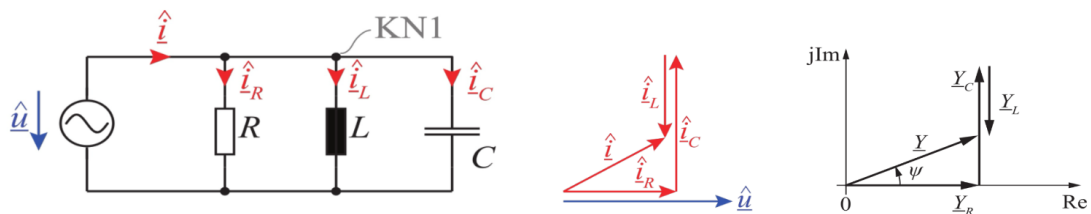


# NuS II - Woche 4

14. März 2025

## 1 Fortsetzung Resonanzkreise

### 1.1 RLC-Parallelschwingkreis



Impedanz:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}$$

Admitanz:

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Im Resonanzfall nimmt die Admitanz ihren Extremwert an, da der Blindanteil (imaginärer Anteil der Impedanz bzw. Admitanz) verschwindet.

$$\text{Für } f = f_0: B = -\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \quad \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(Y = G + jB)$$

Der Stromfluss durch den Kondensator und die Induktivität bei der Resonanzfrequenz kann nun bestimmt werden:

$$|\hat{i}_L| = \left| \frac{\hat{u}}{j\omega_0 L} \right| = \frac{\hat{u}}{\omega_0 L} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot L} = \hat{u} \sqrt{\frac{C}{L}} = |\hat{i}_C|$$

Da  $Z_{ges} = R$  bei  $f = f_0$  gilt:  $\hat{u} = Z_{ges} \cdot \hat{i} = R \cdot \hat{i}$

$$\Rightarrow |\hat{i}_L| = |\hat{i}_C| = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (= \hat{i} \cdot Q_S)$$

## 1.2 Güte und Dämpfung

Die Güte beschreibt das Verhältnis von gespeicherter Energie zu den Energieverlusten pro Schwingungsperiode in einem Resonator. Eine hohe Güte bedeutet, dass nur ein geringer Teil der gespeicherten Energie als Wärme im Widerstand verloren geht und die Schwingung entsprechend lange anhält.

**Definition der Güte:**

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Verluste pro Periode}}$$

[!] Eine Strom- bzw. Spannungsüberhöhung tritt nur auf, wenn  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

[!] Im Bereich  $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  nimmt der Strom maximal den Wert des Eingangsstromes an.

### 1.2.1 Serien- und Parallelschwingkreis

**Für den Serien-RLC-Schwingkreis:**

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Für die Spannung über der Spule bzw. dem Kondensator gilt dann für  $Q_s > 4$  mit guter Näherung

$$\frac{\hat{u}_{L_{\max}}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{C_{\max}}}{\hat{u}} \approx Q_s$$

