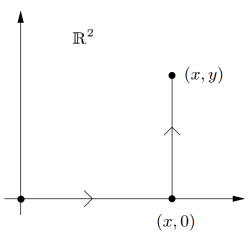
i) Wir setzen oBdA: $f(0, 0, 0) = 0$

ii) Wir nehmen die folgenden drei Wegintegrale:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t\,x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ t\,y \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t\,z \end{pmatrix}$$

iii) Aus dem zweiten Punkt im vorherigen Satz folgt:

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda + \int_{\gamma_3} \lambda$$



iv) Zum Schluss: **Verifizieren**, dass f wirklich das Potential von λ ist:

$$\boxed{df(x, y, z) = \lambda}$$

Satz: Potentialfeld

Für ein Vektorfeld $V \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

$$\boxed{V \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \exists f \in C^1(\Omega) : V = \nabla f}$$

In diesem Fall heisst V **Potentialfeld** mit dem Potential f.

Korollar: Rotationsvektorfeld

Sei $V = (V_1, \dots, V_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ konservativ. Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial V^i}{\partial x^j} - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n}$$

Satz von Poincaré

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes C^1_{stw} Gebiet und sei V ein $\mathbb{R}^2$-Vektorfeld der Klasse $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$\boxed{V \text{ ist konservativ } (V = \nabla f) \Leftrightarrow \text{rot}(V) = 0}$$

Einschub: Einfach zusammenhängende Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, von der Klasse C^1_{stw} und wegzusammenhängend. Ω heisst einfach zusammenhängend, falls $\partial\Omega$ nur eine 'Komponente' hat.

Informell: Ω besitzt keine 'Löcher'.

Untermannigfaltigkeiten

Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Wir sagen, dass M um p eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann wenn es eine offene Umgebung $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ von p, eine Permutation σ von $\{1, ..., n\}$, eine offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $f \in C^k(V, R^{n-d})$ gibt, sodass

$$\boxed{\{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) : x \in M \cap U_p\} = graph(f) = \{(y, f(y)) : y \in V_p\}}$$

Falls dies fuer alle Punkte $p \in M$ gilt, so nennen wir M eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ Die Funktion kann also lokal als Graph einer Funktion dargestellt werden, welche eine kleinere Dimension haben kann.

Immersion, Submersion

Immersion: f ist in p eine Immersion genau dann wenn $df(p)$ injektiv ist. Falls f für alle $p \in U$ eine Immersion ist, dann ist f eine Immersion. Eine Matrix ist genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\boxed{Rang(M) = \text{Anzahl der Spalten der Matrix}}$$

Submersion: f ist in p eine Submersion genau dann wenn $df(p)$ surjektiv ist. Falls f für alle $p \in U$ eine Submersion ist, dann ist f eine Submersion. Eine Matrix ist genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$\boxed{Rang(M) = \text{Anzahl der Zeilen der Matrix}}$$

Einbettung

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. Wie nenen ψ eine C^k Einbettung, wenn:

- ψ eine Immersion ist
- ψ C^k ist
- ψ injektiv ist
- ψ^{-1} stetig ist

Falls ψ eine C^k Einbettung ist, dann ist das Bild $\psi(V)$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension d. (Eine Einbettung stellt also eine Funktion dar, die von der tieferen d-Dimension in die hoere n-Dimension geht und die Untermannigfaltigkeit einbettet in den umliegenden Raum).

Satz vom regulären Wert

Regulärer Wert

Sei $U_0 \in \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^k(U_0; R^l)$ und $z_0 \in \mathbb{R}^l$. Dann ist y_0 ein regulärer Wert für g genau dann wenn g eine **Submersion** ist in jedem Punkt von

$$\boxed{g^{-1}(z_0) = \{x \in U_0 : g(x) = z_0\}}$$

Sonst ist z_0 ein singulärer Wert von g.

Satz vom regulären Wert

Das Urbild jedes regulären Wertes $(g^{-1}(z_0))$ ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit der Dimension $n - l$.

Beispiel

Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x^2 + y^2$ hat den regulären Wert 1. Das Urbild von 1 ist der Einheitskreis, welcher eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Tangentialraum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Teilmannigfaltigkeit Der Tangentialraum von M bei $p\ inM$ ist definiert durch:

$$\boxed{T_pM = \{(p, \gamma'(0)) : \exists \epsilon > 0, \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = 0\} \subseteq T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n}$$

Der Tangentialraum ist die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren von kurzen Wegen durch p in M. Der Tangentialraum von c^1-Untermannigfaltigkeiten der Dimension d im Punkt $x_0 \in M$ (wobei $M \subseteq \mathbb{R}^n$) kann folgendermassen berechnet werden:

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x_0, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$, so dass:

  $$M\cap = \text{graph(f)} = \{(y, f(y)) : y \in V\}$$

  Wir bezeichnen die erste Komponente von $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit y_0. Der Tangentialraum kann berechnet werden als:

  $$\boxed{T_{x_0}M = graph(Df(y_0))}$$

- Sei $y_0 \in V$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ so, dass:

  $$\psi(y_0) = x_0 . \psi(V) = M \cap U$$

  und ψ im Punkt y_0 eine Immersion. Dann der Tangentialraum berechnet werden aus:

  $$\boxed{T_{x_0}M = im(D\psi(y_0))}$$

- Sei $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ so, dass

  $$M \cap U = g^{-1}(g(x_0))$$

  und g im Punkt x_0 eine Submersion ist. Dann kann der Tangentialraum berechnet werden als:

  $$\boxed{T_{x_0}M = ker(Dg(x_0))}$$

Beispiel

Der Tangentialraum in jedem Punkt von $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 1\}$ ist gegeben als:
1. Da 1 ein regulärer Wert von $g(x_1, x_2) = x_1x_2$ ist, ist M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.
2. Der Tangentialraum in jedem Punkt von M ist gegeben als:

$$Dg(x) = (x_2, x_1)$$
$$ker(Dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^2 : Dg(x) * v = 0\} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2v_1 + x_1v_2 = 0\}$$
$$\Rightarrow v_2 = -\frac{x_2}{x_1}v_1 = -\frac{1}{x_1^2} * v_1$$
$$\Rightarrow ker(Dg(x)) = \{(t, -\frac{1}{x_1^2}t) : t \in \mathbb{R}\} = T_xM$$

