

# Incentive Compatible Regression Learning

大岩秀和 (@kisa12012)

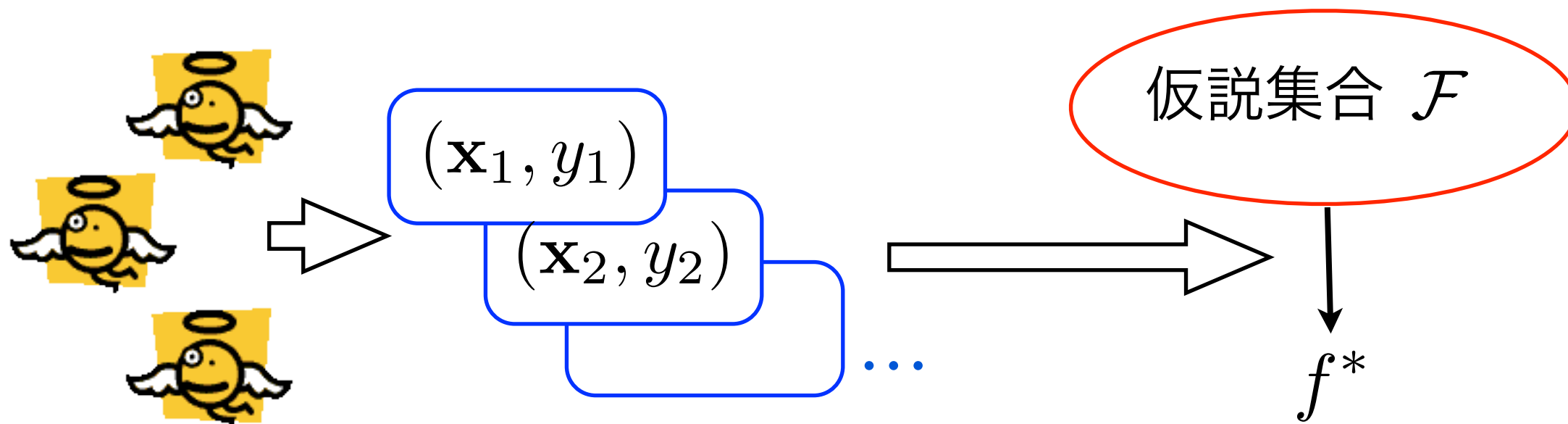
東京大学情報理工学系研究科 博士一年

# 紹介論文

- Incentive Compatible Regression Learning
  - Ofer Dekel, Felix Fischer, Ariel D. Procaccia,  
Journal of Computer and System Sciences 2010
  - "Incentive"の概念を機械学習（回帰問題）に導入
  - ゲーム理論の枠組みで回帰問題を定式化
    - 戦略的主体に**真の情報**を正直に報告させるためのメカニズムを提案, 分析

# 対象とする問題

- 回帰問題
  - $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  から  $y \in \mathcal{Y}$  を出力する関数の推定問題
  - 正解データ集合を用いて, 仮説集合  $\mathcal{F}$ の中から最適な関数  $f^* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  を求める
  - 複数の戦略的主体がデータを生成する場合が対象



# 問題 1 : 検索エンジン

- 検索エンジンは回帰問題として定式化可能
  - 入力 : (クエリ, URL)    出力 : スコア
  - クエリ毎にスコアの高い順に結果を表示
- 複数のユーザーを雇い, 教師となるデータを作成
  - 特定クエリでURLを順位付け (ランキング学習)
  - ユーザー毎に理想とする検索結果は異なる
    - ユーザーは学習結果が自身の理想の結果になるように戦略的に行動

# 問題 1 : 検索エンジン

クエリ : Jaguar

## 動物愛好家

1. 動物
2. 自動車
3. その他
- ...



## 自動車愛好家

1. 自動車
2. 動物
3. その他
- ...



## 教師データ

1. 動物
2. 自動車
3. その他
- ...

1. 自動車
2. 動物
3. その他
- ...

1. 自動車
2. 動物
3. その他
- ...

$f$

# 問題 1 : 検索エンジン

クエリ : Jaguar

## 動物愛好家

1. 動物
2. 自動車
3. その他
- ...



## 自動車愛好家

1. 自動車
2. 動物
3. その他
- ...



## 教師データ

1. 動物
2. その他
- ...
50. 自動車

1. 自動車
2. 動物
3. その他
- ...

動物 > 自動車となるよう、  
偽のデータを作成

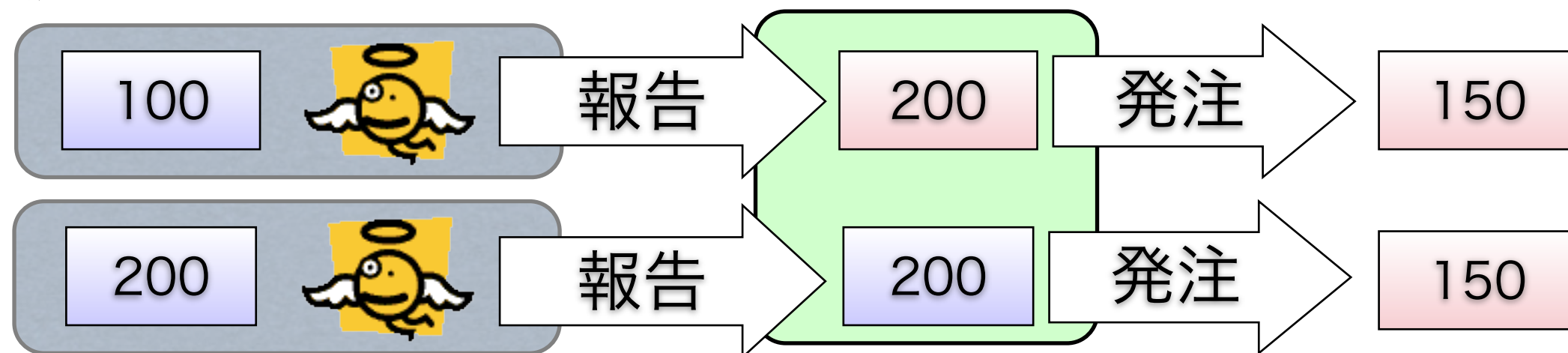
1. 動物
2. 自動車
3. その他
- ...

