ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

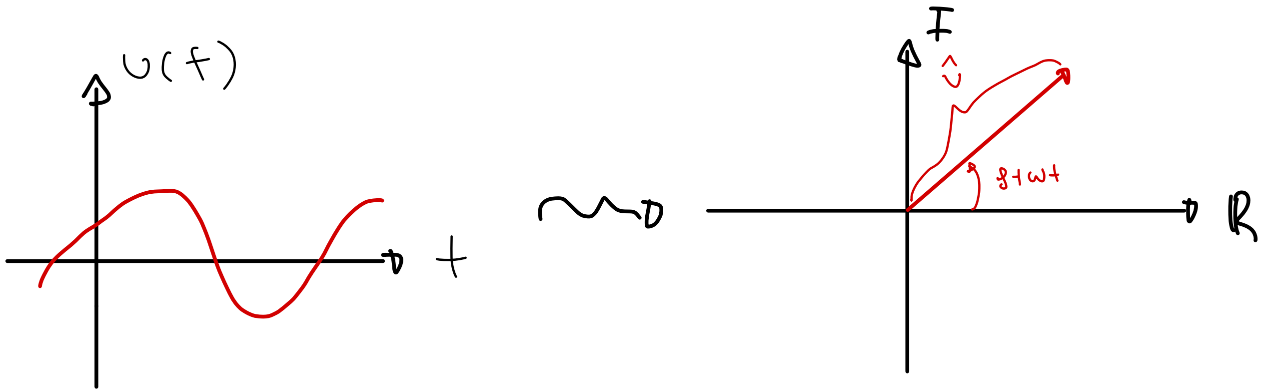
Netzwerke und Schaltungen II

Übung 2
Impedanzen & Zeigerdiagramme

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Wiederholung Zeiger

- **Wie haben ein Signal in der Form:** $u(t) = \hat{U}\ \cos(\omega t + \varphi)$
- **Man kann diesen Cosinus anschaulich als rotierenden Zeiger darstellen:**



- **Wenn wir damit rechnen wollen, können wir den rotierenden Zeiger als komplexe Zahl darstellen:** $\underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j(\omega t+\varphi)}$
- **Wir sind nachher an dem Realteil interessiert um den Zeiger zurück zu bekommen:** $u(t) = Re\{\hat{u}e^{j(\omega t+\varphi)}\}$

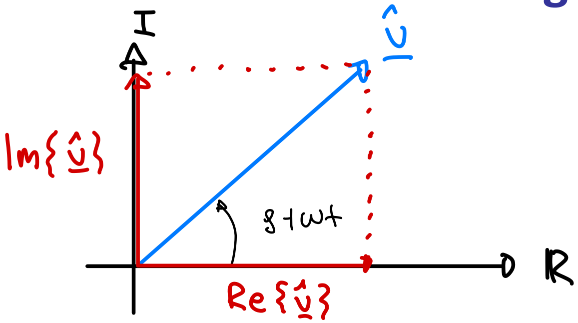
Denkt daran: $e^{\varphi j} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

$j = \sqrt{-1}$

- **Die Transformation erfolgt in zwei Schritten:**

1. Transformiere das Zeitsignal: $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

Dabei bekommt das Signal einen imaginären Teil hinzugefügt



Da: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j(\varphi+\omega t)} = \underbrace{\hat{U}\cos(\varphi+\omega t)}_{\text{ursprüngliches Signal!}} + j\cdot\hat{U}\sin(\varphi+\omega t)$

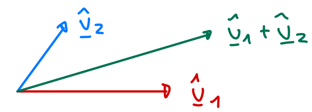
Wir sind immer nur am Realteil interessiert, da dieser unserem Signal entspricht. Der Imaginärteil haben wir selbst konstruiert und hat daher keine physikalische Bedeutung!

Wir bemerken: Mit der Zeit drehen sich alle Signale um den Ursprung. Das Verhältnis zwischen den Zeiger bleibt aber immer identisch!

Idee: Wir lassen die Zeitabhängigkeit des Zeigers weg (t=0), analysieren das Netztwerk und geben am Schluss dem Zeiger die Zeitabhängigkeit zurück.

