Árvores Binárias de Busca

Prof. Dr. Jonas Lopes de Vilas Boas

Estruturas de dados

- Processos particulares para **armazenamento**, **organização** e **manipulação** de dados.

- São dinâmicas e tornam o código mais organizado.

- Podem ser classificadas em:
  - lineares ou não lineares;
  - homogêneas ou heterogêneas;
  - estáticas ou dinâmicas;

Busca em estruturas de dados

- Algoritmos estratégicos para encontrar dados em uma estrutura de dados.
- Cada tipo de organização necessita de uma estratégia específica.
- A busca termina quando os dados buscados são encontrados.

Busca sequencial

- Nessa estratégia, cada elemento da estrutura de dados é visitado de maneira sequencial (de acordo com a ordem de inserção, por exemplo).

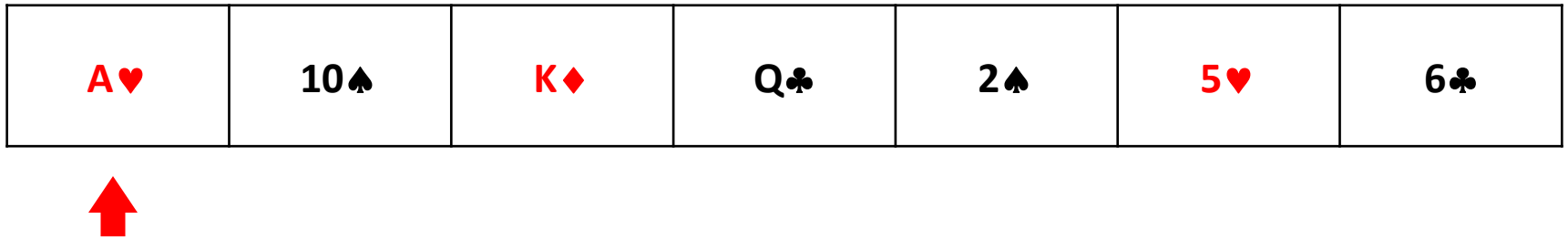
- Exemplo: Buscar uma carta em um baralho embaralhado.

- Complexidade: **O(n)**, onde **n** é a quantidade de elementos

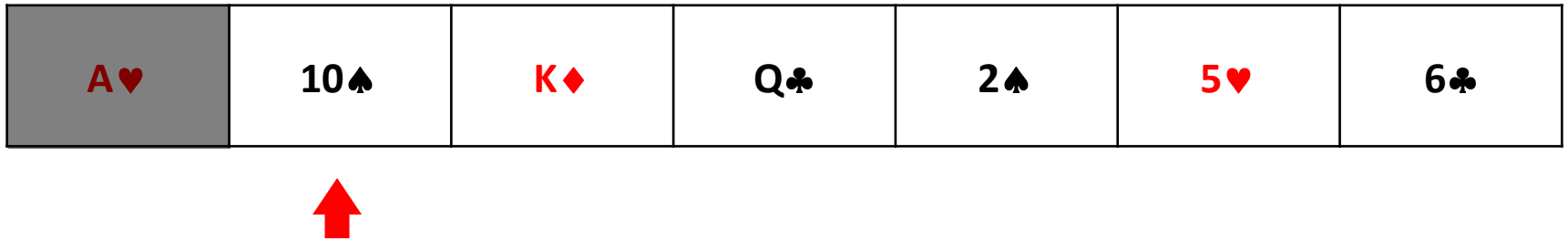
Buscar a carta 5♥

A♥	10♠	K♦	Q♣	2♠	5♥	6♣

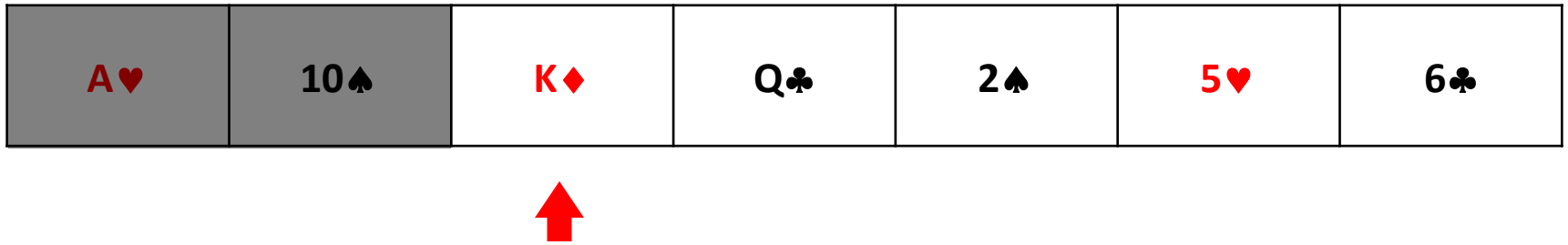
Buscar a carta 5♥



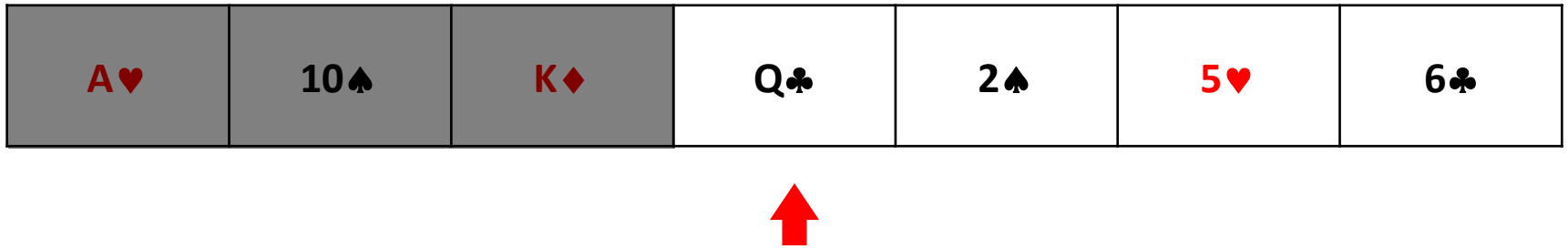
Buscar a carta 5♥



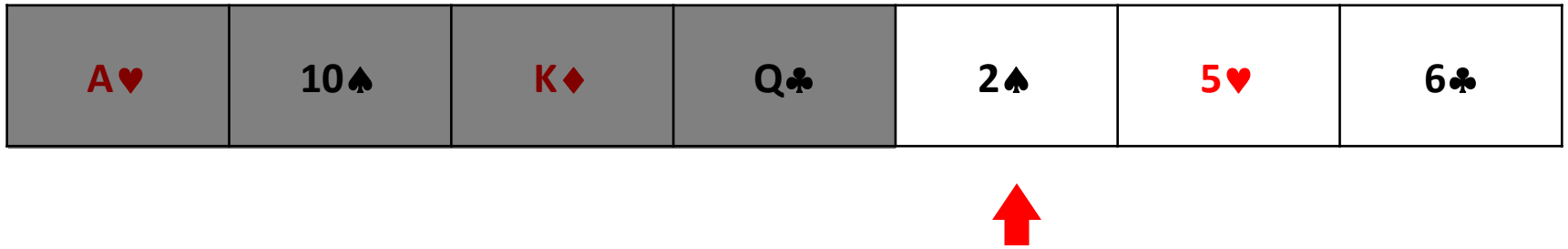
Buscar a carta 5♥



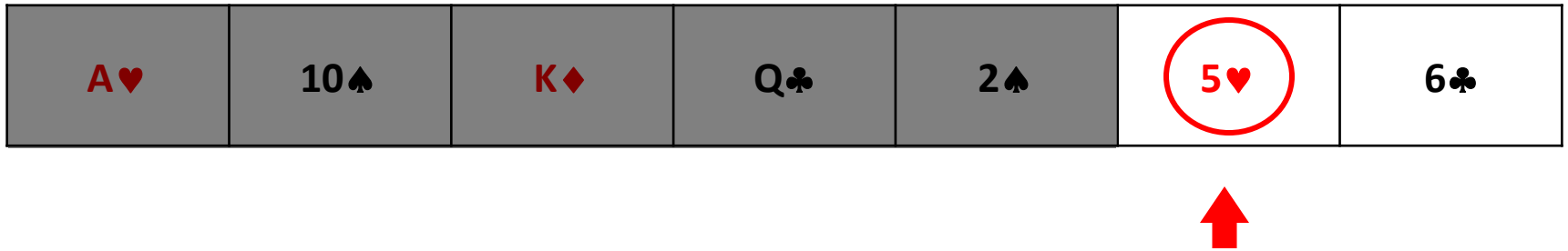
Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Busca binária

- Nessa estratégia, os elementos devem estar previamente ordenados.
- A busca começa por um elemento central.
- Caso o elemento buscado seja maior que o elemento central, a busca começa novamente considerando apenas a metade superior da estrutura, ou a metade inferior, caso o elemento seja menor.

- Exemplo: Buscar uma carta em um baralho ordenado.

- Complexidade: $\mathrm{O}(\log_2 n)$, onde n é o número de elementos.

Buscar a carta 5♥

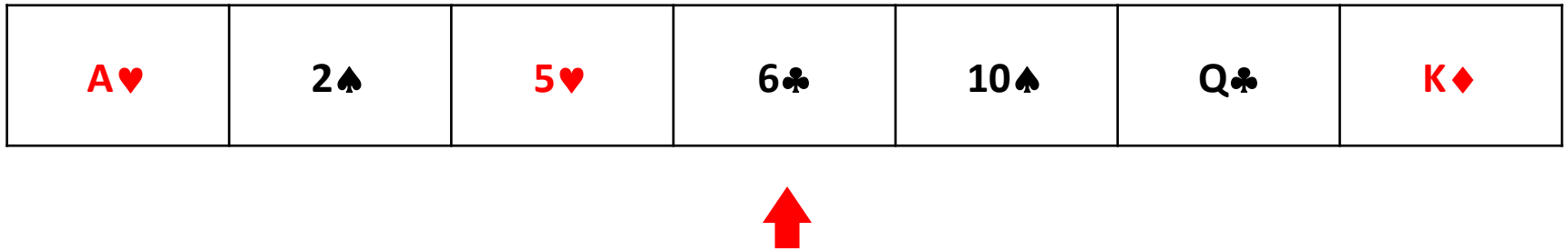
A♥	10♠	K♦	Q♣	2♠	5♥	6♣

Vamos considerar que A é o menor valor e K é o maior.
Os naipes são colocados na ordem: ♦ ♠ ♥ ♣

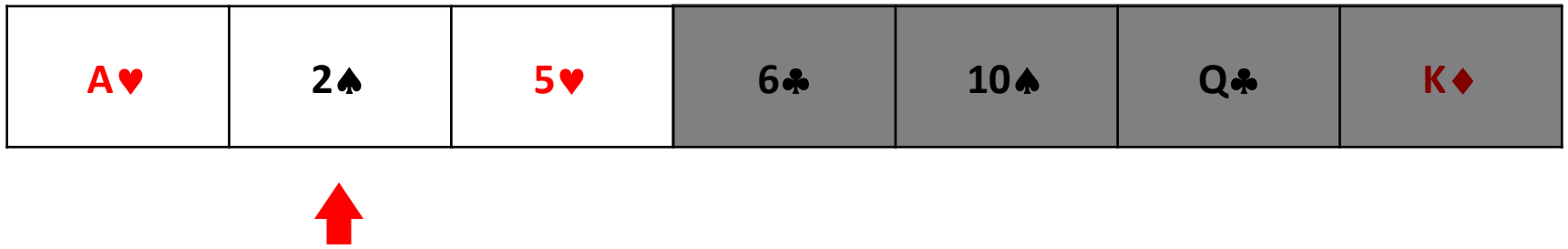
Buscar a carta 5♥

A♥	2♠	5♥	6♣	10♠	Q♣	K♦

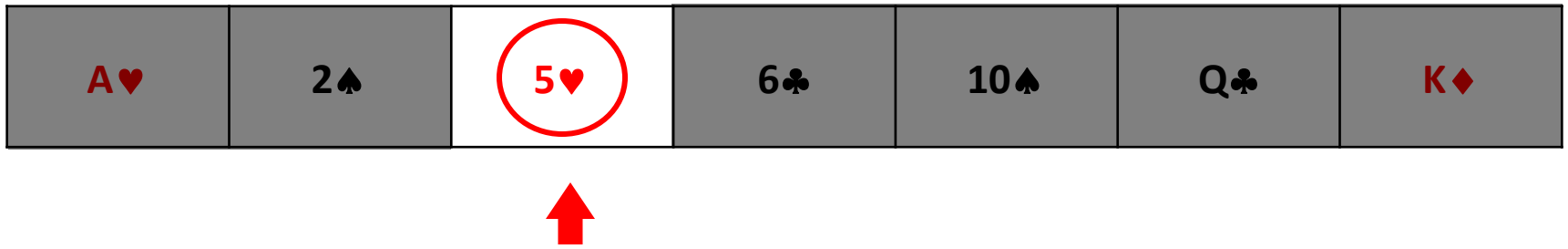
Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Buscas em estruturas de dados dinâmicas

- Diferente das estruturas de dados estáticas, as estruturas de dados dinâmicas não são necessariamente lineares.

