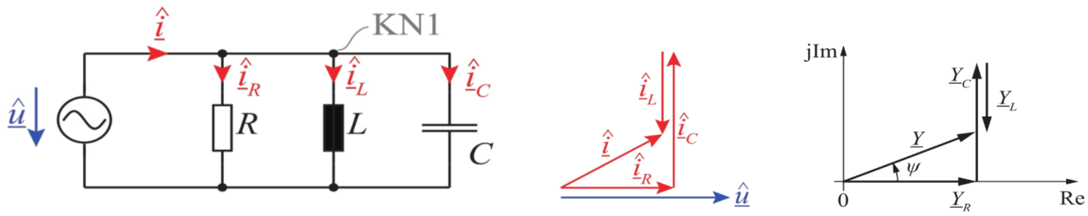
NuS II - Woche 4

14. März 2025

1 Fortsetzung Resonanzkreise

1.1 RLC-Parallelschwingkreis



Impedanz:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}$$

Admitanz:

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Im Resonanzfall nimmt die Admitanz ihren Extremwert an, da der Blindanteil (imaginärer Anteil der Impedanz bzw. Admitanz) verschwindet.

Der Stromfluss durch den Kondensator und die Induktivität bei der Resonanzfrequenz kann nun bestimmt werden:

1.2 Güte und Dämpfung

Die Güte beschreibt das Verhältnis von gespeicherter Energie zu den Energieverlusten pro Schwingungsperiode in einem Resonator. Eine hohe Güte bedeutet, dass nur ein geringer Teil der gespeicherten Energie als Wärme im Widerstand verloren geht und die Schwingung entsprechend lange anhält.

Definition der Güte:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Verluste pro Periode}}$$

[!] Eine Strom- bzw. Spannungsüberhöhung tritt nur auf, wenn $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

[!] Im Bereich $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ nimmt der Strom maximal den Wert des Eingangsstromes an.

1.2.1 Serien- und Parallelschwingkreis

Für den Serien-RLC-Schwingkreis:

$$Q_S = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Für die Spannung über der Spule bzw. dem Kondensator gilt dann für $Q_s > 4$ mit guter Näherung

$$\frac{\hat{u}_{L_{\max}}}{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_{C_{\max}}}{\hat{u}} \approx Q_s$$

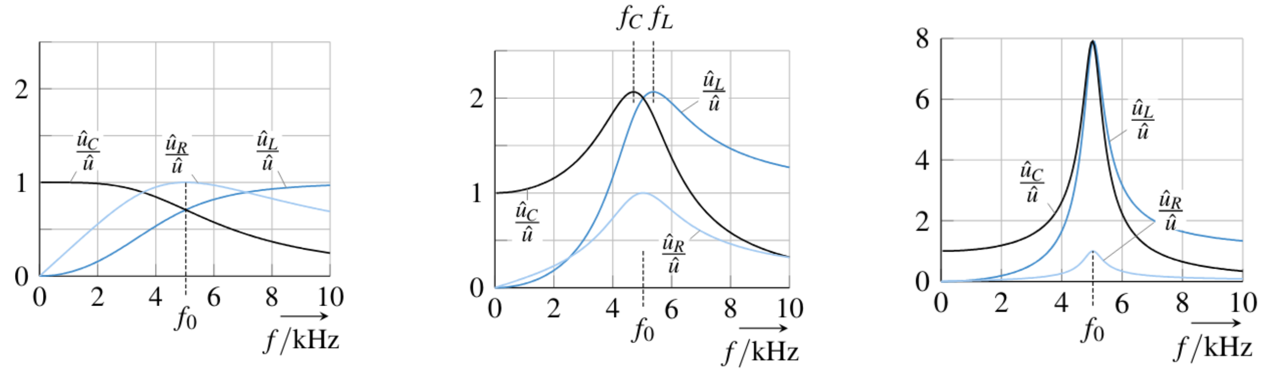
Für den Parallel-RLC-Schwingkreis:

$$Q_P = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

1.2.2 Dämpfung

Dämpfungsfaktor:

$$d = \frac{1}{Q}$$



(a) $Q_s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $Q_s = 2$ (c) $Q_s = 7.9$

Abbildung 1: Vergleich der Güte auf die Spannungsüberhöhung

Aufgabe 1 Serienschaltung von zwei Parallelschwingkreisen

Gegeben ist die in Abb. 1 dargestellte Schaltung mit den Netzwerkelementen $\mathrm{R} = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $\mathrm{L_1} = 1\,\mathrm{mH}$, $\mathrm{C_1} = 100\,\mathrm{nF}$, $\mathrm{L_2} = 0.1\,\mathrm{mH}$ und $\mathrm{C_2} = 10\,\mathrm{nF}$.

