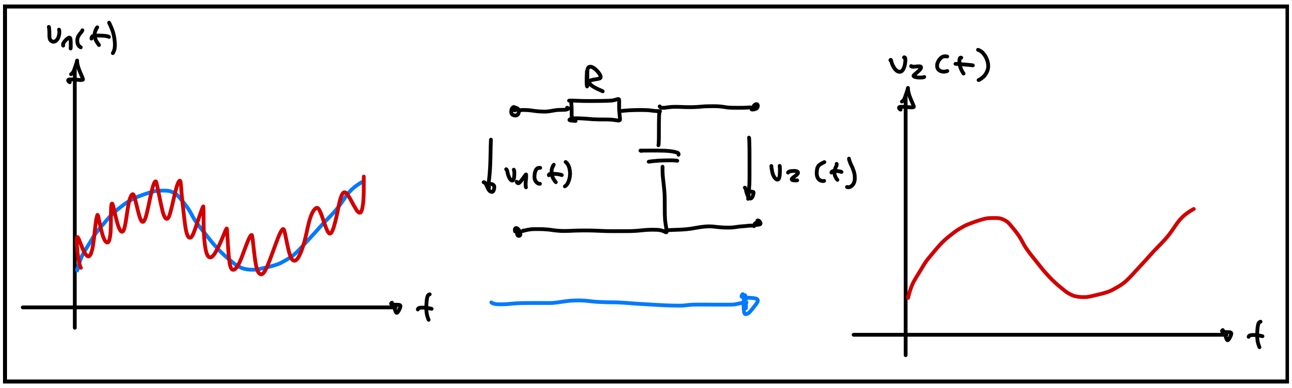
NuS II - Woche 3

7. März 2025

1 Einleitung

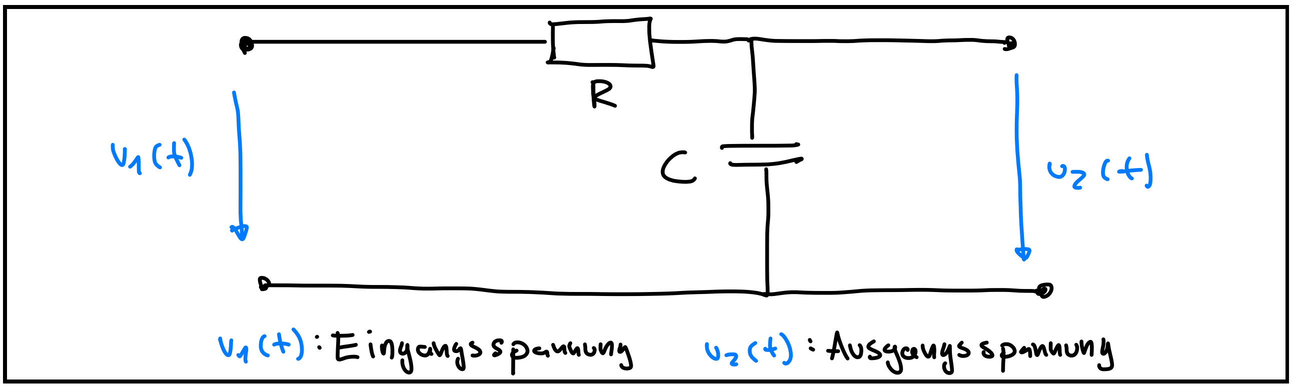
Filter sind elektronische Komponenten, die je nach Frequenz eines Signals dessen Amplitude und Phase verändern. Sie werden in zahlreichen technischen Bereichen eingesetzt, um störende Frequenzanteile zu eliminieren oder gewünschte Signale zu betonen. Ein typisches Beispiel ist der Tiefpassfilter, der hohe Frequenzen unterdrückt und niedrige Frequenzen weitgehend unverändert passieren lässt.