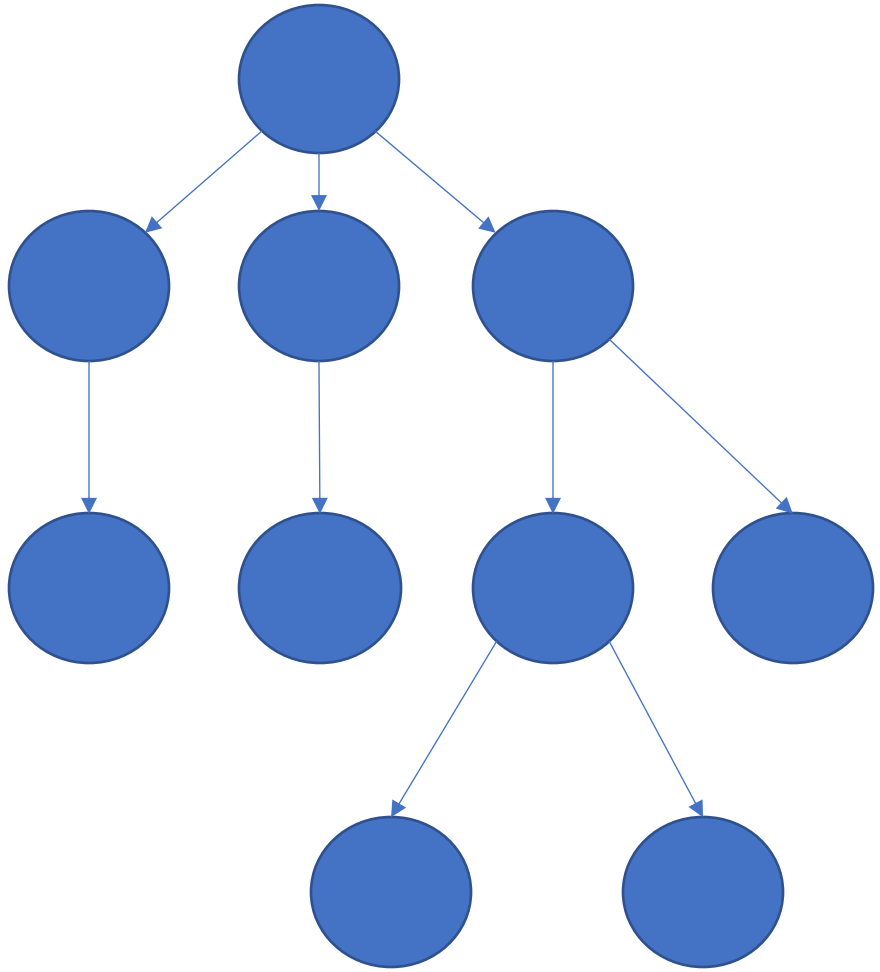
- Mesmo quando são lineares (as listas encadeadas, por exemplo),na prática essas estruturas podem dificultar a indexação por posição.
  - Por exemplo, pode ser difícil saber qual é o elemento central.

- Para isso outras estruturas dinâmicas podem ser usadas para melhorar a eficiência das buscas.

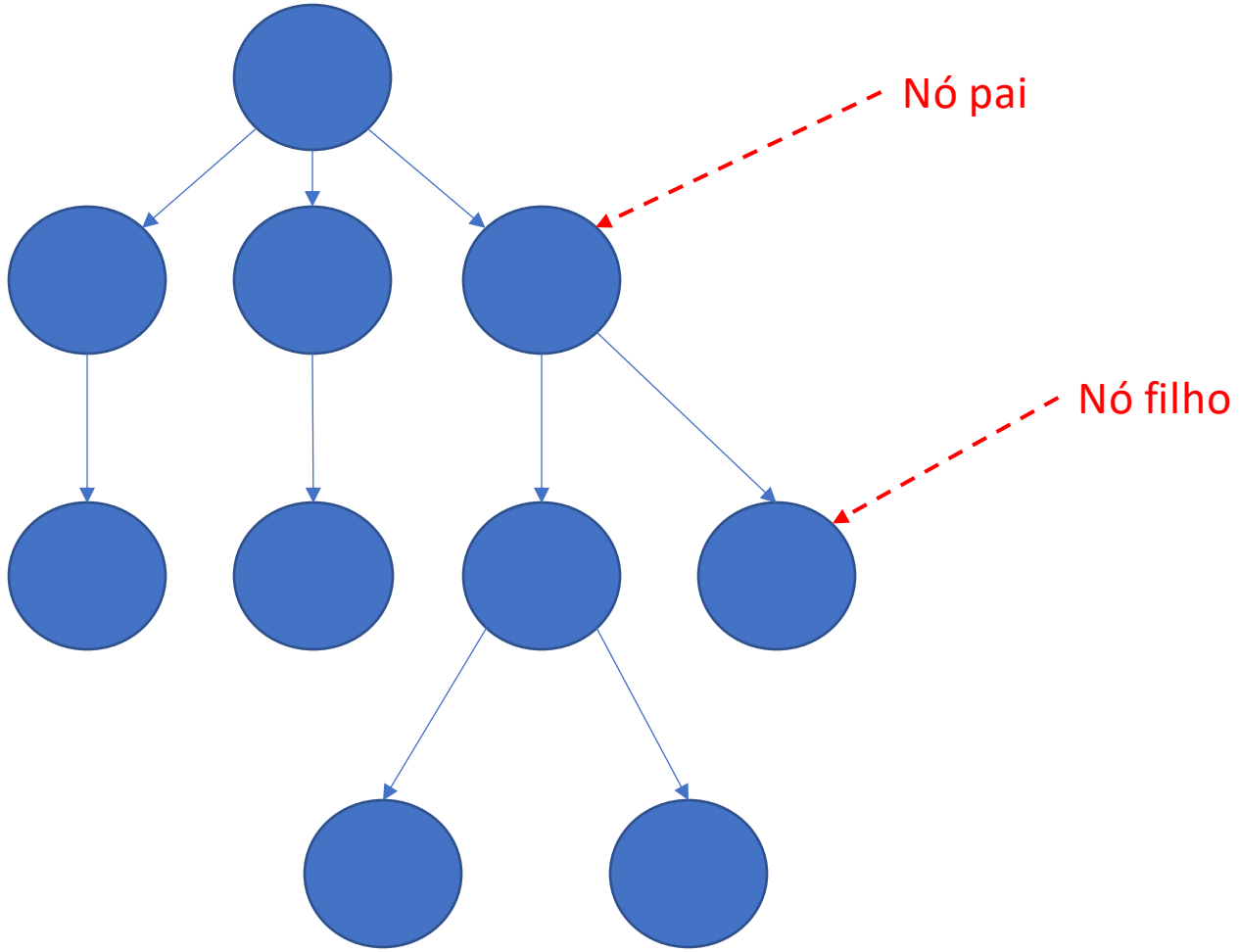
Árvore

- É um tipo de estrutura de dados não linear e dinâmica.
- É um Grafo Acíclico e Direcionado.
- Armazena os dados de forma hierárquica.

