복불복 - 풀이

0 문제 오류에 대한 사과 말씀

대회 초반에 문제 설명에 오류가 있었습니다.

오류가 생긴 이유는 제가 문제를 각색하는 과정에서, '상위 k등'의 조건만 남겨도 현재 문제와 동치일 것이라고 착각했기 때문입니다. 이는 명백히 사실이 아니지만, 당시에는 그저 '당연하다'고 생각하고 의심을 하지 않았습니다.

앞으로는 이런 일이 발생하지 않도록, 검토 과정에서 조판된 문제를 읽고 모든 부분문제에 대한 코드를 작성하는 절차를 추가하겠습니다.

1 무엇을 구해야 하는가?

문제의 설명이 상당히 장황합니다만, 결국 "처음 카드를 못 뽑은 $n-k$명이 카드를 한 번 더 뽑은 후에도 처음 카드를 잘 뽑은 k명을 단 한 명도 역전하지 않는 경우의 수"를 구해야 합니다. 문제에 순위에 관한 조건이 달려 있기는 하지만, 어차피 처음 하위 $n-k$명이 역전을 못 하면 처음 상위 k명은 계속 k등 이내에 있게 되기 때문에 상관이 없습니다.

이 조건을 보기 좋게 수식으로 나타내 봅시다. 편의상 문제에서 주어진 $a_{1..n}$과 $b_{1..n}$이 내림차순 정렬되어 있다고 합시다. (이렇게 하면 처음 상위 k명이 $a_{1..k}$를 뽑았다고 생각할 수 있습니다.)

우리가 구해야 할 것은 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 순열 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 가운데

$$\min_{1\le i\le k}(a_i + b_{p_i}) \ge \max_{k+1\le i\le n}(a_i + b_{p_i}) \tag{1}$$

를 만족하는 것의 개수입니다. 처음 카드를 뽑았을 때 i등이었던 사람이 두 번째에는 b_{p_i}가 적힌 카드를 뽑았다고 생각하고 식을 보시면 됩니다. 처음 상위 k명의 최종 합들의 최솟값(좌변)이 처음 하위 $n-k$명의 최종 합들의 최댓값(우변)보다 크거나 같다는 것은, 처음 상위 k명 중 꼴등이 처음 하위 $n-k$명 중 1등보다 나쁘지 않다는 것을 의미하므로 역전에 실패한 것입니다.

2 2번 부분문제 ($k = 1$) 해결하기

부등식 1에 $k = 1$을 대입하면,

$$a_1 + b_{p_1} \ge \max_{2\le i\le n}(a_i + b_{p_i}) \tag{2}$$

여기서 p_1을 결정하면 좌변이 상수 C가 되어, 결국 모든 i에 대해

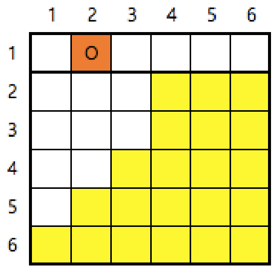
$$b_{p_i} \le C - a_i \tag{3}$$

꼴의 부등식을 만족하는 $p_{2..n}$의 개수를 모든 p_1에 대해 구하면 됩니다. 여기서 할 수 있는 관찰은, $a_{1..n}$이 내림차순이기 때문에, i가 증가할수록 $C - a_i$의 값도 증가하고, 그 결과 p_i로 가능한 값들의 범위가 점점 늘어난다는 것입니다.