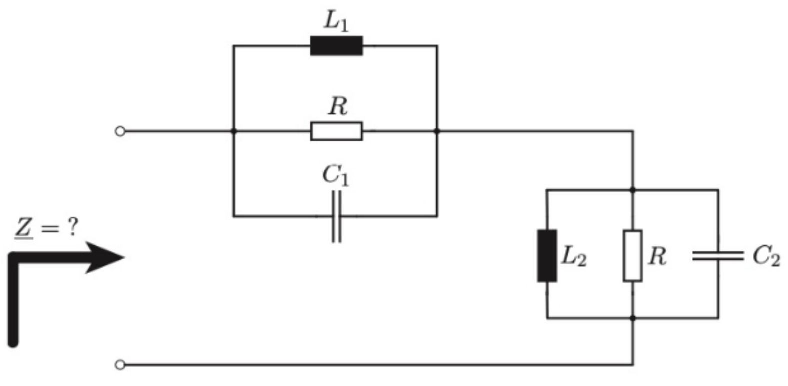


Abbildung 1: Zwei Parallelschwingkreise in Serienschaltung

A) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_1 und f_2, sowie die Güten Q_{p1} und Q_{p2} der beiden Schwingkreise.

B) Bestimmen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ in Abhängigkeit der Frequenz.

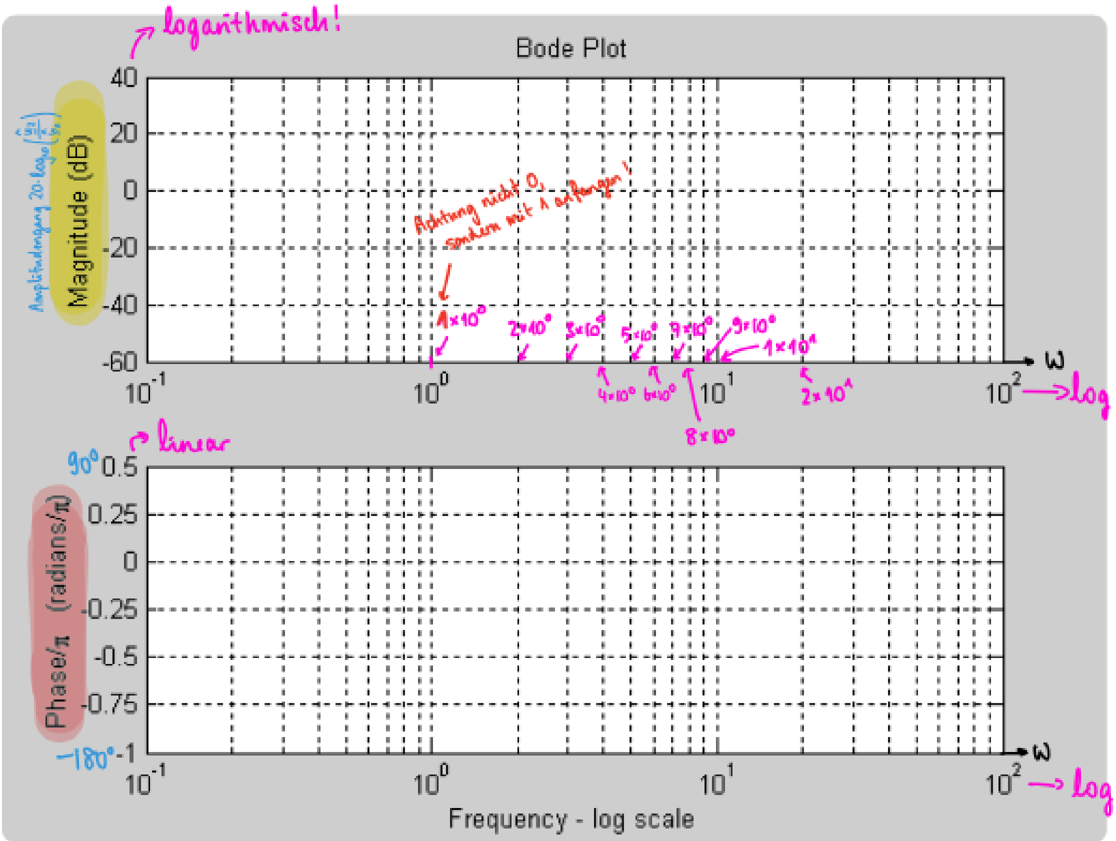
C) Stellen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz $|\underline{Z}|$ als Funktion der Frequenz im Bereich $1\,\mathrm{kHz} \leq f \leq 1\,\mathrm{MHz}$ dar.