In diesem Beispiel wird ein Signal mit Noise (links) an einen sogenannten Tiefpass angelegt und der hochfreqeunte Noise wird rausgefiltert. Wir werden uns jetzt mit sogenannten passiven Filtern beschäftigen. Diese enthalten Widerstände, Spulen und Kondensatoren

2 Wichtige Grössen

Wir schauen uns als Beispiel einen RC-Tiefpassfilter an:



Ein RC-Tiefpassfilter besteht aus einem Widerstand R und einem Kondensator C. Die anliegende Eingangsspannung $U_e(t)$ wird über den Widerstand an den Kondensator weitergeleitet, wobei am Ausgang eine gefilterte Spannung $U_a(t)$ resultiert. Uns ist jetzt der Output zu einem gegebene Input wichtig. Bei einem Filter ist dies die Übetragungsfunktion. Diese ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung.

$$\textbf{Übertragungsfunktion:} \quad F = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$$

$$\textbf{Verstärkung (auch: Amplitudengang):} \quad V_u = \frac{\left|\hat{U}_2\right|}{\left|\hat{U}_1\right|}$$

$$\textbf{Verstärkung in Dezibel (dB):} \quad V_{u,\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\left|\hat{U}_2\right|}{\left|\hat{U}_1\right|}\right) \ \mathrm{dB}$$

$$\textbf{Phasenverschiebung:} \quad \varphi = \varphi_a - \varphi_e = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)}\right)$$

Die Übertragungsfunktion und Phasenverschiebung für den RC-Teifpass lassen sich über komplexe Wechselstromrechnung herleiten:

Es gilt: $Z_{ges} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{j\omega C}$

Spannungsteiler: $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{Rj\omega C + 1}$

$\left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{(R\omega C)^2 + 1}}$

$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right) =$

$\Rightarrow \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega C)^2+1}} \cdot e^{-j\arctan(\omega RC)}$

Wir können an der Formel leicht sehen das folgendes gelten muss:

Frequenzbereich	**Übertragungsfunktion** $F = \frac{U_{\mathrm{out}}}{U_{\mathrm{in}}}$	**Spannungsverhalten**
$\omega \to 0$ (tiefe Frequenz)	$F \approx 1$	$U_{\mathrm{out}} \approx U_{\mathrm{in}}$
$\omega \to \infty$ (hohe Frequenz)	$F \approx 0$	$U_{\mathrm{out}} \approx 0$

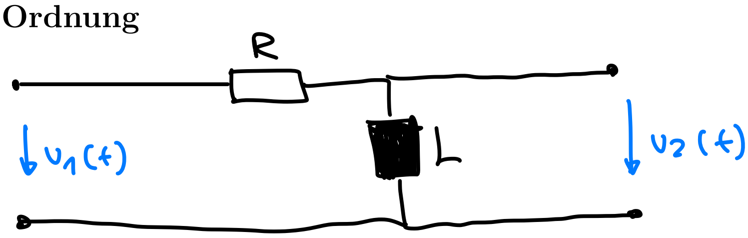
3 Filtertypen

Filter lassen sich nach ihrem Verhalten gegenüber unterschiedlichen Frequenzbereichen kategorisieren:

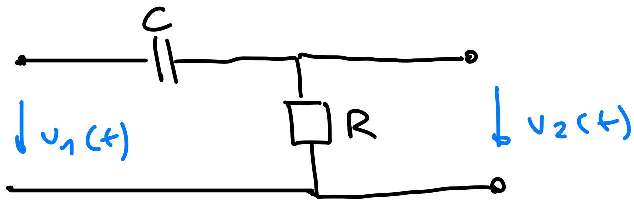
3.1 Hochpass:

Filter, die Signale mit einer hohen Frequenz übertragen und Signale mit einer tiefen Frequenz sperren.

RL-Hochpass 1. Ordnung



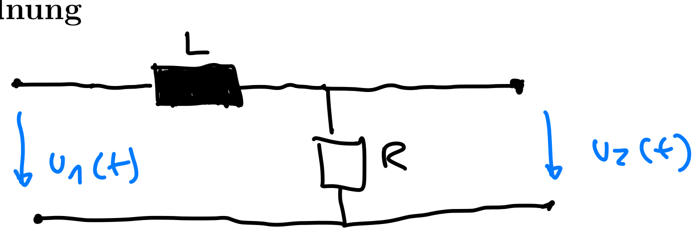
RC-Hochpass 1. Ordnung



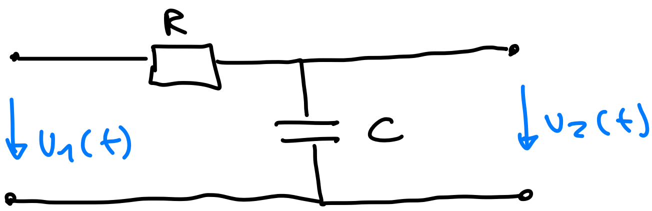
3.2 Tiefpass:

Filter, die Signale mit einer tiefen Frequenz übertragen und Signale mit einer hohen Frequenz sperren.