$f$

# 問題2：商品割り当て

- ウェアハウスの在庫商品の割り当て最適化 (Zaraの例[1][2])
- 過去の販売統計や各小売店の需要予測から，来期の各店舗の販売量を推定
  - 小売店は本来の需要予測よりも多い量を報告する傾向
    - 給料が販売量に依存する場合
    - 売れ筋商品の在庫が十分でない場合

需要予測



# 目次


- Incentive Compatible Regression Learning
  - メカニズムデザイン
  - 回帰問題のゲーム理論の枠組みでのモデル化
- Case1: Degenerate distribution
- Case2: Uniform distribution
  - Without Money
  - With Money
- 結論

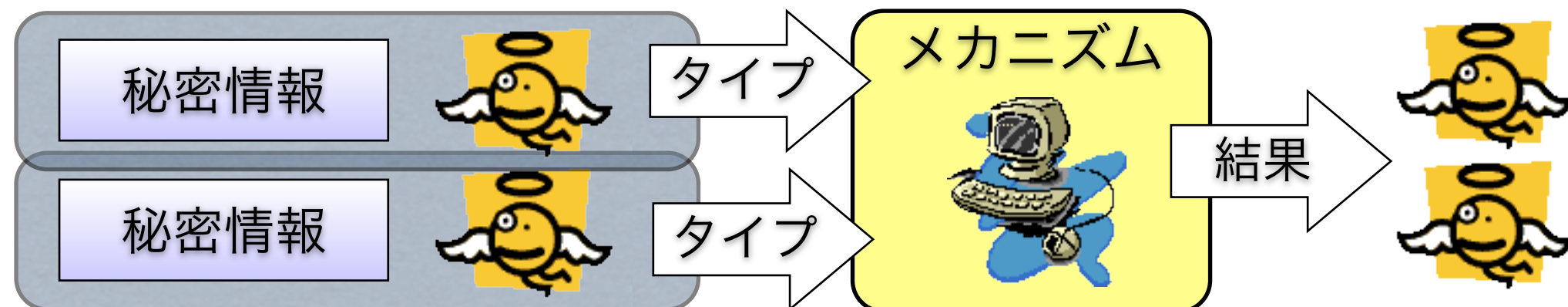


# 目次

- Incentive Compatible Regression Learning
  - メカニズムデザイン
  - 回帰問題のゲーム理論の枠組みでのモデル化
- Case1: Degenerate distribution
- Case2: Uniform distribution
  - Without Money
  - With Money
- 結論

# メカニズムデザイン

- 経済学, 特にゲーム理論の学術領域
  - オークション理論を中心に研究が進んでいる
- 戦略的主体を導入 
  - 各戦略的主体は自身のみが知る情報を持つ
    - 他の主体と設計者には, その情報は未知 (秘密情報)
  - 各主体は秘密情報とメカニズムを基にタイプを申告
  - メカニズムは申告されたタイプを基に結果を算出



# 補足事項

- 今回は、直接顕示メカニズムのみが対象
  - タイプ表明は一度のみ
  - 顕示理論により正当化
- タイプに関して、メカニズムはいかなる事前情報も持たない
  - 分布すら分らない

- $\alpha$ -efficient : 最適性を測る指標

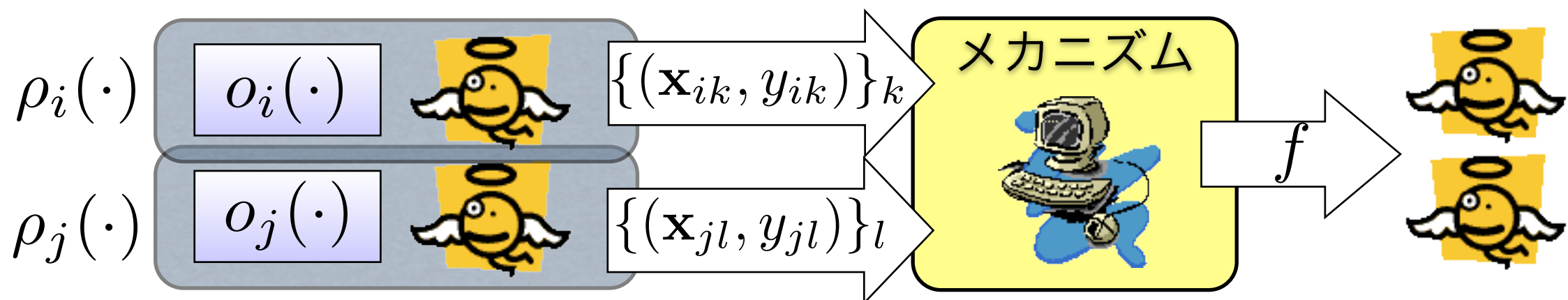
$$\alpha \sum_{i \in N} v_i(f(\theta), \theta_i) \geq \max_{a \in A} \sum_{i \in N} v_i(a, \theta_i)$$

- $\varepsilon$ -(group) strategyproof : IC を測る指標



$$v_i(f(\hat{\theta}), \theta_i) - p_i(\hat{\theta}) \leq v_i(f(\theta), \theta_i) - p_i(\theta) + \epsilon$$

# 回帰モデルの場合

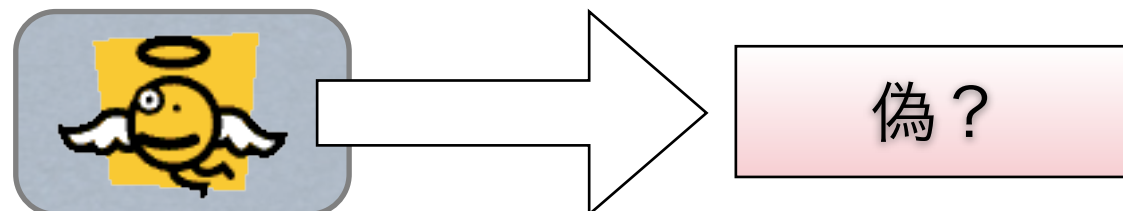
- 各主体は個別の情報を持つ
  - 確率分布  $\rho_i(\cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}_+$  と評価関数  $o_i(\cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$
  - 確率分布は公知
- 各主体は、自身の損失を最小化するようにデータを構築
- メカニズムは教師データを基に回帰モデルを学習
- 評価には損失関数を用いる
  - $\ell(\cdot, \cdot) : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  Ex:  $\ell(f(\mathbf{x}), o_i(\mathbf{x})) = |f(\mathbf{x}) - o_i(\mathbf{x})|$

