第３回　レポート課題

岡　恭平

2020 年 5 月 30 日

命題 1.50. 教科書参照

証明. 定義 1.183 より

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}} &= (\bar{\boldsymbol{x}_1}, \bar{\boldsymbol{x}_2}, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}_n})' \\
&= \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_{k1}, \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_{k2}, \cdots, \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_{kn})' \\
&= \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_1, \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_2, \cdots, \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x} = \frac{1}{n}\boldsymbol{X'1}_n \quad (\because 1.181)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_{XX}} &= (s_{x_i x_j}) \quad (i, j = 1, 2, 3 \cdots, p) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})' \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' - \boldsymbol{x}_i \bar{\boldsymbol{x}}' - \bar{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}_i' + \bar{\boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}}') \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' - \bar{\boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}}' \quad (\because 1.101) \\
&= \frac{1}{n}\boldsymbol{X'X} - \bar{\boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}}' \quad (\because \text{行列の積}) \\
&= \frac{1}{n}\boldsymbol{X'X} - (\frac{1}{n}\boldsymbol{X'1}_n)(\frac{1}{n}\boldsymbol{1}_n'\boldsymbol{X}) \\
&= \frac{1}{n}(\boldsymbol{X'X} - \frac{1}{n}\boldsymbol{X'1}_n\boldsymbol{1}_n'\boldsymbol{X})
\end{aligned}
$$

以上と同様にして、$\boldsymbol{S}_{xy}$、$\boldsymbol{S}_{XY}$ でも成立する。 □

命題 1.51. 教科書参照

証明.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{XX} &= (\boldsymbol{r}_{x_i x_j}) \quad (i, j = 1, 2 ... p) \\
&=
\end{aligned}
$$

□

命題 1.52. 教科書参照

証明. $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ の列空間への射影行列は

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}])^{-1}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top &= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\top \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}, & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^\top \\ \boldsymbol{B}^\top \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top
\end{aligned}$$

となる.

一方で，$\boldsymbol{A}$ の列空間への射影 $\boldsymbol{P_A}$ を考えると，

$$\boldsymbol{P_A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top$$

であり，$\boldsymbol{A}$ の列空間と直交する空間への射影を $\boldsymbol{P_A^\perp}$ とすると

$$\boldsymbol{P_A} + \boldsymbol{P_A^\perp} = I$$

が成り立つ．いま $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ より，$\boldsymbol{B}$ の列空間と $\boldsymbol{A}$ の列空間が直交することから，

$$\boldsymbol{P_A} + \boldsymbol{P_B} = I$$

が成り立つ.

よって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top = I$ が成り立つ.

□