**Für den Parallel-RLC-Schwingkreis:**

$$Q_P = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

### 1.2.2 Dämpfung

**Dämpfungsfaktor:**

$$d = \frac{1}{Q}$$

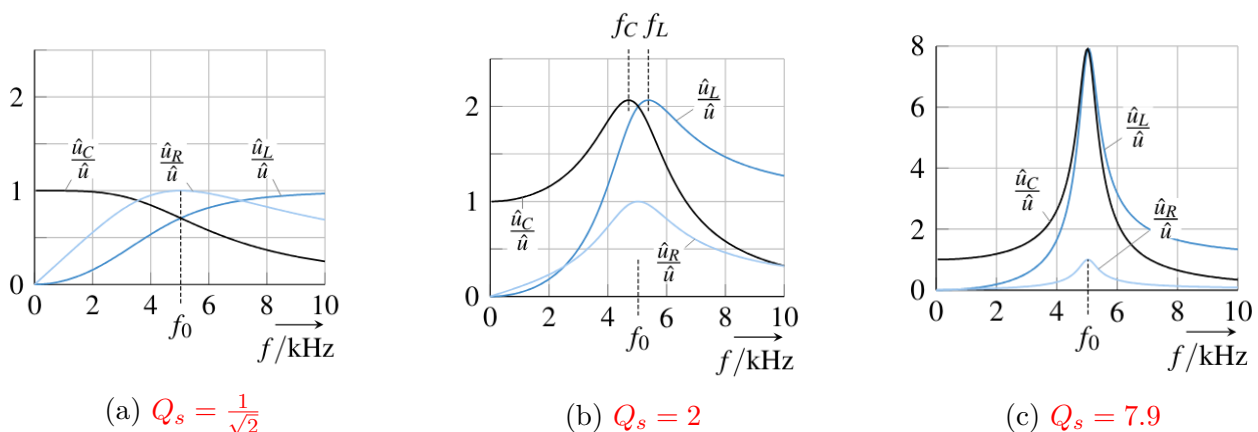


Abbildung 1: Vergleich der Güte auf die Spannungsüberhöhung

## Aufgabe 1 Serienschaltung von zwei Parallelschwingkreisen

Gegeben ist die in Abb. 1 dargestellte Schaltung mit den Netzwerkelementen  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = 1 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 100 \text{ nF}$ ,  $L_2 = 0.1 \text{ mH}$  und  $C_2 = 10 \text{ nF}$ .

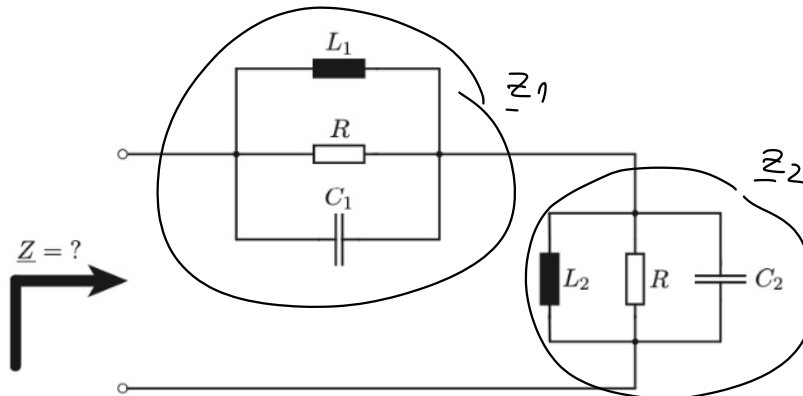


Abbildung 1: Zwei Parallelschwingkreise in Serienschaltung

- Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz  $f_1$  und  $f_2$ , sowie die Güten  $Q_{p1}$  und  $Q_{p2}$  der beiden Schwingkreise.
- Bestimmen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz  $\underline{Z}$  in Abhängigkeit der Frequenz.
- Stellen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz  $|\underline{Z}|$  als Funktion der Frequenz im Bereich  $1 \text{ kHz} \leq f \leq 1 \text{ MHz}$  dar.

A.) Schwingkreis 1



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \Rightarrow f_1 = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 \text{ mH} \cdot 100 \text{ nF}}} = \underline{\underline{15.92 \text{ kHz}}}$$

$$Q_1 = R \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = 10 \text{ k}\Omega \sqrt{\frac{100 \text{ nF}}{1 \text{ mH}}} = \underline{\underline{10}}$$

Schwingkreis 2:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_2 C_2}} = \underline{\underline{159.2 \text{ kHz}}}$$

$$Q_2 = R \sqrt{\frac{C_2}{L_2}} = \underline{\underline{10}}$$

B.) 
$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{1}{R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