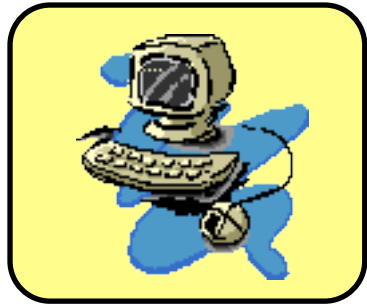


# 利益相反問題

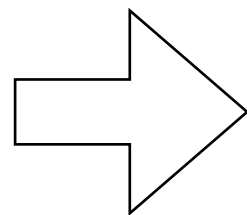
各主体の目標 	メカニズムの目標 
自身の損失関数の最小化 $R_i(f) = E_{\mathbf{x} \sim \rho_i}[\ell(f(\mathbf{x}), o_i(\mathbf{x}))]$	全域的な損失関数の最小化 $R_N(f) = E_i[R_i(f)]$

- 各主体は,  $R_i(f)$  を最小化するようにデータを構築
  - 評価関数に基づく真の正解よりも偽のデータを申告する方が  $R_i(f)$  が小さくなる場合, 偽のデータを申告
  - 偽のデータは  $R_N(f)$ を増やす可能性





メカニズムは各主体から与えられたデータ  
を用いて  $f$  を出力するルール設定



$O_i(\cdot)$  に従ったデータ生成は、  
各主体にとって最適？

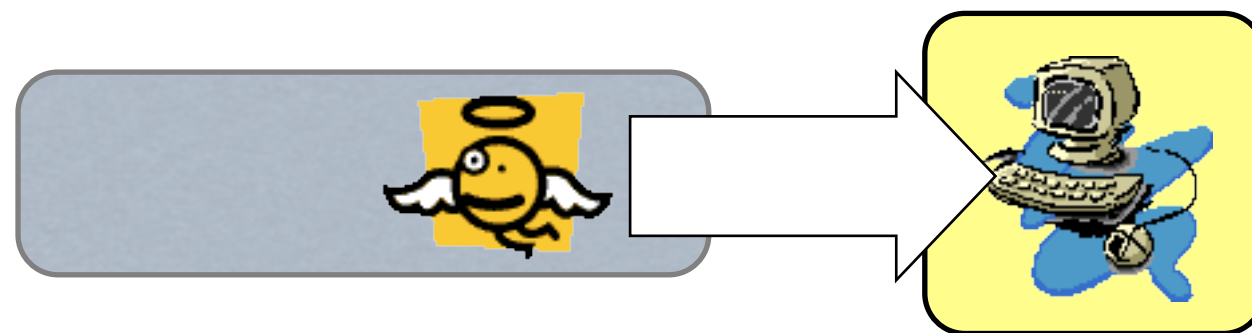
でなければ、この主体は偽データを生成する

---

ただし、各主体にとって真の情報を表明することが  
最適だけではメカニズムとして不適

# Dictatorship

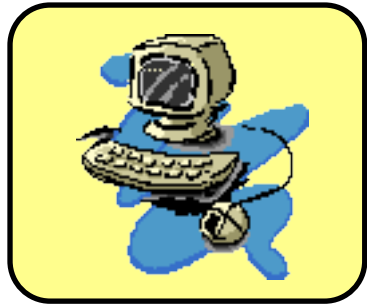
- メカニズムは戦略的主体の内一人を選び、その主体の生成するデータのみを用いて最適化、他の主体のデータは考慮しない
- 戦略的主体は偽データを生成するインセンティブはなく、正直に情報を掲示
- ただし、全体最適な関数を得られる保証は無い



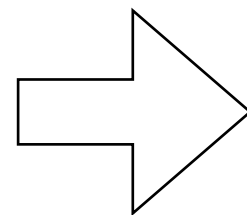
選ばれた主体は、掲示するデータを自身の損失関数の不偏推定量とするため、真の情報を掲示するのが最適



選択されない主体は、いかなるデータを掲示してもメカニズムに考慮されず、偽データを作る意味が無い

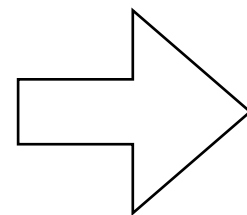


メカニズムは各主体から与えられたデータ  
を用いて  $f$  を出力するルール設定



$O_i(\cdot)$  に従ったデータ生成は、  
各主体にとって最適？

でなければ、この主体は偽データを生成する



データ生成が適切ならば、  
学習されるモデルは最適？

でなければ、出力されるモデルは不適切

---

これらの条件を満たすようにメカニズムを設定したい



# 本研究の目標

- 以下の条件を満たすメカニズム設計が目標
  - “Strategyproof” : 各主体は正直な揭示が最適
    - これを満たす時,  $\hat{R}(f, \tilde{S})$  は  $R_N(f)$  の不偏推定量
  - “Efficient” : メカニズムの導出する解が最適解
- 有限個のデータで近似 (Empirical Risk Minimization)
  - 各主体の効用に応じた真のデータ  $S_i = \{(\mathbf{x}_{ij}, y_{ij})\}_{j=1}^m$
  - チルダが付く場合, 表明されたデータ  $\tilde{S}_i = \{(\mathbf{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})\}_{j=1}^m$
  - 損失関数  $\hat{R}(f, S) = \frac{1}{|S|} \sum_{(\mathbf{x}, y) \in S} \ell(f(\mathbf{x}), y)$   $S = \uplus_{i \in N} S_i$

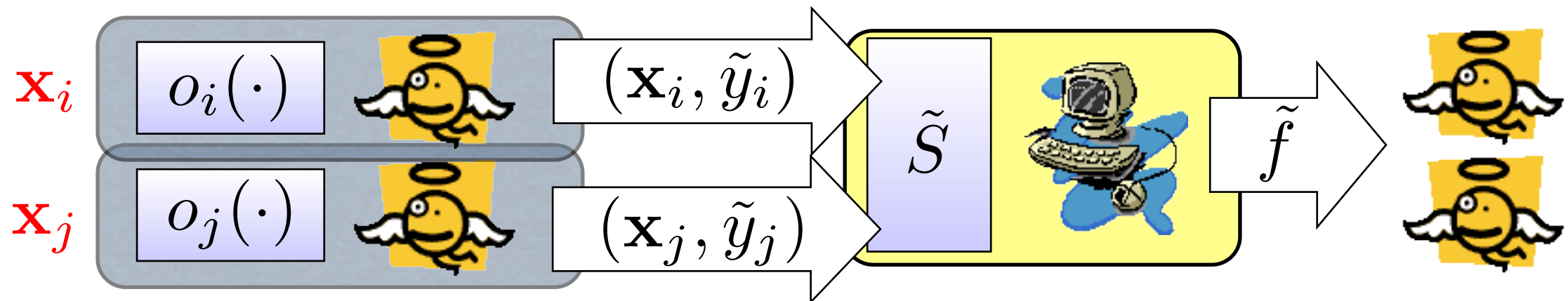
# メカニズム設計

- 確率分布・仮説空間・損失関数の定義毎にメカニズムの持つ性質が異なる
  - それぞれ場合分けして解析を行う
- 下記の要素も考慮
  - 共謀（複数の主体が同時に偽のデータを作成）
  - 損失移転（他の主体への影響を，自身の損失に内部化）