RL-Tiefpass 1. Ordnung



RC-Tiefpass 1. Ordnung



3.3 Bandpass:

Filter, die Signale mit Frequenzen in einem gewissen Bereich übertragen und Signale mit Frequenzen außerhalb dieses Bereichs sperren.

(Bandpass = Tiefpass + Hochpass) $\rightarrow$ mehr dazu in den nächsten Wochen...

Die Ordnung eines Filters definiert die Steilheit im Übergangsbereich zwischen Durchlass- & Sperrbereich (d.h. wie klar und wie schnell ist die Grenze zwischen durchgelassenen und gesperrten Signalen) – ersichtlich in den Bodeplots (Mehr dazu grad nachher)

Je höher die Ordnung eines Filters, desto steiler ist der Übergangsbereich. Sie entspricht der höchsten Ordnung von ω in der Übertragungsfunktion. Beispiele:

$$F_1 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \Rightarrow \quad \text{1. Ordnung}$$

$$F_2 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC} \quad \Rightarrow \quad \text{2. Ordnung}$$

4 Einführung Bodeplots

Eine Übertragungsfunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$F(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| e^{j\varphi_F}$$

Wir sehen, dass hier zwei Komponenten vorkommen, welche man betrachten will:

- **Amplitudengang:**
$$\left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|$$
- **Phasengang:**
$$\varphi_F = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(F)}{\mathrm{Re}(F)}\right)$$

Beide Größen sind frequenzabhängig und werden im Ingenieurwesen häufig als sogenannte **Bodeplots** dargestellt. Ein Bodeplot charakterisiert einen Filter vollständig! Das bedeutet, dass ich sofort sehen kann wie sich ein Filter verhält, wenn ich den Bodeplot kenne. Darum müssen wir die lesen können und verstehen was passiert.

Auch wenn die Darstellung anfangs verwirrend wirken kann, besteht ein Bodeplot immer aus zwei separaten Diagrammen:

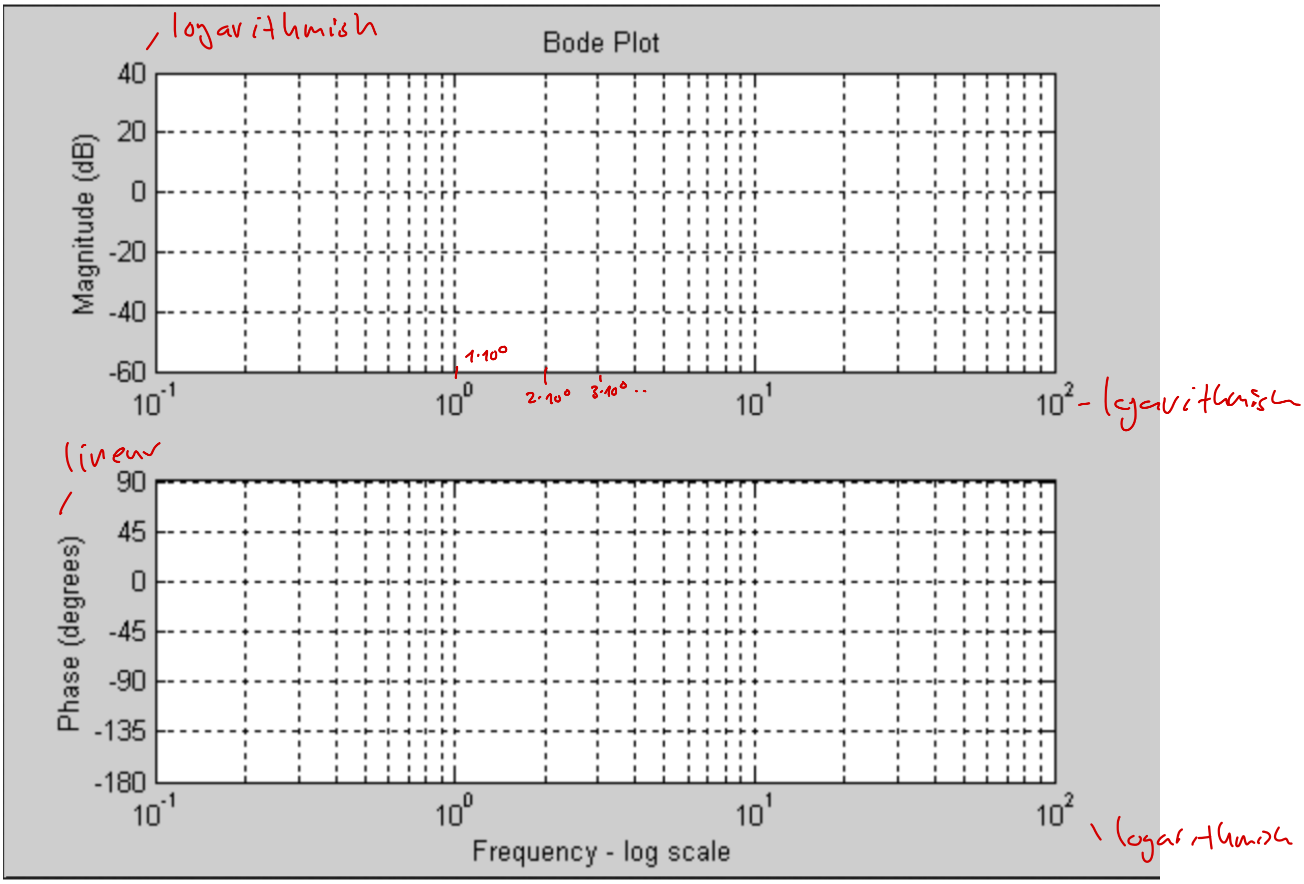
- **1. Amplitudengang:** Zeigt, wie stark das Signal in Abhängigkeit von der Frequenz abgeschwächt oder verstärkt wird.
- **2. Phasengang:** Beschreibt die Phasenverschiebung des Signals in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die x-Achse (ω-Achse) ist in beiden Diagrammen **logarithmisch** skaliert und kann in manchen Fällen normiert werden, beispielsweise auf τ.

