1.4 最小点カバー問題

近似アルゴリズム —離散最適化問題への効果的アプローチ— pp.10–14

岡山 大輝

April 21, 2025

兵庫県立大学大学院 情報科学研究科 *(ad25r010@guh.u-hyogo.ac.jp)*

$G = (V, E)$ に対して、
頂点集合 $U (\subseteq V)$ を考える。

「U は辺 $e = (u, v)$ を**カバーする**」

- $u \in U \lor v \in U$

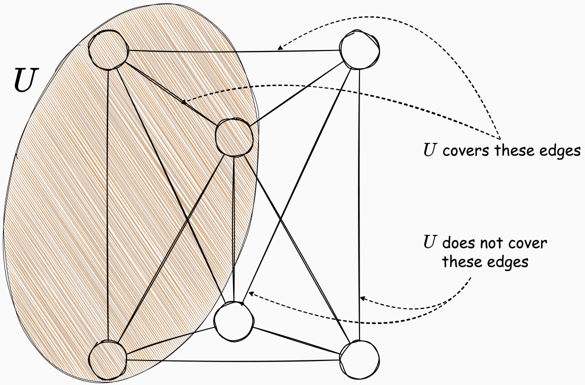

Figure 1: U によってカバーされる／されない辺

点カバーについて

定義（点カバー）

- $(u, v) \in E \Rightarrow u \in U \vee v \in U$

性質

- $V \setminus U$ は独立集合[a]

[a] $u, v \in V \setminus U \Rightarrow (u, v) \notin E$

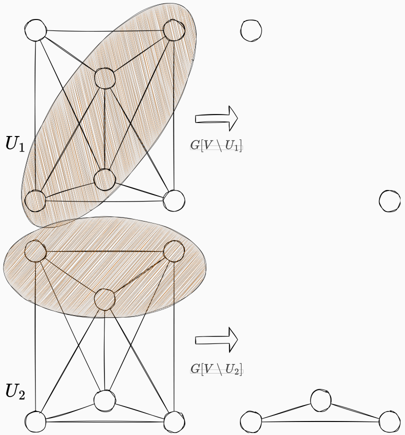

Figure 2: 点集合 U_1, U_2 とそれらの補集合によって誘導されるグラフ（U_1 は点カバー、U_2 は点カバーでない）

最小点カバー問題と周辺の話題

Problem 1 (最小点カバー問題)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & |U| \\ \text{s.t.} \quad & u \in U \vee v \in U \quad \forall (u, v) \in E. \end{aligned}$$

- 最小頂点被覆問題とも
- $\mathcal{NP}$-困難

アルゴリズム

アルゴリズムの設計の前に

アルゴリズムの設計と解析に対する注意 [Vaz10]

- 近似保証を確立するために、アルゴリズムの解の値と最適解の値を比較する必要がある
- しかし最適解を求めることはおろか、最適値を求めることでさえ $\mathcal{NP}$-困難

解決策：多項式時間で計算可能な下界を最適解の値の代わりに用いる（下界スキーム）

$$\frac{\mathrm{ALG}}{\mathrm{OPT}} \leq \frac{\mathrm{ALG}}{\mathrm{LB}}$$

$\mathcal{NP}$-hard

$$\because \mathrm{OPT} \geq \mathrm{LB}$$

e.g. $\max\{t_{\max}, T_{\mathrm{AVG}}\}$

$G = (V, E)$ に対して、
辺集合 $M (\subseteq E)$ を考える。

- 「M はマッチングである」
  - M のどの 2 辺も端点を共有しない
- 「M は極大マッチングである」
  - 集合の包含関係のもとで極大
- 「M は最大マッチングである」
  - 辺数最大

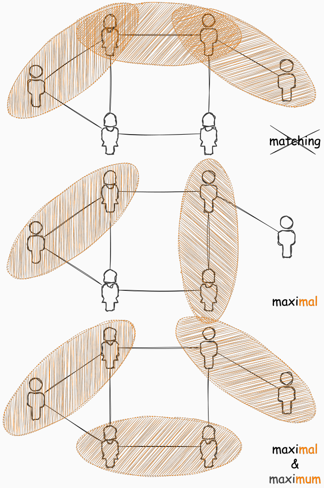

Figure 3: マッチング／マッチングでない例

アルゴリズム

Algorithm

G の極大マッチング M を求め、M の辺の端点からなる集合を点カバーとして出力。

Lemma 2

アルゴリズムが出力する集合は点カバーである。

Proof.

仮にカバーされない辺が存在するとすると、その辺をマッチングに加えることができ、これはマッチングの極大性に矛盾する。 □

近似保証解析

アルゴリズムの近似比

Theorem 3 (アルゴリズムの近似比)

アルゴリズムは最小点カバー問題に対して近似保証 2 を達成する。

Proof.

- アルゴリズムが出力する点カバー U の点数は $|U| = 2|M|$
- 最小点カバー U^* の点数は $|U^*| \geq |M|$（後で示す）
- 以上より、

$$\frac{|U|}{|U^*|} \leq \frac{2|M|}{|M|} = 2$$

□

最小点カバーの下界

Lemma 4 (点カバーの下界)

任意のマッチング M と任意の点カバー U は

$$|M| \leq |U|$$

を満たす。

Sketch of the proof.