# 目次

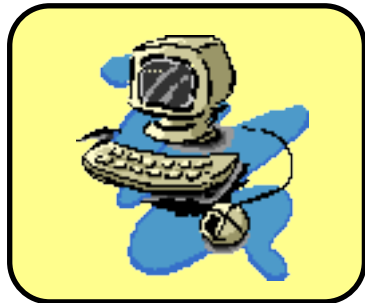
- Incentive Compatible Regression Learning
  - メカニズムデザイン
  - 回帰問題のゲーム理論の枠組みでのモデル化
- Case1: Degenerate distribution
- Case2: Uniform distribution
  - Without Money
  - With Money
- 結論

# Degenerate distribution



- 各主体が扱う入力データは 1 種類のみ
- 応用例
  - ウェアハウスの在庫管理
  - タスク割当
- 損失関数の形状に応じて、メカニズムの性質も変化
  - 本研究は  $\ell(\alpha, \beta) = \mu(|\alpha - \beta|)$  の形の損失関数に限る

# 目標の整理



メカニズムは  $\tilde{S}$  から  $\tilde{f}$  を出力するルール設定

Strategyproof

$O_i(\cdot)$



偽のラベルを表明しても  
 $\hat{R}_i(\tilde{f})$  を小さく出来ないか？

Efficient



メカニズムから得られる解  
は,  $\hat{R}(\tilde{f}, S)$  を最小化するか？

これらの条件を満たすようにメカニズムを設定したい

# Absolute Lossの場合

- Absolute Loss :  $\ell(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$
- 仮説集合  $\mathcal{F}$  は凸集合

Strategyproof / Efficientなメカニズムが存在

- Group Strategyproofにもなる
- 複数の主体が共謀して偽のラベルを与えても、一人以上が利益を得る場合、少なくとも一人は損をする

# ERMメカニズム

- 1. 損失の最小値を算出

- $r = \min_{f \in F} \hat{R}(f, \tilde{S})$

- 2. タイブレーク法

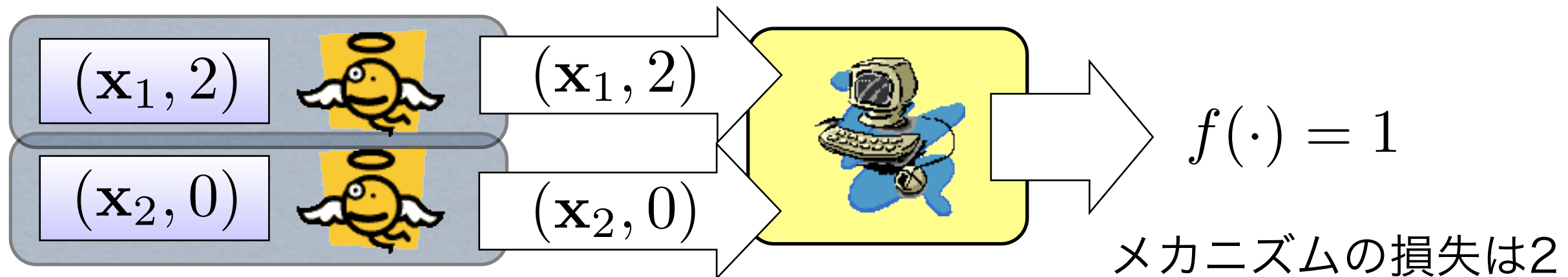
- $\tilde{f} = \operatorname{argmin}_{f \in F: \hat{R}(f, S)=r} \|f\| \quad \text{s.t.} \quad \|f\|^2 = \int f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

**Theorem** ERMメカニズムは損失関数がAbsolute Lossの時,  
Group Strategyproof かつ Efficient

- Group StrategyproofならばEfficientであることは明らか

# 一般の凸損失関数の場合

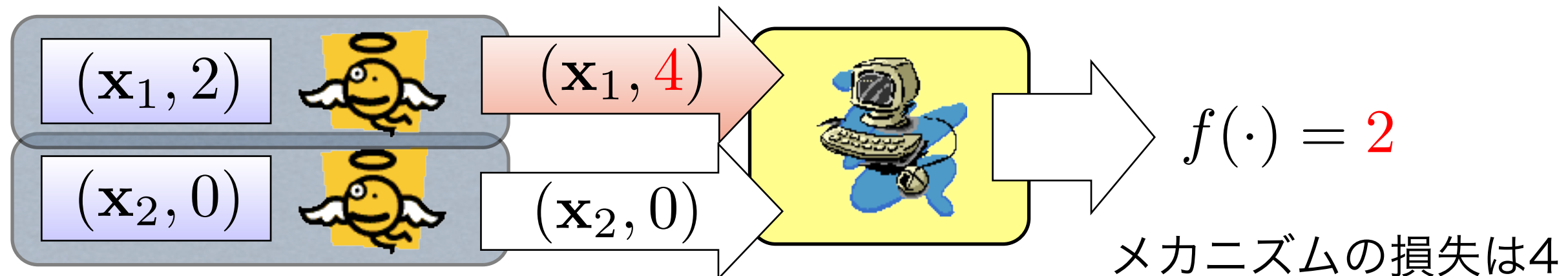
- ERMメカニズムはStrategyproofとならない
  - 損失関数：  $\ell(\alpha, \beta) = \mu(|\alpha - \beta|)$
- Strategyproofにならない例
  - 損失関数：  $\ell(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|_2^2$
  - 仮説空間：定数値関数  $f(\cdot) = c$





# 一般の凸損失関数の場合

- ERMメカニズムはStrategyproofとならない
  - 損失関数：  $\ell(\alpha, \beta) = \mu(|\alpha - \beta|)$
- Strategyproofにならない例
  - 損失関数：  $\ell(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|_2^2$
  - 仮説空間：定数値関数  $f(\cdot) = c$



