Problema 3: Galaxias Enanas

a) Para estimar la velocidad de escape en estas galaxias, primero derivaremos una expresión que la describe.
Si asumimos una galaxia como una distribución esférica de masa, una masa de prueba logrará escapar del potencial gravitatorio de la galaxia si su energía cinética es al menos igual a su energía potencial:

$$K_e = \frac{1}{2} m v^2 , \qquad U_g = -\frac{GMm}{r}$$

$$|K_e| = |U_g|$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{GM\cancel{m}}{r}$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Utilizaremos esta expresión para estimar la velocidad de escape en galaxias elípticas enanas, cuya masa va entre $10^7 \sim 10^9 M_\odot$, y diámetro entre 1 - 10 kpc. Como tenemos el diámetro $D = 2r$, conviene reescribir la expresión de esta manera:

$$v_e = \sqrt{\frac{4GM}{D}}$$

```python
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches
from astropy import units as u
from astropy import constants as const
from matplotlib.ticker import (MultipleLocator, AutoMinorLocator)
from matplotlib.colors import (ListedColormap,
LinearSegmentedColormap)
from astropy.convolution import convolve, Gaussian1DKernel
from scipy.optimize import curve_fit

plt.rcParams.update({
    'text.usetex': False,
    'text.latex.preamble': r'\usepackage{amsmath}',
    'font.family': 'serif',
    'font.weight': 'normal',
    'figure.facecolor': 'lightgray',
    'mathtext.fontset': 'dejavuserif'
})

# Definimos la expresión para el cálculo de la velocidad de escape

def calculate_escape_vel(mass, diameter):
    return np.sqrt(4 * const.G * mass / diameter).to(u.km / u.s)

# Creamos linspaces para la masa y el diámetro

mass_array = np.linspace(10 ** 7, 10 ** 9, 1000) * u.M_sun
diameter_array = np.linspace(1, 10, 500) * u.kpc

# Calculamos las velocidades de escape para cada combinación de masa y
diámetro
escape_velocities = np.array([[calculate_escape_vel(mass,
diameter).value
                               for mass in mass_array] for diameter in
diameter_array])

escape_velocities
```

```
array([[ 13.1162758 ,  13.75083168,  14.35736929, ..., 131.0327124 ,
        131.09775131, 131.16275798],
       [ 12.9995691 ,  13.62847879,  14.22961952, ..., 129.8668025 ,
        129.93126271, 129.99569096],
       [ 12.88592328,  13.50933487,  14.10522026, ..., 128.73147113,
        128.79536781, 128.8592328 ],
       ...,
       [  4.15523177,   4.35625886,   4.54840977, ...,  41.51111931,
         41.53172362,  41.55231771],
       [  4.1514761 ,   4.35232149,   4.54429873, ...,  41.47359984,
         41.49418552,  41.514761  ],
```

```
       [  4.14773059,   4.34839478,   4.54019882, ...,  41.43618192,
         41.45674903,  41.47730594]])
```

