Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информационных систем и технологий

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания по курсу
«Основы дискретной математики и теории алгоритмов»
для студентов специальности
1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии
(издательско-полиграфический комплекс)»

Минск 2009

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.17я73
О-75

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составитель
А. П. Лащенко

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Методы оптимального управления» Белорусского государственного университета *А. И. Калинин*

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 2009 год. Поз. 83.

Для студентов специальности 1-40 01 02-03 «Информационные системы и технологии (издательско-полиграфический комплекс)»

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение основ дискретной математики и теории алгоритмов является одним из важнейших этапов при подготовке современного инженера в области компьютерных информационных технологий. Это обусловлено стремительным внедрением новейших информационных технологий во все сферы человеческой деятельности.

Быстрое развитие и внедрение новых технологий, их конкуренция на мировом рынке, прогресс средств вычислительной техники, а также научно-технический прогресс предъявляют повышенные требования к качеству подготовки специалистов, и в частности к математическому образованию инженера. На нынешнем этапе развития инженерно-технического образования в области современных информационных технологий дискретная математика предстает как язык общения «цивилизованных» инженеров.

Современный специалист обязан владеть основами математического моделирования и его реализации в компьютерных информационных технологиях. Математические методы дискретной математики выступают в этой связи как возможность дать унифицированный научный подход к изучению различных физических и социальных явлений реального мира путем составления их математических моделей, которые во многих случаях описываются одними и теми же математическими структурами. Таким образом, математическое моделирование на основе дискретной математики и теории алгоритмов позволяет не только изучить общие закономерности различных производственных задач, но и дать универсальные рекомендации по их решению с использованием общей теории графов − одному из важнейших инструментов программиста.

Целью изучения курса является подготовка студентов по ряду разделов дискретной математики, широко используемых при построении информационных моделей и синтезе специализированных цифровых структур на основе теории графов при их матричной и теоретико-множественной интерпретации.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ

1.1. Множества. Основные понятия и определения

Понятия «множества», «отношения», «функции» и близкие к ним составляют основной словарь дискретной (равно как и «непрерывной») математики.

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов», хотя ясно, что мир − единое неразрывное целое, и выделение в нем объектов − это не более чем произвольный акт нашего сознания, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину мира. Но как бы то ни было, выделение объектов и их совокупностей − естественный (или даже единственно возможный) способ организации нашего мышления, поэтому неудивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания − математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. Можно сказать, что множество − это любая определенная совокупность объектов. Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами. Интуитивно под множеством будем понимать совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Можно говорить о множестве стульев в комнате, людей, живущих в городе, студентов в группе, о множестве натуральных чисел, букв в алфавите, состояний системы и т. п. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда отдельные объекты, его составляющие, различимы между собой. Например, нельзя говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю. Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита, а элементы множеств − строчными буквами.

Пример 1. Множество $\boldsymbol{S}$ страниц в данной книге. Множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел 1, 2, 3, ... Множество $\boldsymbol{P}$ простых чисел 2, 3, 5, … . Множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел: ... , −2, −1, 0, 1, 2, ... Множество $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел. Множество $\boldsymbol{A}$ различных символов на этой странице.

Желательно, чтобы элементы множеств были четко описанными и неизменяемыми объектами.

Принадлежность элемента a множеству $\boldsymbol{M}$ обозначается $a\in\boldsymbol{M}$ («a принадлежит $\boldsymbol{M}$»); не принадлежность a множеству $\boldsymbol{M}$ обозначается $a\notin\boldsymbol{M}$ («a не принадлежит $\boldsymbol{M}$»). Записью $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\boldsymbol{M}$ пользуются в качестве сокращения для записи $a_1\in\boldsymbol{M}, a_2\in\boldsymbol{M}, \ldots, a_n\in\boldsymbol{M}$.

Обычно в конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества $\boldsymbol{U}$ (своего для каждого случая), которое называется универсальным множеством (или универсумом).

Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества. Пустым называется множество, не содержащее ни одного элемента. Оно обозначается $\varnothing$. Пустое множество введено в математике для удобства и единообразия языка. Например, если исследуется множество объектов, обладающих каким-либо свойством, и впоследствии выясняется, что таких объектов не существует, то гораздо удобнее сказать, что исследуемое множество пусто, чем объявить его несуществующим. Утверждение «множество $\boldsymbol{M}$ непустое» является более компактной формулировкой равносильного ему утверждения «существуют элементы, принадлежащие $\boldsymbol{M}$».

Множество $\boldsymbol{A}$ называется подмножеством множества $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$; знак $\subseteq$ называется знаком включения), если любой элемент множества $\boldsymbol{A}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{B}$. При этом говорят, что $\boldsymbol{B}$ содержит или покрывает $\boldsymbol{A}$. Например, пусть $\boldsymbol{A}$ – множество всех отличников группы, $\boldsymbol{B}$ – множество всех студентов группы. Тогда $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Множества $\varnothing$ и $\boldsymbol{A}$ называются несобственными подмножествами множества $\boldsymbol{A}$. Все остальные подмножества называются собственными подмножествами множества $\boldsymbol{A}$.

Множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равны ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), если они состоят из одних и тех же элементов, иначе говоря, если $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$. Второй вариант определения равенства множеств указывает на наиболее типичный метод доказательства того, что данные множества равны, заключающийся в доказательстве сначала утверждения $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, а затем $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$. Из определения равенства множеств вытекает, что порядок элементов во множестве несущественен. Множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не равны (обозначение $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), если либо во множестве **А** есть элементы, не принадлежащие $\boldsymbol{B}$, либо во множестве $\boldsymbol{B}$ есть элементы, не принадлежащие $\boldsymbol{A}$.

Если $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A}$ часто называют собственным, строгим или истинным подмножеством $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{B}$; знак $\subset$ называется знаком строгого включения). Если желают подчеркнуть, что множество $\boldsymbol{B}$ содержит и другие элементы кроме элементов из множества $\boldsymbol{A}$, то используют символ строгого включения. Например, множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$, таким образом, $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$.

Множества бывают конечными и бесконечными. Множество называют конечным, если число его элементов конечно, т. е. если существует натуральное число n, равное количеству элементов множества. Множество называют бесконечным, если оно содержит бесконечное число элементов. Пустое множество будем условно относить к конечным множествам.

Задание множеств. Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать различными способами:

- перечислением элементов: $\boldsymbol{M} := \{a_1, a_2, \dots , a_k\}$;
- характеристическим предикатом: $\boldsymbol{M} := \{x \mid P(x)\}$;
- порождающей процедурой: $\boldsymbol{M} := \{x \mid x := f\}$.

При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. Характеристический предикат − это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение, и позволяющее проверить, принадлежит ли любой данный элемент множеству. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае − не принадлежит. Порождающая процедура − это процедура, которая в процессе работы порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

Пример 2:

$\boldsymbol{M}_9 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
$\boldsymbol{M}_9 := \{n \mid n \in \boldsymbol{N} \;\&\; n < 10\}$;
$\boldsymbol{M}_9 := \{n \mid n := 0;$ for i from 1 to 9 do n := $n + 1$; yield n end for$\}$.

Перечислением можно задавать только конечные множества. Бесконечные множества задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

Из определения множества следует, что в нем не должно быть неразличимых элементов. Поэтому во множестве не может быть одинаковых элементов. Запись множества $\{2, 2, 3, 5\}$ следует рассматривать как некорректную и заменить ее на $\{2, 3, 5\}$. Так, множество всех простых делителей числа 60 равно $\{2, 3, 5\}$.