# 凸損失関数の場合

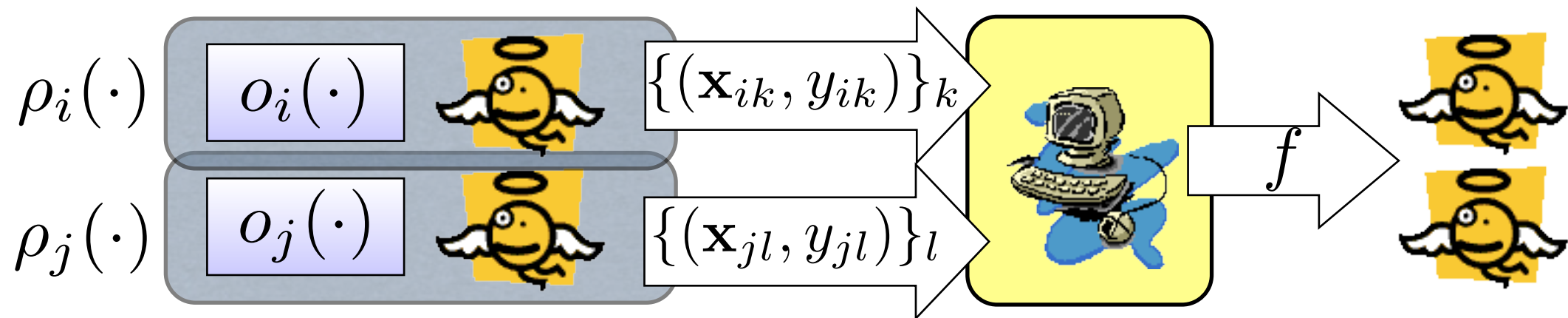
- 損失関数の制約
  - $\mu(\cdot)$  が単調増加かつ厳密に凸, 勾配上限無し
- 仮説空間の制約
  - $\mathcal{F}$  内の仮説が二つ以上
  - $\{\langle f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_n) \rangle : f \in F\} \neq \{f(\mathbf{x}_1) : f \in F\} \times \dots \times \{f(\mathbf{x}_n) : f \in F\}$

**Theorem** 上記の制約が満たされる時, ERMメカニズムは Strategyproofにならない  $o_i(\cdot)$  が必ず存在する

# 目次

- Incentive Compatible Regression Learning
  - メカニズムデザイン
  - 回帰問題のゲーム理論の枠組みでのモデル化
- Case1: Degenerate distribution
- Case2: Uniform distribution
  - Without Money
  - With Money
- 結論

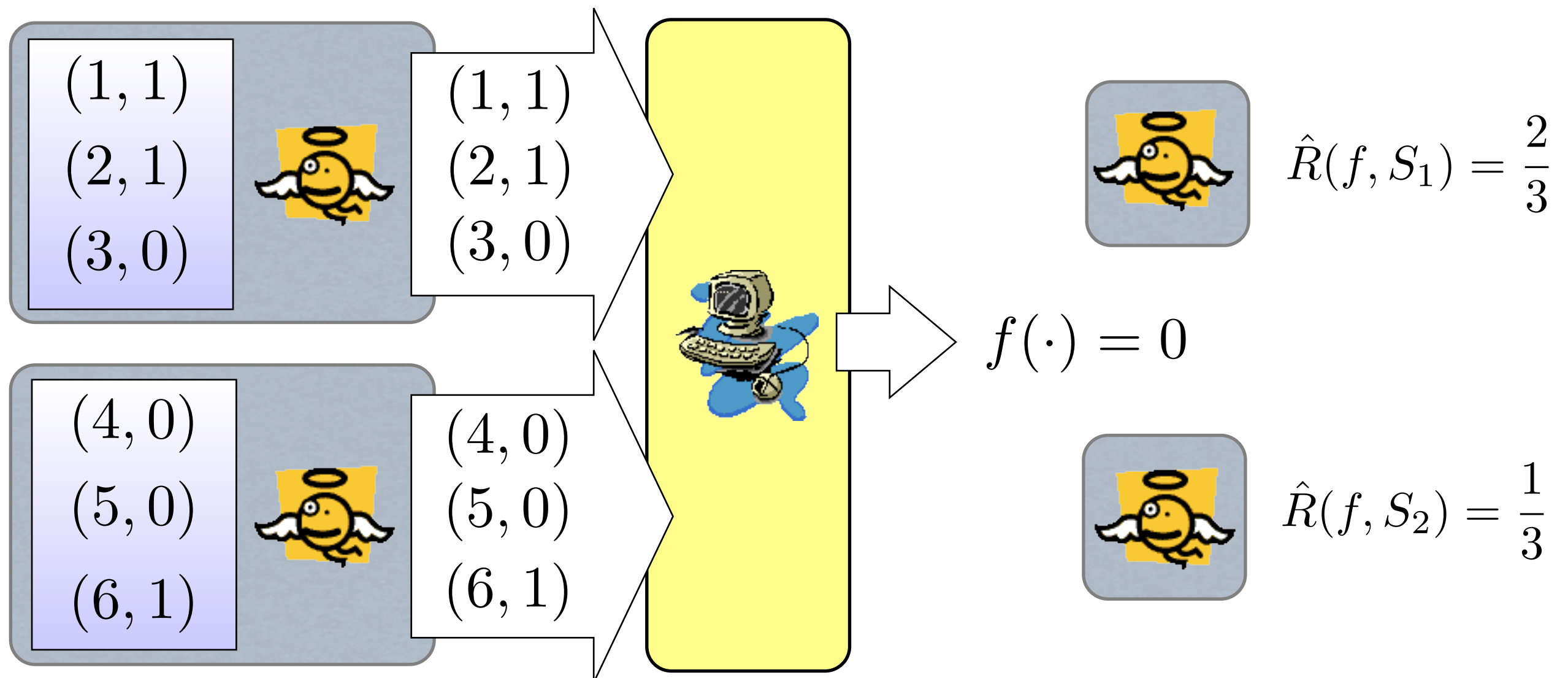
# Uniform distribution



- 確率分布  $\rho_i(\cdot)$  は一様分布
  - 主体毎に，異なる一様分布の割り当て
  - 有限種類の入力データが一様で生成
- 損失関数はAbsolute Lossに限定して議論
- 仮説空間の定義に応じ，メカニズムの性質が変化

