ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

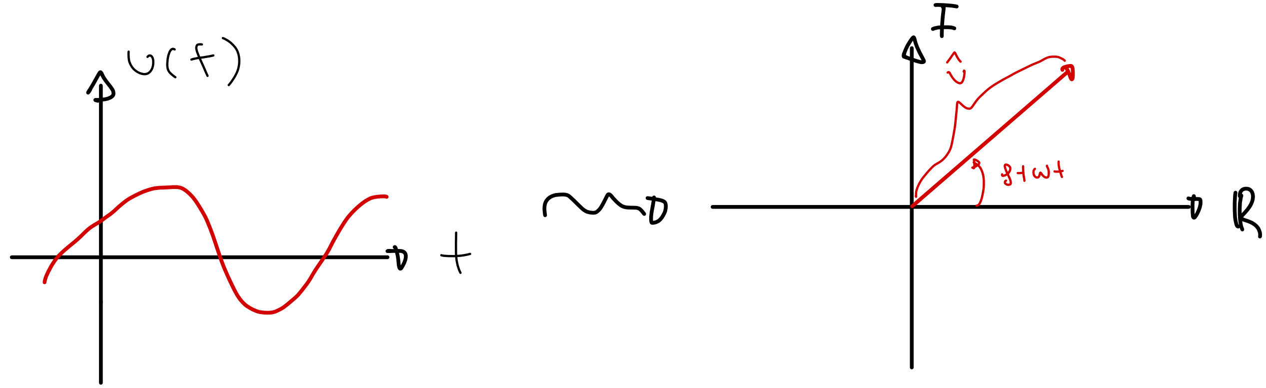
Netzwerke und Schaltungen II

Übung 2
Impedanzen & Zeigerdiagramme

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Wiederholung Zeiger

- **Wie haben ein Signal in der Form:** $u(t) = \hat{U}\ \cos(\omega t + \varphi)$
- **Man kann diesen Cosinus anschaulich als rotierenden Zeiger darstellen:**



- **Wenn wir damit rechnen wollen, können wir den rotierenden Zeiger als komplexe Zahl darstellen:** $\underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j(\omega t + \varphi)}$
- **Wir sind nachher an dem Realteil interessiert um den Zeiger zurück zu bekommen:** $u(t) = Re\{\hat{u}e^{j(\omega t + \varphi)}\}$

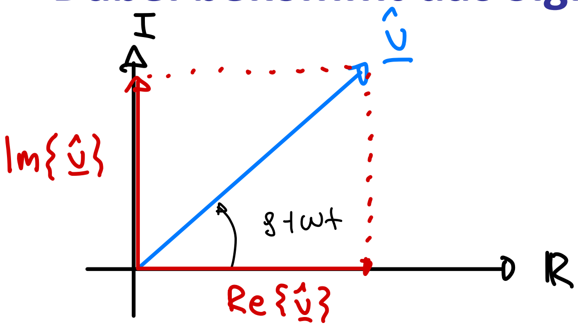
Denkt daran: $e^{\varphi j} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

$j = \sqrt{-1}$

- **Die Transformation erfolgt in zwei Schritten:**

1. Transformiere das Zeitsignal: $u(t) = \hat{U}\,\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

Dabei bekommt das Signal einen imaginären Teil hinzugefügt



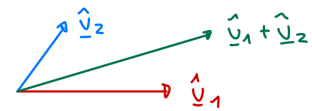
Da: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j(\varphi+\omega t)} = \underbrace{\hat{U}\cos(\varphi+\omega t)}_{\text{ursprüngliches Signal!}} + j\cdot\hat{U}\sin(\varphi+\omega t)$

Wir sind immer nur am Realteil interessiert, da dieser unserem Signal entspricht. Der Imaginärteil haben wir selbst konstruiert und hat daher keine physikalische Bedeutung!

Wir bemerken: Mit der Zeit drehen sich alle Signale um den Ursprung. Das Verhältnis zwischen den Zeiger bleibt aber immer identisch!