Многие определения теории множеств удобно давать в виде математических выражений, содержащих некоторые логические символы:

$\forall$ – символ, называемый квантором общности и означающий «любой», «каков бы ни был», «для всех»;

$\exists$ – символ, называемый квантором существования и означающий «существует», «найдется хотя бы один»;

$\Rightarrow$ – символ следствия (импликации), означающий «влечет за собой»;

$\Leftrightarrow$ – символ эквивалентности (равносильности), означающий «то же самое, что»;

& ($\wedge$) – символ конъюнкции, одновременного выполнения условий, означающий «и»;

$\vee$ – символ дизъюнкции, выполнения хотя бы одного из условий, означающий «или»;

$\rceil$ ($\overline{\ \ }$) – символ отрицания, невыполнения условия, означающий «не».

Пример 3. Даны два множества: $\boldsymbol{A} = \{0, 1\}$ и $\boldsymbol{B} = \{\{0, 1\}\}$. $\boldsymbol{A}$ является элементом $\boldsymbol{B}$, поэтому справедлива запись $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}$, но не $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$, так как элементами $\boldsymbol{A}$ являются 0 и 1, а единственным элементом $\boldsymbol{B}$ является множество $\boldsymbol{A}$, элементы множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют различную природу.

Пример 4. Даны три множества: $\boldsymbol{A} = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{B} = \{\{0, 1\}, 2\}$, $\boldsymbol{C} = \{\{\{0, 1\}, 2\}, 3\}$. $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}$, но $\boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{C}$, а $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{A}$ – элемент, но не подмножество $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}$ – элемент, но не подмножество $\boldsymbol{C}$. Элементами $\boldsymbol{A}$ являются 0 и 1, элементами $\boldsymbol{B}$ – множество $\boldsymbol{A}$ и 2, а элементами $\boldsymbol{C}$ являются множество $\boldsymbol{B}$ и 3. Поэтому $\boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{C}$.

Пример 5. Пусть $\boldsymbol{A}$ – множество всех натуральных четных чисел, $\boldsymbol{B}$ – множество всех натуральных чисел, представимых в виде суммы двух нечетных натуральных чисел. Докажем, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A} = \{2k \mid k\in\boldsymbol{N}\},$$
$$\boldsymbol{B} = \{(2k-1) + (2m-1) \mid k, m\in\boldsymbol{N}\}.$$

Покажем, что для $\forall x\in\boldsymbol{A} \Rightarrow x\in\boldsymbol{B}$ и для $\forall y\in\boldsymbol{B} \Rightarrow y\in\boldsymbol{A}$. Это будет означать, что $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$.

Пусть $2k\in\boldsymbol{A}$ для некоторого фиксированного $k\in\boldsymbol{N}$. Тогда $2k = (2k-1) + 1$ – сумма двух нечетных натуральных чисел, поэтому $2k\in\boldsymbol{B}$. Пусть $(2k-1) + (2m-1)\in\boldsymbol{B}$ для некоторых фиксированных k, $m\in\boldsymbol{N}$. Тогда $(2k-1) + (2m-1) = 2k + 2m - 2 = 2(k + m - 1)$ является четным натуральным числом, поэтому $(2k-1) + (2m-1)\in\boldsymbol{A}$.

Итак, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Пример 6. Пусть $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n\in\boldsymbol{N}$, – некоторое конечное множество. Каждому подмножеству $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$ сопоставим двоичное слово длиной n по следующему правилу:

$$\boldsymbol{S}_B = \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{ где } \alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in \boldsymbol{B}, \\ 0, \text{ если } a_i \notin \boldsymbol{B}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, каждому подмножеству множества $\boldsymbol{A}$ ставится в соответствие единственное двоичное слово длиной n, и каждому двоичному слову длиной n ставится в соответствие единственное подмножество множества $\boldsymbol{A}$.

Для множества $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4\}$:

1) построить его подмножества по следующим двоичным словам: 0101, 1111, 1001, 1000, 0100, 0110, 0111, 0001;

2) найти двоичные слова, соответствующие его подмножествам: $\{3\}$, $\{4, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\varnothing$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 4, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Получаем, согласно вышеуказанному правилу, следующие множества: $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}=\boldsymbol{A}$, $\{1, 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4\}$.

2. Получаем, согласно вышеуказанному правилу, следующие двоичные слова длиной 4: 0010, 0011, 1010, 0000, 0111, 1011, 1110, 1111.