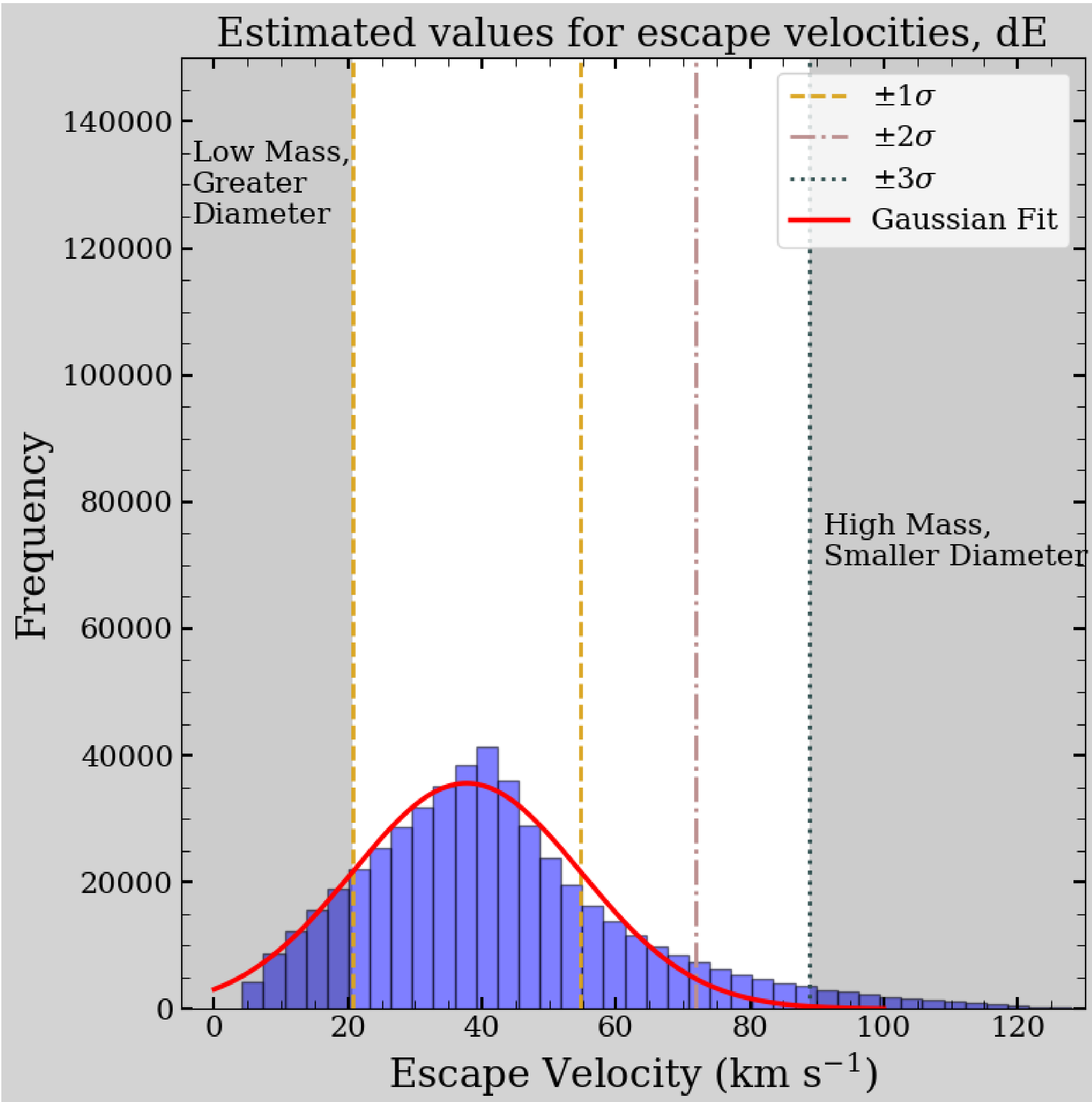
```
# Ponemos todos los valores en un solo array
escape_velocities = escape_velocities.flatten()
escape_velocities
```

```
array([13.1162758 , 13.75083168, 14.35736929, ..., 41.43618192,
       41.45674903, 41.47730594])
```

```
# Asumimos que la distribución de velocidades de escape sigue una
distribución normal,
# así que ajustamos una gaussiana a los datos

escape_data = escape_velocities

# Calculamos el histograma eligiendo 800 bins
bin_count = 40
hist, bin_edges = np.histogram(escape_data, bins=bin_count,
density=False)
bin_centers = (bin_edges[:-1] + bin_edges[1:]) / 2

# Utilizar un kernel Gaussiano para convolucionar el histograma y
suavizarlo
gaussian_kernel = Gaussian1DKernel(stddev=0.5)  # Elegimos sigma 0.5,
arbitrario pero conveniente
smoothed_hist = convolve(hist, gaussian_kernel)

# Ajustamos una Gaussiana al histograma suavizado
def gaussian(x, amplitude, mean, stddev):
    return amplitude * np.exp(-((x - mean) ** 2) / (2 * stddev ** 2))

# Calculamos el promedio ponderado y la desviación estándar para el
histograma
weighted_mean = np.sum(bin_centers * hist) / np.sum(hist)
weighted_std = np.sqrt(np.sum(hist * (bin_centers - weighted_mean) **
2) / np.sum(hist))

# Usamos estos valores como priors
initial_guess = [max(hist), weighted_mean, weighted_std]

# Hacemos el ajuste utilizando curve_fit
params, _ = curve_fit(gaussian, bin_centers, smoothed_hist,
p0=initial_guess)

fig, ax= plt.subplots(figsize=(8, 8))
ax.hist(escape_velocities, bins=40, color='blue', alpha=0.5,
edgecolor='black')


# Añadimos líneas verticales para 1, 2 y 3 sigma
```

```
sigma = params[2]
ax.axvline(params[1] + sigma, color='goldenrod', linestyle='--',
label=r'$\pm 1 \sigma$', linewidth=2)
ax.axvline(params[1] - sigma, color='goldenrod', linestyle='--',
linewidth=2)
ax.axvline(params[1] + 2*sigma, color='rosybrown', linestyle='-.',
label=r'$\pm 2 \sigma$', linewidth=2)
ax.axvline(params[1] + 3*sigma, color='darkslategray', linestyle=':',
label=r'$\pm 3 \sigma$', linewidth=2)

ax.plot(np.linspace(0, 100, 1000), gaussian(np.linspace(0, 100, 1000),
*params), color='red', label='Gaussian Fit', linewidth=2.5)


ax.set_xlim(-5, 130)
ax.set_ylim(0, 150000)

ax.set_ylabel(r'Frequency', fontsize=20)
ax.set_xlabel(r"Escape Velocity (km s$^{-1}$)", fontsize=20)
ax.set_title(r'Estimated values for escape velocities, dE',
fontsize=20)

ax.xaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5))
ax.yaxis.set_minor_locator(MultipleLocator(5000))

ax.tick_params(axis='both', labelsize=15, direction='in', right=True,
top=True,
                length=6, width=1.5, grid_color='black', grid_alpha=1,
grid_linestyle="-",
                grid_linewidth=0.5)

ax.tick_params(which='minor', length=4, color='black', direction='in',
top=True, right=True,
                grid_alpha=0.2, grid_linewidth=0.5,
grid_linestyle="-",grid_color='r')

rect = patches.Rectangle((params[1] - 3*sigma, 0),  2 *sigma, 150000,
linewidth=1, edgecolor='none', facecolor='black', alpha=0.2)
rect_1 = patches.Rectangle((params[1] + 3*sigma, 0), 3 *sigma, 150000,
linewidth=1, edgecolor='none', facecolor='black', alpha=0.2)
ax.add_patch(rect)
ax.add_patch(rect_1)

ax.text(params[1] - 2.4*sigma, 124000, 'Low Mass,\nGreater\nDiameter',
fontsize=15, color='black')
ax.text(params[1] + 6.25*sigma/2, 70000, 'High Mass,\nSmaller
Diameter', fontsize=15, color='black')


ax.grid(False, which='both')
```

```
ax.legend(fontsize=15, markerscale=1)


plt.tight_layout()
```