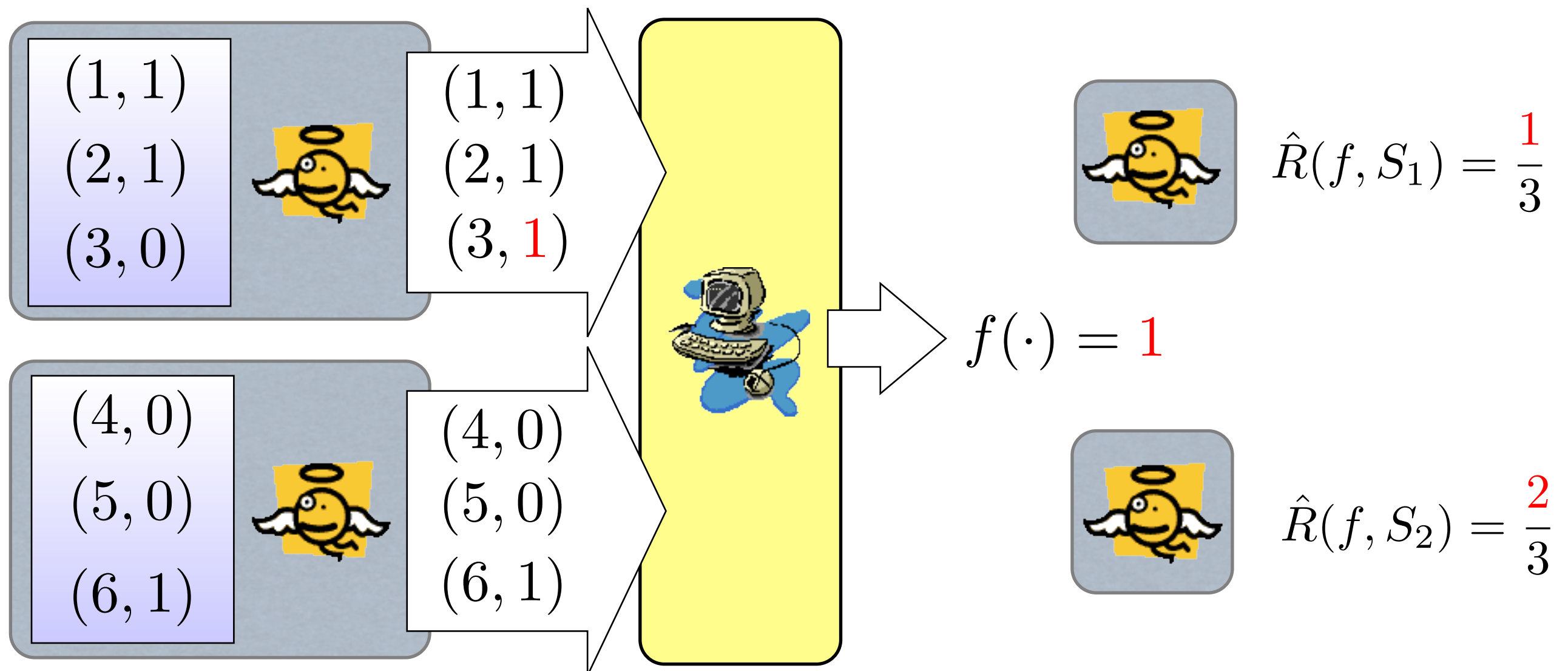
# 仮説空間：定数値関数の場合

- ERMメカニズムは，Strategyproofではない
- ERMメカニズムはUniform dist. には不適

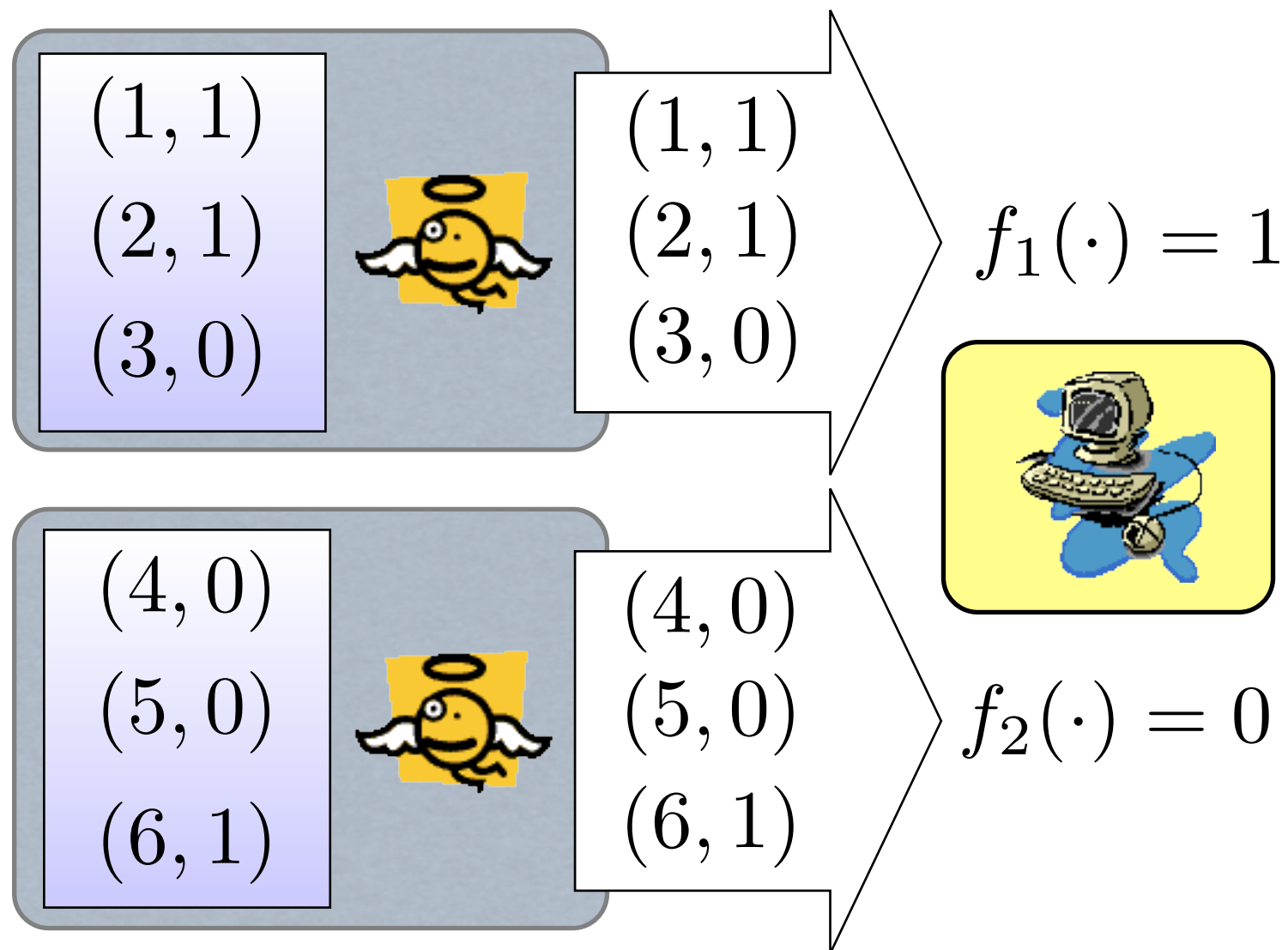


# 仮説空間：定数値関数の場合

- ERMメカニズムは，Strategyproofではない
- ERMメカニズムはUniform dist. には不適

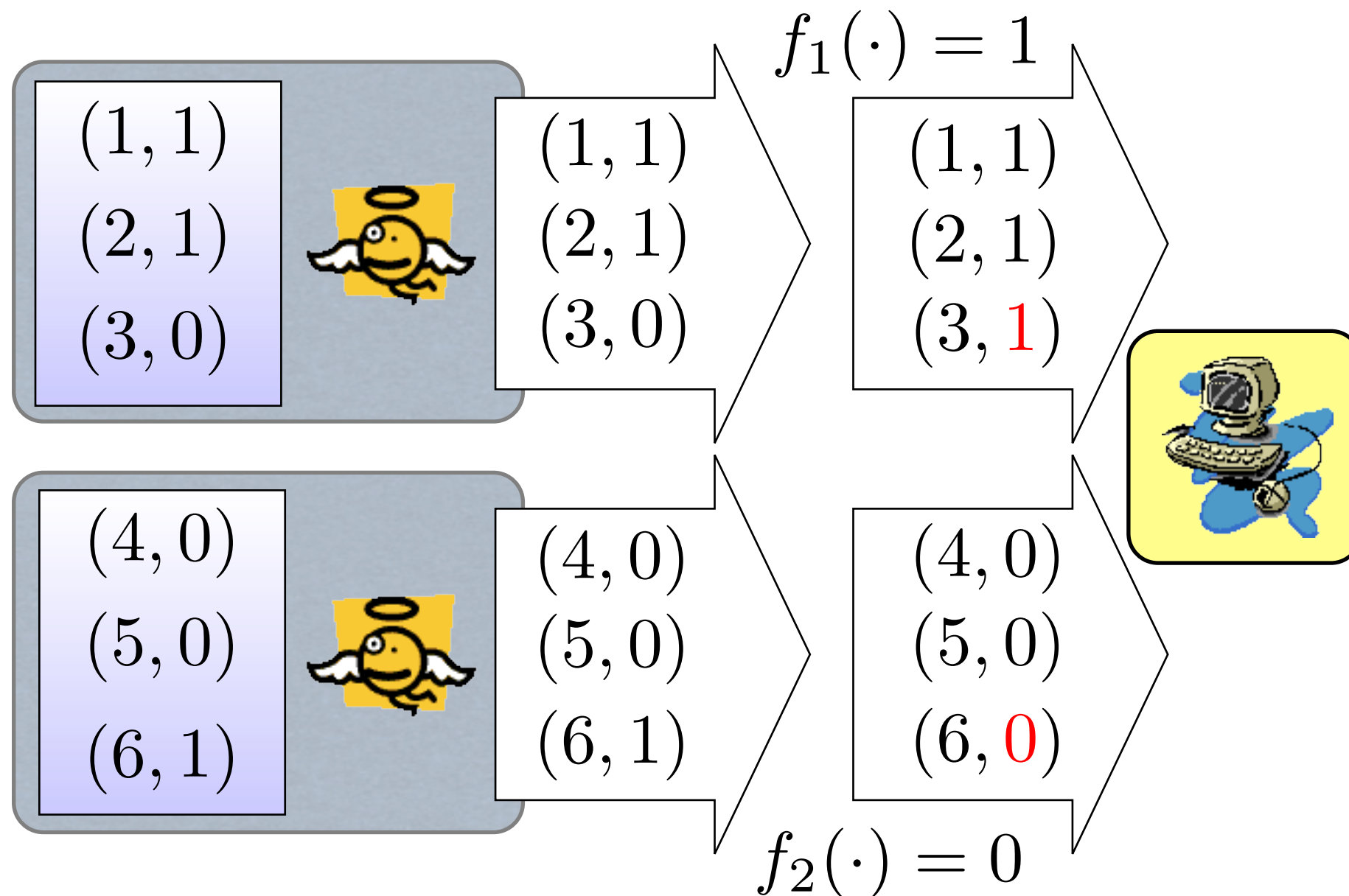


# Project-and-fitメカニズム



各主体に対して,  $f_i = \operatorname{argmin}_{f \in F} \hat{R}(f, S_i)$  を算出

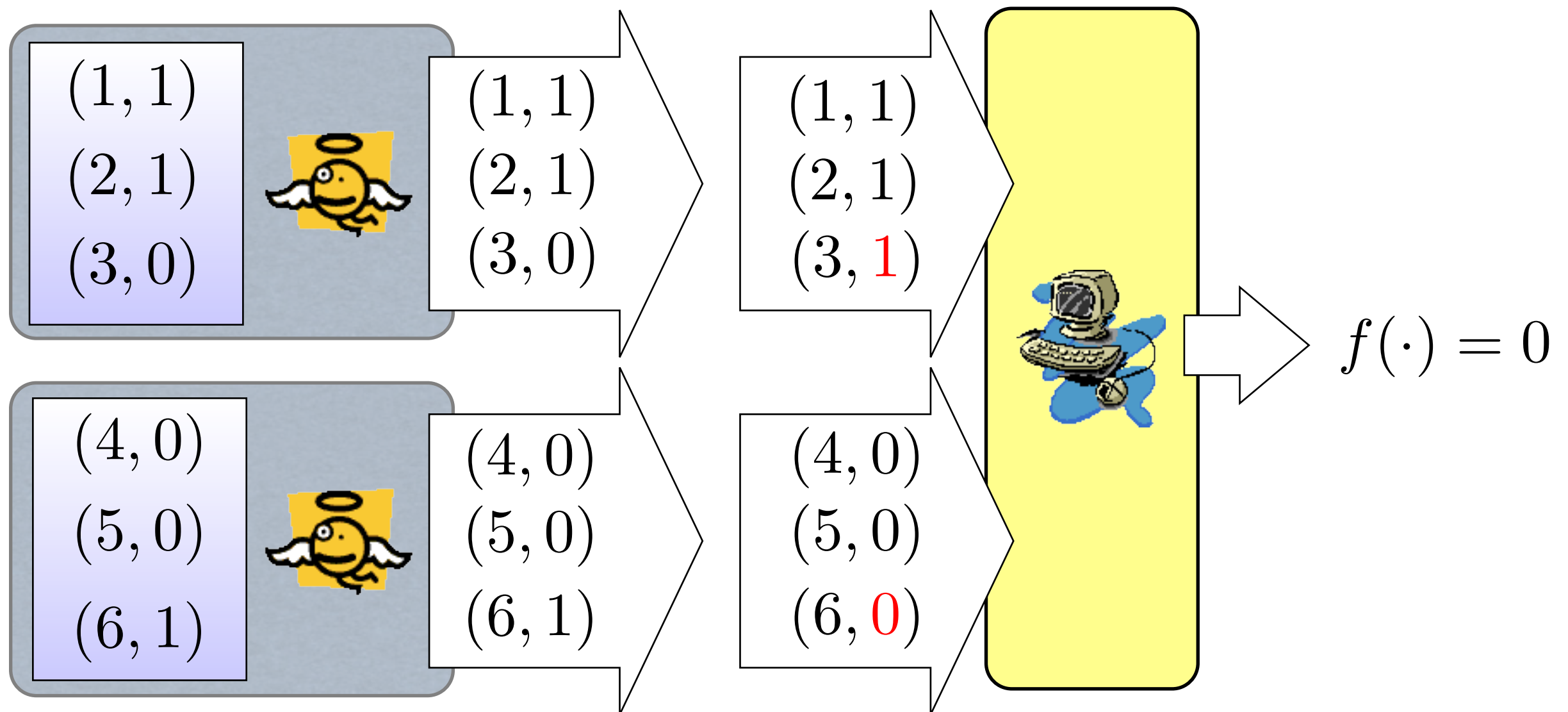
# Project-and-fitメカニズム



各主体のデータに  $f_i$  を適用し，ラベルを置き換え



# Project-and-fitメカニズム



ラベルを置き換えたデータを用いて，EMRで回帰モデルを学習

# Project-and-fitメカニズム

- 入力：仮説空間  $\mathcal{F}$  , データ  $S = \uplus_{i \in N} S_i$
- 出力：回帰関数  $f$
- メカニズム
  1. 各主体に対して,  $f_i = \operatorname{argmin}_{f \in F} \hat{R}(f, S_i)$  を算出
  2. 各主体のラベルを  $f_i$  で書き換え
  3. ラベルを置き換えたデータでERM

# Project-and-fitメカニズム 性能

- 仮説空間

- 定数関数 or 一次の斉次線形関数

$$f(\mathbf{x}) = c$$

$$f(x) = a \cdot x$$

**Theorem** Project-and-fitメカニズムはGroup Strategyproof  
[6] かつ 3-efficient

メカニズムが出力する仮説  $f$  が必ず以下を満たす時, 3-efficient