- どの点カバーも、任意の辺の少なくとも一方の端点を含む
- どのマッチングの 2 辺も、端点を共有しない

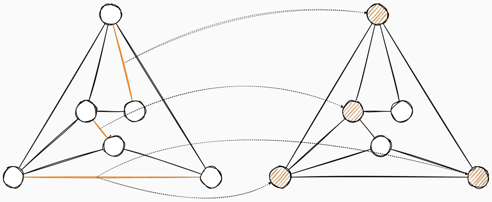

Figure 4: マッチングの任意の辺は、1 or 2 個の点カバーの頂点に対応付けられる

[補足] アルゴリズムの時間計算量

Remark

アルゴリズムの時間計算量は $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ である。

- すべての辺を 1 度ずつ走査する $\mathcal{O}(|E|)$
- 各辺について、端点が既にマッチングに含まれているかどうか確認する $\mathcal{O}(1)$

自然な疑問 [Vaz10]

1. アルゴリズムの近似保証は解析の方法によって改善可能か？
2. 極大マッチングの辺数を下界として用いる方法で、よりよい近似保証をもつ他のアルゴリズムは設計可能か？
3. 2 未満の近似比を達成するアルゴリズムは存在するか？

Q1. アルゴリズムの近似保証は解析の方法によって改善可能か？

A1. 改善できない。（近似率が 2 となる例が存在する）

Example 5 (アルゴリズムの近似保証 2 のタイトな例)

完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の無限個のインスタンスの族に対して、
アルゴリズムが出力する解の近似率は 2 である。

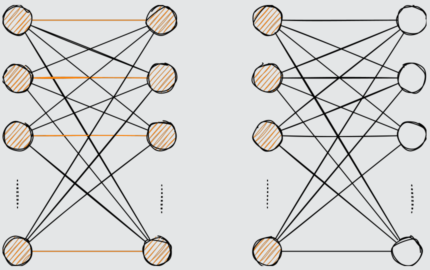

Figure 5: 完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ に対してアルゴリズムが出力する点カバーと最小点カバー

はたして本当にマッチング辺の両端点を追加する必要はあるのか. . . ? (⇒Q2.)

Q2. 極大マッチングの辺数を下界として用いる方法で、よりよい近似保証をもつ他のアルゴリズムは設計可能か？

A2. 設計できない。（最適値の下界として極大マッチングを用いる限りは）

Example 6

n を奇数とすると、完全グラフ K_n の無限個のインスタンスの族に対して、極大マッチングの辺数は $\frac{n-1}{2}$ であるが、最小点カバーの点数は $n-1$ である。

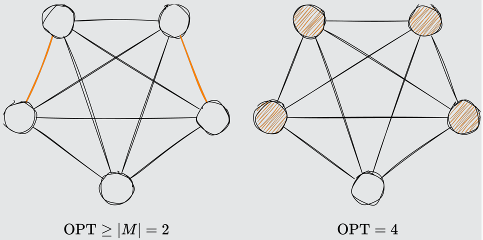

Figure 6: 完全グラフ K_5 に対して極大マッチングから得られる最適値の下界と最小点カバー

Q3. 2 未満の近似比を達成するアルゴリズムは存在するか？

A3. 近似アルゴリズムの分野での代表的な未解決公開問題 **[Vaz10]**

- 例えば、次数の大きい頂点を優先的に選ぶアルゴリズムは？

貪欲的なアルゴリズムが最適解を出力しないインスタンス [del24]

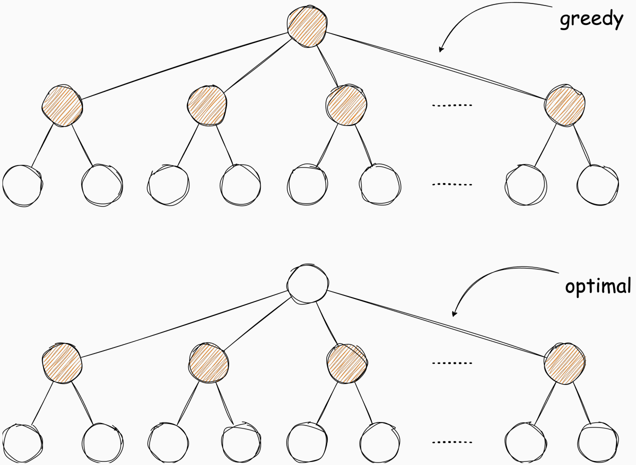

Figure 7: 貪欲的なアルゴリズムが最適解を出力しないインスタンス

最小点カバー問題と最大マッチング問題

最小頂点被覆問題は、整数計画問題に定式化でき、その双対問題は最大マッチング問題である。*[con21]*

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1 && \forall (u,v) \in E \\
& x_v \in \{0,1\} && \forall v \in V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{u,v \in E} y_{uv} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{u,v \in E : u = v' \lor v = v'} y_{uv} \leq 1 && \forall v' \in V \\
& y_{uv} \in \{0,1\} && \forall (u,v) \in E
\end{aligned}
$$

References

[Vaz10] Vijay V. Vazirani. ***Approximation Algorithms.*** 2010.

[del24] Epsilon delta. ***The answer to the "Example where the greedy approach fails for minimum vertex cover problem".*** 2024. URL: https://stackoverflow.com/a/78668799/21288204 (visited on 04/21/2025).

[con21] Wikipedia contributors. **頂点被覆.** 2021. URL: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%A0%82%E7%82%B9%E8%A2%AB%E8%A6%86#cite_note-6 (visited on 04/21/2025).