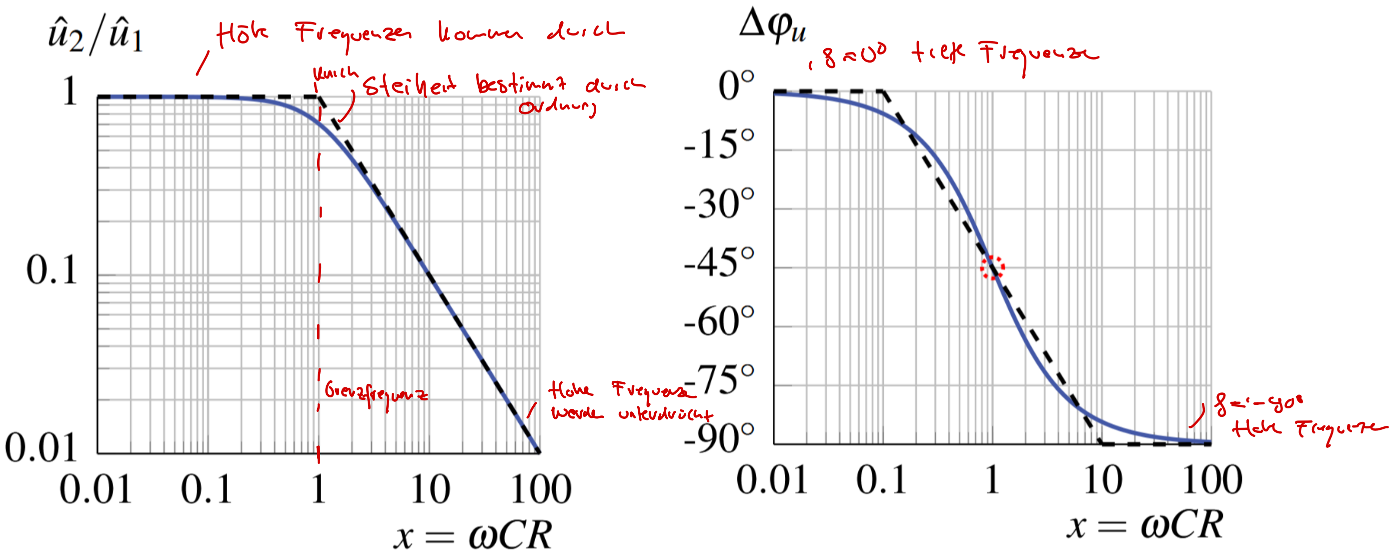
Die y-Achsen unterscheiden sich jedoch:

- Beim Amplitudengang ist sie logarithmisch.