2 Eigenschaften von Bode-Diagrammen

Von letztwer Woche: Eine Übertragungsfunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$F(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| e^{j\varphi_F}$$

- Bode-Diagramme werden genutzt, um das Verhalten von Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Frequenzen zu analysieren.
- Sie bestehen aus zwei Diagrammen: dem **Amplitudengang** und dem **Phasengang**.
- Da Frequenzverläufe oft mehrere Größenordnungen umfassen, wird eine **logarithmische Skala** verwendet.



Ihr findet eine Anleitung zum zeichnen von Bodeplots auf eurer Zusammenfassung. Dabei könnt ihr Schritt für Schitt vorgehen. Wir gehen Beispiele zusammen durch.

↗ Zusammenfassung S.7

Bode-Diagramm → Asymptotennäherung

Gezeichnet wird von kleinen zu grossen Frequenzen, d.h. links nach rechts / Darstellung in dB-Skala → $F(\omega)[dB] = 20\log_{10}(F(\omega))$

1. Faktorisieren der Funktion: $\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega) = K_0 \cdot (\mathrm{j}\omega)^r \cdot \underbrace{\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega) \cdot \underline{F}_2(\mathrm{j}\omega) \cdot \ldots \cdot \underline{F}_n(\mathrm{j}\omega)}_{\underline{F}^*_{ges}(\mathrm{j}\omega)}$ 1

Teilsysteme $F_i(\mathrm{j}\omega)$ in Standardform	Steigungsänderung → ZUSÄTZLICH zur bereits vorhandenen Steigung/Phase!	Phasenänderung
(*) $F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega T_{n,i}$	Steigung +20dB/Dekade	Phase +90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{p,i}}$	Steigung -20dB/Dekade	Phase -90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + 2d_i T_{n,i}(\mathrm{j}\omega) + (\mathrm{j}\omega)^2 T^2_{n,i}$	Steigung +40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Nullstellen	Phase +180° (siehe Punkt 9)
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+2d_i T_{p,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2 T^2_{p,i}}$	Steigung -40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Polstellen	Phase -180° (siehe Punkt 9)

2

2. Teilsysteme nach aufsteigenden Eckfrequenzen $\omega_i = 1/T_{ni}$ bzw. $\omega_i = 1/T_{pi}$ sortieren (ω_1 = kleinste Eckfrequenz)

Amplitudengang (doppellogarithmische Darstellung)

3

3. Startpunkt: ω_1 ; $F_{\mathrm{dB}}(\omega_1) = 20\log_{10}(|K_0 F^*_{ges}(0)| \cdot \omega_1^r)$
4. Startpunkt nach links: Gerade mit Steigung $r \cdot 20$dB/Dekade (Für $r = 0$ waagerechte Gerade)

4 repeat $\forall \omega_i$

5. Startpunkt nach rechts: Geradensegmente von einer Eckfrequenz bis zur nächst höheren Eckfrequenz. Bei jeder Eckfrequenz ω_i ändert Amplitudengang Steigung je nach Teilsystem, das zur Eckfrequenz gehört (s.o.).
   Mehrfache Pol-/Nullstellen: Steigungsänderung mehrfach nehmen.
6. Annäherung: Ecken bei Eckfrequenz noch um ± 3dB bzw. Vielfachen davon bei mehrfachen Pol-/Nullstellen abrunden ($+n \cdot$3dB bei konvexem / $-n \cdot$3dB bei konkavem Verlauf). Dies gilt nur für konjugiert komplexe Pole mit Dämpfung $d_i > 1/2$.
   Falls $d_i < 1/2$:
   - Resonanzüberhöhung bei ω_i um $-20\log_{10}(2d_i)$dB oberhalb Geradennäherung
   - Amplitude: $|F(\mathrm{j}\omega_i)| = \frac{1}{2d_i}$
   - Resonanzkreisfrequenz $\omega_r = \omega_i\sqrt{1-2d_i^2} \Rightarrow$ Punkt um $-20\log_{10}(2d_i\sqrt{1-d_i^2})$dB oberhalb Geradennäherung