Observando la distribución de velocidades de escape, notamos que los valores van desde cerca de 5 km/s hasta 120 km/s. Sin embargo, podemos notar que los valores muy bajos de velocidades de escape corresponden a galaxias de baja masa y de gran diámetro, y los valores más altos de velocidades de escape corresponden a galaxias de alta masa y menor diámetro. Galaxias con estas propiedades pueden ser muy inestables, ya sea porque se disuelvan debido a la baja densidad de masa, o colapsen debido a la alta densidad de masa. En base a esto, podemos hacer una suposición educada sobre los valores que puede tomar la velocidad de escape en galaxias elípticas enanas estables. Así, obtenemos que el rango de velocidades de escape toma valores entre 20 km/s y 90 km/s.

b) De trabajos como Carraro et. al. (2001), podemos notar que en general el material eyectado de supernovas de tipo II tiene velocidades del orden de $\sim 10^3$ km/s, órdenes de magnitud por encima de las velocidades de escape de galaxias elípticas enanas, por lo que es claro que el material puede escapar.

c) Para estimar la velocidad media del gas, primero asumiremos que el gas está principalmente compuesto por hidrógeno ionizado. La velocidad de las partículas de un gas está dada por la expresión:

$$v_g = \sqrt{\frac{3kT}{m_H}}$$

Tomando $T = 10^6$ K, $m_H = 1{,}674 \cdot 10^{-27}$ kg, y $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ m^2 kg s^{-2} K^{-1}, tenemos:

$$v_g = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{m}^2\ \cancel{\mathrm{kg}}\ \mathrm{s}^{-2}\ \cancel{\mathrm{K}^{-1}} \cdot 10^{6}\ \cancel{\mathrm{K}}}{1{,}674 \cdot 10^{-27}\ \cancel{\mathrm{kg}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4{,}14}{1{,}674} \cdot 10^{10}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\cong 1{,}5 \cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cong \underline{1{,}5 \cdot 10^{2}\ \mathrm{Km/s}}$$

La velocidad del gas es un orden de magnitud mayor que la velocidad de escape, por lo tanto el gas caliente puede escapar.

d) Sabemos que la Via láctea tiene una masa del orden de $\sim 10^{12} M_\odot$, con un diámetro de ~ 30 Kpc. Luego, la velocidad de escape de la vía láctea está dada por:

$$v_{e\,MW} = \sqrt{\frac{4GM}{D}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{12} M_\odot}{30\,\text{Kpc}}\, G}$$

$$\simeq \underline{757{,}2} \ \text{Km/s}$$

La velocidad de escape de la vía láctea es mayor que la velocidad del gas, por lo que este no puede escapar de la galaxia.

e) Dado que el gas no es capaz de mantenerse dentro de las galaxias dE, esta falta de gas hace que exista muy baja probabilidad de generación de eventos de formación estelar. La Vía láctea al ser tan masiva, evita que el gas se escape y permite nuevos episodios de formación estelar.

Referencias

- Carraro, G., Chiosi, C., Girardi, L., & Lia, C. (2001). Dwarf elliptical galaxies: structure, star formation and colour-magnitude diagrams. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 327(1), 69-79. https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04633.x.