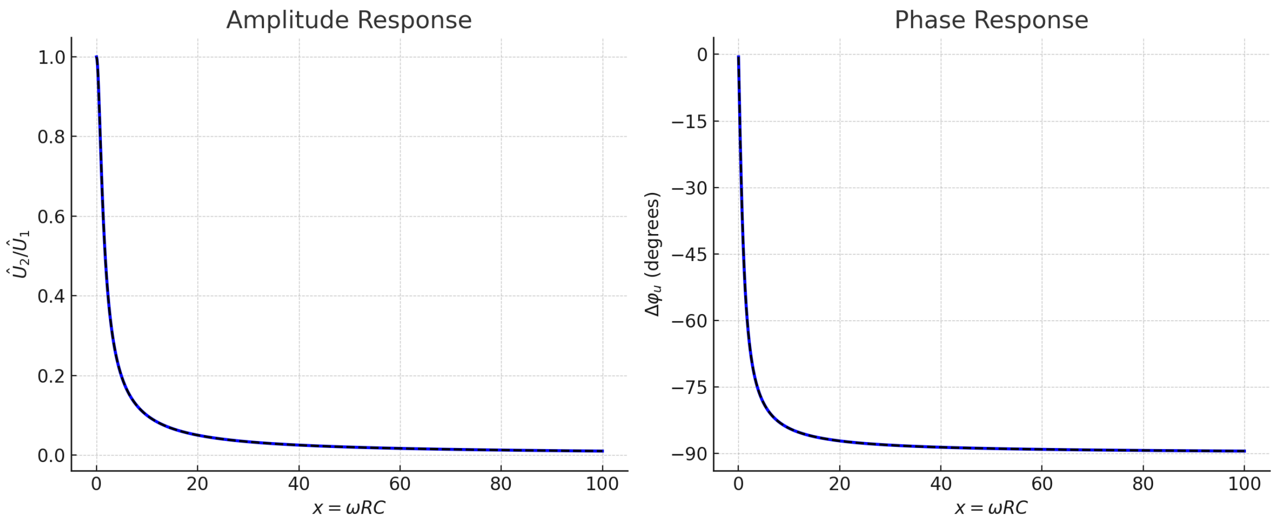
- Beim Phasengang bleibt sie linear.



Wir werden nächste Woche besprechen wie man Bodeplots zeichnet. Immoment ist nur wichtig, dass wir verstehen, was sie darstellen und wie man sie lesen kann. Lasst uns einen Bodeplot von einem **RC-Tiefpass** anschauen:



Wir können also aus diesen Abbildungen sehr viel ablesenn Mit einer linearen Skala wäre dies nicht gegangen, da der Plot dann folgendermassen aussieht:



RC-Teifpass lineare skalierung

5 Resonanzschaltungen

Eine Resonanzschaltung ist ein resonanzfähiges Netzwerk, das elektrische Schwingungen ausführen kann. Ein Schwingkreis besteht immer aus einer Induktivität und einem Kondensator (und meistens einem Widerstand).

Die Schwingungen (= Energie-Übertragungen) finden zwischen der Induktivität L und dem Kondensator C statt.

5.1 RLC-Serienschwingkreis

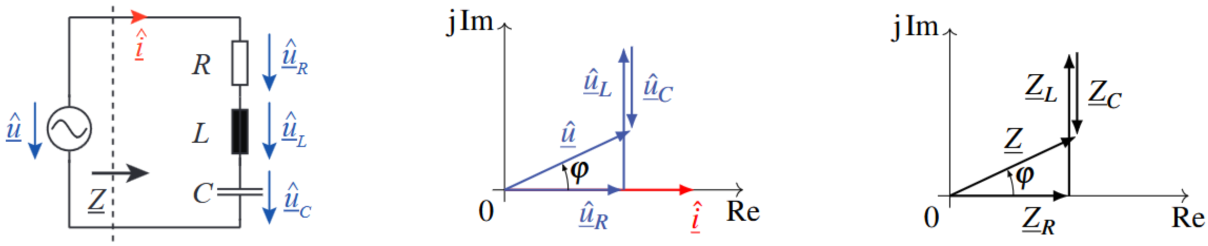
(Nächste Woche: Parallelschwingkreis)

Die **Gesamtimpedanz** der Reihenschaltung ist damit gleich:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|e^{j\varphi}$$

und der Betrag der Impedanz und der Phasenwinkel ergeben sich aus:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$$



Serieschwingkreis

Wir können uns jetzt überlegen, was passiert, wenn die Gesamtimpedant minimal wird:

Dafür können wir ω variieren:

$$Z = R + j\underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\quad \text{minimal} \quad \text{für} \quad \boxed{\omega L - \frac{1}{\omega C} \stackrel{!}{=} 0}$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Resonanzfrequenz