5 **Phasengang** (logarithmische x-Achse)

7. Startfrequenz ω_1 nach links:

$$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90° & \text{falls } K_0 F^*_{ges}(0) > 0 \\ -180° + r \cdot 90° & \text{falls } K_0 F^*_{ges}(0) < 0 \end{cases}$$

6 repeat $\forall \omega_i$

8. Startpunkt nach rechts: Phase ändert sich bei jeder Eckfrequenz ω_i je nach Teilsystem (s.o.).
9. Annäherung: Glieder 1. Ordnung – Phasenverlauf mit ±45°/Dekade zwischen $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$
   Konjugiert komplexe Pole: Phasenänderung bei Eckfrequenz um so steiler, je kleiner d_i
   Phasengang für Teilsystem $F_i(\mathrm{j}\omega)$ ist punktsymmetrisch zu dazugehörigen Eckfrequenz ω_i.
10. $\omega \to \infty$: Phase φ_{ges} strebt gegen $(m-n) \cdot 90°$ (n Grad Nenner- & m Grad Zählerpolynom).

3 Schrittweise Konstruktion eines Bode-Diagramms

Amplitudengang

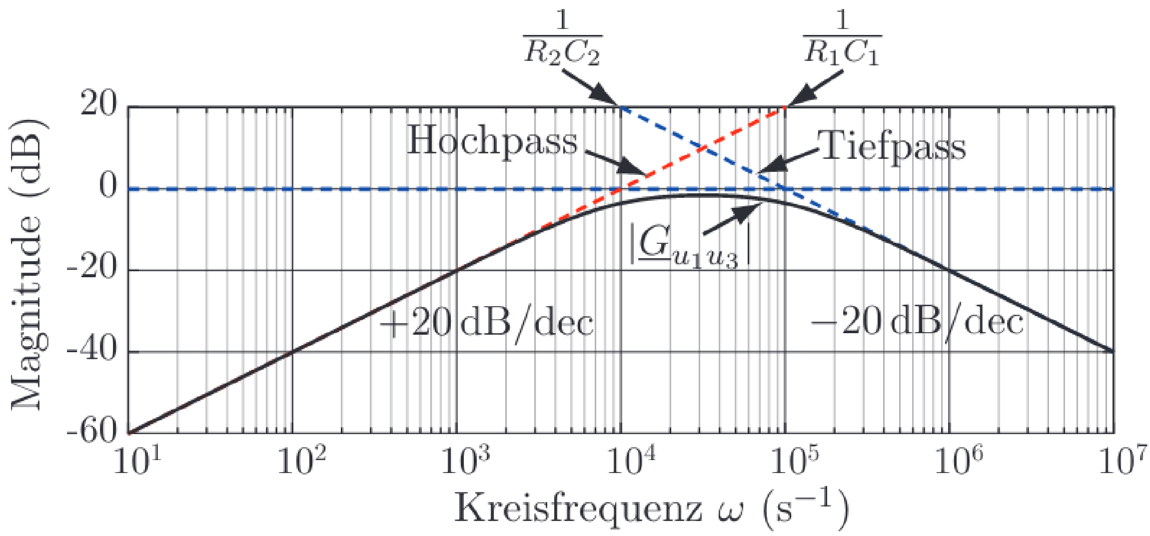
1. **Faktorisierung der Übertragungsfunktion** nach den Grundbausteinen (*). Dies macht man z.B. mit Partialbruchzerlegung.
2. **Bestimmung der Eckfrequenzen** (auch als Grenzfrequenzen oder 3dB-Punkte bekannt). Diese ablesen und einzeichnen
3. **Startwert bei der kleinsten Eckfrequenz** berechnen.