Integration in $\mathbb{R}^n$

Riemannsches Integral über einen Quader

Ein n-dimensionaler *Quader* ist ein Produkt von Intervallen

$$Q = \prod_{i=1}^{n} I_i = \{x = (x^i)_{1 \leq i \leq n}; x^i \in I_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Solch ein Quader Q hat den folgenden *Elementarinhalt*:

$$\boxed{\mu(Q) = \mu([a, b] \times [c, d]) = \prod_{i=1}^{n} |I_i|}$$

Treppenfunktion in $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q heisst Treppenfunktion, falls $f(x)$ eine Darstellung folgender Form besitzt

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x) \text{ wobei } \chi_{Q_k}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in Q_k \\ 0 & , x \notin Q_k \end{cases}}$$

mit einer Zerlegung $P = \{Q_k; 1 \leq k \leq K\}$ und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$.

Das Riemann-Integral einer Treppenfunktion $f(x)$ ist, wie folgt definiert:

$$\boxed{\int_Q f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K} c_k \cdot \mu(Q_k)}$$

Das Riemann Integral

Seien e^-, e^+ Treppenfunktionen und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

Untere R-Integral von f: $$\boxed{\underline{\int_Q} f(x)\,d\mu = \sup_{e^-(x)\le f(x)} \int_Q e^-(x)\,d\mu}$$

Obere R-Integral von f: $$\boxed{\overline{\int_Q} f(x)\,d\mu = \inf_{f(x)\le e^+(x)} \int_Q e^+(x)\,d\mu}$$

Die Funktion f heisst *R-integrabel* über Q, falls

$$\boxed{\underline{\int_Q} f(x)\,d\mu = \overline{\int_Q} f(x)\,d\mu =: \int_Q f(x)\,d\mu}$$

Eigenschaften des Riemannschen Integrals

Linearität

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und über Q R-integrabel, und $a \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_Q (\alpha \cdot f(x) + g(x))\,d\mu = \alpha \cdot \int_Q f(x)\,d\mu + \int_Q g(x)\,dx}$$

Monotonie

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und über Q R-integrabel, und sei $f \le g$.

$$\boxed{\int_Q f(x)\,d\mu \le \int_Q g(x)\,d\mu}$$

Insbesondere gilt für $f \in C^0(\overline{Q})$ die Abschätzung

$$\boxed{\left|\int_Q f(x)\,d\mu\right| \le \int_Q |f(x)|\,d\mu \le \sup_Q |f(x)| \cdot \mu(Q)}$$

Satz von Fubini

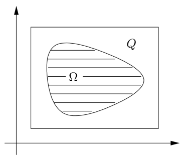
Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ **und** sei $f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\boxed{\int_Q f(x,y)\,d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Analoges gilt auch in höheren Dimensionen, solange $f \in C^0(Q)$ ist.

Jordan-Bereiche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Q ein *beliebiger* Quader mit $\Omega \subset Q$.



Sei χ_Ω die charakteristische Funktion:

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

Jordan-messbar (JM)

Die Menge Ω heisst *Jordan-messbar*, falls $\chi_\Omega(x)$ R-integrabel über Q ist, diese Eigenschaft ist vom Quader Q das Ω enthält **unabhängig**.

Das n-dimensionale Jordansche Mass von Ω: $$\boxed{\mu(\Omega) = \int_Q \chi_\Omega(x)\,d\mu}$$

Satz

Seien Ω_1, Ω_2 *JM*. Dann sind $\Omega_1 \cap \Omega_2$ und $\Omega_1 \cup \Omega_2$ auch *JM* und

$$\boxed{\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) = \mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$$

Satz

Sei Ω *JM* und $f \in C^0(\Omega)$ beschränkt. Dann ist f auf Ω R-Integrabel.

Kurvenintegrale (Wegintegral)

Kurvenintegrale über Skalarfelder

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld $\gamma : [a, b]$ ein stückweise differenzierbarer Weg. dann ist das Integraö von f über γ wie folgt definiert:

$$\boxed{\int_\gamma f(x)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\tfrac{\partial\gamma}{\partial t}||, dt}$$

Um die Kurvenlänge einer Kurve zu berechnen kann die Funktion f(x)=1 über die Kurve integriert werden:

$$\boxed{||\gamma|| = \int_\gamma 1\,ds = \int_a^b ||\tfrac{\partial\gamma}{\partial t}||\,dt}$$

Kurvenintegrale über Vektorfelder

Sei $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\gamma : [a, b]$ ein stückweise differenzierbarer Weg. Dann ist das Integral von K über γ wie folgt definiert:

$$\boxed{\int_\gamma K(x)\,ds = \int_a^b < K(\gamma(t)), \tfrac{\partial\gamma}{\partial t} > dt}$$

Anmerkung

i) Das Kurvenintegral bezeichnet man als Arbeitsintegral, wobei das Vektorfeld der Kraft entspricht.