Wir könnnen und auch überlegen, was passiert für die Spannungn über dem Widerstand, der Spule und dem Kondensator gilt mittels Spannungsteiler:

$$|\hat{\underline{u}}_R| = \frac{|\underline{Z}_R|}{|\underline{Z}|}|\hat{\underline{u}}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}|\hat{\underline{u}}|$$

$$|\hat{\underline{u}}_L| = \frac{|\underline{Z}_L|}{|\underline{Z}|}|\hat{\underline{u}}| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}|\hat{\underline{u}}|$$

$$|\hat{\underline{u}}_C| = \frac{|\underline{Z}_C|}{|\underline{Z}|}|\hat{\underline{u}}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\,\omega C}|\hat{\underline{u}}|$$

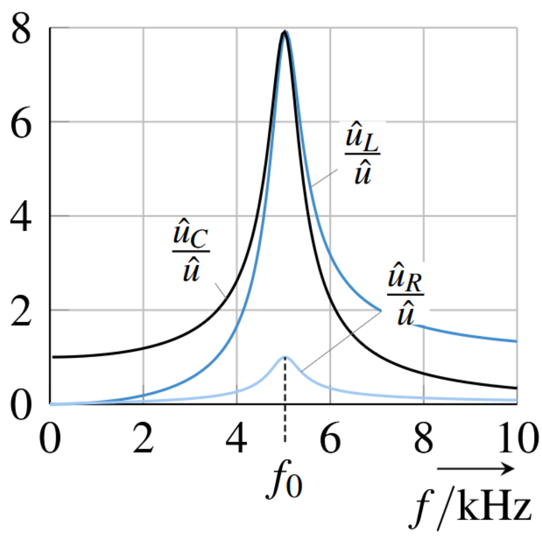
Wir können uns jetzt drei extrem Fälle überlegen:

Fall 1: $f \to 0 \quad \hat{u}_R = 0 \quad \hat{u}_L = 0 \quad \hat{u}_C = \hat{u}$

Fall 2: $f = f_0 \quad \hat{u}_R = \hat{u} \quad \hat{u}_L = \frac{\hat{u}}{R}\omega_0 L = \frac{\hat{u}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{R}\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\hat{u}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Fall 3: $f \to \infty \quad \hat{u}_R = 0 \quad \hat{u}_L = \hat{u} \quad \hat{u}_C = 0$

Die Spannungen für Widerstand, Kondensator und Spule variieren mit der Frequenz. Man kann gut die Resonanzfrequenz sehen, wo es eine starke überhöhung der Spannung über der Spule und dem Kondensator gibt. Dieser Bereich kann die Bauteile beschädigen. Wir werden nächste Woche noch genauer auf den Einfluss des Widerstandes und die Güte zu sprechen kommen



6 Beispielaufgaben

Das in Abb.1 dargestellte Netzwerk wird an eine harmonische Spannungsquelle $\underline{\hat{u}_0} = \hat{u}_o e^{j0}$ mit der Kreisfrequenz ω angeschlossen.

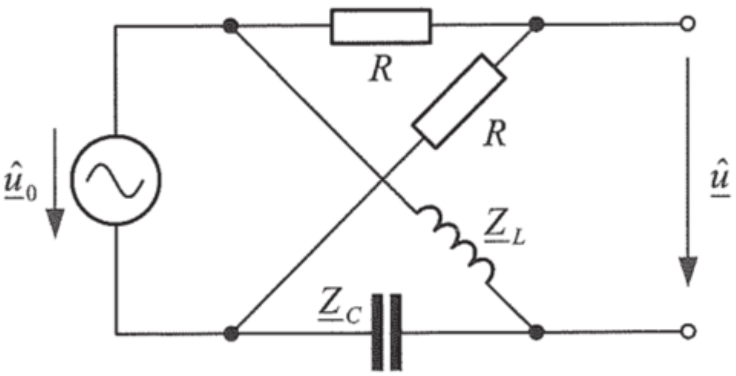


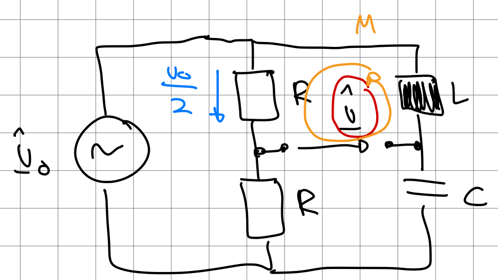
Abbildung 1: Brückenschaltung

1. Berechnen Sie die Spannung $\underline{\hat{u}}$ in Abhängigkeit von der Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_0$ und den Netzwerkelementen R, L und C.