Wir rechnen mit: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\varphi}$

Beispiele Zeitbereich - Bildbereich

Zeitbereich	Bildbereich
$u_1(t)+u_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)+\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ $= \hat{u}_1(\cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_1)) + \hat{u}_2(\cos(\omega t)\cos(\varphi_2) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_2))$ $= (\underbrace{\hat{u}_1\cos(\varphi_1)+\hat{u}_2\cos(\varphi_2)}_{A})\cos(\omega t) - (\underbrace{\hat{u}_1\sin(\varphi_1)+\hat{u}_2\sin(\varphi_2)}_{A})\sin(\omega t) = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$ $A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t) = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$ Gleichungssystem lösen. Aufwendig!	$\underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 =$ 
$u_1(t)\cdot u_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)\cdot\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ $= \dots$ kompliziert $= \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$	$\underline{\hat{u}}_1\cdot\underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_1 e^{j\varphi_1}\cdot\hat{u}_2 e^{j\varphi_2} = \hat{u}_1\cdot\hat{u}_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\Rightarrow u(t) = \mathrm{Re}\{\hat{u}_1\hat{u}_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\cdot e^{j\omega t}\}$
$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{\hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)}{\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)} = \dots$ $\dots = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$	$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_2} = \frac{\hat{u}_1 e^{j\varphi_1}}{\hat{u}_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Wiederholung: Berechnung von Netzwerken mit Zeigern

- **Transformation der Quellgrössen in den Bildbereich**
  - **Zeiger der Quellgrösse bestimmen**
    - $\hat{u}\, \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_u}) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\varphi_u}}$
    - $\hat{u}\, \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_u}) = \hat{u}\, \boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{\omega t} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{\varphi_u} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)}$
- **Analyse des Netzwerkes im Bildbereich**
  - **Knotengleichung**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{i}}_k = 0$$

  - **Maschengleichungen**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{u}}_k = 0$$

  - **Beziehung der Ströme und Spannungen an Bauelementen mit Impedanzen**
- **Rücktransformation in den Zeitbereich**
  - **Lösungszeiger (z.B. $\underline{\hat{u}}_2$)**
  - $\boldsymbol{u_2(t)} = \Re\{\underline{\hat{u}}_2\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega t}}\}$

- **Differentiation**

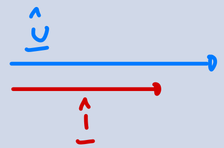
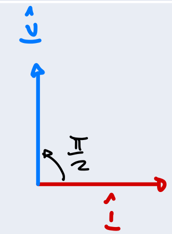
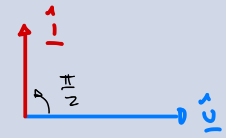
$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\hat{u}}\, e^{j\omega t}\right) = j\omega \cdot \underline{\hat{u}}\, e^{j\omega t}$$

- **Integration**

$$\int \underline{\hat{u}}\, e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{\hat{u}}\, e^{j\omega t}$$

Zeitbereich	Bildbereich
$\frac{d}{dt} \ldots$	$j\omega \cdot \ldots$
$\int \ldots dt$	$\frac{1}{j\omega} \cdot \ldots$

Wiederholung: Zeigerdiagramme der Bauelemente R, L, C

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$\boldsymbol{u_R = R \cdot i_R}$	$\underline{\hat{u}}_R = R \cdot \underline{\hat{\imath}}_R$	
Induktivität	$\boldsymbol{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_L = j\omega L \cdot \underline{\hat{\imath}}_L$	
Kondensator	$\boldsymbol{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt}$	$\underline{\hat{u}}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C$ $= -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C$	

Impedanzen I

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Impedanz
Widerstand	$\boldsymbol{u_R = R \cdot i_R}$	$\underline{\hat{u}}_R = R \cdot \underline{\hat{\imath}}_R$	$\underline{Z}_R = R$
Induktivität	$\boldsymbol{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_L = j\omega L \cdot \underline{\hat{\imath}}_L$	$\underline{Z}_L = j\omega L$
Kapazität	$\boldsymbol{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt}$	$\underline{\hat{u}}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C = -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$

Impedanz Z bezeichnet den zeitlich unabhängigen komplexen Wechselstromwiderstand

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{\imath}}$$

- **Mit Wirkwiderstand (Resistenz) R und Blindwiderstand (Reaktanz) X**

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi} \qquad [\underline{Z}] = \Omega$$