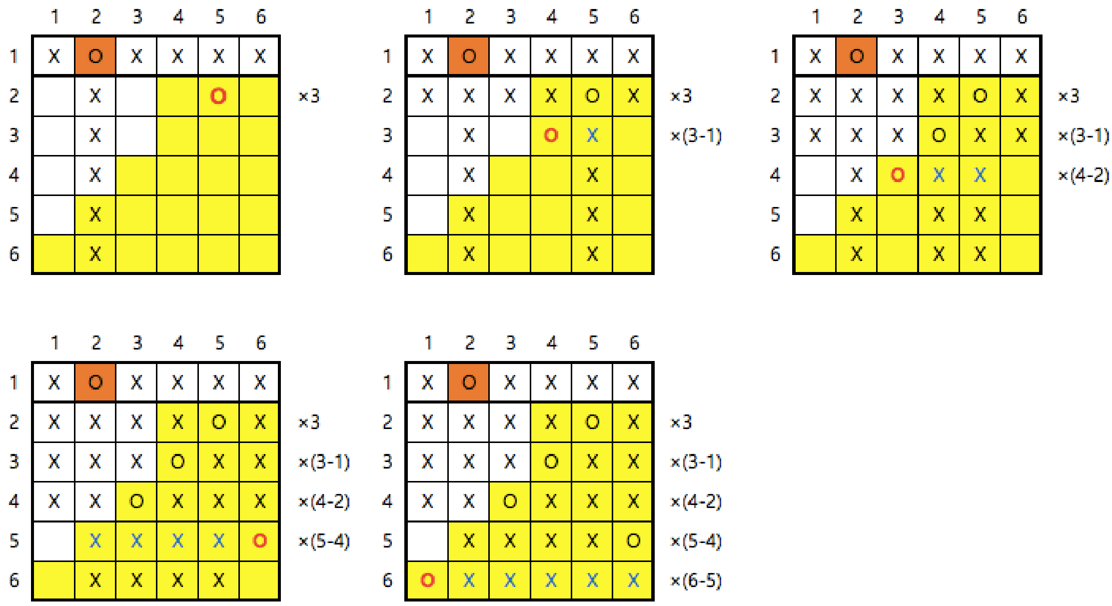
2.1 시각화

설명의 편의를 위해 시각화를 해보고자 합니다. $n \times n$ 크기의 체스판에 n개의 룩을 서로 공격하지 않도록 놓고자 합니다. i행 j열에 룩을 놓는다는 것을 처음 a_i를 뽑은 사람이 두 번째에는 b_j를 뽑는 것이라고 생각합시다.

지금은 $b_j \le C - a_i$를 만족하는 칸 (i, j)에만 룩을 놓을 수 있습니다. 이러한 모든 칸들에 노란색을 칠했다고 합시다. $b_{1..n}$이 내림차순이기 때문에 색칠된 칸들은 오른쪽 벽(?)에 붙어 있게 됩니다. 이러한 상황에서, 우리는 1번 행에 룩이 하나 놓여 있을 때, 노란색으로 칠해진 칸들에 룩 $n-1$개를 놓을 수 있는 경우의 수를 구해야 합니다.



행 번호가 커질수록 노랑색 구간이 점점 확장되는 형태이므로, 룩을 2번 행에서부터 아래로 순서대로 놓아보며 곱의 법칙으로 경우의 수를 쉽게 구할 수 있습니다.



정확히 쓰면 p_i의 범위가 $q_i \le p_i \le n$의 꼴로 나타날 경우, 경우의 수는

$$\prod_{i=2}^{n} \max\left((n - q_i + 1) - (i - 2) - (q_i \le p_1\text{이면 } 1, \text{아니면 } 0), 0\right) \tag{4}$$

가지입니다.

p_1에 따라 p_i로 가능한 수가 하나도 없을 수도 있는데, 이 경우는 따로 0가지로 처리해야 합니다.

3 '커트라인' 정하기

부등식 1을 만족하는 순열의 개수를 직접 구하는 것은 힘들어 보이니, 아래와 같이 '커트라인' T를 정해서,

$$\min_{1\le i\le k}(a_i + b_{p_i}) \ge T \ge \max_{k+1\le i\le n}(a_i + b_{p_i}) \tag{5}$$

를 만족하는 순열 p의 개수를 세어준 뒤 모두 더하면 된다는 생각을 할 수 있습니다. 이렇게 커트라인을 고정된 상수로 두면 2번 부분문제를 해결했을 때와 같이 모든 i에 대해 p_i의 범위를 구할 수 있기 때문에, 순열의 개수를 세기가 쉬워집니다.