Einschub: Parametrisierungen

Gerade von a nach b:	$\gamma(t) = (1-t)\cdot a + t \cdot b$	$t \in [0, 1]$
Kreis (positiven Sinne):	$\gamma(t) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$	$t \in [0, 2\pi]$
Kreis (*negativen* Sinne):	$\gamma(t) = (r \cdot \cos(\varphi), -r \cdot \sin(\varphi))$	$t \in [0, 2\pi]$
Ellipse (positive Sinne):	$\gamma(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$	$t \in [0, 2\pi]$

Vektoranalysis

Vektorfeld

Jedem Punkt wird ein Vektor zugeordnet:

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mathbf{K}(x) = \begin{bmatrix} K_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ K_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt die "Quellendichteän:

$$\mathbf{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; div(\mathbf{K}(x)) = \nabla \cdot \mathbf{K} = \tfrac{\partial K_1}{\partial x_1} + \cdots + \tfrac{\partial K_n}{\partial x_n}$$

Rotation

Die Richtung der Rotation gibt uns eine Drehachse an und die Länge der Rotation gibt an, wie stark die Rotation im Gegenurzeigersinn um diese Drehachse rotiert
Für ein Vektorfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist die Rotation definiert als:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{K}) = \nabla \times \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Falls $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dann gilt für die Rotation:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{K}) = \tfrac{\partial K_2}{\partial x} - \tfrac{\partial K_1}{\partial y}$$

Satz von Green

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse C^1. und X ein C^1-Vektorfeld auf $\overline{\Omega}$. Dann ist das Integral der Rotation von X über Ω gleich dem Integral von X über den Rand von Ω:

$$\boxed{\int_\Omega rot(X)\,dx = \int_{\partial\Omega,\gamma} X\,d\vec{s} = \int_b^a X \cdot \dot{\gamma}\,dt}$$

Wobei γ die positive orientierte Parametrisierung des Randes von Ω ist
Anmerkung

i) Man kann so auch die Fläche von Ω berechnen:

$$K = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \to vol(\Omega) = \iint_\Omega X\,dxdy = \int_{\partial\Omega} X\,d\vec{s}$$

C^1-Gebiete

Ein C^k-Gebiet ist eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ (oder allgemeiner in $\mathbb{R}^n$), deren Rand ∂G eine k-mal stetig differenzierbare Funktion ist. Hierbei bedeutet k, dass die Funktion bis zur k-ten Ableitung stetig ist.
Formell: Ein Gebiet G in $\mathbb{R}^2$ ist ein C^k-Gebiet, wenn der Rand ∂G durch eine Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ beschrieben werden kann, wobei γ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion ist, d.h. $\gamma \in C^k([a, b], \mathbb{R}^2)$. Ganz allgemein ist der Rand eine $\mathbf{C^k - Untermannigfaltigkeit}$ des $\mathbb{R}^n$.

Substitutionsregel

Einschub: Diffeomorphismus

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U; V)$. Die Abbildung Φ heisst ein Diffeomorphismus von U auf $\Phi(U) = V$, falls Φ *injektiv ist* und falls die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} \in C^1(V; U)$.

Aus dem Umkehrsatz folgt: $\Phi \in C^1(U; V)$ Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\Phi \text{ injektiv und } det(d\Phi_{(x_0)}) \ne 0, \forall x_0 \in U}$$

Transformationssatz

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Dann ist $\Phi(\Omega)$ Jordan messbar, und

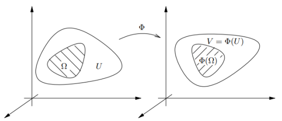
$$\boxed{\mu(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det(d\Phi(x))| d\mu(x)}$$

wobei $\mu(\Phi(\Omega))$ das **Volumen** von $\Phi(\Omega)$ ist.

Satz: Substitutionsregel

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus von U auf $V \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset U$ beschränkt und Jordan messbar, und sei $f : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\Phi(\Omega)} f\, d\mu = \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\det(d\Phi)|\, d\mu}$$



Einschub: Verschiede Koordinatentransformationen

Die folgenden Koordinatentransformationen sind ein Diffeomorphismus, wie von der Substitutionsregel verlangt.

Polarkoordinaten: $\Phi : (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\varphi)}) = r$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, y = 0, x \leq 0\}$.

Zylinderkoordinaten: $\Phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

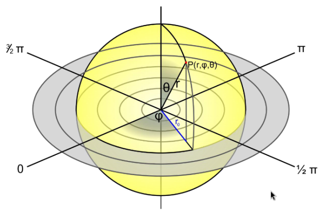
$$\Phi(r,\varphi,h) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\varphi,h)}) = r$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, y = 0, x \leq 0\}$.

Kugelkoordinaten: $\Phi : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(r,\Theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin(\Theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\Theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\Theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(d\Phi_{(r,\Theta,\varphi)}) = r^2\sin(\Theta)$$

Desweiteren gilt: $\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, y = 0, x \leq 0\}$.



Oberflächenmass und Flussintegral

Der Oberflächeninhalt

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar.

Die Parametrisierung der Oberflaeche wird als Einbettung gegeben: Sei $\psi \in C^1(Q,\mathbb{R})$ wobei $Q = [a,b] \times [c,d]$ mit $\phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}$. $\phi(x,y)$ ist dann *immer* eine lokale Immersion.
Der 2-dimensionale Flächeninhalt von $S = \Phi(\overline{\Omega})$ ist

$$\boxed{\mu_2(\Phi(\Omega)) := \int_\Omega \underbrace{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}_{=:do} = \int_S do}$$

wobei do der *skalare Flächeninhalt* bezüglich Φ ist.

Oberflächenintegral über Skalarfelder

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Sei $S = \Phi(\Omega)$ das zugehörige Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ und $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Integral von f auf S:

$$\boxed{\int_S f do := \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}$$

Normalenvektor

Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Der Normaleinheitsvektor n zur Fläche $\Phi(U) = S$ ist:

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi}{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi||}}$$

Anmerkung

1) Der Normalenvektor ist ein Einheitsvektor.

2) Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Fläche.

3) Der Normalenvektor ist das Vektorprodukt der Tangentialvektoren (Ableitung → Vektor Tangential zur Flaeche). Und steht daher senkrecht zur Fläche.