Wirkwiderstand Blindwiderstand

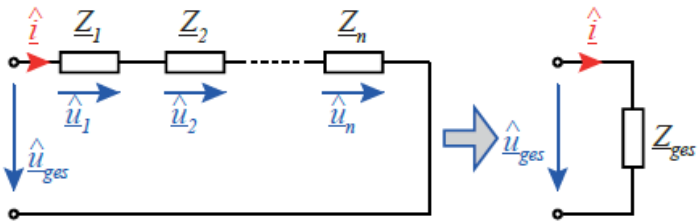
- **Mit Wirkleitwert (Konduktanz) G und Blindleitwert (Suszeptanz) B**

$$\underline{Y} = G + jB = |\underline{Y}|e^{j\psi} \qquad [\underline{Y}] = \Omega^{-1}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

- **Reihenschaltung**

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_k^n \underline{Z}_k$$

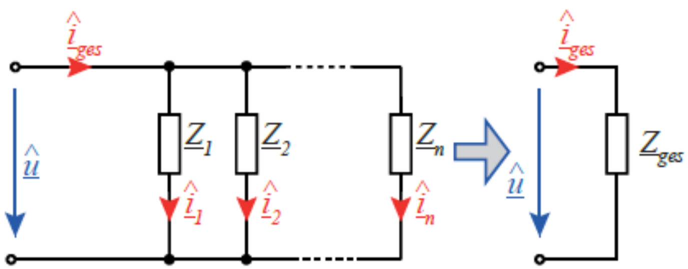


z.B. $\underline{Z}_{ges} = R + j\omega L$

- **Parallelschaltung**

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_k^n \underline{Y}_k$$

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{1}{\sum_k^n \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$



BEISPIELAUFGABEN

Aufgabe 1 Komplexe Impedanzen und Zeigerdiagramme

Gegeben sie die Schaltung aus einer Induktivität L, einem Widerstand R und einer Kapazität C wie in Abb. 1 dargestellt. Die Schaltung wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $u_0 = \hat{u}_0 \cdot cos(\omega t)$ gespeist.

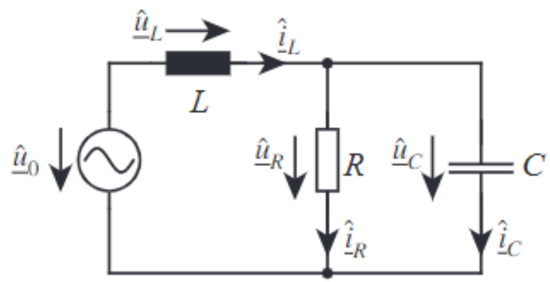


Abbildung 1: RLC Schaltung

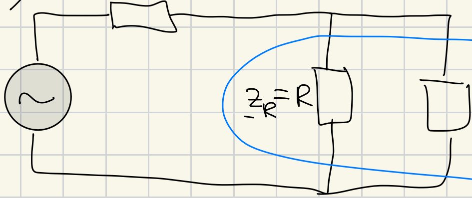
1.1) Geben Sie die Gesamtimpedanz der Schaltung an.

1.2) Bestimmen Sie den komplexen Amplitudenzeiger $\hat{\underline{i}}_C$ des Stroms durch die Kapazität C.

1.3) Skizzieren Sie die Zeitverläufe der Spannung $u_0(t)$ sowie es Stroms $i_C(t)$. Nehmen Sie dabei eine Phasenverschiebung von $-22.5°$ für den Strom an. Die Phase der Spannung sei $0°$.

1.4) Konstruieren Sie qualitativ ein Zeigerdiagramm für alle Spannungen und Ströme der Schaltung. Legen Sie dabei den Strom $\hat{\underline{i}}_R$ in die reelle Achse.

1.1.) $\underline{Z}_L = j\omega L$

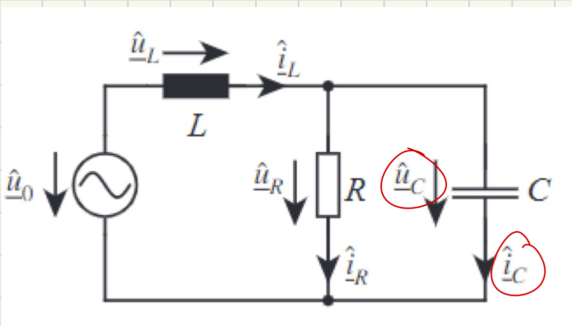


$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$= \underline{Z}_{RC} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{R}{Rj\omega C + 1}$$

$$\Rightarrow Z_{tot} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{RC} = j\omega L + \frac{R}{Rj\omega C + 1}$$