Taschenrechner

Home vs CAS

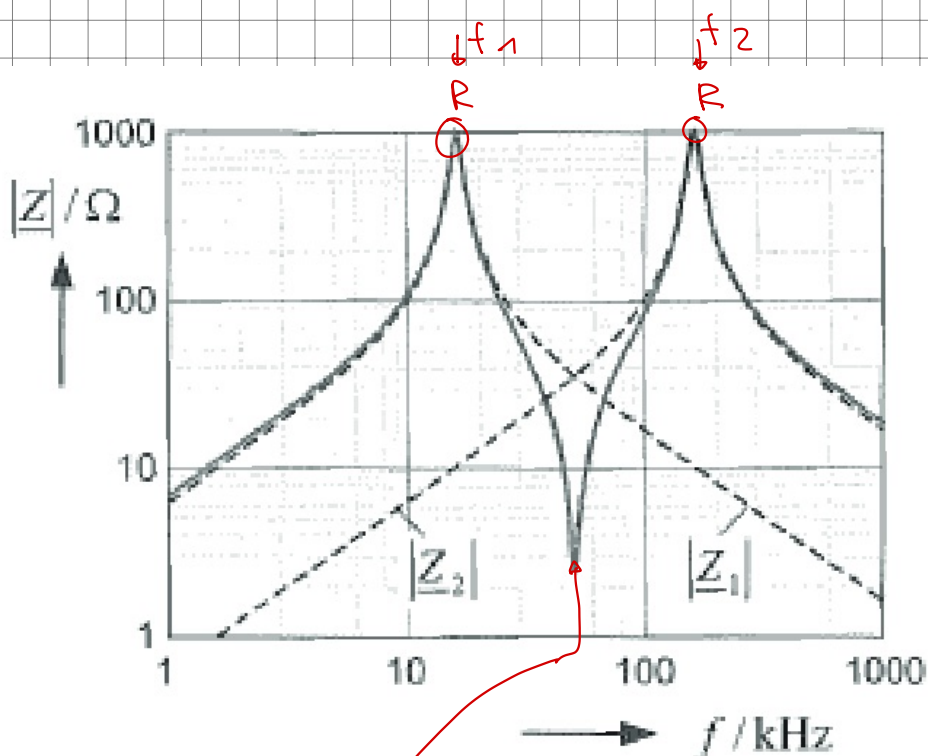
↑  
Zahlen, Winkel etc.

CAS: Formel (Kleinbuchstaben). Simplify, collect

Math → Arithmetic → Complex: Real, Phase

Betrag:  $|\times|$

Ableiten: CAS → Calculus → Differentiate



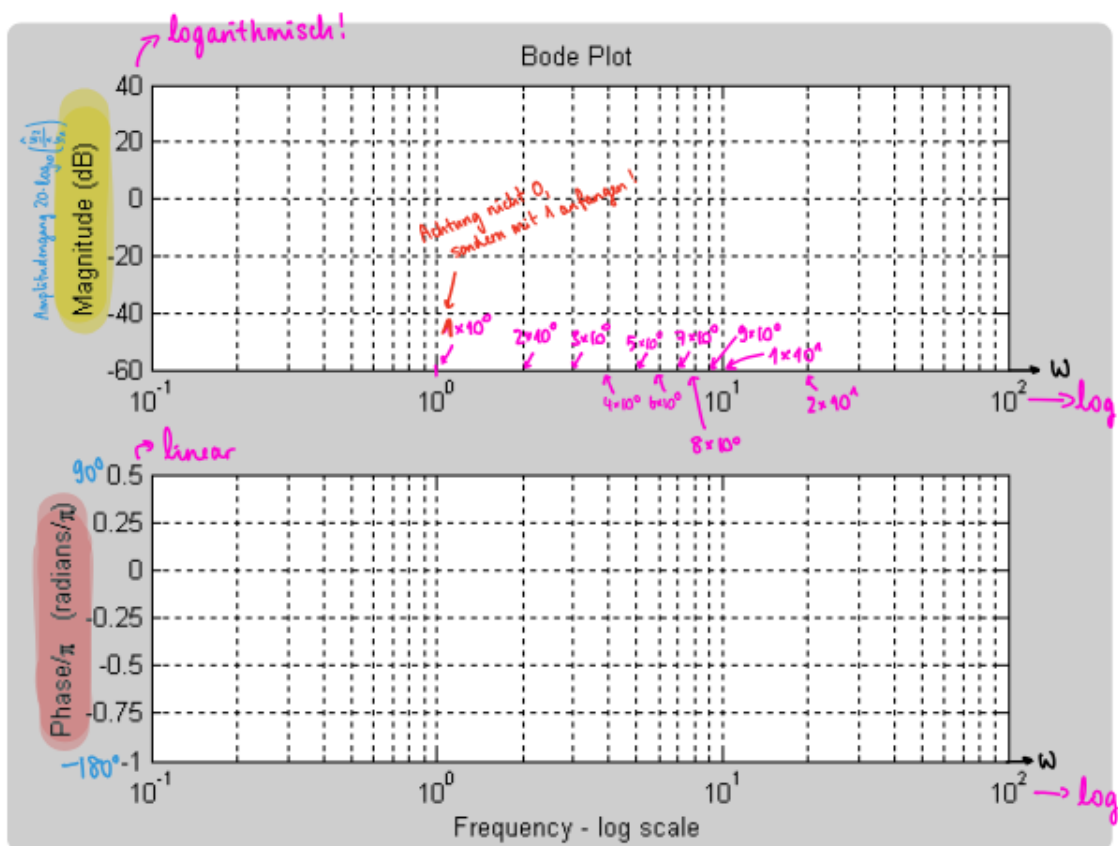
Minimal der Spule von  $Z_2$  dem Kondensator von  $C_1$  entgegengewirkt.