4) Die allgemeine Funktionsdeterminante $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\sqrt{det((D\phi)^T \cdot D\phi)}$ im Fall von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist dies $\sqrt{det((D\phi)^T \cdot D\phi)} = ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi||$

Das Flussintegral

Sei $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Immersion. Sei $\overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar. Dann ist der Fluss von V durch die Fläche $S = \Phi(\overline{\Omega})$:

$$\boxed{\int_{S,n} V\, d\mathbf{A} = \int_S V \cdot \vec{n}\, do = \int_\Omega (V \circ \Phi) \cdot \frac{\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi}{||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi||} ||\partial_x\Phi \times \partial_y\Phi|| d\mu}$$

Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Der Satz von Stokes beasagt, dass der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes über eine kompakte Fläche in $\mathbb{R}^3$ gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche ist. Seien $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte C^2-Fläche, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ eine Normalenvektor, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine ofeene Umgebung von Σ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$.Dann gilt das:

$$\boxed{\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times X) \cdot d\mathbf{A} = \int_\Sigma rot(X) \cdot \nu\, d\mu = \int_{\partial\Sigma} X \cdot d\vec{s}}$$

In Worten: Der Fluss von $\text{rot}(V)$ durch eine Fläche gleicht der Zirkulation vom Vektorfeld V seinem Rand entlang.
Anmerkungen

i) Das Obeflächenintegral kann über die Parametrisierung der Fläche als Einbettung berechnet werden (siehe Oberflächenintegral)

ii) Das Linienintegral kann über die Parametrisierung des Randes γ berechnet werden.

Der Satz von Gauss

Das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein C^1-Gebiet in $\mathbb{R}^n$ gleich dem Fuss des Vektorfeldes durch den Rand des Gebiets.

Satz von Gauss in $\mathbb{R}^2$

Sei Ω ein C^1_{stw} Gebiet mit dem zu $\partial\Omega$ zugehörigen Tangentialvektor $\dot{\gamma}$ (Parametrisierung des Randes!). Sei ν der Normalvektor zum Rand ("äussere Normale"). Dann gilt:

$$\nu = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} \qquad \boxed{\int_\Omega \text{div}(V) = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu\, d\vec{s}}$$

Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes C^1-Gebiet und X ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\iiint_\Omega \text{div}(X)\, d\mu = \iint_{\partial\Omega} X \cdot d\vec{s}}$$

In Worten: Das Integral von $\text{div}(V)$ in Ω_ψ gleicht dem Fluss von V durch die Fläche von $\psi(x,y)$.
Anmerkungen

i) Das Volumenintegral kann mit Hilfe einer gewählten Substition meist relativ einfach berechnet werden(z.B Kugelkoordinaten)

ii) Das Oberflächenintegral kann über die Parametrisierung der Fläche als Einbettung berechnet werden:

$$\int_\Omega X(\psi) \cdot (\partial_x\psi \times \partial_y\psi) d\mu \text{ mit der Einbettung } \psi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi(x,y) \end{bmatrix}$$

Es muss darauf geachtet werden, dass der Normalenvektor ν nach aussen zeigt.

Beispiel intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes und Flächeninhalt

Wir haben die Kugelkappe gegebn $\Sigma := \{x \in S^2 | x_3 \geq a\}$ mit $a \in (0,1)$ Um die Fläche berechnen zu kӧnnen müssen wir die Kugelkappe parametrisieren. Dazu benutzen wir eine Einbettung:

$$\psi : \bar{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^3, \psi(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \end{bmatrix}$$

1. Es muss nun gezeigt werden, dass ψ eine Untermannigfaltigkeit ist. Daher muss gezeigt werden, dass ψ eine Einbettung ist. Dafür müssen die einzelnen Bedingung der Funktion erfüllt sein (Immersion, injektiv etc.). Weil die Definitionsmenge $\bar{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}$ eine Rand hat, ist es eine Untermannigfaltigkeit mit Rand (also die Kugel ist abgeschnitten").
2. Der intrinsische Rand ist der 1-dimensionale Rand der Kugelkappe. Dieser kann aus der globalen Parametrisierung bestimmt werden:

$$\partial\Sigma = \psi(\partial\bar{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}) = \{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \end{bmatrix} | (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a \}$$

Der Rand kann natürlich auch mit cos(t) sin(t) auf einer Hӧhe von a parametrisiert werden.
3. Die Koorientierung ist gegeben durch ein Einheitsnormalvektor

$$v(\psi(z)) = \frac{\partial_{y1}\psi \times \partial_{y2}\psi}{||\partial_{y1}\psi \times \partial_{y2}\psi||}$$

4. Die induzierte Orientierung des Randes ist gegeben durch die Koorientierung und die Parametrisierung des Randes.

$$T : \partial\bar{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^2, T(\psi(y)) = \frac{1}{||d\psi(y)\tilde{T}(y)||} d\psi(y)\tilde{T}(y)$$

$$\text{Wobei: } \tilde{T}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{T}$ ist die positive Orientierung auf dem Kreis $\bar{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}$, sodass die Kreisscheibe immer zur Linken liegt. 5. Der Flächeninhalt lässt sich mithilfe des Betrages des Einheitsnormalvektors berechnen

Punktmengen

Sei der Radius $r > 0$ und der Index 0 markiert das Zentrum. Dann gilt:

Kreis: $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$

Kugel: $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$

Zylinder: $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$

Kegel: $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2}(h - z)^2\right\}$

Ellipse: $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = r^2\right\}$

Ellipsoid: $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = r^2\right\}$

Volumen eines Ellipsoid

Für eine Berechnung des Volumens eines Ellipsoids benutzt man die folgendermassen angepassten Kugelkoordinanten:

$$F(r, \Theta, \varphi) := \begin{pmatrix} a \cdot r\sin(\Theta)\cos(\varphi) \\ b \cdot r\sin(\Theta)\sin(\varphi) \\ c \cdot r\cos(\Theta) \end{pmatrix} \text{ und } \det(dF_{(r,\Theta,\varphi)}) = abc \cdot r^2 \sin(\Theta)$$

$$\int_{E(a,b,c,R)} 1 d\mu = \int_{B_R(0)} |\det dF(x, y, z)| dzdydx = abc\mu\,(B_R(0))$$

Kochrezepte

Integralgrenzen von einem Hyper- und Hypograph bestimmen

1. Die Variable für das äusserste Integral wählen (oft x), alle anderen Variablen in der Mengengleichung auf 0 setzen. Nun kann man die Grenze für die erste Variable herauslesen.

