4.1

$\underset{y}{argmax} P(y|x) = \underset{y}{argmax} P(x|y)P(y) = \underset{y}{argmax} P(x|y)\frac{1}{N} = \underset{y}{argmax} P(x|y) = \underset{y}{argmax} \prod_1^n P(x^{(k)}|y) = \underset{y}{argmax} \prod_1^n \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^{(k)}-\mu_{yk})^2}{2\sigma^2}} = \underset{y}{argmax} \Sigma_1^n - \frac{(x^{(k)}-\mu_{yk})^2}{2\sigma^2} = \underset{y}{argmin} \Sigma_1^n \frac{(x^{(k)}-\mu_{yk})^2}{2\sigma^2} = \underset{y}{argmin} \Sigma_1^n (x^{(k)} - \mu_{yk})^2 = \underset{y}{argmin}\ dist(x, \mu_y)$

Что и говорит нам о том, что мы относим объект x к классу y, центр которого μ_y ближе всего к x.

4.2

Пусть доля класса 1 - q. Посчитаем значения в среднем:

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{TP}{qN} = \frac{qpN}{qN} = p$$

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN} = \frac{FP}{(1-q)N} = \frac{(1-q)pN}{(1-q)N} = p$$

Тогда $ROC - AUC$ в среднем:

$$ROC - AUC = \frac{1 + TPR - FPR}{2} = \frac{1 + p - p}{2} = \frac{1}{2}$$