Matéria de Lógica Computacional

Árvores Etiquetadas

Alfabeto proposicional (A'_{Fp}): { ⊥; P; ∨; ∧; → }

Regras:

- **BOT**: $\perp \in Fp$
- **PROP**: $p \in P$
- **DIS**: Se $\phi, \psi \in Fp$, então $(\phi \vee \psi) \in Fp$
- **CON**: Se $\phi, \psi \in Fp$, então $(\phi \wedge \psi) \in Fp$
- **IMP**: Se $\phi, \psi \in Fp$, então $(\phi \rightarrow \psi) \in Fp$

Abreviaturas:

- **Negação:** $\sim \phi \overset{abv}{=} (\phi \rightarrow \perp)$
- **Verdade:** $\top \overset{abv}{=} \sim\perp$
- **Equivalência:** $\phi \leftrightarrow \psi \overset{abv}{=} ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$

Tradução de Linguagem Natural para Proposicional

"O João compra um bolo se não estiver mau tempo.
Está mau tempo. Logo, o João não comprou um bolo."

Jb: "O João compra/comprou um bolo"

Mt: "Está/estiver mau tempo"

$((\sim Mt \rightarrow Jb) \wedge Mt) \rightarrow \sim Jb$

Tabelas de Verdade

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \wedge \sim b)$$

a	b	$a \rightarrow b$	$\sim b$	$a \wedge \sim b$	$(a \rightarrow b) \wedge (a \wedge \sim b)$
0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0

NOTA: o "0" implica sempre "1"

Tudo a "0", então a fórmula é contraditória

Se a coluna final **só tiver "1"**, então a fórmula é **válida**

Se a coluna final **só tiver "0"**, então a fórmula é **contraditória**

Se a coluna final **tiver "1" e "0"**, então a fórmula é **possível**

Semântica da Lógica Proposicional (valorações, ...)

Consideremos $\{\sim(\phi \wedge \psi), \phi\} \models (\sim\psi)$

Seja V uma valoração tal que $V \Vdash \{\sim(\phi \wedge \psi), \phi\}$.

Será que $V \Vdash (\sim\psi)$?

$V \Vdash \{\sim(\phi \wedge \psi), \phi\}$, ou seja:

1) $V \Vdash \sim(\phi \wedge \psi)$

$V \Vdash (\sim\phi)$ ou $V \Vdash (\sim\psi)$

3) **4)**

2) $V \Vdash \phi$

Por 3) $V \Vdash (\sim\phi)$, mas por 2) $V \Vdash \phi$, logo só sobra que $V \Vdash (\sim\psi)$ (c.q.d.)

Algoritmo T

$$T(\phi)=CNFC(\ NNFC\ (ImplFree(\phi)\ )\ )$$

(usar as fórmulas do formulário)

Estando a fórmula na **Forma Normal Conjuntiva**, usar o **Lema da Disjunção de Literais** e concluir:

- Se estiver de acordo com o Lema, é **válida**
- Se não, é **não válida**

Algoritmo de Horn

Se a fórmula estiver na FNC, colocá-la na **Forma de Horn, ou seja:**

$$(\_ \rightarrow \_) \land (\_ \rightarrow \_)$$

De seguida, aplicar o **algoritmo A**:

$$A\ (\ \phi,\ \{\top\}\ )$$

Passar as **consequências dos "implica"** para o **conjunto:**

$$\text{Seja } \phi = (p \longrightarrow v) \land (\top \longrightarrow p),$$

$$A\ (\ \phi,\ \{\top\}\ )$$

$$A\ (\ (p \longrightarrow v) \land (\top \longrightarrow p),\ \{\top\}\ )$$

$$A\ (\ (p \longrightarrow v),\ \{\top, p\}\ )$$

$$\{\top, p, v\}$$

Se no fim, neste **conjunto estiver o** $\perp$, então a fórmula é **contraditória**.

Se não, é **possível e temos que analisá-la pelo Lema da Disjunção de Literais**.

Resolução

Colocar a fórmula só com ∧ e ∨.

Separar a fórmula em cláusulas (cada parte separada por um ∧ é uma cláusula).

Fazer algo semelhante a:

Seja ϕ = (p ⟶ v) ∧ (T ⟶ p)

(~p ∨ v) ∧ (~T ∨ p)

{ {~p,v}; ∅ ∪ {p} }

C_1 C_2

NOTA: temos que **usar as cláusulas todas**; o **resolvente** de 2 cláusulas **é a reunião das 2 cláusulas exceto o elemento que vamos retirar** (neste caso p e ~p).

{~p,v} {p}

{v}

NOTA: se na fórmula aparecer **T ou ⊥**, quando compomos as cláusulas representamos estes símbolos com o **∅**, sendo que este já **não aparece daí para a frente**.

Dedução	Justificação
{~p,v}	Cláusula C1
{~p,v}	Cláusula C2
{v}	Resolvente de C1 e C2: R1

Se ∅ estiver no conjunto final, então a fórmula é **contraditória**.

Se não, é **possível e temos que analisá-la pelo Lema da Disjunção de Literais**.

Dedução Natural

Regras:

Conjunção

Introdução

$$\frac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_I)$$

Eliminação

$$\frac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1}\ (\land_{Ed})$$

NOTA: pode-se eliminar tanto à direita como à esquerda.

Disjunção

Introdução

$$\frac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_I)$$

Eliminação

$$\frac{\varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \varphi_3 \quad \varphi_3}{\varphi_3}\ (\lor_E, 1{,}2)$$

Implicação

Introdução

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^n \\ \\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\ (\to_I, n)$$

Eliminação

$$\frac{\varphi_1 \qquad \varphi_1 \to \varphi_2}{\varphi_2}\ (\land_E)$$

Absurdo

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim\varphi_1]^n \\ \\ \varphi_1\end{array}}{\bot}\ (\bot, n)$$