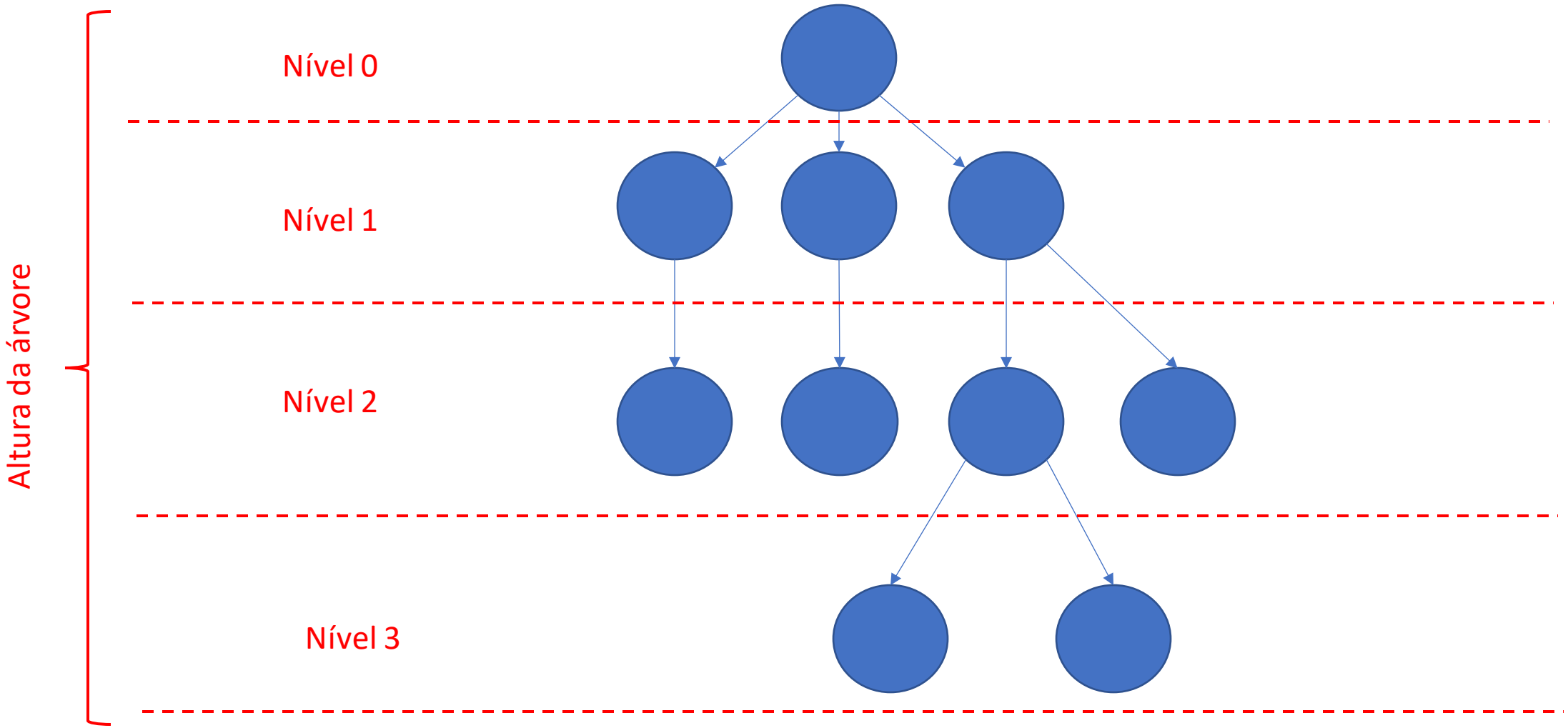
Exemplo de Árvore



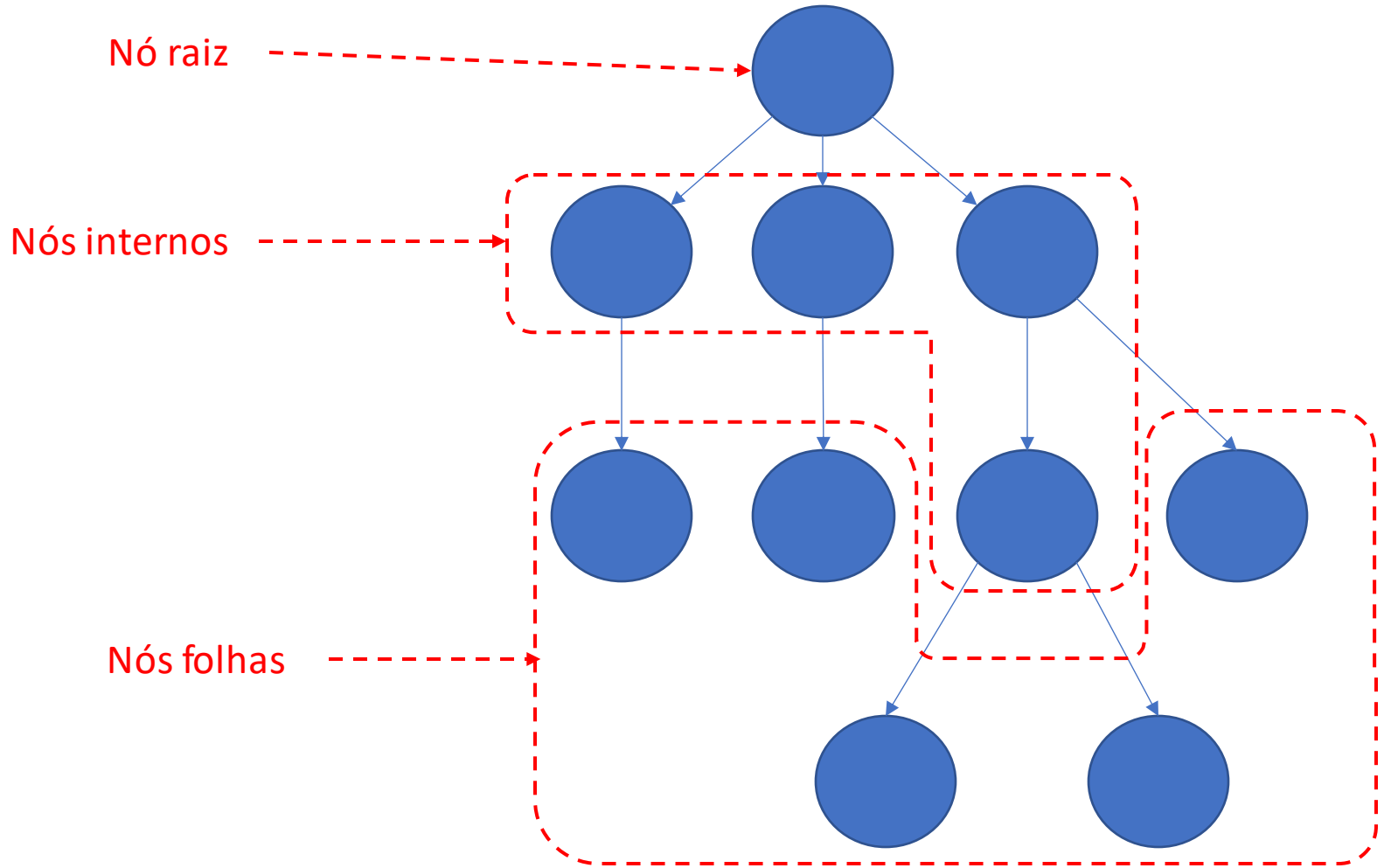
Exemplo de Árvore



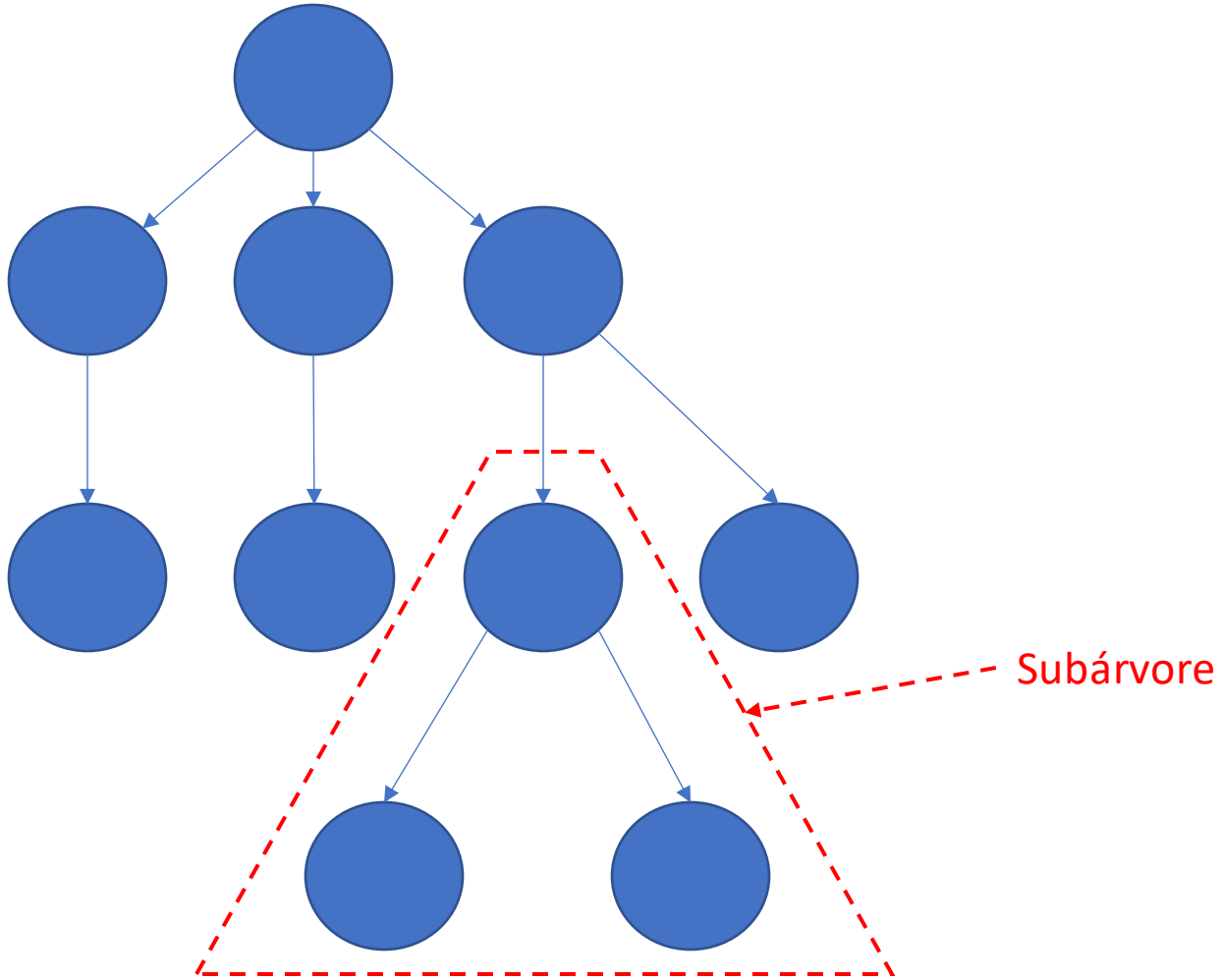
Exemplo de Árvore



Exemplo de Árvore



Exemplo de Árvore

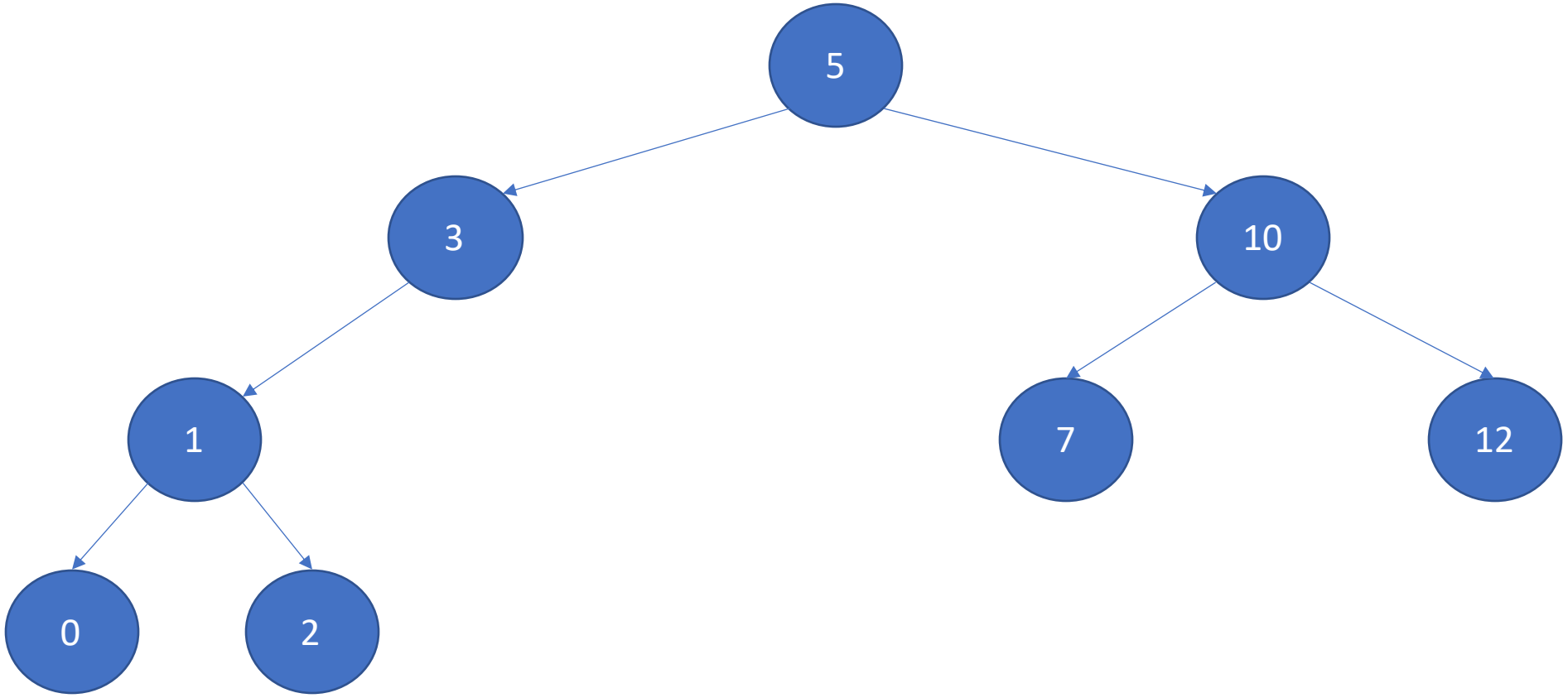


Árvore Binária

- É um tipo de árvore onde os nós podem ter no máximo dois filhos (filho da esquerda e filho da direita).

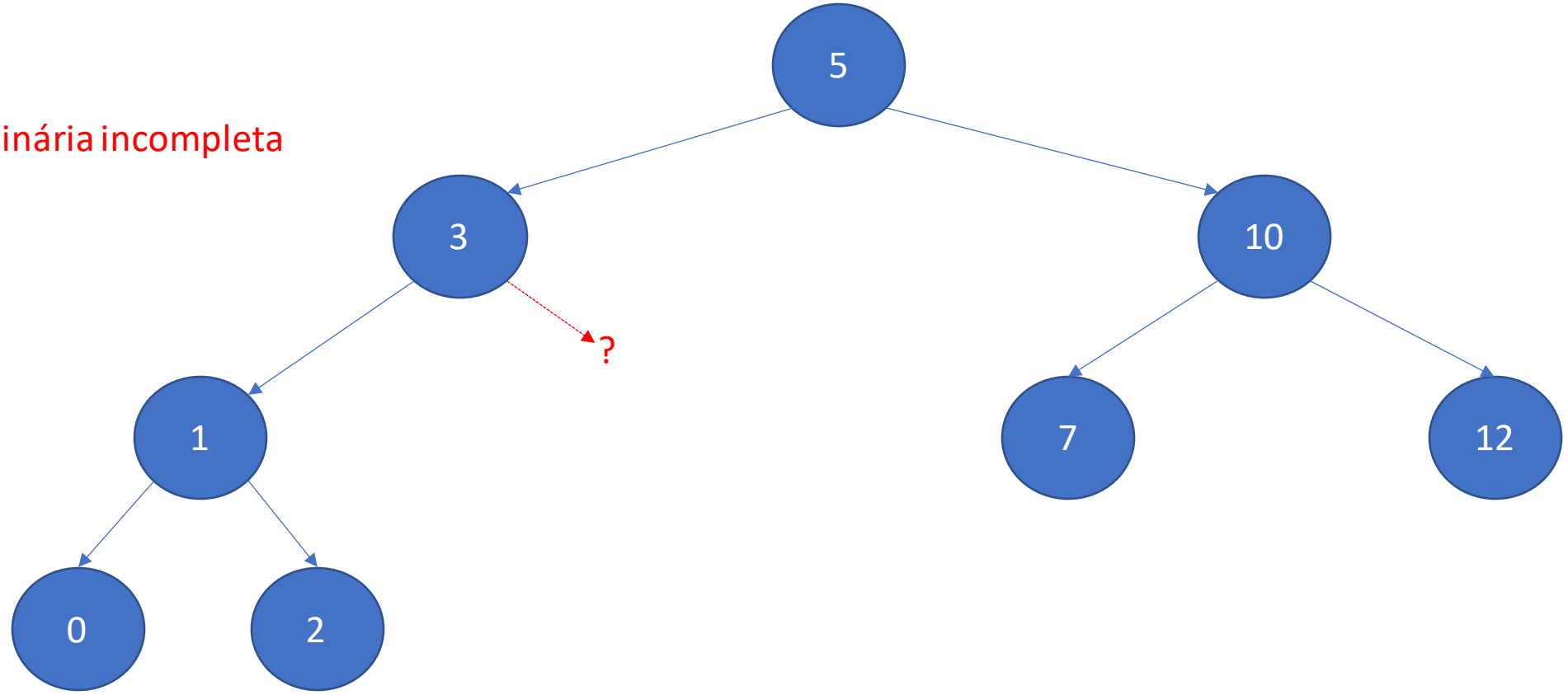
- É muito utilizada para otimização de buscas.