1.2. Операции над множествами. Алгебра множеств

Объединением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B} = \{x \mid (x\in\boldsymbol{A})\vee(x\in\boldsymbol{B})\}.$$

Аналогично определяется объединение произвольной (в том числе бесконечной) системы множеств. Если система содержит небольшое количество множеств, то их объединение описывается явно: $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}$ и т. д.

Пример 7. Пусть $\boldsymbol{A} := \{a, b, d\}$, $\boldsymbol{B} := \{b, d, e, h\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B} = \{a, b, d, e, h\}$.

Пример 8. Пусть $\boldsymbol{A} := \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} := \{3, 4, 5\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пример 9. Обозначим $\boldsymbol{N}_k = \{n\in\boldsymbol{N} \mid (k \text{ делит } n)\&(k \neq n)\}$, $\boldsymbol{P}$ – множество всех простых чисел (принято считать, что $1\notin\boldsymbol{P}$). Тогда $\bigcup\limits_{i\in P} N_i$ – множество всех составных чисел.

Рассмотрим два круга, приведенных на рис. 1. Если $\boldsymbol{A}$ – множество точек левого круга, $\boldsymbol{B}$ – множество точек правого круга, то $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ представляет собой заштрихованную область, ограниченную обоими кругами.

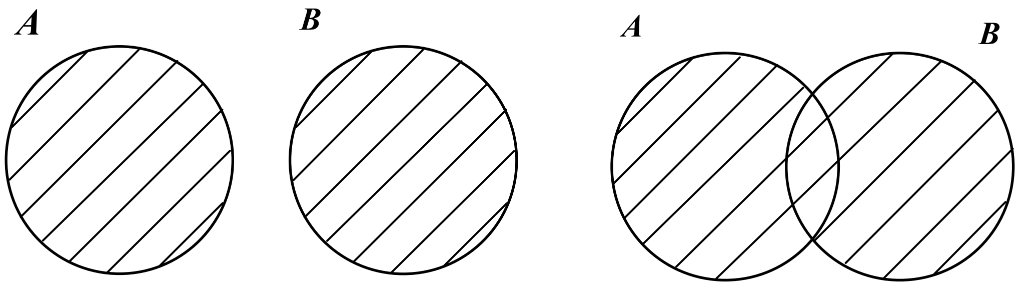


Рис. 1. Объединение множеств

Для объединения множеств существуют коммутативный и ассоциативный законы:

$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{A}$,

$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$,

справедливость которых для любых множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ вытекает из того, что левая и правая части состоят из одних и тех же элементов. Рассмотрим $\boldsymbol{A}\cup\varnothing = \boldsymbol{A}$. Это соотношение верно для произвольного множества $\boldsymbol{A}$, так как $\varnothing$ не содержит элементов, а значит, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}\cup\varnothing$ состоят из одних и тех же элементов. Очевидно, что $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ для любого множества $\boldsymbol{A}$. Для любых множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ верно $\boldsymbol{A}\subseteq(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$, но не верно $\boldsymbol{A}\in(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$.

Пересечением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и $\boldsymbol{A}$, и $\boldsymbol{B}$:

$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \{x \mid (x\in\boldsymbol{A})\&(x\in\boldsymbol{B})\}$.

Аналогично определяется пересечение (в том числе бесконечной) системы множеств. Обозначения для пересечения системы множеств аналогичны приведенным выше обозначениям для объединения.

Пример 10. Пусть $\boldsymbol{A} := \{a, b, d, c, e, f, k\}$, $\boldsymbol{B} := \{b, d, e, h\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \{b, d, e\}$.

Пример 11. Пусть $\boldsymbol{A} := \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} := \{3, 4, 5\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \{3\}$.

Рассмотрим два круга, приведенных на рис. 2. Если $\boldsymbol{A}$ – множество точек левого круга, $\boldsymbol{B}$ – множество точек правого круга, то $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ представляет собой заштрихованную область, являющуюся общей частью этих кругов.

