МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к работе №4 по дисциплине
«Методы оптимизации»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9118-01.03.02миопд
Охроменко Д.А. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 5 » января 2022 г.

г. Владивосток
2022

Постановка задачи

Матричная игра с матрицей A размером 6×8.

$$xAy \quad \begin{array}{ll} \underset{x}{\rightarrow} max & \qquad\qquad \text{(I игрок)} \\ \underset{y}{\rightarrow} min & \qquad\qquad \text{(II игрок)} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 & 6 & 2 & -3 & -7 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -5 & 2 & -9 & 1 & -6 & 0 \\ -10 & 7 & 1 & 5 & 1 & -4 & 2 & 7 \\ -5 & 1 & 2 & -6 & 1 & 8 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Необходимо вычислить верхнюю и нижнюю цену игры. Найти равновесное решение в смешанных стратегиях.

Нижняя и верхняя цена игры

Нижняя цена игры:

$$\left. \begin{array}{l} \min\limits_j a_{1j} = -7 \\ \min\limits_j a_{2j} = -3 \\ \min\limits_j a_{3j} = -9 \\ \min\limits_j a_{4j} = -10 \\ \min\limits_j a_{4j} = -6 \\ \min\limits_j a_{6j} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2$$

Верхняя цена игры:

$$\left. \begin{array}{l} \max\limits_i a_{i1} = 6 \\ \max\limits_i a_{i2} = 7 \\ \max\limits_i a_{i3} = 4 \\ \max\limits_i a_{i4} = 6 \\ \max\limits_i a_{i5} = 6 \\ \max\limits_i a_{i6} = 8 \\ \max\limits_i a_{i7} = 3 \\ \max\limits_i a_{i8} = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 3$$

Равновесное решение в смешанных стратегиях

Будем решать следующие задачи:

$$\begin{cases} e \cdot x \to min, \\ x\widehat{A}^T \geq e, \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \cdot e \to max, \\ \widehat{A}y \leq e^T, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Для поиска равновесного решения в смешанных стратегиях воспользуемся симплекс-методом.

Нам необходима неотрицательная матрица $\widehat{A} = A + \beta E$, где E - единичная матрица, $\beta = 10$.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 6 & 16 & 12 & 7 & 3 & 17 \\ 16 & 9 & 7 & 15 & 16 & 12 & 11 & 13 \\ 13 & 15 & 5 & 12 & 1 & 11 & 4 & 10 \\ 0 & 17 & 11 & 15 & 11 & 6 & 12 & 17 \\ 5 & 11 & 12 & 4 & 11 & 18 & 11 & 17 \\ 12 & 16 & 14 & 15 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Прямая задача

$$\begin{cases} y \cdot e \to max, \\ \widehat{A}y \leq e^T, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

В начале нам необходимо привести задачу к каноническому виду, для этого вводим вектор z:

$$z = e^T - \widehat{A}y.$$

Припишем справа к матрице $\widehat{A}$ единичную матрицу I, к вектору e дописываем шесть нулей, а вектор y дополняем вектором z:

$$\begin{cases} (e,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \to max, \\ (\widehat{A} \mid I) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = e^T \\ y, z \geq 0 \end{cases}$$

Составим симплекс таблицу. Нулевая строка - расширенный вектор e, где элементы записываются со знаком минус, т.к. каноническая задача на минимум, а данная задача на максимум. Следующие строки содержат расширенную матрицу $\widehat{A}$. Последний столбец - вектор e^T. Нулевой элемент этого вектора - значение целевой функции. На первой итерации она равна 0.