2. Welche Werte nimmt die Spannung $\underline{\hat{u}}$ bei $\omega = 0$ und bei $\omega \to \infty$ an?

Abbildung 3: Caption

1.) Wir zeichnen das Netzwerk um:



$$M: \quad \frac{\hat{U}_0}{2} + \hat{U} - \hat{U}_L = 0$$

$$\hat{U}_C = \hat{U}_0 \cdot \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} = \hat{U}_0 \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \cdot \hat{U}_0$$

$$\hat{U} = \hat{U}_L - \hat{U}_0 = -\hat{U}_0 \frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} - \frac{\hat{U}_0}{2} = -\hat{U}_0 \left(\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\hat{U}_0 \left(\frac{2\omega^2 LC + 1 - \omega^2 LC}{2 - 2\omega^2 LC} \right) = \underline{\underline{-\frac{\hat{U}_0}{2} \left(\frac{1+\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \right)}}$$

2.)

$$\lim_{w \to 0} \underline{\hat{u}} = \lim_{w \to 0} \left(-\frac{\underline{\hat{u}}_0}{2} \left(\frac{1+w^2LC}{1-w^2LC} \right) \right) = \underline{\underline{-\frac{\underline{\hat{u}}_0}{2}}}$$

$$\lim_{w \to \infty} \left(-\frac{\underline{\hat{u}}_0}{2} \left(\frac{\frac{1}{w^2} + LC}{\frac{1}{w^2} - LC} \right) \right) = \underline{\underline{\frac{\underline{\hat{u}}_0}{2}}}$$

Aufgabe 3 Schaltungen mit einem reaktiven Element

Abbildungen 3 (a) bis (d) zeigen vier Schaltungen mit je einem reaktiven Element (Kapazität oder Induktivität) und einem Widerstand. Gespeist werden die Netzwerke von einer Wechselspannungsquelle $u_s(t) = \hat{u}_s \cdot \cos(\omega t)$. Löse folgende Teilaufgaben für alle vier Netzwerke:

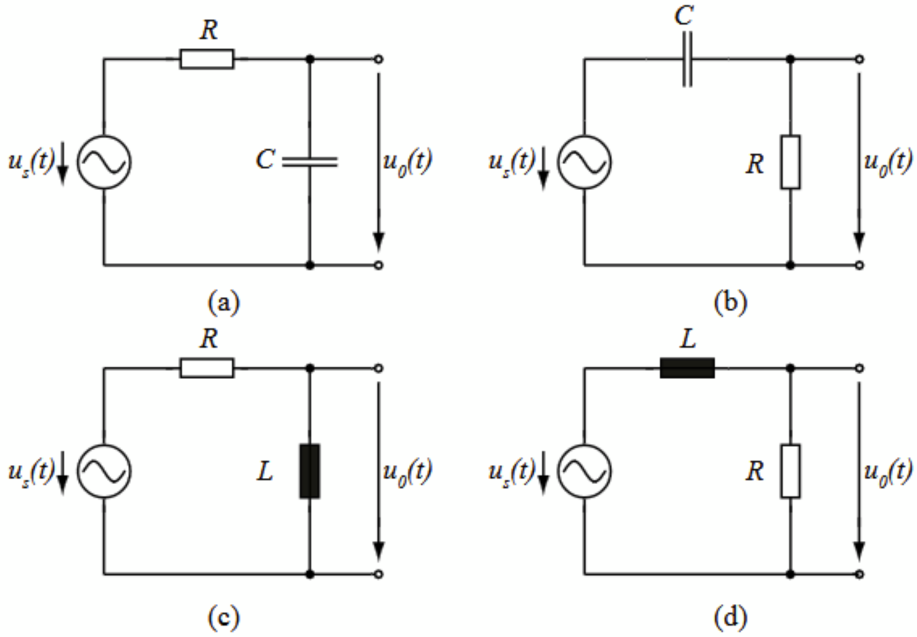


Abbildung 3: Schaltungen mit einer Kapazität bzw. einer Induktivität

3.1) Geben Sie die Spannung $u_0(t)$ für sehr tiefe und sehr hohe Frequenzen an. Diese kann direkt und ohne Rechnung angegeben werden, indem die Eigenschaften von Kapazitäten und Induktivitäten bei sehr tiefen und sehr hohen Frequenzen berücksichtig werden.