하지만 이렇게 하면 같은 순열을 여러 번 셀 수도 있다는 문제점이 있습니다. 가령 위 부등식 5에서 좌변이 5이고 우변이 2인 순열 p는 $T = 2, 3, 4, 5$에서 모두 고려됩니다.

이를 해결하기 위해 좌변은 T *초과*, 우변은 T 이하인, 즉

$$\min_{1\le i\le k}(a_i + b_{p_i}) > T \ge \max_{k+1\le i\le n}(a_i + b_{p_i}) \tag{6}$$

를 만족하는 순열 p의 개수를 세어준 뒤 원래 경우의 수에서 빼면, 상위 k명의 최종 합이 **정확히** T인 경우의 수를 셀 수 있습니다. T로 가능한 수는 최대 2 000개 정도 ($1 \le a_i, b_j \le 1\,000$) 있으므로, 모두 고려해볼 수 있습니다.

3.1 3번 부분문제 ($n \le 15$) 해결하기

모든 i에 대해 p_i로 가능한 수들의 목록이 있을 때, 유효한 순열 p의 개수는 비트마스크 DP로 구할 수 있습니다. space 문제에서도 거의 같은 아이디어를 요구했습니다. 해당 방법에 대한 설명은 자료를 제시함으로써 생략하겠습니다: `https://goo.gl/XkLrTL`

4 4번 부분문제 ($k \le 8$) 해결하기

범위에 대한 관찰을 해 봅시다.

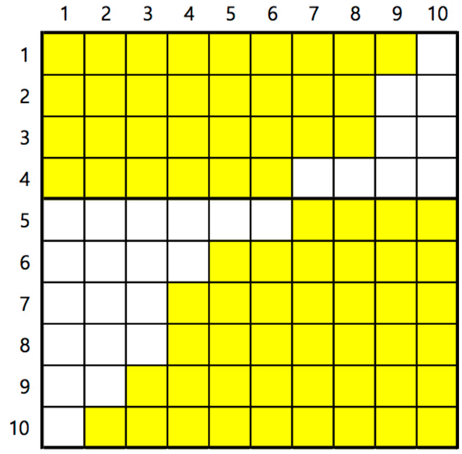
$1 \le i \le k$일 때에는 i가 증가함에 따라 p_i의 범위가 점점 줄어듭니다. 또한 모든 p_i의 범위는 $1 \le p_i \le q_i$ 꼴입니다.

$$a_i + b_{p_i} \ge C \to 1 \le p_i \le b^{-1}(C - a_i) \tag{7}$$

$k+1 \le i \le n$일 때에는 i가 증가함에 따라 p_i의 범위가 점점 늘어납니다. 또한 모든 p_i의 범위는 $q_i \le p_i \le n$ 꼴입니다.

$$a_i + b_{p_i} \le C \to b^{-1}(C - a_i) \le p_i \le n \tag{8}$$

따라서 고정된 커트라인 T에 대해 '시각화'를 해 보면, 룩이 들어갈 수 있는 칸들은 대략 아래와 같이 k번 행을 경계로 두 개의 계단 형태로 나타나 있게 됩니다. 커트라인 T에 따라 어떤 행에는 룩이 들어갈 수 있는 칸이 아예 없을 수도 있는데, 이 경우에는 경우의 수를 0으로 따로 처리해야 합니다.

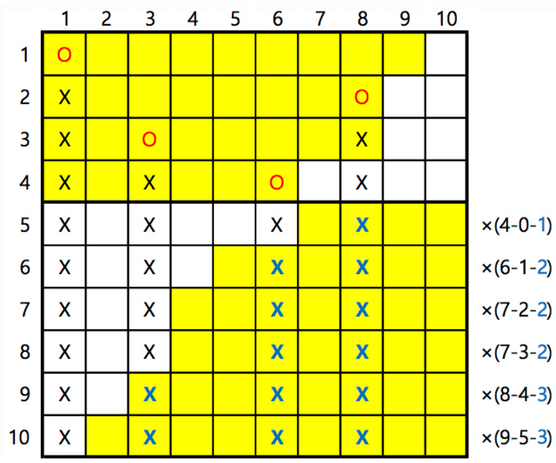


이 상태로 보면 룩 n개를 넣는 경우의 수를 구하기 어려워 보입니다. 하지만 2번 부분문제의 해답을 볼 때, $i \le k$ 또는 $i > k$인 칸들만 고려할 수 있는 방안이 생긴다면 경우의 수를 간단히 셀 수 있을 것 같아 보입니다.