Запишем исходную симплекс-таблицу:

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
12	15	6	16	12	7	3	17	1	0	0	0	0	0	1
16	9	7	15	16	12	11	13	0	1	0	0	0	0	1
13	15	5	12	1	11	4	10	0	0	1	0	0	0	1
0	17	11	15	11	6	12	17	0	0	0	1	0	0	1
5	11	12	4	11	18	11	17	0	0	0	0	1	0	1
12	16	14	15	13	12	13	16	0	0	0	0	0	1	1

Первая итерация:

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
12	15	6	16	12	7	3	17	1	0	0	0	0	0	1
16	9	7	15	16	12	11	13	0	1	0	0	0	0	1
13	15	5	12	1	11	4	10	0	0	1	0	0	0	1
0	17	11	15	11	6	12	17	0	0	0	1	0	0	1
5	11	12	4	11	18	11	17	0	0	0	0	1	0	1
12	16	14	15	13	12	13	16	0	0	0	0	0	1	1

Разрешающий столбец 1, разрешающая строка 2, разрешающий элемент 16.

Вторая итерация:

0	-0.44	-0.56	-0.06	0	-0.25	-0.31	-0.19	0	0.06	0	0	0	0	0.06
0	8.25	0.75	4.75	0	-2	-5.25	7.25	1	-0.75	0	0	0	0	0.25
1	0.56	0.44	0.94	1	0.75	0.69	0.81	0	0.06	0	0	0	0	0.06
0	7.69	-0.69	-0.19	-12	1.25	-4.94	-0.56	0	-0.81	1	0	0	0	0.19
0	17	11	15	11	6	12	17	0	0	0	1	0	0	1
0	8.19	9.81	-0.69	6	14.25	7.56	12.94	0	-0.31	0	0	1	0	0.69
0	9.25	8.75	3.75	1	3	4.75	6.25	0	-0.75	0	0	0	1	0.25

Разрешающий столбец 3, разрешающая строка 6, разрешающий элемент 8.75.

Третья итерация:

0	0.16	0	0.18	0.06	-0.06	-0.01	0.21	0	0.01	0	0	0	0.06	0.08
0	7.46	0	4.43	-0.09	-2.26	-5.66	6.71	1	-0.69	0	0	0	-0.09	0.23
1	0.1	0	0.75	0.95	0.6	0.45	0.5	0	0.1	0	0	0	-0.05	0.05
0	8.41	0	0.11	-11.92	1.49	-4.56	-0.07	0	-0.87	1	0	0	0.08	0.21
0	5.37	0	10.29	9.74	2.23	6.03	9.14	0	0.94	0	1	0	-1.26	0.69
0	-2.19	0	-4.89	4.88	10.89	2.24	5.93	0	0.53	0	0	1	-1.12	0.41
0	1.06	1	0.43	0.11	0.34	0.54	0.71	0	-0.09	0	0	0	0.11	0.03

Разрешающий столбец 6, разрешающая строка 5, разрешающий элемент 10.89.

Четвертая итерация:

0	0.15	0	0.15	0.09	0	0	0.25	0	0.02	0	0	0.01	0.06	0.08
0	7	0	3.41	0.93	0	-5.19	7.94	1	-0.58	0	0	0.21	-0.32	0.31
1	0.22	0	1.02	0.68	0	0.33	0.17	0	0.07	0	0	-0.06	0.01	0.03
0	8.71	0	0.77	-12.59	0	-4.87	-0.88	0	-0.94	1	0	-0.14	0.23	0.15
0	5.82	0	11.29	8.74	0	5.57	7.93	0	0.83	0	1	-0.2	-1.03	0.6
0	-0.2	0	-0.45	0.45	1	0.21	0.55	0	0.05	0	0	0.09	-0.1	0.04
0	1.13	1	0.58	-0.04	0	0.47	0.53	0	-0.1	0	0	-0.03	0.15	0.02

В нулевой строке не осталось отрицательных элементов.

$$y = \begin{pmatrix} 0.028 & 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0.037 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Целевая функция равна 0.08