3.2) Berechnen Sie den Amplituden- und den Phasengang, d.h. berechnen Sie das Verhältnis $|\frac{\underline{\hat{u}}_0}{\underline{\hat{u}}_s}|$ und die Differenz $\varphi_o - \varphi_s$ als Funktion der Kreisfrequenz ω.

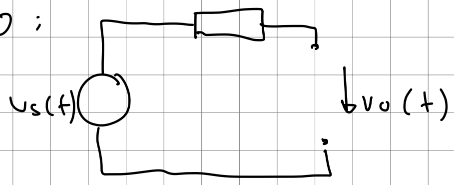
3.3) Skizziere den Amplituden- und den Phasengang ($\rightarrow$ Bode Diagramm). Können sich gewisse Netzwerke identisch verhalten?

Wir lösen das ganze für **Schaltbild (a.)**

3.1.)

Für tiefe Frequenzen wird C zu einem Leerlauf:

$\omega \to 0$;



$$\left(\underset{\omega \to 0}{Z_C} = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{j\omega C} \to \infty \right)$$

$$u_s(t) = u_o(t)$$

Für sehr hohe Frequenzen wird C zu einem Kurzschluss

$$\lim_{\omega \to \infty} Z_C = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{j\omega C} \to 0$$

Also fällt keine Spannung über C ab: $u_s(t) = 0$

3.2.)

Spannungsteiler: $\hat{\underline{u}}_o = \hat{\underline{u}}_s \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$

$$F = \frac{\hat{\underline{u}}_o}{\hat{\underline{u}}_s} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{Rj\omega C + 1}$$

Wir suchen $|F|$ und $\arg(F)$.

1. $|F| = \sqrt{Re(F)^2 + Im(F)^2}$ bestimmen (Bruch umformen)
2. Taschenrechner mit "simplify" oder Betrag
3. Ein Bruch

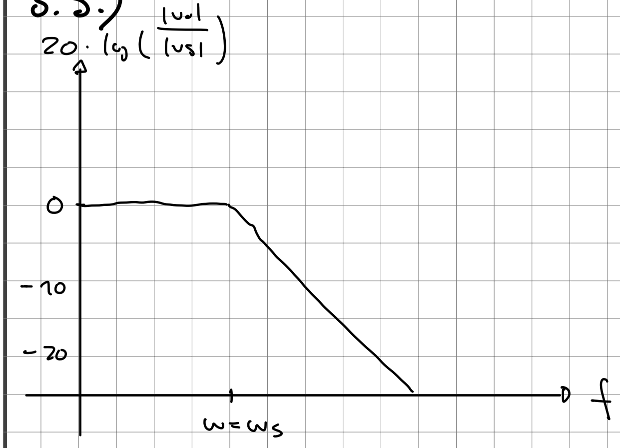
$$\frac{A+jB}{C+jD} \to |\;| = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{C^2+D^2}} \; ; \; \arg\left(\frac{A+jB}{C+jD}\right) = \arg(A+jB) - \arg(C+jD)$$

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}$$

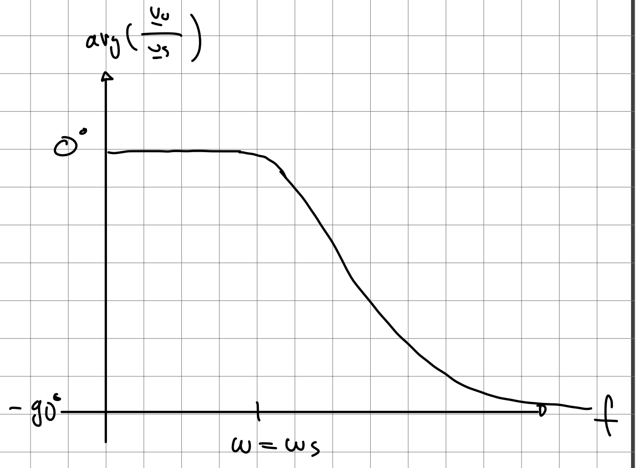
$$\arg(F) = 0 - \arg(1+jR\omega C) = -\arctan(\omega RC) = \arctan(-\omega RC)$$

$$\Rightarrow F = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}}} \, e^{-j\arctan(\omega RC)}$$

3.3.)



$20 \cdot \lg\left(\frac{|v_o|}{|v_s|}\right)$
0
-10
-20
$\omega = \omega_s$
f



$\arg\left(\frac{\underline{v}_o}{\underline{v}_s}\right)$
0°
-90°
$\omega = \omega_s$
f