## 2 Eigenschaften von Bode-Diagrammen

Von letzter Woche: Eine Übertragungsfunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$F(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \left| \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \right| e^{j\varphi_F}$$

- Bode-Diagramme werden genutzt, um das Verhalten von Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Frequenzen zu analysieren.
- Sie bestehen aus zwei Diagrammen: dem **Amplitudengang** und dem **Phasengang**.
- Da Frequenzverläufe oft mehrere Größenordnungen umfassen, wird eine **logarithmische Skala** verwendet.



Ihr findet eine Anleitung zum zeichnen von Bodeplots auf eurer Zusammenfassung. Dabei könnt ihr Schritt für Schritt vorgehen. Wir gehen Beispiele zusammen durch.

## Zusammenfassung S.7

### Bode-Diagramm → Asymptotennäherung

Gezeichnet wird von kleinen zu grossen Frequenzen, d.h. links nach rechts / Darstellung in dB-Skala →  $F(\omega)[dB] = 20 \log_{10}(F(\omega))$

1. Faktorisieren der Funktion:  $F_{ges}(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^r \cdot \underbrace{F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \cdot \dots \cdot F_n(j\omega)}_{F_{ges}^*(j\omega)}$  (1)

Teilsysteme  $F_i(j\omega)$  in Standardform

$F_i(j\omega) = 1 + j\omega T_{n,i}$	Steigungsänderung → ZUSÄTZLICH zur bereits vorhandenen Steigung/Phase!	Phasenänderung
$F_i(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_{p,i}}$	Steigung +20dB/Dekade	Phase +90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$ )
$F_i(j\omega) = \frac{1}{1 + 2d_i T_{p,i}(j\omega) + (j\omega)^2 T_{p,i}^2}$	Steigung -20dB/Dekade	Phase -90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$ )
$F_i(j\omega) = 1 + 2d_i T_{n,i}(j\omega) + (j\omega)^2 T_{n,i}^2$	Steigung +40dB/Dekade	Phase +180° (siehe Punkt 9)
$F_i(j\omega) = \frac{1}{1 + 2d_i T_{p,i}(j\omega) + (j\omega)^2 T_{p,i}^2}$	Bedingung: $d_i \leq 1$ , sonst Polynom mit 2 reellen Nullstellen	
	Steigung -40dB/Dekade	Phase -180° (siehe Punkt 9)
	Bedingung: $d_i \leq 1$ , sonst Polynom mit 2 reellen Polstellen	

2. Teilsysteme nach aufsteigenden Eckfrequenzen  $\omega_i = 1/T_{n,i}$  bzw.  $\omega_i = 1/T_{p,i}$  sortieren ( $\omega_1$  = kleinste Eckfrequenz)

**Amplitudengang** (doppellogarithmische Darstellung)

3. Startpunkt:  $\omega_1$ ;  $F_{dB}(\omega_1) = 20 \log_{10}(|K_0 F_{ges}^*(0)| \cdot \omega_1^r)$
4. Startpunkt nach links: Gerade mit Steigung  $r \cdot 20\text{dB/Dekade}$  (Für  $r = 0$  waagerechte Gerade)
5. Startpunkt nach rechts: Geradensegmente von einer Eckfrequenz bis zur nächst höheren Eckfrequenz. Bei jeder Eckfrequenz  $\omega_i$  ändert Amplitudengang Steigung je nach Teilsystem, das zur Eckfrequenz gehört (s.o.).  
Mehrfache Pol-/Nullstellen: Steigungsänderung mehrfach nehmen.
6. Annäherung: Ecken bei Eckfrequenz noch um  $\pm 3\text{dB}$  bzw. Vielfachen davon bei mehrfachen Pol-/Nullstellen abrunden ( $+n \cdot 3\text{dB}$  bei konvexem /  $-n \cdot 3\text{dB}$  bei konkavem Verlauf). Dies gilt nur für konjugiert komplexe Pole mit Dämpfung  $d_i > 1/2$ .  
Falls  $d_i < 1/2$ :  
- Resonanzüberhöhung bei  $\omega_i$  um  $-20 \log_{10}(2d_i)\text{dB}$  oberhalb Geradennäherung  
- Amplitude:  $|F(j\omega_i)| = \frac{1}{2d_i}$   
- Resonanzkreisfrequenz  $\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - 2d_i^2} \Rightarrow$  Punkt um  $-20 \log_{10}(2d_i \sqrt{1 - d_i^2})\text{dB}$  oberhalb Geradennäherung