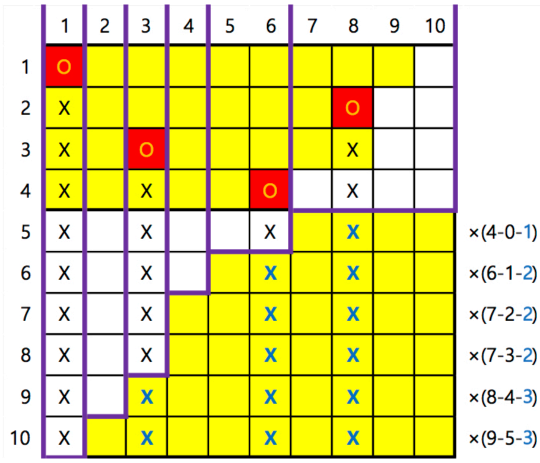
그러니 일단 $i \le k$인 칸들에 임의로 룩을 채워 넣었다고 가정합시다. 그러면 $i > k$인 칸들에 룩을 $n-k$개 채워넣는 경우의 수는

$$\prod_{i=k+1}^{n} \max\Big((n-q_i+1)-(i-k-1)-(1..k\text{번 행}, q_i..n\text{번 열에 이미 채워진 룩의 수}), 0\Big) \tag{9}$$

가지입니다.



원래의 식에서 달라진 부분은 ‘$(1..k$번 행, $q_i..n$번 열에 이미 채워진 룩의 수$)$’이므로, 여기에만 집중하면 됩니다. 다행인 점은 이제 $1..k$번 행에 룩이 어떻게 배치되었는지에 대해서까지는 알 필요가 없다는 것입니다. 대신 계단의 ‘평평한’ 부분에 해당하는 열들에 ‘몇 개’의 룩이 미리 배치되었는지에 대한 정보를 알면 됩니다.



먼저 아랫 계단의 맨 오른쪽 평평한 부분에 해당하는 열들, 즉 $[1,k] \times [q_{k+1}, n]$ 영역에 룩 $m(0 \le m \le k)$개를 미리 배치하는 경우의 수를 구해 봅시다. (위의 그림에서 $7..10$번 열에 해당하는 부분입니다.) 해당 부분은 열 번호가 감소할수록 범위가 늘어나는 형태이기 때문에, 간단한 동적 계획법으로 구할 수 있습니다.

$\texttt{ta}[j,m]$을 $[1,k] \times [j,n]$ 영역에 해당하는 칸들에 룩 m개를 채워넣는 경우의 수로 정의합시다. 또한 $q_{1..k}$를 활용해 j번 열의 ‘기둥’의 높이 h_j를 구해놓읍시다. (위 그림에서 $h_7 = h_8 = 3, h_9 = 1, h_{10} = 0$입니다.)

$\texttt{ta}[j,m]$을 계산해야 하는 상황에서는 아래의 두 가지 경우를 고려할 수 있습니다.

- j번 열에 룩을 채워넣지 않을 때: 경우의 수는 $\texttt{ta}[j+1, m-1] \times \max\left(h_j - (m-1), 0\right)$가지
- j번 열에 룩을 채워넣지 않을 때: 경우의 수는 $\texttt{ta}[j+1, m]$가지

따라서 이 두 경우를 그냥 합쳐주면 점화식이 완성됩니다. j가 감소하는 순, m이 증가하는 순으로 ta 배열을 채워나간 후, $\texttt{ta}[q_{k+1}, *]$의 값을 참조하면 됩니다.