Exemplo de Árvore Binária de Busca



Exemplo de Árvore Binária de Busca

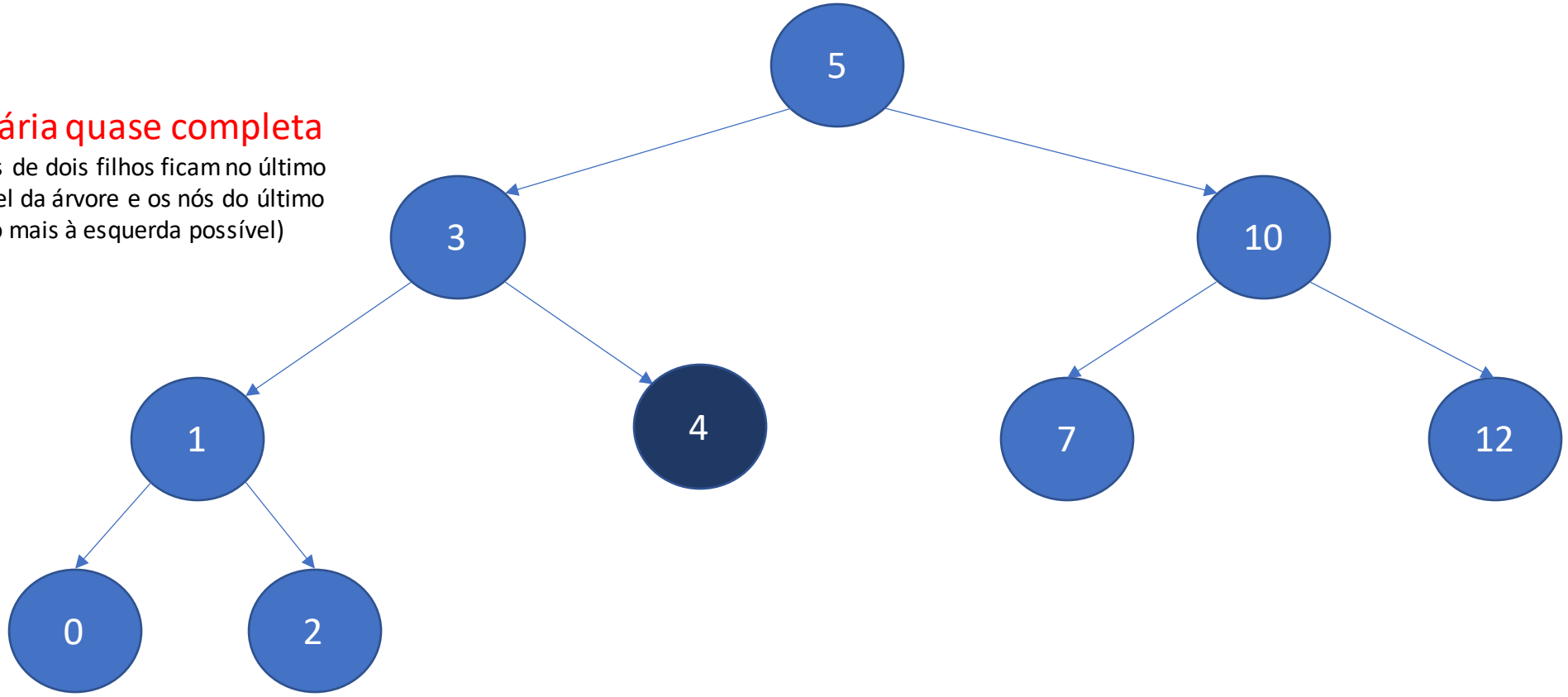
Árvore binária incompleta



Exemplo de Árvore Binária de Busca

Árvore binária quase completa

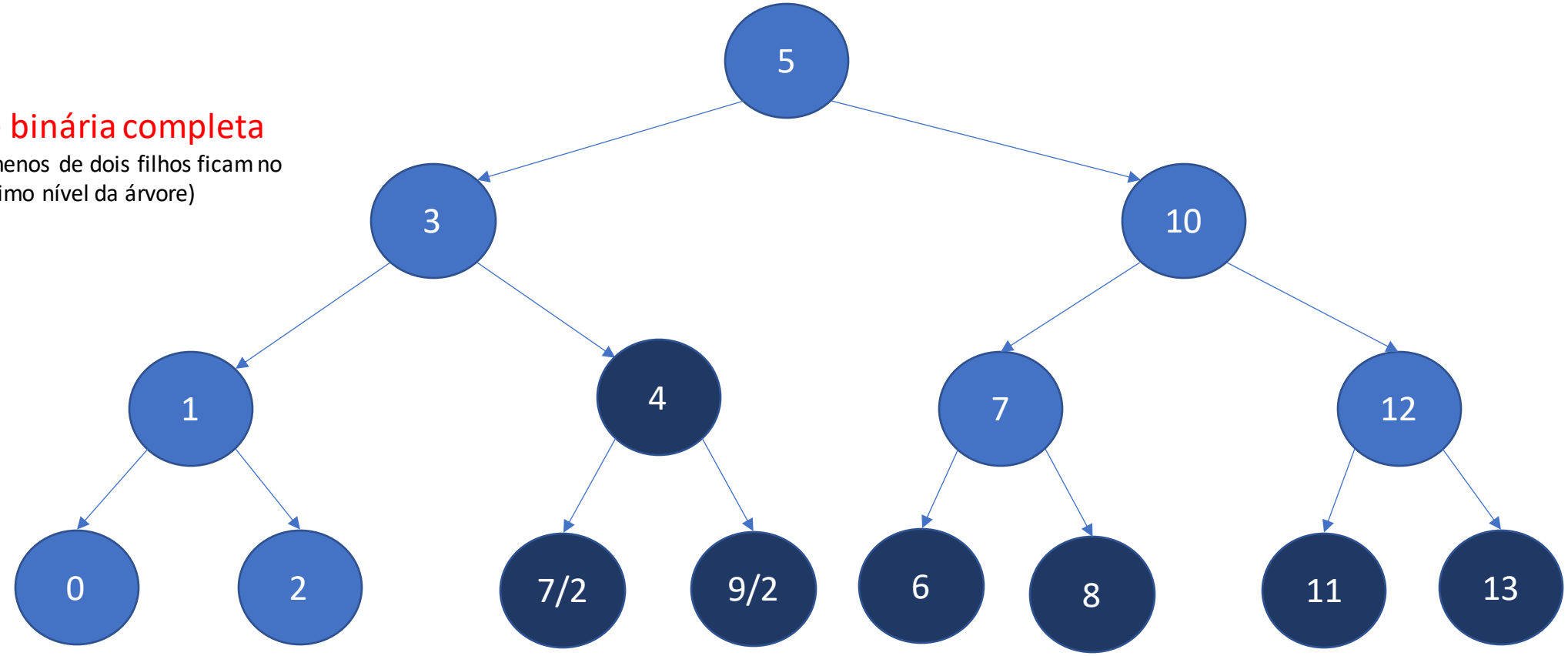
(Nós com menos de dois filhos ficam no último e penúltimo nível da árvore e os nós do último nível ficam o mais à esquerda possível)



Exemplo de Árvore Binária de Busca

Árvore binária completa

(Nós com menos de dois filhos ficam no último nível da árvore)



Árvore Binária de Busca

- É um tipo de árvore binária que é construída com uma estratégia para facilitara busca binária.

- A estratégia é já construir a estrutura de maneira ordenada:
  - Ao inserir um novo nó, ele é comparado com os nós já existentes;
  - Começando da raiz, se o nó a ser inserido tem valor menor que o nó visitado, ele continua a verificação para a esquerda, senão para a direita;
  - Se o nó visitado for um nó folha, o novo nó é inserido à esquerda se o valor for maior, ou à direita se for menor.

- Complexidade da busca: O(h), onde h é a altura da árvore

Árvore Binária de Busca

- Representação de um nó da árvore

```
struct treenode {
        int info;
        struct treenode * left;
        struct treenode * right;
};
```

Árvore Binária de Busca

- Algoritmo de inserção:

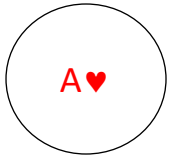
```
void tInsert(treenodeptr &p, int x){
        if (p == NULL) {
                p = new treenode;
                p->info = x;
                p->left = NULL;
                p->right = NULL;
        } else if (x < p->info)
                tInsert(p->left, x);
        else
                tInsert(p->right, x);
}
```

Buscar a carta 5♥

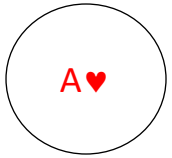
A♥	10♠	K♦	Q♣	2♠	5♥	6♣

Vamos considerar que A é o menor valor e K é o maior.
Os naipes são colocados na ordem: ♦ ♠ ♥ ♣