**Phasengang** (logarithmische x-Achse)

7. Startfrequenz  $\omega_1$  nach links:  
$$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90^\circ & \text{falls } K_0 F_{ges}^*(0) > 0 \\ -180^\circ + r \cdot 90^\circ & \text{falls } K_0 F_{ges}^*(0) < 0 \end{cases}$$
8. Startpunkt nach rechts: Phase ändert sich bei jeder Eckfrequenz  $\omega_i$  je nach Teilsystem (s.o.).
9. Annäherung: Glieder 1. Ordnung – Phasenverlauf mit  $\pm 45^\circ/\text{Dekade}$  zwischen  $0.1\omega_i$  und  $10\omega_i$   
Konjugiert komplexe Pole: Phasenänderung bei Eckfrequenz um so steiler, je kleiner  $d_i$   
Phasengang für Teilsystem  $F_i(j\omega)$  ist punktsymmetrisch zu dazugehörigen Eckfrequenz  $\omega_i$ .
10.  $\omega \rightarrow \infty$ : Phase  $\varphi_{ges}$  strebt gegen  $(m - n) \cdot 90^\circ$  ( $n$  Grad Nenner- &  $m$  Grad Zählerpolynom).

## 3 Schrittweise Konstruktion eines Bode-Diagramms

### Amplitudengang

1. **Faktorisierung der Übertragungsfunktion** nach den Grundbausteinen (\*). Dies macht man z.B. mit Partialbruchzerlegung.
2. **Bestimmung der Eckfrequenzen** (auch als Grenzfrequenzen oder 3dB-Punkte bekannt). Diese ablesen und einzeichnen
3. **Startwert bei der kleinsten Eckfrequenz** berechnen.