Двойственная задача

Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{cases} e \cdot x \to min, \\ x\widehat{A}^T \geq e, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\widehat{A}^T = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 13 & 0 & 5 & 12 \\ 15 & 9 & 15 & 17 & 11 & 16 \\ 6 & 7 & 5 & 11 & 12 & 14 \\ 16 & 15 & 12 & 15 & 4 & 15 \\ 12 & 16 & 1 & 11 & 11 & 13 \\ 7 & 12 & 11 & 6 & 18 & 12 \\ 3 & 11 & 4 & 12 & 11 & 13 \\ 17 & 13 & 10 & 17 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

Для решения задачи также воспользуемся симплекс-методом. Приведем ее к каноническому виду, введя вектор z:

$$z = \widehat{A}^T x - e.$$

Припишем справа к матрице $\widehat{A}^T$ единичную отрицательную матрицу I, к вектору e дописываем восемь нулей, а вектор x дополняем вектором z:

$$\begin{cases} (e,\ 0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \to max, \\ (\widehat{A}^T \mid -I) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = e^T \\ x, z \geq 0 \end{cases}$$

Для поиска начальной угловой точки необходимо решить вспомогательную задачу. Составляем симплекс таблицу:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
12	16	13	0	5	12	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
15	9	15	17	11	16	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	7	5	11	12	14	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
16	15	12	15	4	15	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
12	16	1	11	11	13	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
7	12	11	6	18	12	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	11	4	12	11	13	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
17	13	10	17	17	16	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Перепишем таблицу, используя элементарные преобразования:

-88	-99	-71	-89	-89	-111	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
12	16	13	0	5	12	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
15	9	15	17	11	16	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	7	5	11	12	14	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
16	15	12	15	4	15	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
12	16	1	11	11	13	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
7	12	11	6	18	12	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	11	4	12	11	13	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
17	13	10	17	17	16	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Первая итерация:

-88	-99	-71	-89	-89	-111	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
12	16	13	0	5	12	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
15	9	15	17	11	16	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	7	5	11	12	14	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
16	15	12	15	4	15	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
12	16	1	11	11	13	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
7	12	11	6	18	12	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	11	4	12	11	13	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
17	13	10	17	17	16	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Разрешающий столбец 6, разрешающая строка 2, разрешающий элемент 16.

...

Одиннадцатая итерация:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	2.43	-14.95	0	0	-1.23	0	-0.89	1	0	0.31	0.66	0	1.23	0	0.89	-1	0	-0.31	-0.66	0	0.16
0	0	-0.53	1.37	0	1	0.01	0	-0.12	0	0	0.12	-0.06	0	-0.01	0	0.12	0	0	-0.12	0.06	0	0.06
1	0	0.94	-1.07	0	0	-0.06	0	-0.09	0	0	-0.04	0.19	0	0.06	0	0.09	0	0	0.04	-0.19	0	0
0	0	8.33	-16.45	0	0	-0.67	0	-1.25	0	0	-0.86	1.53	1	0.67	0	1.25	0	0	0.86	-1.53	-1	0.25
0	0	0.33	-0.02	1	0	0.04	0	0.01	0	0	-0.1	0.04	0	-0.04	0	-0.01	0	0	0.1	-0.04	0	0.01
0	0	13.46	-9.74	0	0	-0.74	0	-0.05	0	1	-0.49	0.18	0	0.74	0	0.05	0	-1	0.49	-0.18	0	0.09
0	0	-2.15	-13.33	0	0	-0.66	1	-1.76	0	0	-0.08	1.35	0	0.66	-1	1.76	0	0	0.08	-1.35	0	0.15
0	1	0.4	-0.22	0	0	-0.04	0	0.15	0	0	-0.03	-0.11	0	0.04	0	-0.16	0	0	0.03	0.11	0	0.02

В нулевой строке не осталось отрицательных элементов. Начальное решение для двойственной задачи:

$$\begin{pmatrix} 0.0009 & 0.017 & 0 & 0 & 0.005 & 0.06 & 0 & 0.15 & 0 & 0.16 & 0.09 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Теперь заменяем первую строку на строку на строку целевой функции двойственной задачи и удаляем столбцы дополнительной переменной:

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2.43	-14.95	0	0	-1.23	0	-0.89	1	0	0.31	0.66	0	0.16
0	0	-0.53	1.37	0	1	0.01	0	-0.12	0	0	0.12	-0.06	0	0.06
1	0	0.94	-1.07	0	0	-0.06	0	-0.09	0	0	-0.04	0.19	0	0.0009
0	0	8.33	-16.45	0	0	-0.67	0	-1.25	0	0	-0.86	1.53	1	0.25
0	0	0.33	-0.02	1	0	0.04	0	0.01	0	0	-0.1	0.04	0	0.01
0	0	13.46	-9.74	0	0	-0.74	0	-0.05	0	1	-0.49	0.18	0	0.09
0	0	-2.15	-13.33	0	0	-0.66	1	-1.76	0	0	-0.08	1.35	0	0.15
0	1	0.4	-0.22	0	0	-0.04	0	0.15	0	0	-0.03	-0.11	0	0.02

Преобразуем таблицу с помощью элементарных преобразований:

0	0	-0.14	0.94	0	0	0.05	0	0.04	0	0	0.05	-0.06	0	-0.08
0	0	2.43	-14.95	0	0	-1.23	0	-0.89	1	0	0.31	0.66	0	0.16
0	0	-0.53	1.37	0	1	0.01	0	-0.12	0	0	0.12	-0.06	0	0.06
1	0	0.94	-1.07	0	0	-0.06	0	-0.09	0	0	-0.04	0.19	0	0.0009
0	0	8.33	-16.45	0	0	-0.67	0	-1.25	0	0	-0.86	1.53	1	0.25
0	0	0.33	-0.02	1	0	0.04	0	0.01	0	0	-0.1	0.04	0	0.01
0	0	13.46	-9.74	0	0	-0.74	0	-0.05	0	1	-0.49	0.18	0	0.09
0	0	-2.15	-13.33	0	0	-0.66	1	-1.76	0	0	-0.08	1.35	0	0.15
0	1	0.4	-0.22	0	0	-0.04	0	0.15	0	0	-0.03	-0.11	0	0.02

Первая итерация:

0	0	-0.14	0.94	0	0	0.05	0	0.04	0	0	0.05	-0.06	0	-0.08
0	0	2.43	-14.95	0	0	-1.23	0	-0.89	1	0	0.31	0.66	0	0.16
0	0	-0.53	1.37	0	1	0.01	0	-0.12	0	0	0.12	-0.06	0	0.06
1	0	0.94	-1.07	0	0	-0.06	0	-0.09	0	0	-0.04	0.19	0	0.0009
0	0	8.33	-16.45	0	0	-0.67	0	-1.25	0	0	-0.86	1.53	1	0.25
0	0	0.33	-0.02	1	0	0.04	0	0.01	0	0	-0.1	0.04	0	0.01
0	0	13.46	-9.74	0	0	-0.74	0	-0.05	0	1	-0.49	0.18	0	0.09
0	0	-2.15	-13.33	0	0	-0.66	1	-1.76	0	0	-0.08	1.35	0	0.15
0	1	0.4	-0.22	0	0	-0.04	0	0.15	0	0	-0.03	-0.11	0	0.02

Разрешающий столбец 3, разрешающая строка 8, разрешающий элемент 0.4.