그런데 왜 굳이 ‘맨 오른쪽’ 평평한 부분에 대해서만 경우의 수를 센 것일까요? 크게 두 가지 이유가 있는데, 첫 번째는 이 부분은 $k+1..n$번 행 모두에 영향을 미친다는 것이고, 두 번째는 그 외의 열들(즉 $1..(q_{k+1}-1)$번 열)에는 특수한 성질이 있다는 것입니다. 그 성질은 단순하게도, $[1,k] \times [1, (q_{k+1}-1)]$ 영역은 항상 룩을 놓을 수 있는 자리라는 것입니다. 이를 증명하기 위해서는 $q_{k+1} - 1 \le q_k$임을 보이면 충분합니다. 편의상 q_k를 j, q_{k+1}을 j'로 놓겠습니다.

우리가 구하는 경우의 수는 고정된 커트라인 T에 대해 ‘(좌변) $\ge T \ge$ (우변)을 만족하는 순열의 수’와 ‘(좌변) $> T \ge$ (우변)을 만족하는 순열의 수’입니다. 따라서,

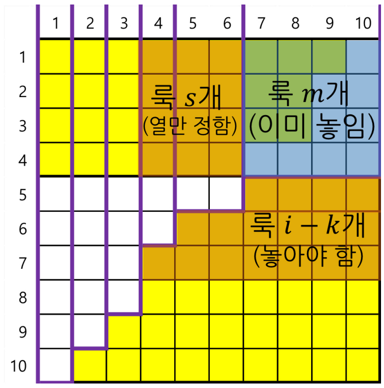
- j'는 $a_{k+1} + b_{j'} \le T$를 만족시키는 가장 작은 수이므로, $a_{k+1} + b_{j'} \le T$이고 $a_{k+1} + b_{j'-1} > T$
- $a_k + b_{j'-1} > a_{k+1} + b_{j'-1} > T$
- j는 $a_k + b_j > T$ (혹은 $\ge T$)를 만족시키는 가장 큰 수이므로 $j' - 1 \le j$

임을 알 수 있습니다.

이렇게 룩이 들어갈 수 있는 영역이 '직사각형'이면 좋은 점은, 룩을 놓을 열들의 번호만 알아도 경우의 수를 바로 구할 수 있다는 것입니다. 자세히 설명하자면, $[1,k]\times[q_{k+1},n]$ 영역에 m개의 룩이 이미 놓여 있고, $[1,k]\times[1,(q_{k+1}-1)]$ 영역에 놓을 룩 $k-m$개의 열 번호가 정해져 있는 상황에서, 룩 $k-m$개를 놓을 수 있는 경우의 수는 $(k-m)!$가지입니다.

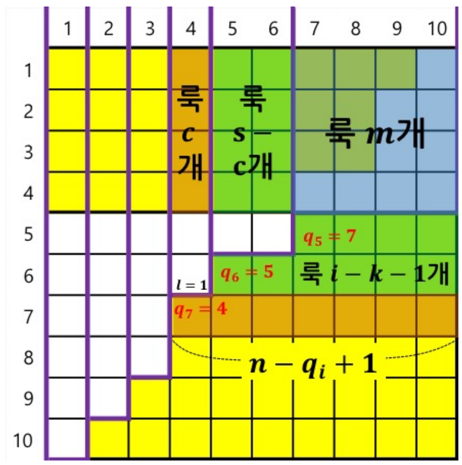
이 점을 이용해서 $[1,k]\times[q_{k+1},n]$ 영역에 m개의 룩을 놓을 때, 가능한 순열의 수를 구해보도록 합시다. (즉 m은 고정된 상황입니다.)

$\texttt{tb}[i,s]$를 $[1,k]\times[q_{k+1},n]$ 영역에 m개의 룩이 이미 놓여 있는 상황에서, "$(k+1)..i$번 행에 $i-k$개의 룩을 놓고, $[1,k]\times[q_i,(q_{k+1}-1)]$ 영역에 s개의 룩을 놓을 *열 번호*를 정하는" 경우의 수로 정의합시다. 아래 그림은 $i=7$일 때 $\texttt{tb}[i,s]$의 대략적인 의미를 나타낸 것입니다.