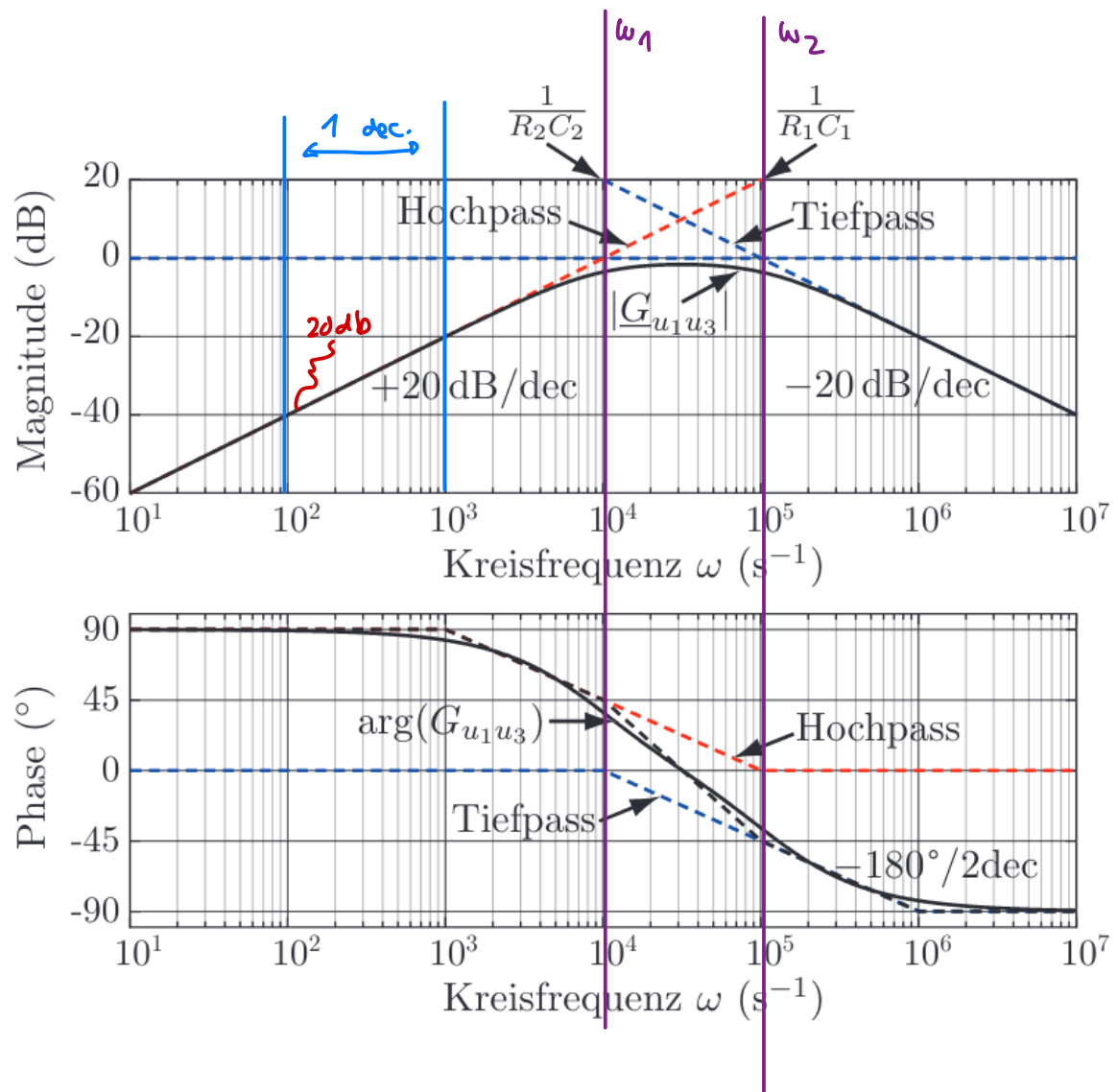
$$F_{dB}(\omega_1) = 20 \log_{10}(|K_0 F_{ges}^*| \omega_1^r)$$

Diesen einzeichnen. Steigung nach links bestimmen und einzeichnen.

4.  $\forall \omega_i$  **Steigung nach rechts bestimmen** und einzeichnen. Steigung von den Grundbausteinen ablesen

### Phasengang

1.  $\varphi(\omega = 0)$  **bestimmen**  $\omega = 0$  bis  $\omega = \omega_1$  ist es immer eine Gerade.
2.  $\forall \varphi_i$  **änderung der Phase bestimmen** und einzeichnen



### 3.1 Beispiel Aufgabe

#### Aufgabe 1 Übertragungsfunktion und Bode Diagramm

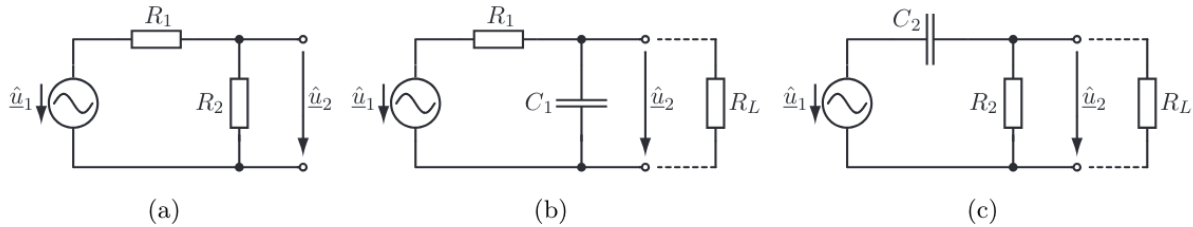


Abbildung 1: (a) Spannungsteiler, (b) RC-Tiefpassfilter, und (c) RC-Hochpassfilter.

Gegeben sind die in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen mit einer sinusförmigen Quellenspannung  $\hat{u}_1$  und den Bauteilwerten  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$  und  $C_2 = 10 \text{ nF}$ . Der Lastwiderstand  $R_L$  in Abbildung 1(b) und 1(c) wird erst in Aufgabenteil 1.3) berücksichtigt.