1.2.)



$$\underline{\hat{i}}_C = \frac{\hat{U}_C}{\underline{Z}_C}$$

$$\underline{\hat{U}}_C = \underline{\hat{i}}_L \cdot Z_{RC}$$

$$\underline{\hat{i}}_L = \frac{\hat{U}_0}{Z_{tot}}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{i}}_L = \frac{\hat{U}_0}{j\omega L + \frac{R}{1 + Rj\omega C}} \cdot \frac{1 + Rj\omega C}{1 + Rj\omega C} = \frac{\hat{U}_0 (1 + Rj\omega C)}{j\omega L - \omega^2 LRC + R}$$

$$\underline{\hat{i}}_C = \frac{\underline{\hat{U}}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{\hat{i}}_L \cdot \underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_C} = \underline{\hat{i}}_L \cdot \frac{\frac{R}{Rj\omega C + 1}}{\frac{1}{j\omega C}} = \underline{\hat{i}}_L \cdot \frac{Rj\omega C}{Rj\omega C + 1}$$

$$= \underline{\hat{U}}_0 \frac{1 + Rj\omega C}{j\omega L - \omega^2 LRC + R} \cdot \frac{Rj\omega C}{Rj\omega C + 1}$$

Beispiel: $R = 10\Omega$; $L = 0.2H$; $C = 0.001F$; $\omega = 100 \frac{rad}{s}$

$$\hat{i}_c = \underline{\hat{U}_0} \frac{1 + Rj\omega C}{j\omega L - \omega^2 LRC + R} \cdot \frac{Rj\omega C}{Rj\omega C + 1}$$

$$= \frac{1 + j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 0.001}{10 - (100^2 \cdot 10 \cdot 0.2 \cdot 0.001) + j \cdot 100 \cdot 0.2} \cdot \frac{j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 0.001}{1 + j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 0.001} = (0.02 - 0.06j) \cdot (0.5 + 0.5j) = 0.04 - 0.02j$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-0.02}{0.04}\right) = -0.464\,rad = -26.57°$$

$$|\hat{i}_c| = \sqrt{(0.02)^2 + (0.04)^2} \approx 0.045\,A$$

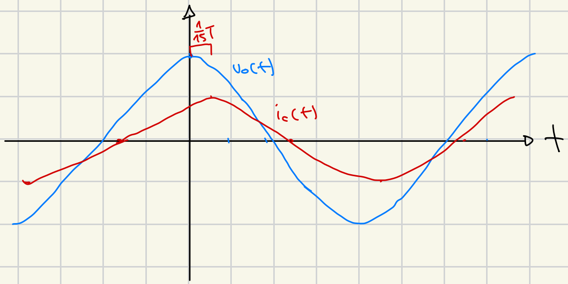
$$\Rightarrow i_c(t) = 0.045A \cdot \cos(\omega t - 26.57°)$$

1.3.)

$u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t)$ (da Phase Spannung $= 0$

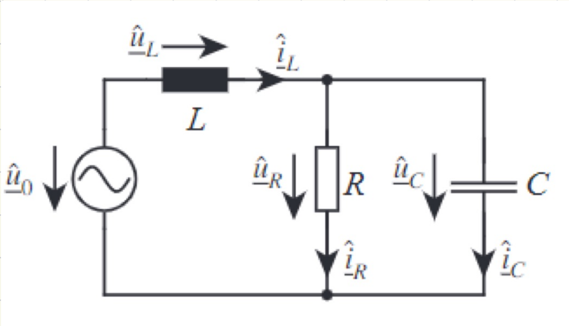
$i_c(t) = \hat{i}_c \cdot \cos(\omega t - 22.5°)$

⊖: Verschiebung nach recht
⊕: Verschiebung nach links



$$\Delta t = \frac{22.5°}{360°} T = 0.0625\,T \approx \frac{1}{15} T$$

1.4.)



1. $\hat{i}_R$ einzeichen
2. $\hat{u}_R$ parallel zu $\hat{i}_R$
3. $\hat{u}_R = \hat{u}_C$ da parallel
4. $\hat{i}_C$ 90° gegenuhrzeigersinn zu $\hat{u}_C$
5. $\hat{i}_L = \hat{i}_C + \hat{i}_R$
6. $\hat{u}_L$ 90° Gegenuhrzeigersinn zu $\hat{i}_L$