먼저, 기저사례는 $\texttt{tb}[k+1,0]=\max\left((n-q_{k+1}+1)-m,0\right)$입니다.

이제 $i>k+1$일 때를 살펴봅시다. i번 행에 계단의 평평한 부분이 있다면, 그 길이는 $q_{i-1}-q_i$입니다. 편의상 그 길이를 l로 둡시다. (단 평평한 부분이 없으면 길이를 0으로 둡시다.) 평평한 부분에 해당하는 윗 계단의 영역, 즉 $[1,k]\times[q_i,q_{i-1}-1]$ 영역에 룩 c $(0\le c\le\min(s,l))$개를 놓는다고 합시다. $(k+1)..(i-1)$번 행에서는 $[1,k]\times[q_{i-1},(q_{k+1}-1)]$ 영역에 룩을 추가로 $s-c$개 놓았어야 할 것이므로 그 경우의 수는 $\texttt{tb}[i-1,s-c]$이고, $[1,k]\times[q_i,(q_{i-1}-1)]$ 영역에 룩을 놓을 열 번호를 정하는 경우의 수는 $\binom{l}{c}$가지이며, i번 행에 룩을 하나 놓을 수 있는 경우의 수는 $\max\left((n-q_i+1)-(i-k-1)-(m+s),0\right)$가지입니다.



이 점을 종합하여 $\texttt{tb}[i,s]$의 점화식을 구하면 (단, $l=\min(q_{i-1}-q_i,s)$)

$$\texttt{tb}[i,s]=\sum_{c=0}^{l}\texttt{tb}[i-1,s-c]\times\binom{l}{c}\times\max\left((n-q_i+1)-(i-k-1)-(m+s),0\right)\tag{10}$$

입니다.

이제 남은 것은 $[1,k] \times [1, q_n - 1]$ 영역에 룩을 채우는 것입니다. 이 영역에 룩을 c개 넣는다고 가정하면, 룩을 넣을 열 번호를 정하는 경우의 수가 $\binom{q_n-1}{c}$가지 있습니다. 그러면 $[1,k] \times [q_n, q_{k+1} - 1]$ 영역에는 룩을 $k - m - c$개 놓아야만 하므로, $\texttt{tb}[n, k - m - c]$를 참조해야 합니다.

따라서 $[1,k] \times [q_{k+1}, n]$ 영역에 m개의 룩이 이미 놓여 있는 상황에서, "$(k+1)..n$번 행에 $n-k$개의 룩을 놓고, $[1,k] \times [1, (q_{k+1} - 1)]$ 영역에 $k - m$개의 룩을 놓을 *열 번호*를 정하는" 경우의 수는,

$$\sum_{c=0}^{k-m} \texttt{tb}[n][k-m-c] \times \binom{q_n - 1}{c} \tag{11}$$

가지입니다. 여기에 '$[1,k] \times [q_{k+1}, n]$ 영역에 m개의 룩을 놓을 수 있는' 경우의 수 $ta[q_{k+1}, m]$과, 위에서 설명한 $(k-m)!$을 곱하면 조건을 만족하는 순열의 수가 됩니다.

고정된 $m (0 \le m \le k)$에 대해 위에서 설명한 경우의 수를 구하는 데에는 $O(nk)$의 시간이 들고, 커트라인 T는 $O(nk)$개 있으므로, 시간복잡도는 $O(n^2k^3)$입니다.

5 5번 부분문제 해결하기

그냥 m개의 룩을 따로 뽑지 않고, tb 배열의 정의에 포함시키는 시도를 하고자 합니다.

즉 $\texttt{tb}[i, s]$를 "$(k+1)..i$번 행에 $i-k$개의 룩을 놓고, $[1,k] \times [q_i, n]$ 영역에 s개의 룩을 놓는데, 열 번호가 $[q_i, (q_{k+1} - 1)]$인 영역에는 룩을 놓을 *열 번호*를 정하고, $[1,k] \times [q_{k+1}, n]$ 영역에는 룩을 놓는" 경우의 수로 정의합시다.