$$\hat{R}(f, S) \leq 3 \min_{f \in F} \hat{R}(f, S)$$

# その他の定理

**Theorem** 定数関数及び斉次線形関数が仮説空間の場合,  $(3 - \epsilon)$ -efficientとなるStrategyproofなメカニズムは存在しない

$(\epsilon > 0)$

**Theorem** 2次以上の斉次線形関数および一般の線形関数が仮説空間の場合, Project-and-fitメカニズムはStrategyproofではない

一般の線形関数 :  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$

一般の線形関数や2次以上の斉次線形関数が仮説空間の場合の, strategyproofかつefficientなメカニズムの存在は明らかでない

# 目次

- Incentive Compatible Regression Learning
  - メカニズムデザイン
  - 回帰問題のゲーム理論の枠組みでのモデル化
- Case1: Degenerate distribution
- Case2: Uniform distribution
  - Without Money
  - With Money
- 結論

# 損失移転が可能な場合

- VCGメカニズム [3][4][5]
- ERMメカニズムで仮説  $f$  を選択
- ただし, 各主体は  $\hat{R}(f, S_i)$  に加え  $\hat{R}(f, \tilde{S}_{-i})$  が損失に計上される (メカニズムによる損失移転)
  - 偽データ作成の際に他の主体の損失が上昇すると, 自身の損失も上昇
- 各主体の目標とメカニズムの目標が一致する

**Theorem** VCGメカニズムはいかなる損失関数に対しても Strategyproof かつ Efficient

# VCGメカニズムの問題点

- Not Group Strategyproof
  - 共謀によって偽のデータを掲示される可能性
- 損失移転に関わる問題
  - $\hat{R}(f, \tilde{S}_{-i})$  の損失を課すのは現実的には困難