- 1.1) Bestimmen Sie für jede der in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen die Übertragungsfunktion  $G_{u_1 u_2}(j\omega) = \frac{\hat{u}_2(j\omega)}{\hat{u}_1(j\omega)}$  und konstruieren Sie die zugehörigen Bode Diagramme (Amplitudengang und Phasengang) im Bereich  $\omega \in [10^1 \dots 10^7] \text{ s}^{-1}$  mit Hilfe der Asymptotennäherung. Verwenden Sie die dazu angehängten Diagramme in Abbildungen 7 - 9. Geben Sie in beiden Fällen die 3 dB-Grenzfrequenz an.

$$G_{u_1 u_2}(j\omega) = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{\cancel{u_1} \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{R1}}}{\cancel{u_1}} = \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{R1}} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

① Faktorisierte Form:  $G = \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{R_1 C_1}_{T_{P,1}}} \cdot \frac{1}{\omega} (j\omega)^0 \circledast \begin{matrix} r=0 \\ k_0=1 \end{matrix}$

② Eckfrequenzen:  
Nur eine  $\omega_n = \frac{1}{T_{P,1}} = \frac{1}{R_1 C_1} = 10^5 \frac{1}{\text{s}}$

Amplitudengang

③ Startwert:  $F_{dB}(10^5) = 20 \log_{10} (|k_0 F_{ges}^*(0)| \omega_n^r) = 20 \log_{10} (|1| \cdot (\omega_n)^0)$   
 $= 20 \log_{10} (1) = 0$

④ Nach rechts:  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dec.}} \Rightarrow 0 \text{ dB} - 20 \text{ dB} = -20 \text{ dB}$

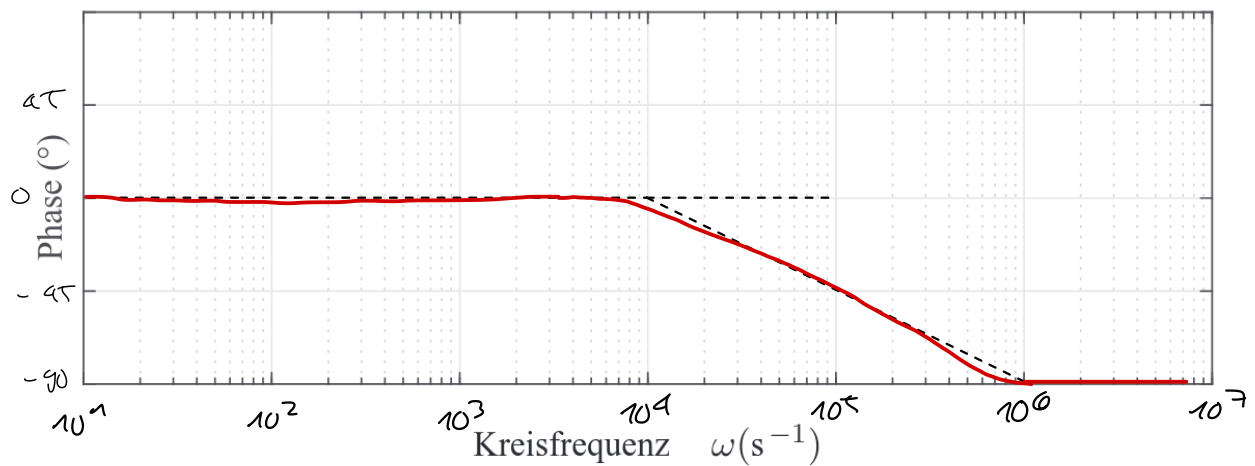
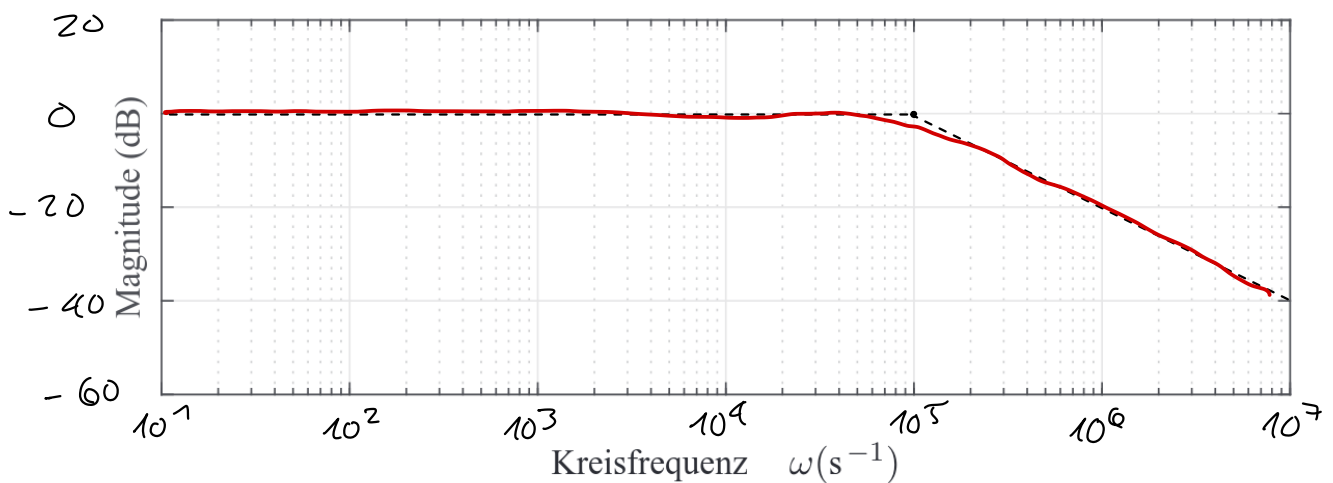