$$F_{db}(\omega_1) = 20log_{10}(|K_0 F^*_{ges}|\omega_1^r)$$

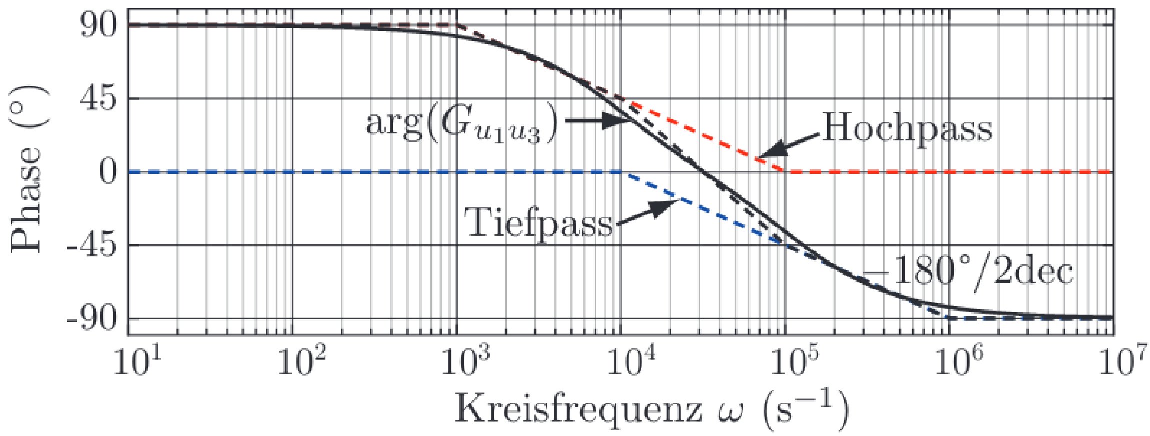
   Diesen einzeichen. Steigung nach links bestimmen und einzeichnen.
4. $\forall \omega_i$ **Steigung nach rechts bestimmen** und einzeichen. Steigung von den Grundbausteinen ablesen

Phasengang

1. $\varphi(\omega = 0)$ **bestimmen** $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_1$ ist es immer eine Gerade.
2. $\forall \varphi_i$ **änderung der Phase bestimmen** und einzeichnen



$\frac{1}{R_2C_2}$
$\frac{1}{R_1C_1}$
Hochpass
Tiefpass
$|\underline{G}_{u_1u_3}|$
$+20\,$dB/dec
$-20\,$dB/dec
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7
Kreisfrequenz ω (s^{-1})



$\arg(\underline{G}_{u_1u_3})$
Hochpass
Tiefpass
$-180°/2$dec
Phase (°)
90
45
0
-45
-90
10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7
Kreisfrequenz ω (s^{-1})

