Problema 2: Perfil de Sérsic

a) Del enunciado, sabemos que el perfil de brillo superficial de Sérsic se define como:

$$I(r) = I_e \exp\left\{-b_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n} - 1\right]\right\}$$

Para obtener la luminosidad de un objeto con este perfil, tenemos que integrar el perfil sobre un área circular:

$$L = \iint_S I(r)\, dS$$

Considerando simetría circular, tenemos que:

$$L = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} I(r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\, I_e \cdot \exp\left\{-b_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n} - 1\right]\right\} dr$$

Hacemos el cambio de variable:

$$u = (r/r_e)^{1/n}$$

$$u|_0 = 0$$

$$u|^{\infty} \to \infty \quad \text{para el rango típico de índices de Sérsic } (n \ll r)$$

$$du = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_e}\right)^{(1/n)-1} \frac{1}{r_e}\, dr = \frac{1}{n} u^{1-n} \frac{1}{r_e}\, dr$$

$$\rightarrow r = u^n r_e$$

$$\rightarrow dr = n r_e u^{n-1}\, du$$

Reemplazando en la integral:

$$\Rightarrow \mathcal{L} = 2\pi I_e \int_0^\infty (u^n r_e)\, e^{-b_n(u-1)} (n r_e u^{n-1})\, du$$

$$= 2\pi I_e \int_0^\infty u^{2n-1} r_e^2 n\, e^{-b_n u} e^{b_n}\, du$$

$$= 2\pi I_e r_e^2 n e^{b_n} \int_0^\infty u^{2n-1} e^{-b_n u}\, du$$

Hacemos otro cambio de variable:

$$t = b_n u$$

$$t|_0 = 0$$

$$t|^\infty \rightarrow \infty$$

$$dt = b_n\, du$$

$$\rightarrow u = b_n^{-1} t$$

$$\rightarrow du = b_n^{-1} dt$$

Reemplazando,

$$\Rightarrow \mathcal{L} = 2\pi I_e r_e^2 n e^{b_n} \int_0^\infty (b_n^{-1} t)^{2n-1} e^{-t} b_n^{-1}\, dt$$

$$= 2\pi I_e r_e^2 n e^{b_n} \int_0^\infty \left(b_n^{1-2n} \cdot b_n^{-1}\right) t^{2n-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{2\pi n e^{b_n}}{(b_n)^{2n}} I_e r_e^2 \underbrace{\int_0^\infty t^{2n-1} e^{-t}}_{=\Gamma(2n)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Función Gamma

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{2\pi n e^{b_n} \Gamma(2n)}{(b_n)^{2n}} I_e r_e^2$$

b) Queremos demostrar que, si r_e contiene la mitad de la luminosidad, entonces b_n cumple que $2\gamma(2n, b_n) = \Gamma(2n)$.

Primero, podemos obtener la luminosidad contenida dentro de un radio r_e, integrando desde 0 a este radio:

$$\mathcal{L}_{r_e} = 2\pi I_e \int_0^{r_e} r \exp\left\{-b_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n} - 1\right]\right\} dr$$

Hacemos el cambio de variable:

$$t = b_n\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n}$$

$$t|_0 = 0$$

$$t|^{r_e} = b_n$$

$$dt = \frac{b_n}{n}\left(\frac{r}{r_e}\right)^{(1/n)-1} \frac{1}{r_e} dr$$

$$\rightarrow r = \frac{r_e t^n}{(b_n)^n}$$

$$\rightarrow dr = \frac{n r_e}{(b_n)^n} t^{n-1} dt$$

$$\Rightarrow r dr = \frac{n r_e^2}{(b_n)^{2n}} t^{2n-1} dt$$

Reemplazando,

$$\gamma(s,x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t}\,dt$$

Función gamma incompleta inferior

$$\rightarrow \mathcal{L}_{r_e} = \frac{2\pi I_e n r_e^2 e^{b_n}}{(b_n)^{2n}} \underbrace{\int_0^{b_n} t^{2n-1} e^{-t}\,dt}_{\gamma(2n,\, b_n)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{r_e} = \frac{2\pi I_e n r_e^2 e^{b_n}}{(b_n)^{2n}} \gamma(2n, b_n)$$

Si r_e contiene la mitad de la luminosidad, entonces debe cumplirse que:

$$\mathcal{L}_{r_e} = \frac{L_{tot}}{2} \longrightarrow 2\mathcal{L}_{r_e} = L_{tot}$$

Siendo $L_{tot} = \dfrac{2\pi n e^{b_n} \Gamma(2n)}{(b_n)^{2n}} I_e r_e^2$. Luego,

$$2 \cdot \frac{\cancel{2\pi} \cancel{I_e} \cancel{n} \cancel{r_e^2} \cancel{e^{b_n}}}{\cancel{(b_n)^{2n}}} \gamma(2n, b_n) = \frac{\cancel{2\pi n} \cancel{e^{b_n}} \Gamma(2n)}{\cancel{(b_n)^{2n}}} \cancel{I_e} \cancel{r_e^2}$$

$$\longrightarrow \underline{2\gamma(2n, b_n) = \Gamma(2n)}$$

Así, encontramos la expresión que describe a los coeficientes b_n.