2. Die Variable vom zweitäussersten Integral (oft y) auswählen, alle anderen Variablen in der Menge **ausser die schon bestimmte Variable** auf 0 setzen.

2.5 Analoger Schritt für die 3te Variable.

3. Nun hat man die Integralgrenzen bestimmt und kann fortfahren mit der Berechnung vom Integral.

Kochrezept Volumenberechnung

1. Das Integrationsgebiet $\Phi(\Omega)$ (bzw. Integrationsgrenzen) bestimmen in den passenden Koordinatentransformationen.

   Achtung: Auf die Einschränkungen der Koordinatentransformation achten (z.B. $r \in]0, \pi[$).

1.5 Evtl. bemerken, dass die Koordinatentransformation eine Halbebene nicht trifft, dies aber vernachlässigbar ist beim Transformationssatz.

2. Den Transformationssatz anwenden ($\det(d\Phi)$ nicht vergessen).

Kochrezept Oberflächeninhalt

1. Die Menge anschauen und bestimmen um was für ein Objekt es sich handelt, Skizzen helfen! **Man berechnet die Oberfläche stückweise**. Einfache Fläche, wie Kreisflächen, kann man direkt mit den bekannten Formeln berechnen.

2. Schwerere Oberflächen muss man mit folgendem Vorgehen berechnen:
   - Eine Achse vorläufig entfernen, d.h. Variable auf 0 setzen in der Mengengleichung. Man schaut von nun an von dieser Achse aus auf das Objekt. (z.B.: Man entfernt $z \Rightarrow$ man schaut von oben).
   - Skizze von dem neuen 2D-Gebiet erstellen und dann die Ungleichungen (am Ende die Integralgrenzen) der zwei übrig bleibenden Variablen für das 2D-Gebiet bestimmen.
   - Mit der ursprünglichen Mengengleichung eine Funktion $\psi(x, y)$ für die entfernte Variable bestimmen. **Achtung**: Es kann sein, dass hier zwei Funktionen herauskommen, in diesem Fall muss man den Oberflächeninhalt für **beide** berechnen (evtl. Symmetrie!).
   - Lokale Immersion der Form $\phi(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}$ bilden.
   - Oberflächeninhalt(e) berechnen mit der bekannten Formel, das Integrationsgebiet ist das zuvor bestimmte 2D-Gebiet.

3. **Alle** Oberflächeninhalt zusammenaddieren.

Einfache Geometrieformeln

	Fläche/Volumen	Umfang/Oberfläche
Kreis	$A = \pi r^2$	$U = 2\pi r$
Kugel	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$
Ellipsoid	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	
Zylinder	$V = \pi r^2 h$	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

Anhang

Integralsubstitutionen

$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x)) dx$	$u(x) = e^x$	$dx = \frac{du}{e^x}$
$\int f(x, \sqrt{1 - x^2}) dx$	$x = \sin(u)$	$dx = \cos(u) du$
$\int f(x, \sqrt{1 + x^2}) dx$	$x = \sinh(u)$	$dx = \cosh(u) du$
$\int f(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx$	$x = \cosh(u)$	$dx = \sinh(u) du$
$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx$	$u(x) = \frac{x}{a}$	$dx = a du$
$\int f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) dx$	$u(x) = \sqrt{x^2 - 1}$	$dx = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} du$
$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$	$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$dx = \frac{2}{1 + u^2} du$

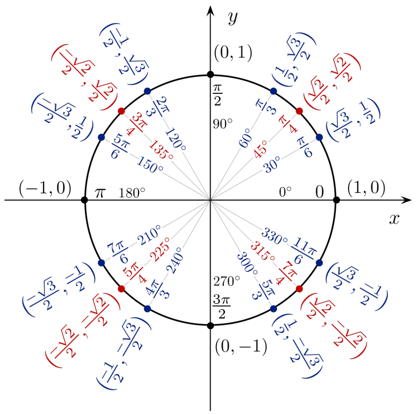
Tangenssubstitution

Sei $t(x) = \tan(\frac{x}{2})$ mit $x \in] - \pi, \pi[$. Dann gilt

$\cos(x) = \frac{1 - t^2(x)}{1 + t^2(x)}$	$\sin(x) = \frac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$
$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + t^2(x)}$	$\sin^2(x) = \frac{t^2(x)}{1 + t^2(x)}$

The only math appendix you'll need (and probably more) — painfully written by Laura Acinapura

Trigonometrie



Identitäten

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$	$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$	$e^{x} = \cosh(x) + \sinh(x)$
$\cos(ix) = \cosh(x)$	$\cosh(\pm ix) = \cos(x)$
$\sin(ix) = i\sinh(x)$	$\sinh(\pm ix) = \pm i\sin(ix)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(x+\pi) = \tan(x)$
$\tan(x) = -i\tanh(ix)$	$\tanh(x) = -i\tan(ix)$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$
$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

Addition

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2}$
$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$
$= 1 - 2\sin(x)^2 = \frac{1-\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}$
$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$
$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$
$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$
$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + x)$
$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$
$\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x)\cos(y)}$
$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$
$1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$
$1 + \tan(x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)}$

Multiplication and Powers

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
$\sin(\alpha t)\cos(\beta t) = \frac{1}{2}(\sin((\alpha+\beta)t) + \sin((\alpha-\beta)t)$
$\sin(x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$$\sin(x)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)(x-\tfrac{\pi}{2}))$$

$$\cos(x)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x)$$

$\cosh(x)^2 = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$
$\sinh(x)^2 = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$