Idee: Wir lassen die Zeitabhängigkeit des Zeigers weg (t=0), analysieren das Netztwerk und geben am Schluss dem Zeiger die Zeitabhängigkeit zurück.

Wir rechnen mit: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\varphi}$

Zeitbereich	Bildberich
$u_1(t)+u_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)+\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ $= \hat{u}_1(\cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_1)) + \hat{u}_2(\cos(\omega t)\cos(\varphi_2) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_2))$ $= \underbrace{(\hat{u}_1\cos(\varphi_1)+\hat{u}_2\cos(\varphi_2))}_{A}\cos(\omega t) - \underbrace{(\hat{u}_1\sin(\varphi_1)+\hat{u}_2\sin(\varphi_2))}_{A}\sin(\omega t) = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$ $A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t) = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$ Gleichungssystem lösen. Aufwendig!	$\underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 =$ 
$u_1(t)\cdot u_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)\cdot\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ $= \ldots$ kompliziert $= \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$	$\underline{\hat{u}}_1\cdot\underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_1 e^{j\varphi_1}\cdot\hat{u}_2 e^{j\varphi_2} = \hat{u}_1\cdot\hat{u}_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\Rightarrow u(t) = \mathrm{Re}\{\hat{u}_1\hat{u}_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\cdot e^{j\omega t}\}$
$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{\hat{u}_1\cos(\omega t+\varphi_1)}{\hat{u}_2\cos(\omega t+\varphi_2)} = \ldots$ $\ldots = \hat{u}_R\cos(\omega t+\varphi_R)$	$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_2} = \frac{\hat{u}_1 e^{j\varphi_1}}{\hat{u}_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Wiederholung: Berechnung von Netzwerken mit Zeigern

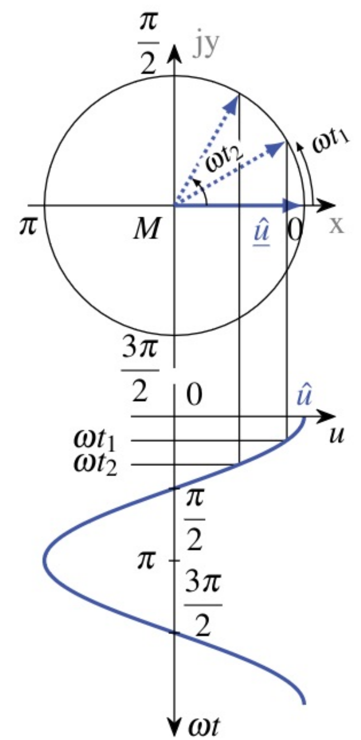
- **Transformation der Quellgrössen in den Bildbereich**
  - **Zeiger der Quellgrösse bestimmen**
    - $\hat{u}\, cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, e^{j\varphi_u}$
    - $\hat{u}\, sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\, cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, e^{j\left(\varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)}$
- **Analyse des Netzwerkes im Bildbereich**
  - **Knotengleichung**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{i}}_k = 0$$

  - **Maschengleichungen**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{u}}_k = 0$$

  - **Beziehung der Ströme und Spannungen an Bauelementen mit Impedanzen**
- **Rücktransformation in den Zeitbereich**
  - **Lösungszeiger (z.B. $\underline{\hat{u}}_2$)**
  - $u_2(t) = \Re\{\underline{\hat{u}}_2\, e^{j\omega t}\}$



- **Differentiation**

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\hat{u}}\,e^{j\omega t}\right) = j\omega \cdot \underline{\hat{u}}\,e^{j\omega t}$$

- **Integration**

$$\int \underline{\hat{u}}\,e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{\hat{u}}\,e^{j\omega t}$$

Zeitbereich	Bildbereich
$\frac{d}{dt} \dots$	
$\int \dots dt$	

Wiederholung: Zeigerdiagramme der Bauelemente R, L, C

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$u_R = R \cdot i_R$		
Induktivität	$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$		
Kondensator	$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$		