3.1 Beispiel Aufgabe

Aufgabe 1 Übertragungsfunktion und Bode Diagramm

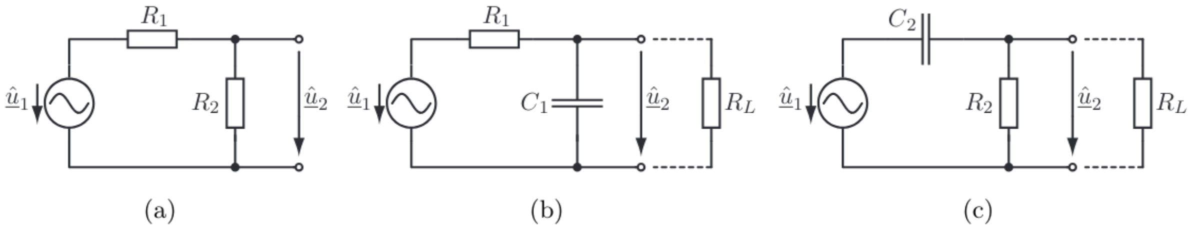
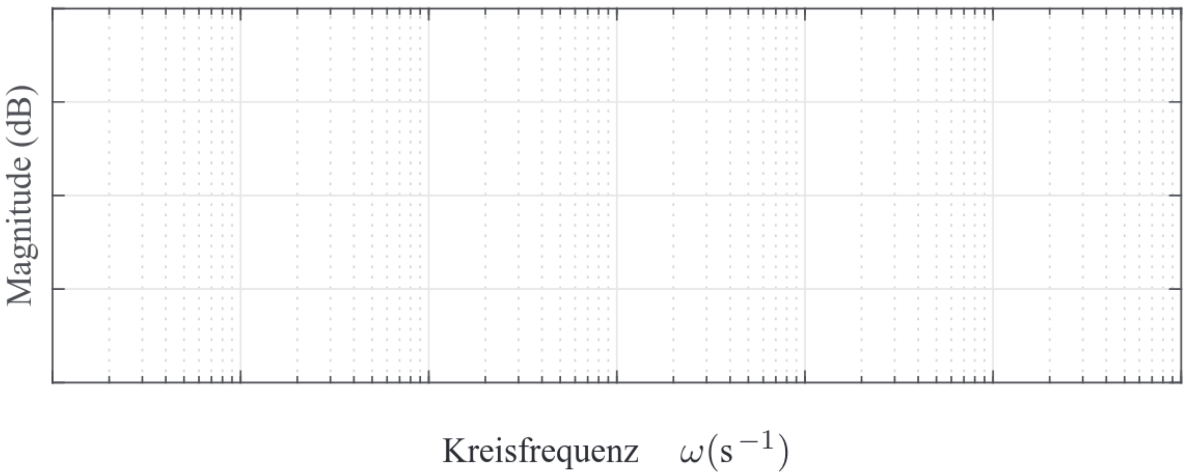
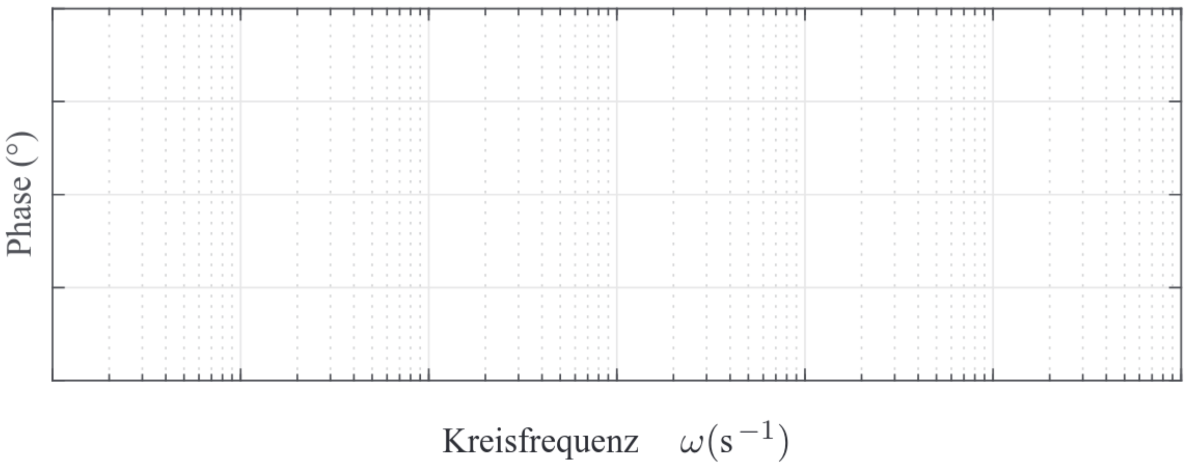


Abbildung 1: (a) Spannungsteiler, (b) RC-Tiefpassfilter, und (c) RC-Hochpassfilter.

Gegeben sind die in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen mit einer sinusförmigen Quellenspannung $\underline{\hat{u}}_1$ und den Bauteilwerten $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 = 1\,\mathrm{nF}$ und $C_2 = 10\,\mathrm{nF}$. Der Lastwiderstande R_L in Abbildung 1(b) und 1(c) wird erst in Aufgabenteil 1.3) berücksichtigt.

1.1) Bestimmen Sie für jede der in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen die Übertragungsfunktion $\underline{G}_{u1u2}(j\omega) = \frac{\underline{\hat{u}}_2(j\omega)}{\underline{\hat{u}}_1(j\omega)}$ und konstruieren Sie die zugehörigen Bode Diagramme (Amplitudengang und Phasengang) im Bereich $\omega \in [10^1 \ldots 10^7]\mathrm{s}^{-1}$ mit Hilfe der Asymptotennäherung. Verwenden Sie die dazu angehängten Diagramme in Abbildungen 7 - 9. Geben Sie in beiden Fällen die 3 dB-Grenzfrequenz an.