Inverse of Trigonometric Functions

$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$
$\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$
$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tan(\arccos(x)) = x^{-1}(1-x)^{1/4}$
$\tan(\arcsin(x)) = x(1-x)^{-1/4}$
$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-+1})$

Limits

$\ln(\ln x) \ll \ln(x) \ll x^p \ll x^q \ll a^x \ll b^x \ll x! \ll x^x$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)}{x} = a$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$
$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+1})^x = e^{-1}$	$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = e^{-2}$

Some Algebra

Exponential and Logarithms

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$	$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$\ln(a) - \ln(b) = \ln(d\frac{a}{b})$
$(e^a)^b = e^{ab}$	$\ln(x^a) = a\ln(x)$
$e^0 = 1,\ e^{-\infty} = 0$	$\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(x) = a &\iff x = e^a\\ e^x = a &\iff x = \ln(a)\\ e^{\ln(a)} = a &\implies a^x = e^{\ln(a)x}\end{aligned}}$$

Factorising Polynoms

$$ax^2 + bx + c \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

Given the polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ all the possible roots of $f(x)$ are in the form $\pm\frac{\text{Factor of } a_0}{\text{Factor of } a_n}$

Complex roots $z = |z|e^{i\varphi} \to w_k = |z|^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})}$

Zeros of a Polynom 3rd Degree

$x^3 + Bx^2 + Cx + D = (x+a)(x+b)(x+c)$

$$\begin{cases} a+b+c = B\\ ab+bc+ac = C\\ abc = D\end{cases} \implies \text{Zeros are factors of } D$$

Polynom Division $P(x)/Q(x)$

1. Divide the biggest term of P with the biggest term of Q
2. Multiply the result for $-Q$, write it under P and sum them
3. Repeat 1. and 2. until you can't divide anymore

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - 2x^2 \quad + x + 3 & x^2 - x + 1\\ \underline{-6x^3 + 6x^2 - 6x} & 6x + 4\\ \qquad 4x^2 - 5x + 3 & \\ \quad \underline{-4x^2 + 4x - 4} & \\ \qquad\qquad -x - 1 & \end{array}$$

$$\implies \frac{6x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{-x-1}{x^2 - x + 1} + 6x + 4$$

Partialbruchzerlegung $P(x)/Q(x)$

1. Polynom Division mit Rest falls Grad $P \geq$ Grad Q
2. Nullstellen von Q berechnen
3. Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen:
   - reelle m-fache Nullstelle x_0

     $$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-x_0)^m}$$
   - complexe Nullstelle x_0

     $$\frac{Ax+B}{x^2+2ax+b}$$
4. Unbekannte bestimmen mit Expansion + Koeffizientenvergleich

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

$$x(A+B) - A - 2B = x \implies \begin{cases} A + B = 1\\ A + 2B = 0\end{cases}$$

Symmetries

Even function: $f(-x) = f(x)$

- y-axis symmmetric
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Fourier Series has only **cosine** $\to b_n = 0$
- Laurent Series in 0 has only **even powers**
- Common even functions: $\cos x, x^{2n}, k$

Odd function: $f(-x) = -f(x)$

- Origin symmmetric
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- Fourier Series has only **sine** $\to a_n = 0$
- Laurent Series in 0 has only **odd powers**
- Common odd functions: $\sin x, \tan x, \arctan x, x^{2n+1}$

even · even = even	$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$
odd · odd = even	$f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$
even · odd = odd	$f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

Series

Arithmetic Series $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Geometric Series $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Binomial Formula $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} k = \binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Alternating Harmonic Series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Leibniz Formula $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Zeta-Function $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \begin{cases}\text{converges for} & s > 1\\ \text{diverges for} & s \leq 1\end{cases}$

Power Series

Die Entwicklung ist diesselbe im komplexen Fall

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1/a}{1-x/a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad |x| < a$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos(x)^2 = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \cdots$$

$$\sin(x)^2 = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \cdots$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

Inequalities

$|a+b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$
$|a| \leq b \to -b < a < b$
$2ab \leq a^2 + b^2$
$|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$
$|ab - cd| \leq |a| \cdot |b-d| + |d| \cdot |a-c|$
$|f_n g_n - fg| \leq |f_n| \cdot |g_n - g| + |g| \cdot |f_n - f|$

Derivatives

Basic Derivatives

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^{ax}	ae^{ax}
b^x	$\ln(b)b^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sin(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh(x)^2}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Integrals

Basic Integral Forms

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x-c}$	$\ln(\lvert x-c \rvert)$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arcsinh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arccosh}(x)$
$\frac{1}{(x+k)^2+m^2}$	$\frac{1}{m}\arctan\left(\frac{x+k}{m}\right)$

$f(x)$	$F(x)$
$g'(x)$	$g(x)$
$g^n(x)g'(x)$	$\frac{g^{n+1}(x)}{n+1}$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln(\lvert g(x) \rvert)$
$\frac{g'(x)}{g^n(x)}$	$-\frac{1}{(n-1)g^{n-1}(x)}$
$\sqrt{g(x)}g'(x)$	$\frac{2}{3}\sqrt{(g^3(x)}$
$e^{g(x)}g'(x)$	$e^{g(x)}$
$\sin(g(x))g'(x)$	$-\cos(g(x))$
$\cos(g(x))g'(x)$	$\sin(g(x))$
$\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$	$\arctan(g(x))$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$	$\arcsin(g(x))$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}$	$\text{arcsinh}(g(x))$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x)-1}}$	$\text{arccosh}(g(x))$