Impedanzen I

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Impedanz
Widerstand	$u_R = R \cdot i_R$		
Induktivität	$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$		
Kapazität	$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt$		

Impedanz Z bezeichnet den zeitlich unabhängigen komplexen Wechselstromwiderstand

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{\imath}}$$

Impedanzen II

- **Mit Wirkwiderstand (Resistenz) R und Blindwiderstand (Reaktanz) X**

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi} \qquad [\underline{Z}] = \Omega$$

Wirkwiderstand Blindwiderstand

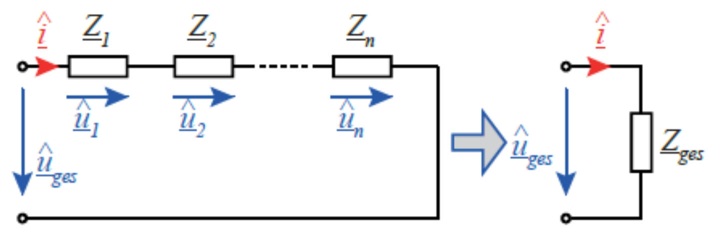
- **Mit Wirkleitwert (Konduktanz) G und Blindleitwert (Suszeptanz) B**

$$\underline{Y} = G + jB = |\underline{Y}|e^{j\psi} \qquad [\underline{Y}] = \Omega^{-1}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

- **Reihenschaltung**

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_k^n \underline{Z}_k$$

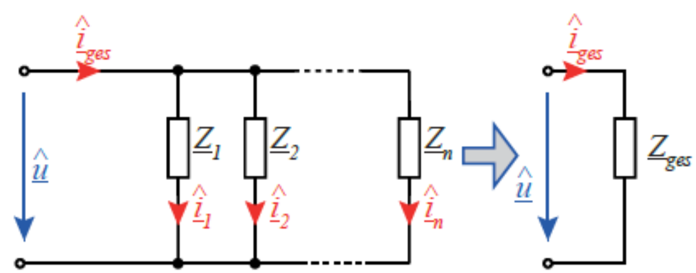


z.B. $\underline{Z}_{ges} = R + j\omega L$

- **Parallelschaltung**

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_k^n \underline{Y}_k$$

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{1}{\sum_k^n \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$



BEISPIELAUFGABEN

Aufgabe 1 Komplexe Impedanzen und Zeigerdiagramme

Gegeben sie die Schaltung aus einer Induktivität L, einem Widerstand R und einer Kapazität C wie in Abb. 1 dargestellt. Die Schaltung wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $u_0 = \hat{u}_0 \cdot cos(\omega t)$ gespeist.

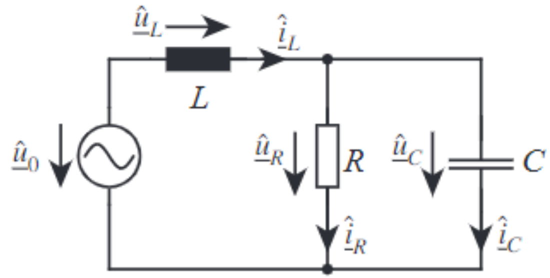


Abbildung 1: RLC Schaltung

1.1) Geben Sie die Gesamtimpedanz der Schaltung an.

1.2) Bestimmen Sie den komplexen Amplitudenzeiger $\underline{\hat{i}}_C$ des Stroms durch die Kapazität C.

1.3) Skizzieren Sie die Zeitverläufe der Spannung $u_0(t)$ sowie es Stroms $i_C(t)$. Nehmen Sie dabei eine Phasenverschiebung von $-22.5°$ für den Strom an. Die Phase der Spannung sei $0°$.

1.4) Konstruieren Sie qualitativ ein Zeigerdiagramm für alle Spannungen und Ströme der Schaltung. Legen Sie dabei den Strom $\underline{\hat{i}}_R$ in die reelle Achse.