Вторая итерация:

0.15	0	0	0.78	0	0	0.04	0	0.03	0	0	0.04	-0.03	0	-0.08
-2.59	0	0	-12.17	0	0	-1.07	0	-0.66	1	0	0.42	0.16	0	0.15
0.57	0	0	0.76	0	1	-0.03	0	-0.17	0	0	0.09	0.05	0	0.06
1.07	0	1	-1.14	0	0	-0.07	0	-0.1	0	0	-0.04	0.21	0	0.001
-8.88	0	0	-6.92	0	0	-0.11	0	-0.44	0	0	-0.51	-0.18	1	0.24
-0.35	0	0	0.36	1	0	0.06	0	0.04	0	0	-0.09	-0.03	0	0.01
-14.35	0	0	5.66	0	0	0.16	0	1.26	0	1	0.08	-2.58	0	0.08
2.29	0	0	-15.79	0	0	-0.81	1	-1.97	0	0	-0.17	1.79	0	0.15
-0.43	1	0	0.24	0	0	-0.01	0	0.19	0	0	-0.01	-0.19	0	0.02

Разрешающий столбец 13, разрешающая строка 3, разрешающий элемент 0.21.

Третья итерация:

0.31	0	0.15	0.6	0	0	0.03	0	0.02	0	0	0.04	0	0	-0.08
-3.41	0	-0.77	-11.29	0	0	-1.02	0	-0.58	1	0	0.45	0	0	0.15
0.32	0	-0.23	1.03	0	1	-0.01	0	-0.15	0	0	0.1	0	0	0.06
5.19	0	4.87	-5.57	0	0	-0.33	0	-0.47	0	0	-0.21	1	0	0.005
-7.94	0	0.88	-7.93	0	0	-0.17	0	-0.53	0	0	-0.54	0	1	0.25
-0.21	0	0.14	0.2	1	0	0.06	0	0.03	0	0	-0.09	0	0	0.005
-0.93	0	12.59	-8.74	0	0	-0.68	0	0.04	0	1	-0.45	0	0	0.09
-7.004	0	-8.71	-5.82	0	0	-0.22	1	-1.13	0	0	0.2	0	0	0.15
0.58	1	0.94	-0.83	0	0	-0.07	0	0.1	0	0	-0.05	0	0	0.02

В нулевой строке не осталось отрицательных элементов.

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0.017 & 0 & 0 & 0.005 & 0.058 \end{pmatrix}$$

Целевая функция равна 0.08

Равновесное решение

Равновесное решение:

$$(x^*,\ y^*),$$

где x^* - оптимальная стратегия первого игрока, y^* - оптимальная стратегия второго игрока.

Оптимальная стратегия первого и второго игрока будут найдены по формулам:

$$x^* = \frac{1}{\|x\|}x \qquad y^* = \frac{1}{\|y\|}y,$$

$$\text{где} \quad \|x\| = \sum_{i=0}^{6} x_i = 0,08 \qquad \|y\| = \sum_{i=0}^{8} y_i = 0,08$$

Тогда:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2125 & 0 & 0 & 0.0625 & 0.725 \end{pmatrix}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0.35 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4625 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Цена игры:

$$\varphi = \frac{1}{F} - \beta,$$

где F - это значение целевой функции, полученной в результате решения прямой и двойственной задачи.