Partial Integration

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)}$$

Integrals by Substitution

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \to f(x) = t \mid dx = \frac{dt}{f'(x)}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx \to g(x) = t \mid dx = \frac{dt}{g'(x)}$$

$$\int F(e^x, \sinh(x), \cosh(x))dx \to e^x = t \mid dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{1}{t}dt$$

$$\int F(\ln(x))dx \to \ln(x) = t \mid dx = xdt = e^t dt$$

$$\int F(\sqrt[\alpha]{Ax+B})dx \to \sqrt[\alpha]{Ax+B} = t$$

$$\int F(\cos(x)^{2n}, \sin(x)^{2n})dx \to \tan(x) = t$$

$$dx = \frac{1}{t^2+1}dt \mid \sin(x)^2 = \frac{t^2}{t^2+1} \mid \cos(x)^2 = \frac{t}{t^2+1}$$

$$\int F(\cos(x)^{2n+1}, \sin(x)^{2n+1})dx \to \tan(\frac{x}{2}) = t$$

$$dx = \frac{2}{t^2+1}dt \mid \sin(x) = \frac{2t}{t^2+1} \mid \cos(x) = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\int F(\sqrt{1-x^2})dx \to \sin(x) = t \mid dx = \cos(t)dt$$

$$\int F(\sqrt{1+x^2})dx \to \sinh(x) = t \mid dx = \cosh(t)dt$$

$$\int F(\sqrt{x^2-1})dx \to \cosh(x) = t \mid dx = \sinh(t)dt$$

$$\int F\left(\frac{1}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\right) dx \to \text{Complete the Square}$$

and try to get back to one of this forms:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arccosh}\, x$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arcsinh}\, x$

Definite Integral of trigonometrics

$f(x)$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2 x$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3 x$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2 x$	$\frac{\pi+2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi+2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3 x$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\cos x \sin x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2 x \cos x$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin x \cos^2 x$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Numerics

$\sqrt{2} \approx 1.41421$	$7^2 = 49$	$25^2 = 625$
$\sqrt{3} \approx 1.73207$	$8^2 = 64$	$26^2 = 676$
$\sqrt{5} \approx 1.23607$	$9^2 = 81$	$27^2 = 729$
$\pi \approx 3.14159$	$11^2 = 121$	$28^2 = 784$
$e \approx 2.71828$	$12^2 = 144$	$29^2 = 841$
$e^2 \approx 7.38906$	$13^2 = 169$	$31^2 = 961$
$2! = 2$	$14^2 = 196$	$2^1 = 2$
$3! = 6$	$15^2 = 225$	$2^2 = 4$
$4! = 24$	$16^2 = 256$	$2^3 = 8$
$5! = 120$	$17^2 = 289$	$2^4 = 16$
$6! = 720$	$18^2 = 324$	$2^5 = 32$
$2^2 = 4$	$19^2 = 361$	$2^6 = 64$
$3^2 = 9$	$21^2 = 441$	$2^7 = 128$
$4^2 = 16$	$22^2 = 484$	$2^8 = 256$
$5^2 = 25$	$23^2 = 529$	$2^9 = 512$
$6^2 = 36$	$24^2 = 576$	$2^{10} = 1024$

Integrals formulas you'll hardly ever need

Integrals of Rational Functions

$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a}$

$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)}$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2|$

$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2|$

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$

$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ a \neq b$

$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x|$

$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$

Integrals with Roots

$\int \sqrt{x-a}\ dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}\ dx = 2\sqrt{x\pm a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}\ dx = -2\sqrt{a-x}$

$$\int x\sqrt{x-a}\ dx = \begin{cases} \frac{2a}{3}(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2}, \text{ or} \\ \frac{2}{3}x(x-a)^{3/2} - \frac{4}{15}(x-a)^{5/2}, \text{ or} \\ \frac{2}{15}(2a+3x)(x-a)^{3/2} \end{cases}$$

$\int \sqrt{ax+b}\ dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b}$

$\int (ax+b)^{3/2}\ dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2}$

$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}}\ dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x\pm a}$

$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\ dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a}$

$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}\ dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})$

$\int x\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b}$

$\int \sqrt{x(ax+b)}\ dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\Big[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} -$
$\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|\Big]$

$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\ \ dx\ \ = \ \ \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)}\ \ +$
$\frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|$

Integrals with Logarithms

$\int \ln ax\ dx = x\ln ax - x$

$\int x\ln x\ dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$

$\int x^2\ln x\ dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{x^3}{9}$

$\int x^n\ln x\ dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right),\quad n \neq -1$

$\int \frac{\ln ax}{x}\ dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2$

$\int \frac{\ln x}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

$\int \ln(ax+b)\ dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0$

$\int \ln(x^2+a^2)\ dx = x\ln(x^2+a^2) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x$

$\int \ln(x^2-a^2)\ dx = x\ln(x^2-a^2) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x$

$\int \ln(ax^2+bx+c)\ \ dx\ \ = \ \ \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\ \ -\ \ 2x\ \ +$
$\left(\frac{b}{2a}+x\right)\ln(ax^2+bx+c)$

$\int x\ln(ax+b)\ dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b)$

$\int x\ln(a^2-b^2x^2)\ dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln(a^2-b^2x^2)$

$\int (\ln x)^2\ dx = 2x - 2x\ln x + x(\ln x)^2$

$\int (\ln x)^3\ dx = -6x + x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x$

$\int x(\ln x)^2\ dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x$

$\int x^2(\ln x)^2\ dx = \frac{2x^3}{27} + \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x$

$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\ dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx = \sqrt{x^2\pm a^2}$

$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}$
$+\ \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx^+c)}\right|$

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|$

$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$
$-$
$fracb2a^{3/2}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|$

$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

Integrals with Exponentials

$\int e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

$\int \sqrt{x}e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\operatorname{erf}\left(i\sqrt{ax}\right),$
where $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