    - 報酬額を調節？
    - しかし,  $\hat{R}(f, \tilde{S}_{-i})$  の値と報酬額の関係は非自明

# 結論

- Incentive Compatible Regression Learningを紹介
  - 機械学習に”Incentive”の概念を導入
  - 様々な確率分布・損失関数・仮説空間の設定の場合, それぞれ有効なメカニズムやその性質を概観
  - 本論文では, Arbitrary distributionの場合の解析もある
- ただし, 研究は未だ限定的で明らかにすべき事項は多い
  - 分類問題への拡張
  - Absolute Loss以外の損失関数への拡張



# Reference

- [1] F. Caro, J. Gallien. Inventory management of a fast-fashion retail network, Oper. Res., 2010.
- [2] F. Caro, J. Gallien, M.D. Marianda, J.C. Torralbo, J.M.C. Corras, M.M. Vazquez, J.A.R. Calamonte, J. Correa, Zara uses operations research to reengineer its global distribution process, Interfaces, 2010.
- [3] W.Vickrey, Counter speculation, auctions and competitive sealed tenders, J.Finance, 1961.
- [4] E.H. Clarke, Multipart pricing of public goods, Public Choice, 1971.
- [5] T. Groves, Incentives in teams, Econometrica, 1973.
- [6] H. Moulin, Generalized Condorcet-winners for single peaked and single-plateau preferences, Soc. Choice Welf. 1984.