Inteligência Computacional

Luís A. Alexandre

UBI

Ano lectivo 2019-20

Conteúdo

Sistemas difusos

Conjuntos difusos
- Funções de pertença
- Operadores difusos
- Propriedades dos conjuntos difusos
- Exercícios

Sistemas difusos e probabilidades

Leitura recomendada

Introdução

- A tradicional lógica bivalente (um evento ou é verdadeiro ou é falso) é limitada quando se trata de lidar com determinados eventos.
- Como tirar partido de afirmações difíceis de formalizar/quantificar como : 'O João é muito alto' ou 'A cor do carro é amarelada' ?
- Em 1965, Lofti Zadeh introduziu o conceito de lógica difusa, em que um evento pode ser parcialmente verdade.
- A lógica difusa foi introduzida com o intuito de permitir o raciocínio aproximado por contraste com o raciocínio preciso da lógica bivalente.
- Nos conjuntos difusos um elemento pode pertencer a um conjunto com um determinado grau de pertença.
- As ideias de lógica e conjuntos difusos permitem a elaboração de programas que lidem com o tipo de termos vagos normalmente usados na linguagem natural.
- Têm, além desta, muitas outras aplicações como veremos nas próximas aulas.

Conjuntos difusos

- Ao contrário do que acontece com os conjuntos clássicos, os elementos dos conjuntos difusos possuem um grau de pertença ao conjunto.
- Este grau de pertença indica a certeza (ou incerteza) na pertença de um dado membro ao conjunto.
- Seja X um domínio e $x \in X$. O grau de pertença de x a um conjunto difuso A é dado por $\mu_A(x)$ onde $\mu_A(\cdot)$ é uma função de pertença

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

- A função de pertença $\mu_A(x)$ indica a certeza que temos em que um dado elemento x pertence ao conjunto A.

Conjuntos difusos

- De notar que na lógica bivalente temos

$$\mu_A : X \to \{0, 1\}$$

mais concretamente,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conjuntos difusos

- Os conjuntos difusos podem ser definidos para domínios discretos ou contínuos.
- A notação usada em cada caso é distinta.
- Se o domínio X for discreto, o conjunto difuso pode ser escrito de duas formas, sendo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:
  - usando notação vetorial: $A = \{(\mu_A(x_i)/x_i) | x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n\}$
  - usando notação de somas: $A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$
- Se o domínio for contínuo usa-se a seguinte notação

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

- De notar que na notação acima, nem o somatório nem o integral devem ser entendidos como operadores algébricos.

Funções de pertença

- A função de pertença é que define um dado conjunto difuso.
- Estas funções podem ter qualquer aspeto ou forma, mas têm no entanto de satisfazer as seguintes restrições:
  - O contradomínio da função tem de ser o intervalo $[0, 1]$.
  - A cada valor $x \in X$ deve corresponder apenas um valor de $\mu_A(x)$.

Função de pertença: exemplo

- Consideremos o seguinte conj. difuso: o das pessoas altas.
- Podemos definir uma função de pertença para este conj. da seguinte forma:

$$\text{Alto}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se Altura}(x) < 1.5\text{m} \\ (\text{Altura}(x) - 1.5)/0.5 & \text{se } 1.5\text{m} \leq \text{Altura}(x) \leq 2.0\text{m} \\ 1 & \text{se Altura}(x) > 2.0\text{m} \end{cases}$$

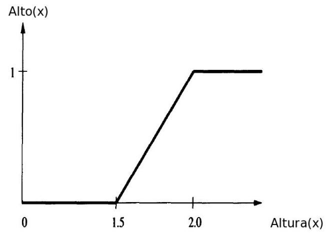

Fig. adaptada de Engelbrecht p. 214

Operadores difusos

- Vejamos alguns operadores que podem agir sobre os conjuntos difusos.
- No que se segue consideramos X como o domínio e A e B dois conjuntos difusos definidos em X.
- Igualdade de conjuntos difusos: dois conjuntos difusos são iguais sse $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$.
- Pertença em conjuntos difusos: A é sub-conjunto de B sse $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$. Nesse caso podemos escrever $A \subseteq B$.

Operadores difusos

- Complemento (NOT): Seja $\bar{A}$ o complemento de A. Então,

$$\forall x \in X, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- Intersecção (AND):

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in X$$

- União (OR):

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ \forall x \in X$$

Operadores difusos: exemplo

- Consideremos que o conjunto difuso A representa números de vírgula flutuante com valores aproximadamente entre $[50, 80]$ e B representa números de cerca de 40.
- A seguinte figura representa as funções de pertença:

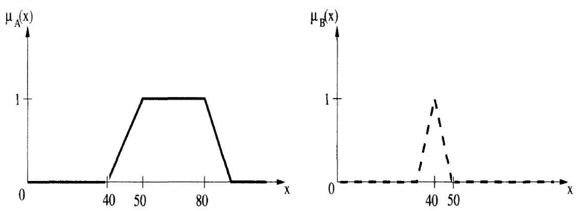

Fig. de Engelbrecht p. 217

Operadores difusos: exemplo

- A figura à esquerda representa o complemento de A e a da direita a intersecção de A e B