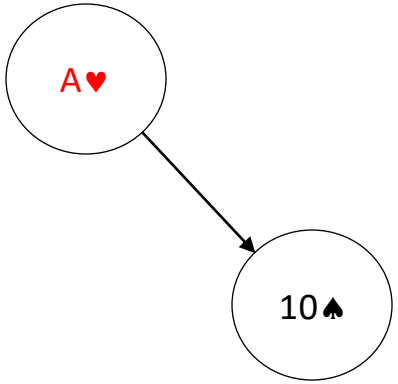
Inserindo a carta A♥



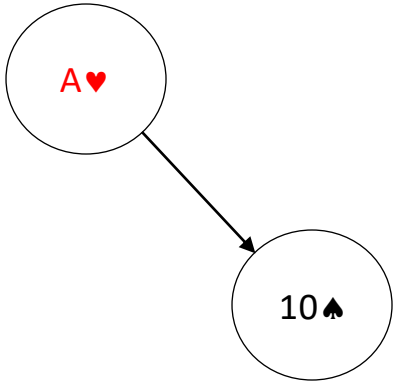
Inserindo a carta 10♠



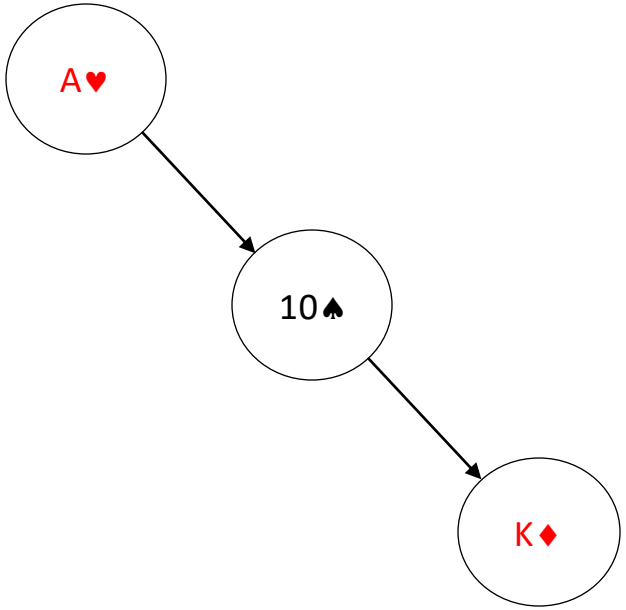
Inserindo a carta 10♠



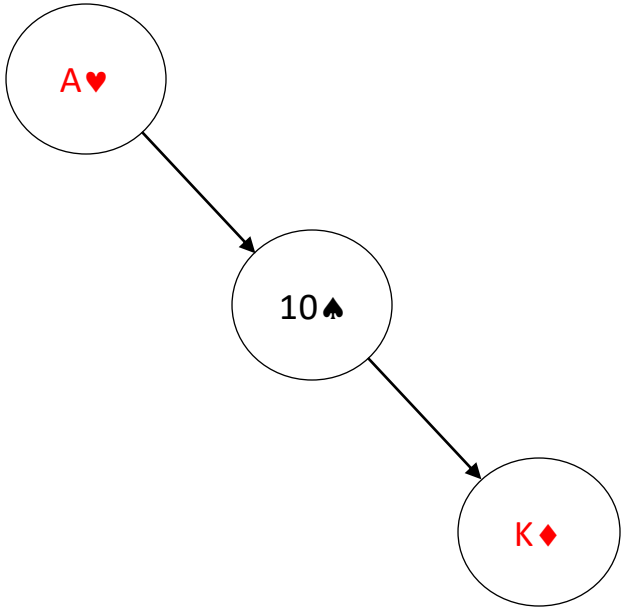
Inserindo a carta K♦



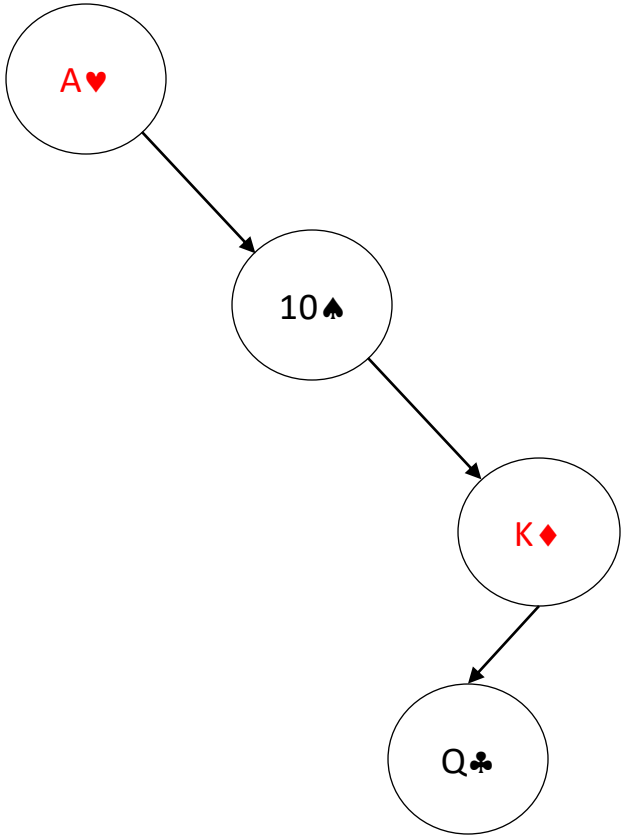
Inserindo a carta K♦



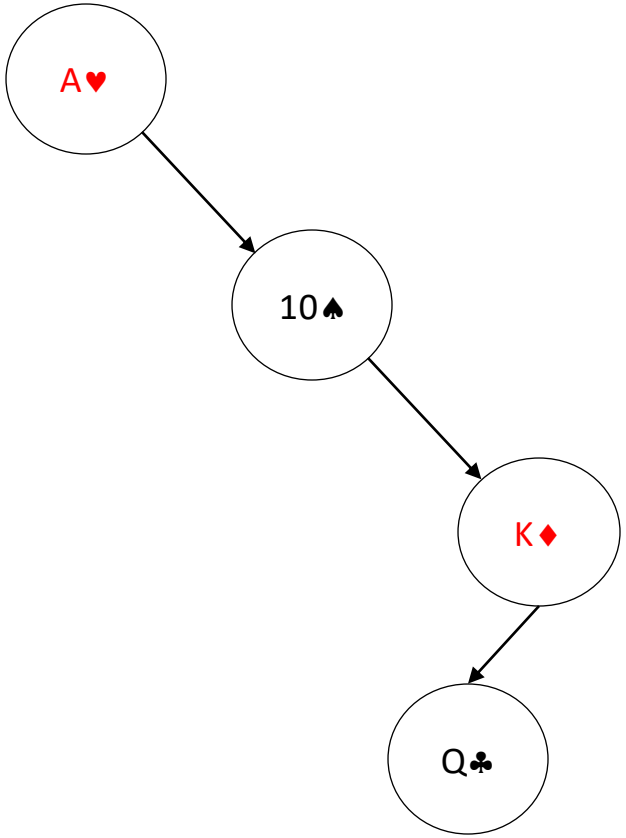
Inserindo a carta Q♣



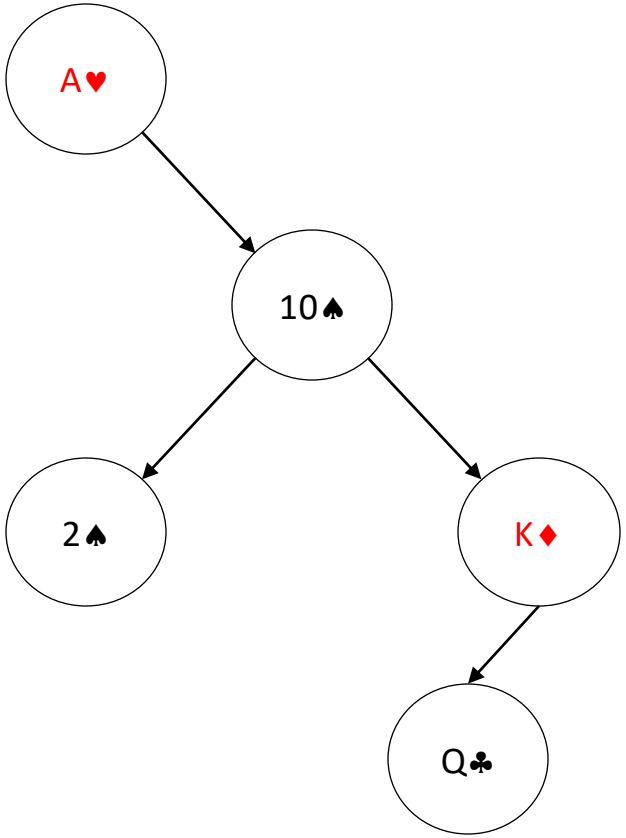
Inserindo a carta Q♣



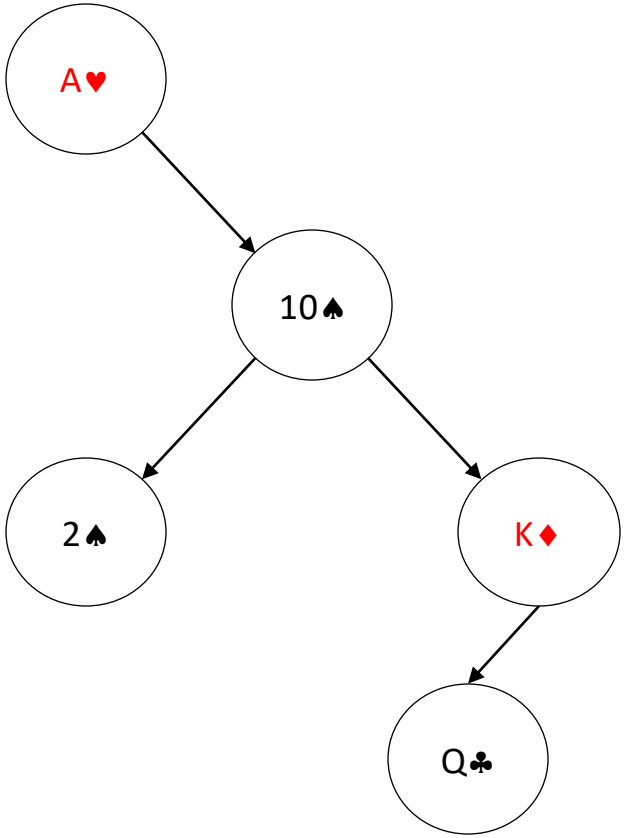
Inserindo a carta 2♠



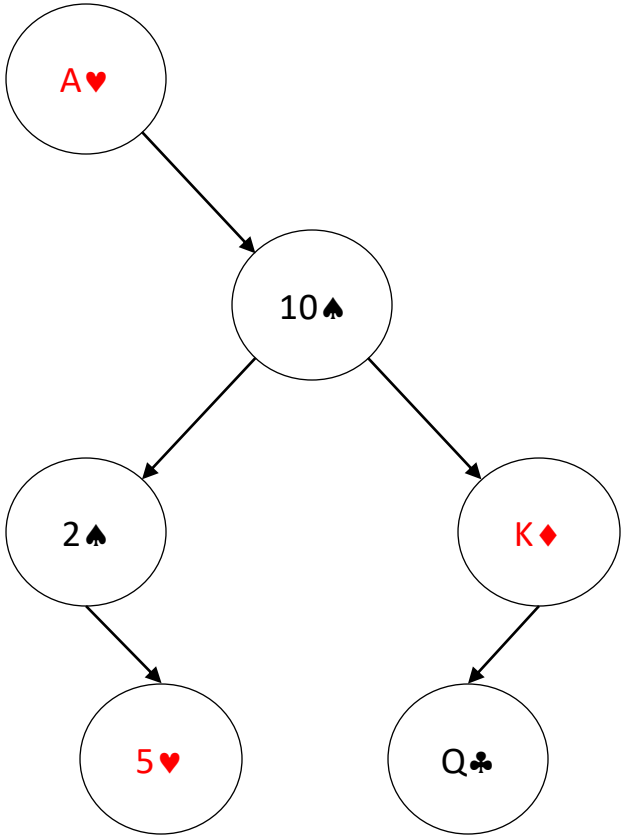
Inserindo a carta 2♠



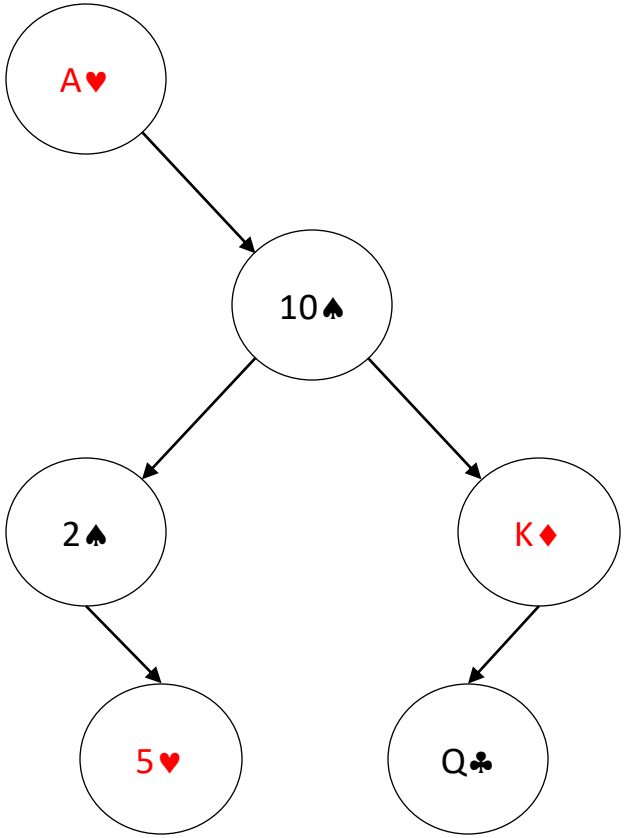
Inserindo a carta 5♥



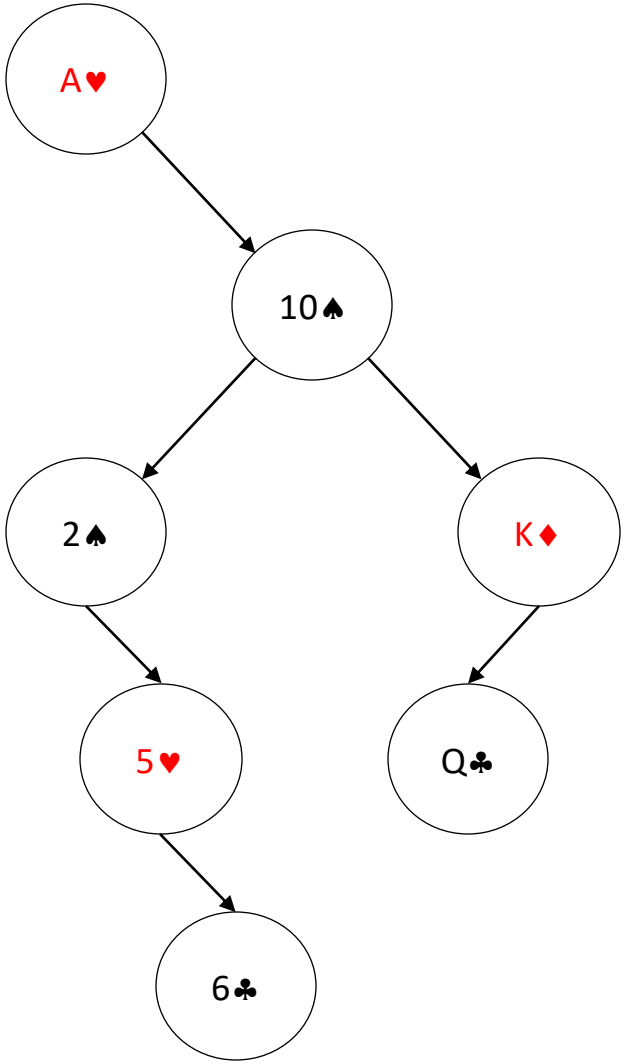
Inserindo a carta 5♥



Inserindo a carta 6♣



Inserindo a carta 6♣

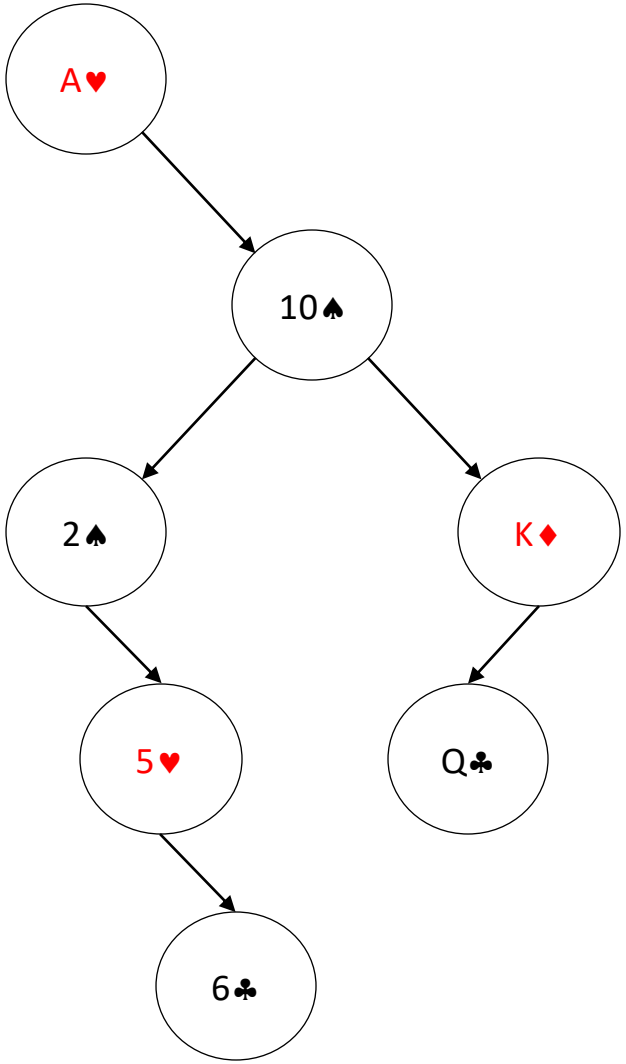


Árvore Binária de Busca

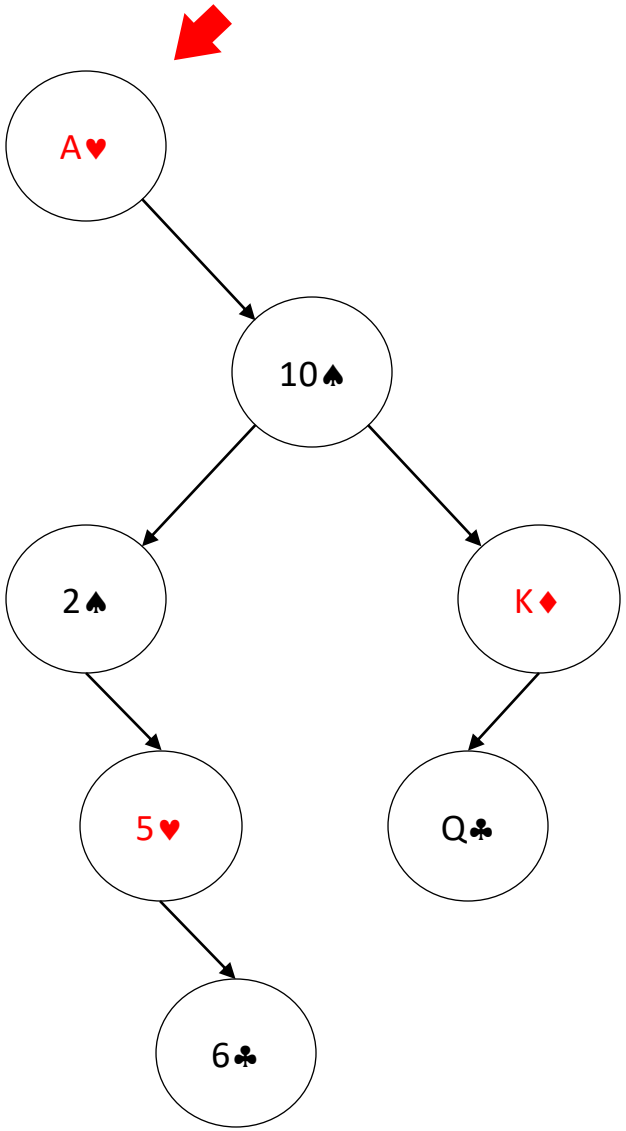
- Algoritmo de busca:

```
treenodeptr tSearch(treenodeptr p, int x) {
        if (p == NULL)
                return NULL;
        else if (x == p->info)
                return p;
        else
                if (x < p->info)
                        return tSearch(p->left,x);
                else
                        return tSearch(p->right,x);
}
```

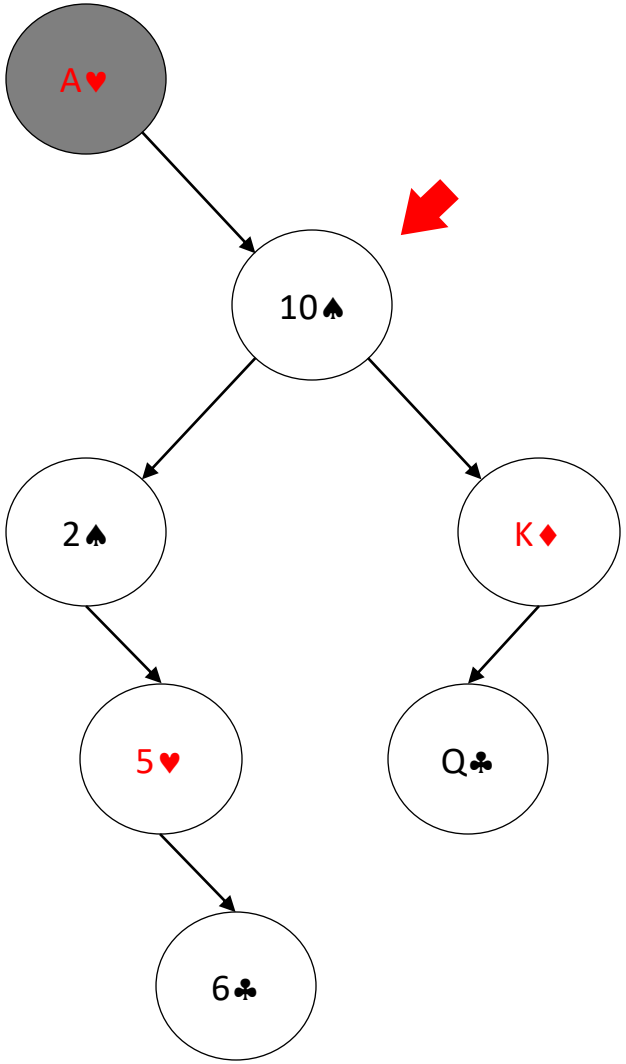
Buscar a carta 5♥



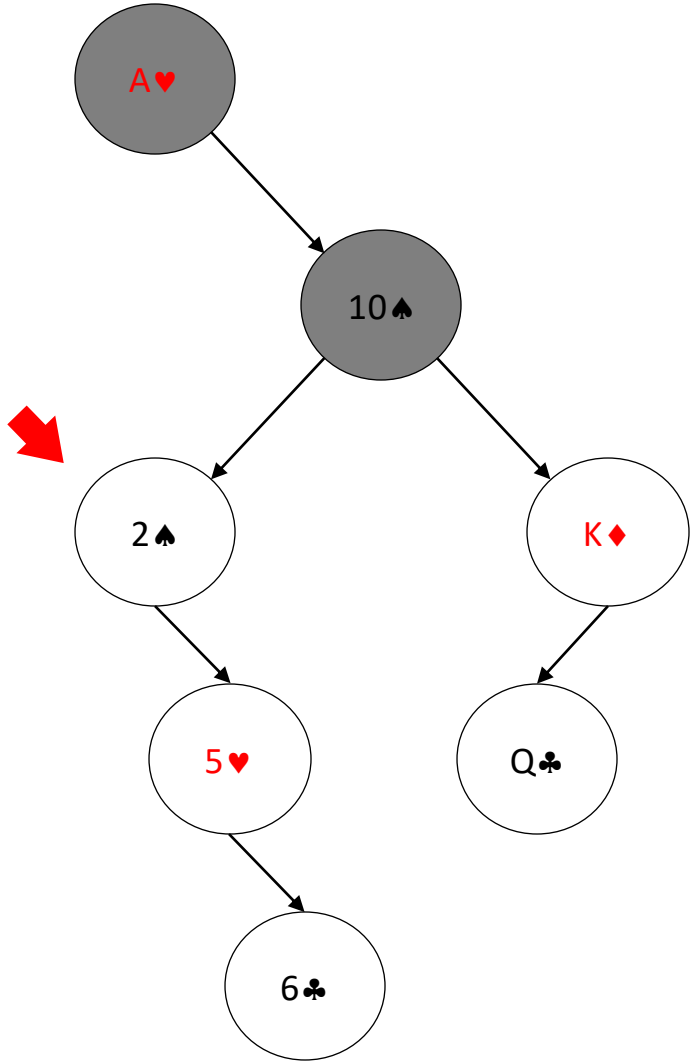
Buscar a carta 5♥



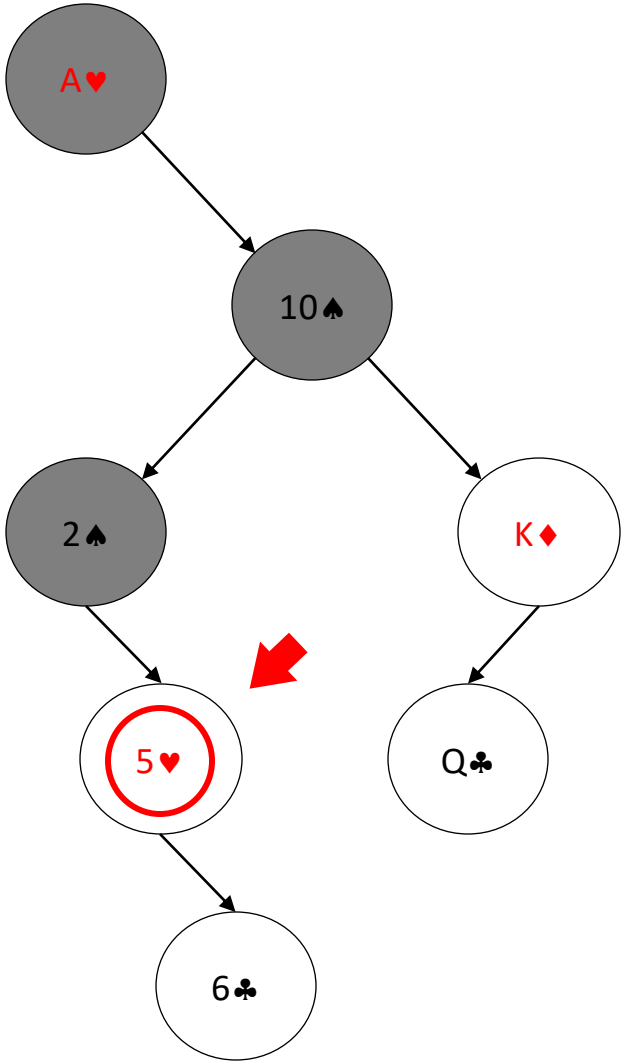
Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Buscar a carta 5♥



Complexidade da Árvore Binária de Busca

- Pode-se perceber que, no pior caso, a complexidade de busca vai ser igual ao número de elementos, ou seja, O(n).

- Dessa forma, é necessário um mecanismo para garantir a construção da árvore de maneira a se aproximar ao máximo da complexidade da busca binária, ou seja, $\mathrm{O}(\log_2 n)$.

- As árvores balanceadas são soluções para esse problema.

Árvore Binária de Busca

- O algoritmo de **remoção** de elementos tem três casos de atuação.
    - Se o nó a ser removido não tem filhos: remove o nó e aponta a referência para o nó atual para NULL.
    - Se o nó a ser removido só tem filhos à direita **ou** à esquerda: remove o nó e aponta a referência para o nó atual para seu filho.
    - Se o nó a ser removido tem dois filhos: encontra o nó M com o menor valor da subárvore da direita, aponta a direita do pai de M para a direita de M, modifica o valor do nó atual para o valor de M e remove o nó M.

Árvore Binária de Busca

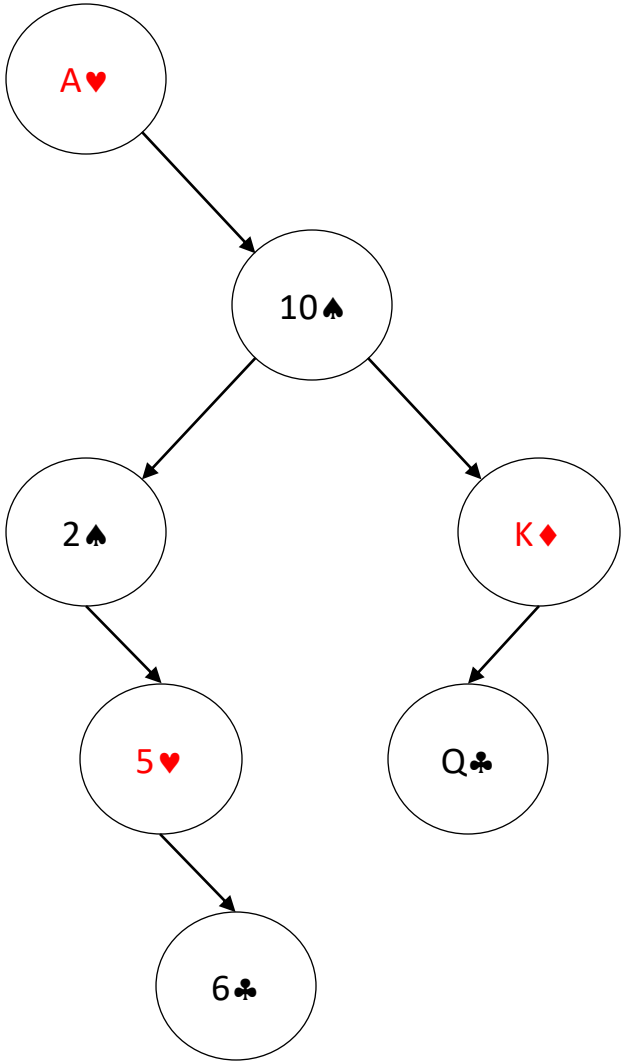
- Algoritmo de encontrar o menor e aponta para a direita dele:

```
treenodeptr tPointSmaller(treenodeptr &p) {
        treenodeptr t = p;
        if (p->left == NULL){
                p = p->right;
                return t;
        }       else
                return tPointSmaller(p->left);
}
```