Magnitude (dB)
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$


Phase (°)
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$

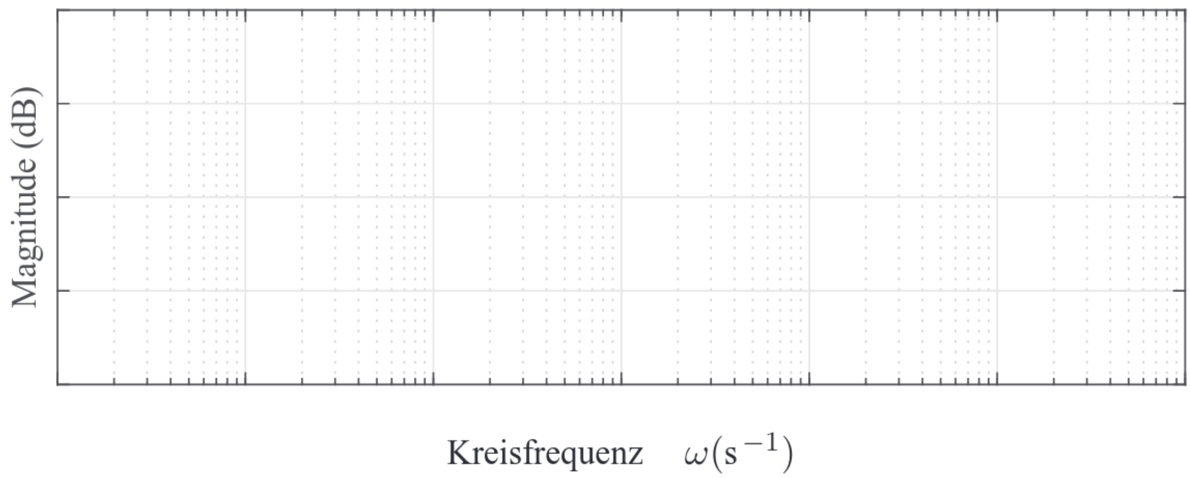
3.2 Beispielaufgabe 2

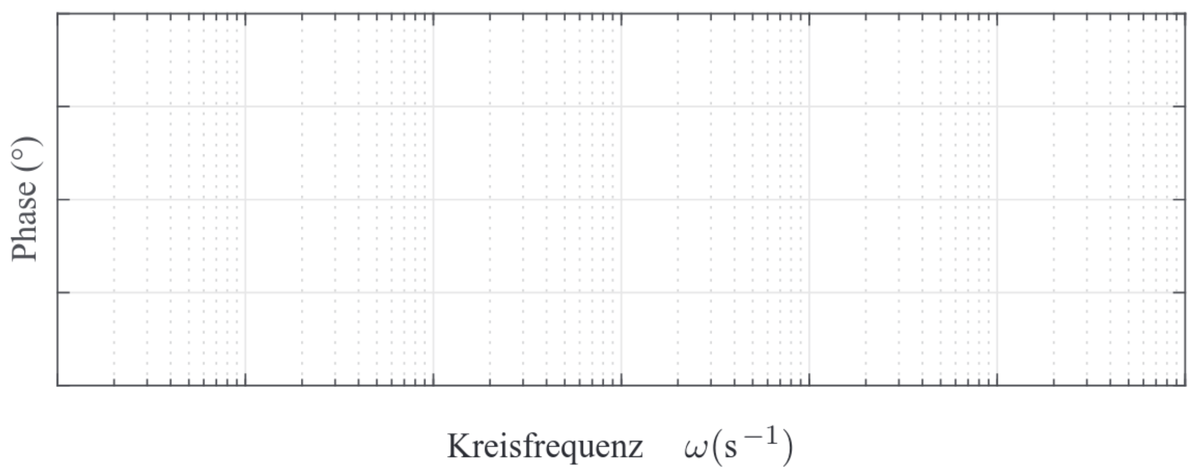
Sei die Übertragungsfunktion eines Bandpass-Filters gegeben als:

$$\mathcal{G}(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

mit

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 10^4\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_2 C_2} = 10^5\,\mathrm{s}^{-1}.$$


Magnitude (dB)
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$


Phase (°)
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$