$\int xe^x\ dx = (x-1)e^x$

$\int xe^{ax}\ dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$

$\int x^2e^x\ dx = (x^2-2x+2)e^x$

$\int x^2e^{ax}\ dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax}$

$\int x^3e^x\ dx = (x^3-3x^2+6x-6)e^x$

$\int x^ne^{ax}\ dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x$

$\int x^ne^{ax}\ dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax],$ where $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ dt$

$\int e^{ax^2}\ dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(ix\sqrt{a}\right)$

$\int e^{-ax^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(x\sqrt{a}\right)$

$\int xe^{-ax^2}\ dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}$

$\int x^2e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2}$

Integrals with Trigonometric Functions

$\int \sin ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

$\int \sin^2 ax\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$

$\int \sin^3 ax\ dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a}$

$\int \sin^n ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax\ \ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right]$

$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\sin ax$

$\int \cos^2 ax\ dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$

$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a}$

$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right]$

$\int \cos x\sin x\ dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c_1 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_3$

$\int \cos ax\sin bx\ dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b$

$\int \sin^2 ax\cos bx\ dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)}$

$\int \sin^2 x\cos x\ dx = \frac{1}{3}\sin^3 x$

$\int \cos^2 ax\sin bx\ dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)}$

$\int \cos^2 ax\sin ax\ dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax$

$\int \sin^2 ax\cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)}$

$\int \sin^2 ax\cos^2 ax\ dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$

$\int \tan ax\ dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax$

$\int \tan^2 ax\ dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax$

$\int \tan^n ax\ dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right)$

$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a}\ln\cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax$

$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$\int \sec^2 ax\ dx = \frac{1}{a}\tan ax$

$\int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

$\int \sec x\tan x\ dx = \sec x$

$\int \sec^2 x\tan x\ dx = \frac{1}{2}\sec^2 x$

$\int \sec^n x\tan x\ dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0$

$\int \csc x\ dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int \csc^2 ax\ dx = -\frac{1}{a}\cot ax$

$\int \csc^3 x\ dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x|$

$\int \csc^n x \cot x\ dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0$

$\int \sec x \csc x\ dx = \ln|\tan x|$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$\int x\cos x\ dx = \cos x + x\sin x$

$\int x\cos ax\ dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$

$\int x^2\cos x\ dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$

$\int x^2\cos ax\ dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax$

$\int x^n\cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1,-ix)\right.$
$\left.+(-1)^n\Gamma(n+1,ix)\right]$

$\int x^n\cos ax\ dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1,-iax) - \Gamma(n+1,ixa)\right]$

$\int x\sin x\ dx = -x\cos x + \sin x$

$\int x\sin ax\ dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$

$\int x^2\sin x\ dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

$\int x^2\sin ax\ dx = \frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2}$

$\int x^n\sin x\ dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1,-ix) - (-1)^n\Gamma(n+1,-ix)\right]$

$\int x\cos^2 x\ dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$

$\int x\sin^2 x\ dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x$

$\int x\tan^2 x\ dx = -\frac{x^2}{2} + \ln\cos x + x\tan x$

$\int x\sec^2 x\ dx = \ln\cos x + x\tan x$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$\int e^x\sin x\ dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

$\int e^{bx}\sin ax\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax)$

$\int e^x\cos x\ dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$

$\int e^{bx}\cos ax\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax)$

$\int xe^x\sin x\ dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x)$

$\int xe^x\cos x\ dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x)$

Integrals of Hyperbolic Functions

$\int \cosh ax\ dx = \frac{1}{a}\sinh ax$

$$\int e^{ax}\cosh bx\ dx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases}$$

$\int \sinh ax\ dx = \frac{1}{a}\cosh ax$

$$\int e^{ax}\sinh bx\ dx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2-b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases}$$

$\int \tanh ax\ dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax$

$$\int e^{ax}\tanh bx\ dx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}\,{}_2F_1\left[1+\frac{a}{2b}, 1, 2+\frac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] \\ \quad -\frac{1}{a}e^{ax}\,{}_2F_1\left[1, \frac{a}{2b}, 1+\frac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases}$$

$\int \cos ax\cosh bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\sin ax\cosh bx + b\cos ax\sinh bx\right]$

$\int \cos ax\sinh bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cos ax\cosh bx + a\sin ax\sinh bx\right]$

$\int \sin ax\cosh bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[-a\cos ax\cosh bx + b\sin ax\sinh bx\right]$

$\int \sin ax\sinh bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cosh bx\sin ax - a\cos ax\sinh bx\right]$

$\int \sinh ax\cosh ax dx = \frac{1}{4a}\left[-2ax + \sinh 2ax\right]$

$\int \sinh ax\cosh bx\ dx = \frac{1}{b^2-a^2}\left[b\cosh bx\sinh ax - a\cosh ax\sinh bx\right]$

Some Linalg

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

$$\det\begin{pmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{pmatrix} = +a\cdot\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\cdot\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

- $\det(A) = \det(A^\intercal)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Die Determinate einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente

Inverse

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

- $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW von A falls $\exists\ x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 : Ax = \lambda x$
- $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW von $A \iff \det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$
- Die nichttriviale Lösungen von $(A - \lambda_i\mathbb{I})x = 0$ sind die EV von A zu λ_i
- $\prod_{n=1}^{n}\lambda_i = \det(A) \qquad \sum_{n=1}^{n}\lambda_i = \text{Spur}(A) = \text{Summe der Diagonalelemente}$
- Die EW einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente
- A und $A^\intercal$ haben die selben EW

Diagonalisierbarkeit

AG = GM $\iff$ A diagonalisierbar mit

$$A = T^{-1}DT \quad D = diag(\lambda_1, \dots \lambda_n) \quad T = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ EV_1 & \cdots & EV_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

Bei **Symmetrische** Matrizen gilt:
- Alle EW sind **reell**
- EW zu verschiedene EV sind **orthogonal** $\implies T^{-1} = T^\intercal$
- A ist diagonalisierbar

Plots and Graphs