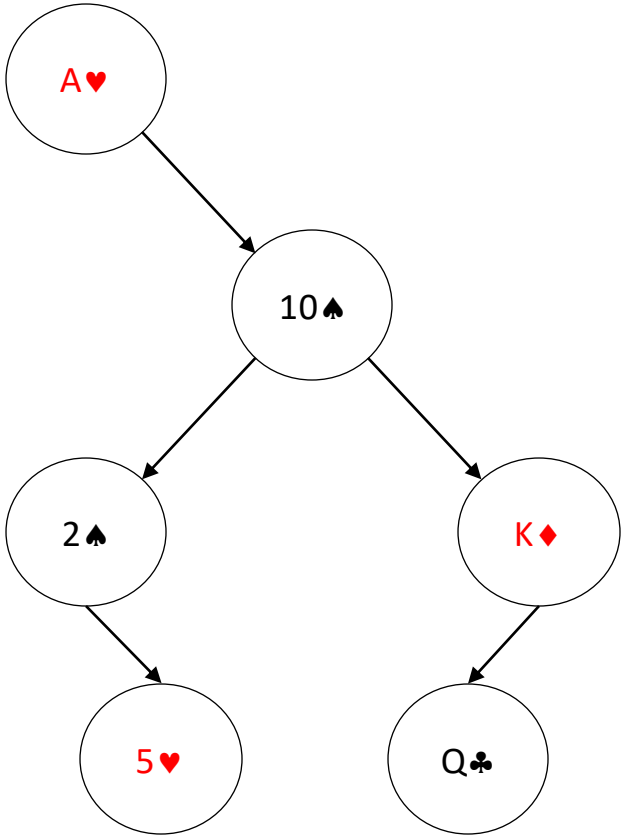
- Algoritmo de remover um nó:

```
bool tRemove(treenodeptr &p, int x) {
        treenodeptr t;
        if (p == NULL) return false;
        if (x == p->info){
                t = p;
                if(p->left == NULL)
                        p = p->right;
                else if(p->right == NULL)
                        p = p->left;
                else {
                        t = tPointSmaller(p->right);
                        p->info = t->info;
                }
                delete t;
                return true;
        } else if (x < p->info) return tRemove(p->left,x);
        else return tRemove(p->right,x);
}
```