$$\varphi = \frac{1}{F} - \beta = \frac{1}{0.08} - 10 = 2.5,$$

```python
def simplex(cons, z, b):
    table_output(cons, b, z, 'Начальная симплекс таблица:')

    basis = [0] * len(z)
    for i in range(6, 14):
        basis[i] = True

    step = 0
    while True:
        step += 1

        sign = 1
        for i in range(len(z)):
            if z[i] < 0:
                sign = -1
        if sign > 0:
            break

        min_number = z[0]
        min_column = 0
        for i in range(len(z)):
            if z[i] < min_number:
                min_number = z[i]
                min_column = i

        min_row = -1
        for i in range(len(cons)):
            xi = cons[i][min_column]
            if xi == 0:
                continue
            if b[i] / xi < 0:
                continue
            if min_row == -1:
                b_min = b[i] / xi
                min_row = i
            else:
                if (b[i] / xi) < b_min:
                    b_min = b[i] / xi
                    min_row = i

        basis[min_column] = True
        for i in range(len(cons[min_row])):
            if cons[min_row][i] == 1 and basis[i] == True
            and i != min_column:
                basis[i] = 0

        divider = cons[min_row][min_column]
        for i in range(len(cons[min_row])):
            cons[min_row][i] = cons[min_row][i] / divider
        b[min_row] = b[min_row] / divider

        for i in range(len(cons)):
            if i == min_row:
                continue
            factor = cons[i][min_column] /
            cons[min_row][min_column]
            for j in range(len(cons[min_row])):
                a = cons[min_row][j] * factor
```

```
                cons[i][j] = cons[i][j] - a
            b[i] = b[i] - b[min_row] * factor
        factor = z[min_column] / cons[min_row][min_column]
        for i in range(len(z)):
            z[i] = z[i] - cons[min_row][i] * factor
        b[len(b) - 1] = b[len(b) - 1] - b[min_row] * factor
        table_output(cons, b, z, 'Шаг {}:'.format(step))

        print('Текущий базис:', end='\t')
        for i in range(len(basis)):
            if basis[i]:
                print(letters[i], end=' ')
        print()
    table_output(cons, b, z, 'Конечная симплекс таблица:')
    for i in range(len(basis)):
        if basis[i]:
            print(letters[i], end=' ')
    print()
    for i in range(len(cons)):
        for j in range(len(cons[min_row])):
            if cons[i][j] == 1 and basis[j] == True:
                basis[j] = b[i]
    for i in range(len(basis)):
        if basis[i]:
            print(letters[i], '=', basis[i])
    print(basis)
    print('\n')
```

```

def dual(cons, z, b):
    table_output(cons, b, z, 'Начальная симплекс таблица:')

    basis = [False] * len(z)
    basis[0] = True
    basis[2] = True
    basis[3] = True
    basis[4] = True
    basis[5] = True
    basis[6] = True
    basis[9] = True
    basis[13] = True

    step = 0
    while True:
        step += 1
        sign = 1
        for i in range(len(z)):
            if round(z[i], 2) < 0:
                sign = -1
        if sign > 0:
            break

        min_number = z[0]
        min_column = 0
        for i in range(len(z)):
            if z[i] < min_number:
```

```
                min_number = z[i]
                min_column = i

        min_row = -1
        for i in range(len(cons)):
            xi = cons[i][min_column]
            if xi == 0:
                continue
            if xi < 0:
                continue
            if min_row == -1:
                b_min = b[i] / xi
                min_row = i
            else:
                if (b[i] / xi) < b_min:
                    b_min = b[i] / xi
                    min_row = i

        basis[min_column] = True
        for i in range(len(cons[min_row])):
            if cons[min_row][i] == 1 and basis[i] == True and
            i != min_column:
                basis[i] = False

        divider = cons[min_row][min_column]
        for i in range(len(cons[min_row])):
            cons[min_row][i] = cons[min_row][i] / divider
        b[min_row] = b[min_row] / divider

        for i in range(len(cons)):
            if i == min_row:
                continue
            factor = cons[i][min_column] /
            cons[min_row][min_column]
            for j in range(len(cons[min_row])):
                a = cons[min_row][j] * factor
                cons[i][j] = cons[i][j] - a
            b[i] = b[i] - b[min_row] * factor
        factor = z[min_column] / cons[min_row][min_column]
        for i in range(len(z)):
            z[i] = z[i] - cons[min_row][i] * factor
        b[len(b) - 1] = b[len(b) - 1] - b[min_row] * factor
        table_output(cons, b, z, 'Шаг {}:'.format(step))

    table_output(cons, b, z, 'Конечная симплекс таблица:')
    print('Конечный базис:', end='\t')

    print()
    for i in range(len(cons)):
        for j in range(len(cons[min_row])):
            if cons[i][j] == 1 and basis[j] == True:
                basis[j] = b[i]
    print('\Ответn: ', end="")
    print(basis)
    print('\n')
```