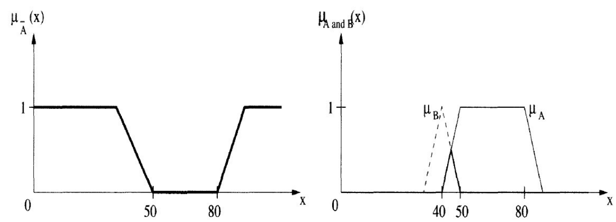

Fig. de Engelbrecht p. 217

Operadores difusos: exemplo

- A figura abaixo representa a reunião de A e B

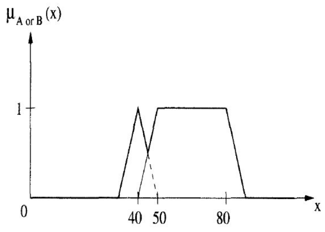

Fig. de Engelbrecht p. 217

Propriedades dos conjuntos difusos

- No que se segue vamos considerar A um conjunto difuso e X o domínio do problema.
- Normalidade: A diz-se normal (ou normalizado) se contém um elemento cujo grau de pertença ao conj. seja igual a 1

$$\exists x \in A : \mu_A(x) = 1$$

- Altura: a altura de A é o supremo da função de pertença

$$\text{altura}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

(Qual é a altura de um conj. normalizado ?)
- Suporte: o suporte de A é o conj. de todos os elementos do domínio X, que pertencem a A (têm grau de pertença maior que zero)

$$\text{suporte}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

Propriedades dos conjuntos difusos

- Núcleo: o núcleo de A é o conj. de todos os elementos do domínio X, que pertencem a A com grau de pertença 1

$$\text{núcleo}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

- Corte-α: o corte-α de A é o conj. dos elementos de A com grau de pertença maior ou igual a $\alpha \in (0, 1]$

$$\text{corte-}\alpha(A) = \{x \in A : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- Unimodalidade: A diz-se unimodal se a sua função de pertença tem apenas um máximo (é unimodal).

Propriedades dos conjuntos difusos

- Cardinalidade: o cardinal de A, se X for finito, é

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

e se X for infinito é

$$\text{card}(A) = \int_X \mu_A(x) dP(x)$$

onde P é uma medida em X: $\int dP(x) = 1$
- Normalização: a normalização de A faz-se da seguinte forma

$$\text{normalização}(A) = \frac{\mu_A(x)}{\text{altura}(A)}$$

Propriedades dos conjuntos difusos

- Finalmente, os conj. difusos gozam das propriedades:
  - comutativa:
    - $A \cap B = B \cap A$
    - $A \cup B = B \cup A$
  - associativa:
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - distributiva:
    - $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
    - $A \cup (B \cap C) = A \cup B \cap A \cup C$
  - transitiva:
    - $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$
    - $A \supset B,\ B \supset C \Rightarrow A \supset C$
  - idempotência:
    - $A \cap A = A$
    - $A \cup A = A$

  de forma análoga aos conj. bivalentes.

Exercícios

1. Verifique se são verdadeiras, para um conj. difuso A, as seguintes propriedades da lógica bivalente:
   1.1 $A \cap \bar{A} = \varnothing$
   1.2 $A \cup \bar{A} = X$
2. Dados os dois conjuntos difusos seguintes:
   lápis grandes = {0.1/lápis1, 0.2/lápis2, 0.4/lápis3, 0.6/lápis4, 0.8/lápis5, 1.0/lápis6}
   lápis médios = {1.0/lápis1, 0.6/lápis2, 0.4/lápis3, 0.3/lápis4, 0.1/lápis5}
   Ache a união e a intersecção destes conjuntos.

Exercícios

3. A figura abaixo contém as funções de pertença de dois conjuntos difusos A e B.
   3.1 Desenhe a função de pertença para o conjunto $C = A \cap \bar{B}$
   3.2 Ache o valor de $\mu_C(5)$.
   3.3 Será C normal ?

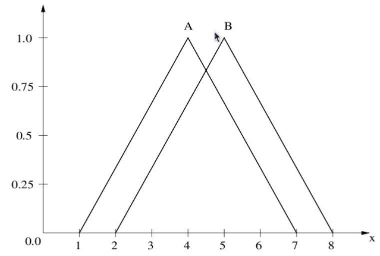

Fig. de Engelbrecht p. 223

Sistemas difusos e probabilidades

- Muitas vezes se confunde a lógica difusa e as probabilidades.
- Ambos os conceitos se referem à certeza relativa ao acontecimento de determinados eventos.
- Mas, no caso das probabilidades, só faz sentido referir esses valores antes do evento acontecer (ou não). Após o evento, não faz sentido falar na probabilidade pois o acontecimento já ocorreu.
- No caso dos sistemas difusos, a pertença dum elemento a um conj. difuso faz sentido mesmo após o acontecimento.
- Apesar das diferenças, (os conceitos são complementares) estes conceitos podem ser usados simultaneamente: a probabilidade de um acontecimento difuso. Exemplo: qual a probabilidade de Pedro pertencer ao conj. difuso dos bons jogadores de basket com grau de pertença igual a 0.9 ?

Sistemas difusos e probabilidades: exemplo

- Vejamos um exemplo. O evento consiste em saber se o Pedro é um bom jogador de basket.
- O Pedro pertence ao conjunto difuso dos bons jogadores de basket com pertença igual a 0.9.
- Existe uma probabilidade de o Pedro ser um bom jogador, digamos 0.8.
- Após a realização do evento (determinação se o Pedro é ou não um bom jogador de basket), já não faz sentido falar na probabilidade de Pedro ser um bom jogador de basket, pois agora ou é um bom jogador de basket ou não (de acordo com a lógica bivalente usada nas probabilidades).
- No entanto, ainda faz sentido falar na pertença do Pedro ao conjunto difuso dos bons jogadores de basket.

Leitura recomendada

- Engelbrecht, cap. 18.