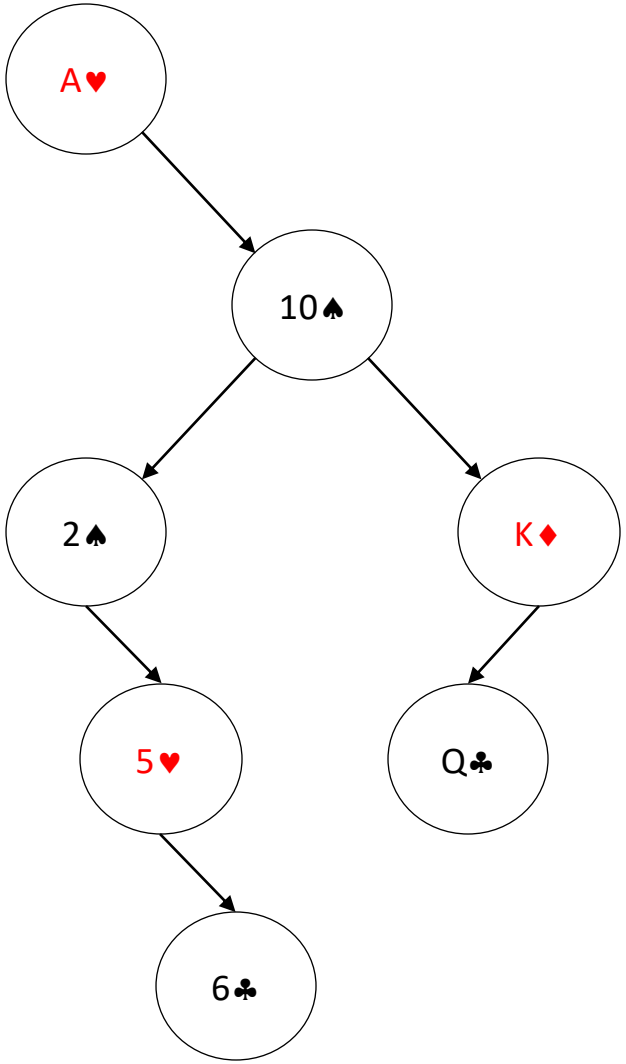
Removendo a carta 6♣



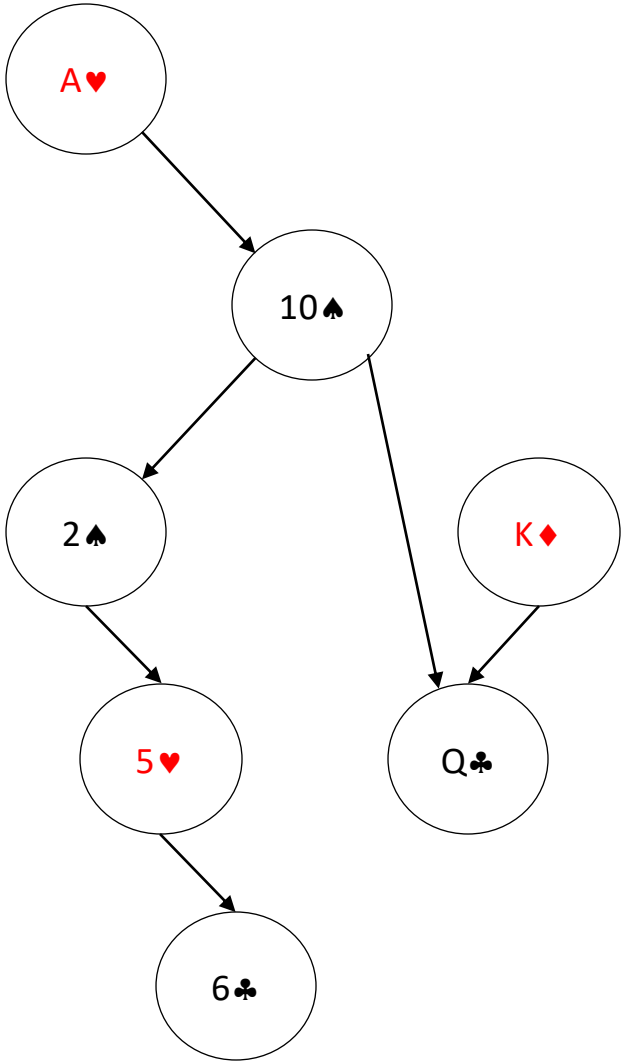
Removendo a carta 6♣



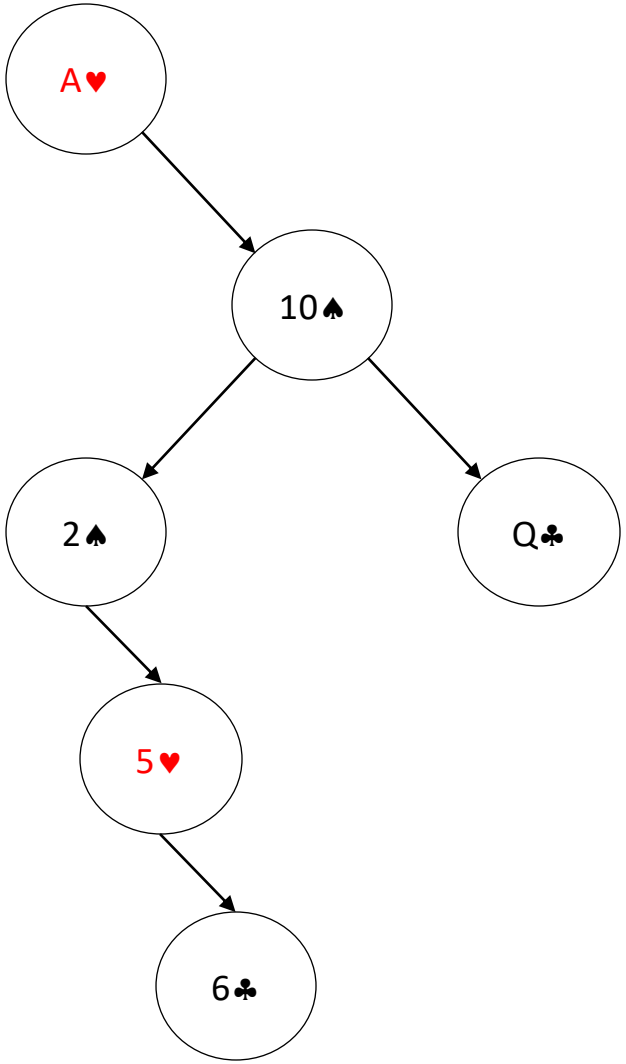
Removendo a carta K♦



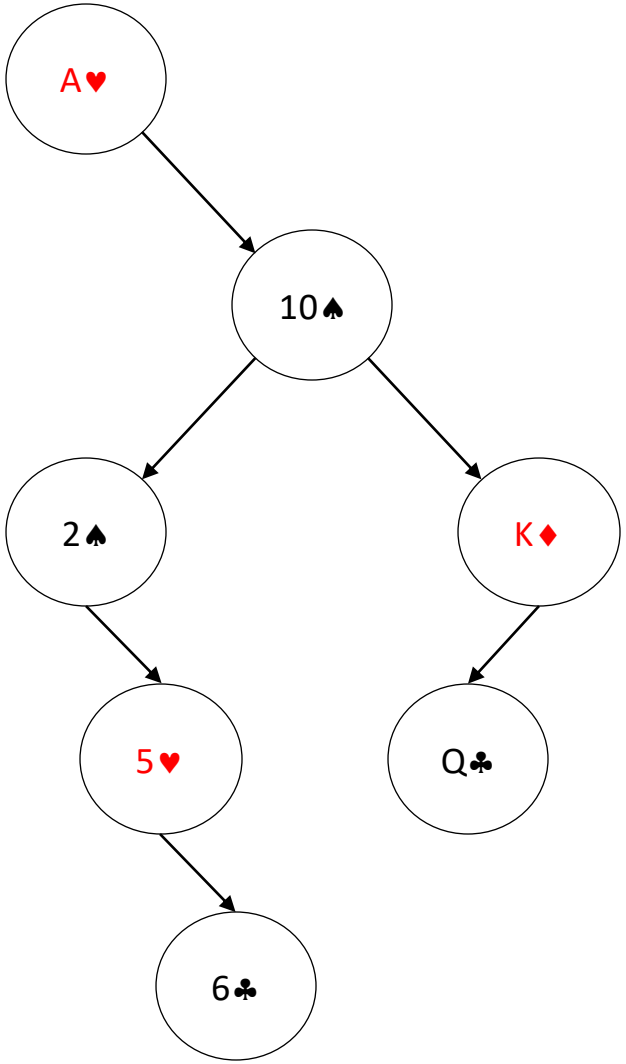
Removendo a carta K♦



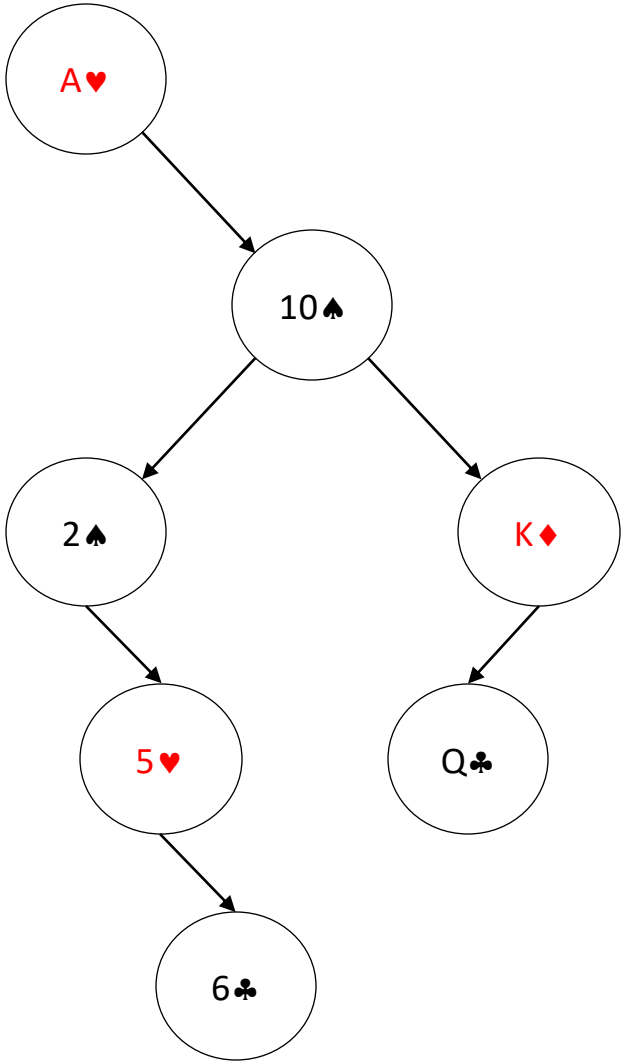
Removendo a carta K♦



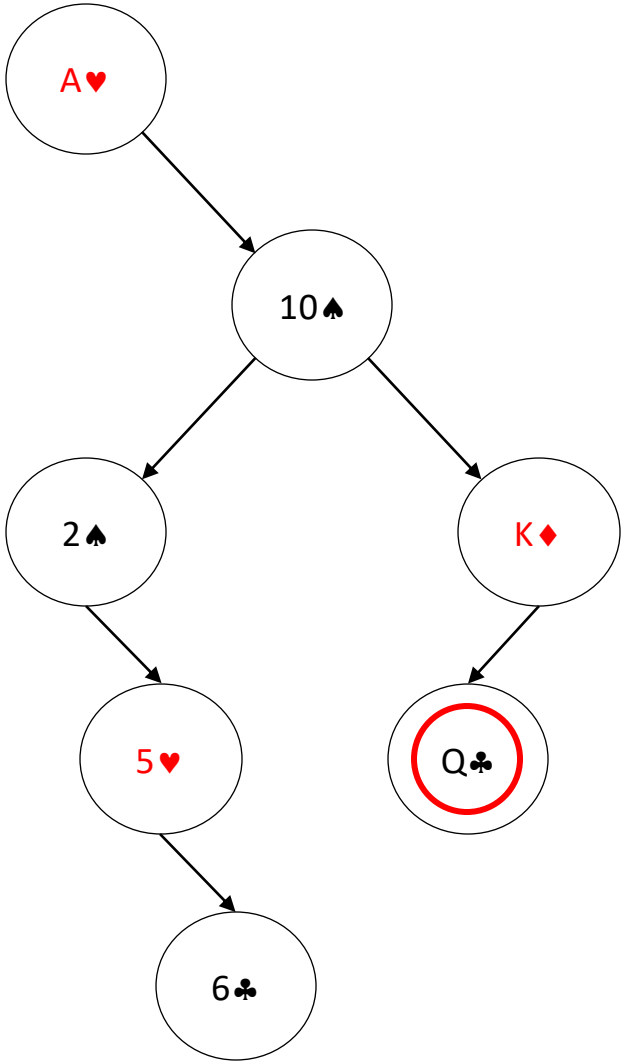
Removendo a carta 10♠



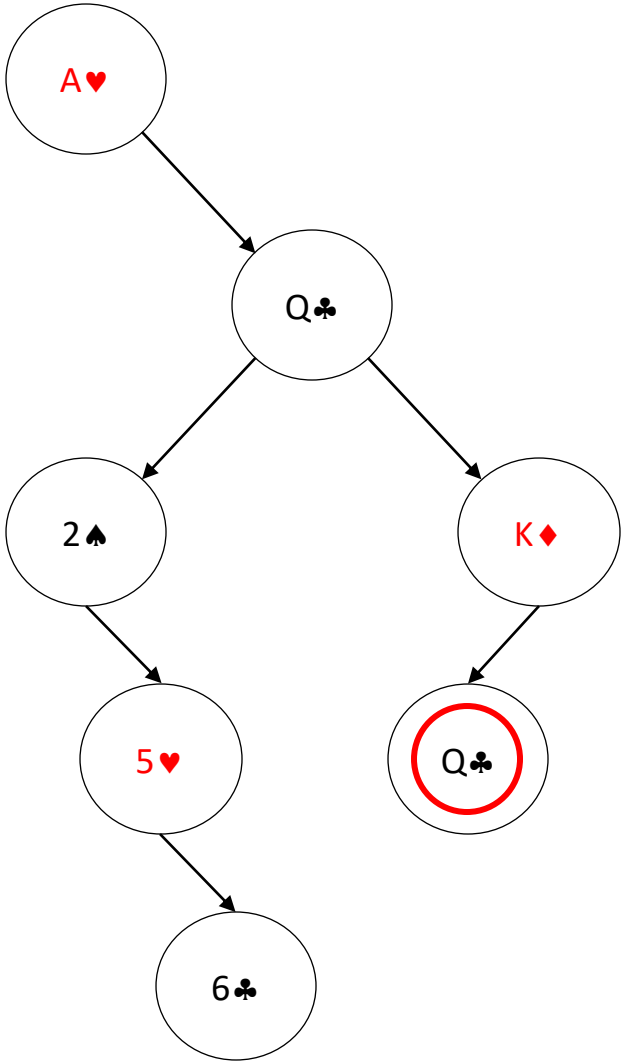
Removendo a carta 10♠



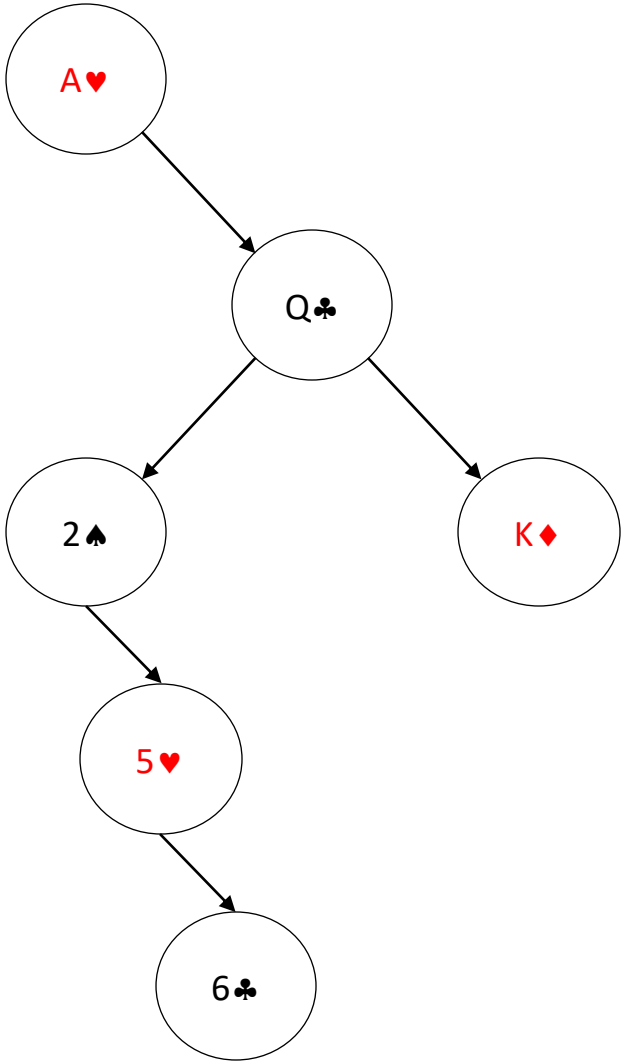
Removendo a carta 10♠



Removendo a carta 10♠



Removendo a carta 10♠



Percursos

- O algoritmo de **varredura** em uma árvore binária de busca, assim como em um grafo qualquer, pode ser uma BFS ou uma DFS.

- Porém, como nessa estrutura de dados temos no máximo dois nós adjacentes (filho da direita e filho da esquerda) temos algumas particularidades em cada um desses algoritmos.

Percurso em profundidade

- Nessa varredura, os nós descendentes de um determinado nó são visitados antes do próximo filho de um nó.

- Pode ocorrer de três formas:
  - Pré-ordem;
  - Em-ordem;
  - Pós-ordem.

Percurso em profundidade em pré-ordem

```
void tPreOrder(treenodeptr  p) {
        if (p != NULL){
                cout << p->info << endl;
                tPreOrder(p->left);
                tPreOrder(p->right);
        }
}
```

Percurso em profundidade em-ordem

```
void tInOrder(treenodeptr  p) {
        if (p != NULL){
                tInOrder(p->left);
                cout << p->info << endl;
                tInOrder(p->right);
        }
}
```

Percurso em profundidade pós-ordem

```
void tPostOrder(treenodeptr  p) {
        if (p != NULL){
                tPostOrder(p->left);
                tPostOrder(p->right);
                cout << p->info << endl;
        }
}
```

Varredura em largura (em nível)

- Apresenta os nós da árvore por ordem de nível.

```
void tLevels(treenodeptr p) {
        treenodeptr n;
        list<trenodeptr> q;
        if (p != NULL){
                q.push_back(p);
                while(!q.empty()){
                        n = q.front();
                        q.pop_front();
                        if (n->left != NULL)
                                q.push_back(n->left);
                        if (n->right != NULL)
                                q.push_back(n->right );
                        cout<<n->info<<endl;
                    }
         }
}
```

Árvore AVL

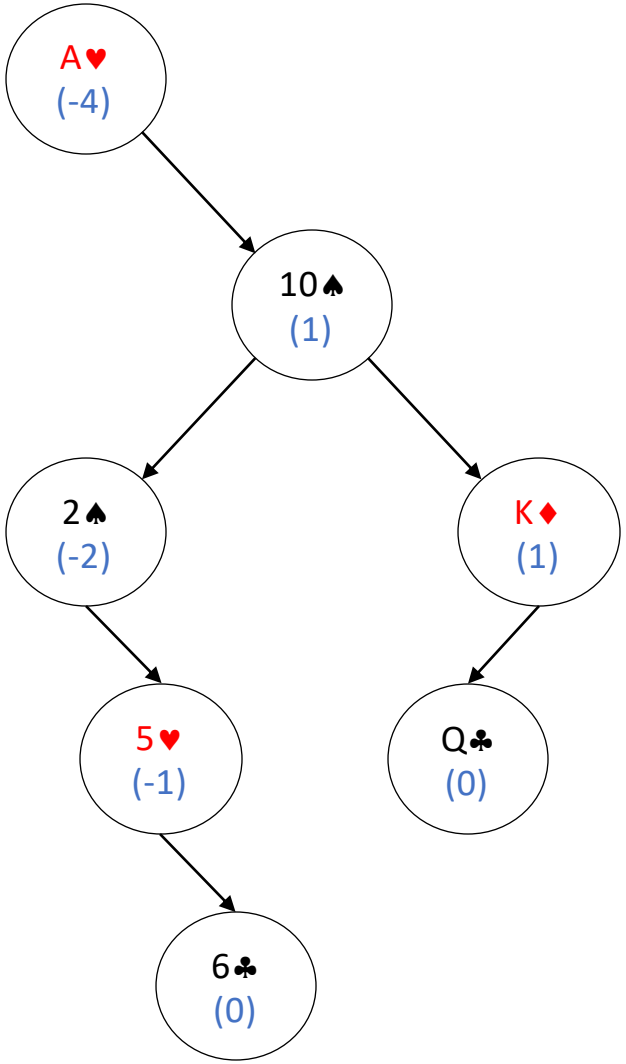
- É um tipo de árvore binária na qual as alturas das duas subárvores de todos os nós nunca difere em mais de um.

- O balanceamento de um nó é definido como a diferença da altura de sua subárvore esquerda pela altura da sua subárvore direita.

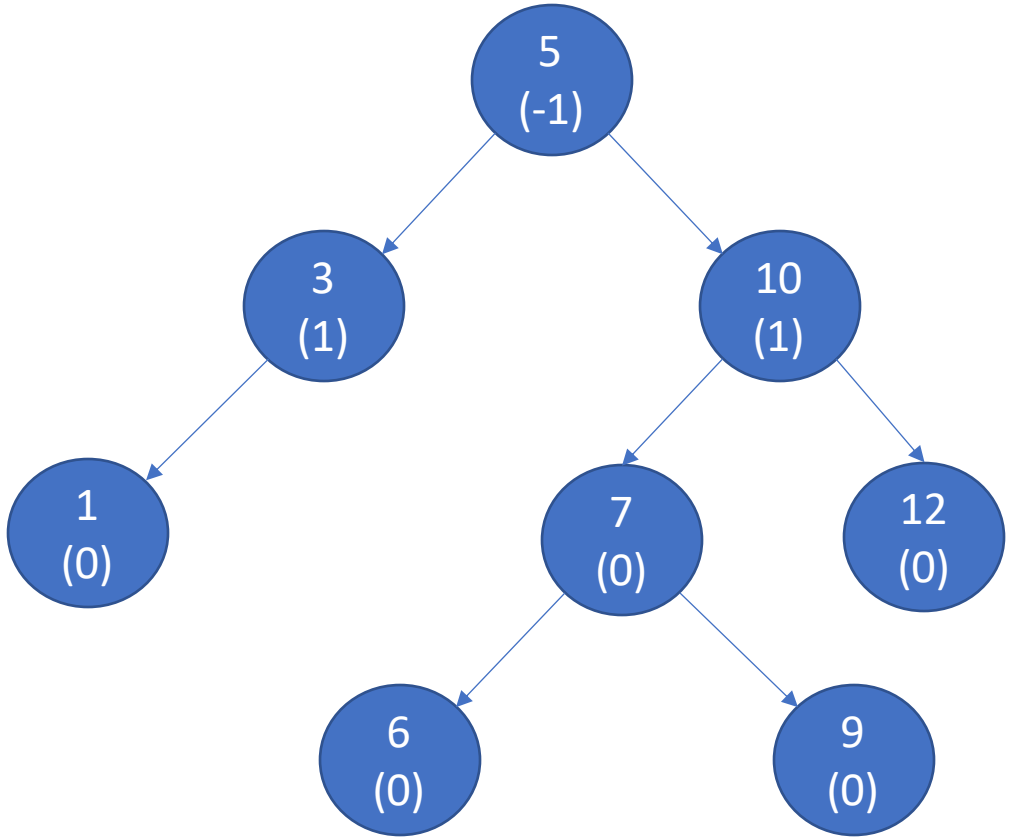
- Dessa forma, os possíveis valores de balanceamento são -1, 0 ou 1.

- Uma árvore binária balanceada garante buscas mais eficientes.

Exemplo de Árvore Binária desbalanceada



Exemplo de Árvore AVL



Rotação

- É um mecanismo para transformar a árvore binária para torna-la balanceada, sem mudar as características de navegação inicial.

- O ideal é realizar a rotação sempre que uma árvore se torna desbalanceada, ou seja, é inserido um nó a esquerda de um nó com balanceamento 1 ou é inserido