## Phasengang

⑤ Da  $k_0 F^* g_{es}(0) = 1 > 0 \Rightarrow \varphi(0) = 1 \cdot 90^\circ = 0 \cdot 90^\circ = 0^\circ$

Gerade bis  $\omega_1$

⑥ Ab  $\omega_1 \Rightarrow$  Phase  $-90^\circ$  zwischen  $0.1 \omega_1$  ( $0.1 \cdot 10^5 = 10^4$ )  
und  $10 \omega_1$  ( $10 \cdot 10^5 = 10^6$ )



### 3.2 Beispielaufgabe 2

Sei die Übertragungsfunktion eines Bandpass-Filters gegeben als:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

mit

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2 C_2} = 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad G(j\omega) &= j\omega R_2 C_2 \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \\ &= \underbrace{R_2 C_2}_{k_0} (j\omega) \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_1 = 10^4 \frac{1}{\text{s}} \quad ; \quad \omega_2 = 10^5 \frac{1}{\text{s}} \quad \Rightarrow \text{eintragen}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Startpunkt: } \omega = \omega_1$$

$$\begin{aligned} F_{dB}(\omega_1) &= 20 \log_{10} (|k_0 F_{ges}^*(\omega) (\omega_1)|) = 20 \log_{10} (|R_2 C_2 \cdot 1| 10^4) \\ &= 20 \log_{10} (10^{-5} \cdot 10^4) = 20 \log_{10} (10^{-1}) = -20 \end{aligned}$$

$$\text{Steigung nach links: } r \cdot 20 \text{ dB/dec} = 20 \text{ dB/dec}$$

$$\textcircled{4} \quad \omega = \omega_1:$$

$$\text{Steigung } -20 \text{ dB/dec} \Rightarrow 20 - 20 = 0 \text{ dB/dec}$$

$$\omega = \omega_2:$$

$$\text{Steigung } -20 \text{ dB/dec} \Rightarrow 0 - 20 = -20 \text{ dB/dec}$$

Phasengang

$$\textcircled{5} \quad \text{Da } k_0 F_{ges}^*(\omega) = 10^{-5} > 0 \Rightarrow \varphi(\omega) = r \cdot 90^\circ = 90^\circ$$

$$\textcircled{6} \quad 1. \quad \omega = \omega_1 \Rightarrow \text{Phase } -90^\circ \text{ zwischen } 0.1\omega_1 (10^3) \text{ und } 10\omega_1 (10^5)$$

$$2. \quad \omega = \omega_2 \Rightarrow \text{Phase } -90^\circ \text{ zwischen } 0.1\omega_2 (10^4) \text{ und } 10\omega_2 (10^6)$$

Die Phaseneinwirkung von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  addiert sich hier auf.