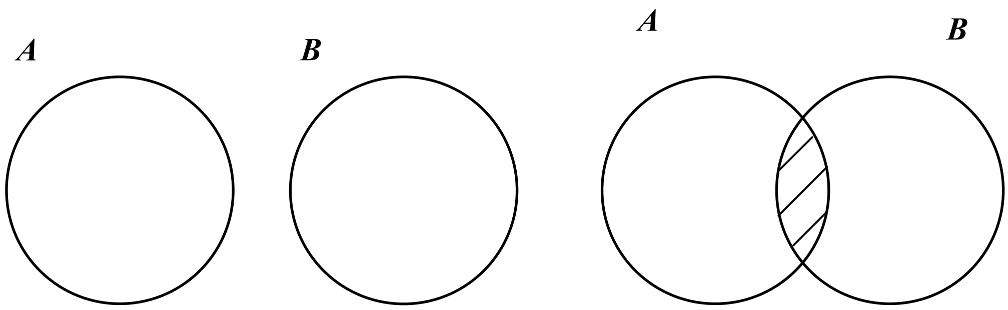


Рис. 2. Пересечение множеств

Нетрудно видеть, что пересечение произвольных множеств обладает коммутативным ($\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{A}$) и ассоциативным ($\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}$) свойствами, соотношения верны для произвольных конечных множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Заметим также, что имеют место соотношения $\boldsymbol{A}\cap\varnothing = \varnothing$, $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, верные для произвольного множества $\boldsymbol{A}$.

Разностью множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$) называется множество всех тех и только тех элементов $\boldsymbol{A}$, которые не содержатся в $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \{x \mid (x\in\boldsymbol{A})\&(x\notin\boldsymbol{B})\}.$$

В отличие от операций объединения и пересечения данная операция определяется только для двух множеств. Для произвольных множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ верны соотношения:

$$\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \varnothing \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A}\backslash\varnothing = \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \varnothing.$$

Пример 12. Пусть $\boldsymbol{A} := \{a, b, d\}$, $\boldsymbol{B} := \{b, d, e, h\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \{a\}$, $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A} = \{e, h\}$. Таким образом, разность множеств не коммутативна.

Пример 13. Пусть $\boldsymbol{A} := \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} := \{3, 4, 5\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \{1,2\}$.

Пример 14. Пусть $\boldsymbol{A} := \{a, b\}$, $\boldsymbol{B} := \{b, c\}$, $\boldsymbol{C} := \{a, c\}$. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash(\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\backslash\{b\} = \{a\}$. $(\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B})\backslash\boldsymbol{C} = \{a\}\backslash\boldsymbol{C} = \varnothing$. Таким образом, разность множеств не ассоциативна в общем случае.

Рассмотрим два круга, приведенные на рис. 3. Если $\boldsymbol{A}$ – множество точек левого круга, $\boldsymbol{B}$ – множество точек правого круга, то $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ представляет собой заштрихованную область.

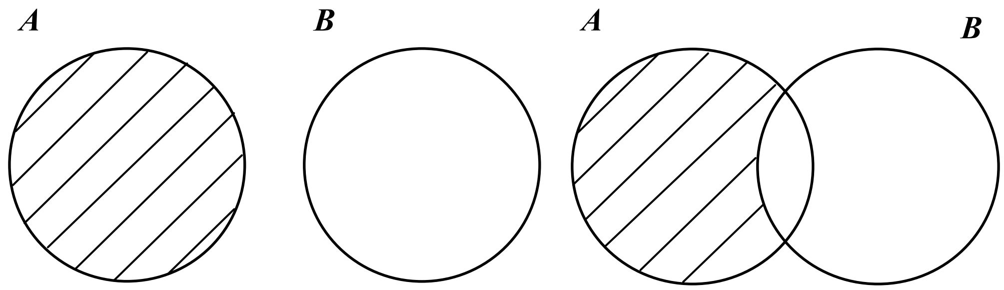


Рис. 3. Разность множеств

Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества фиксированного множества $\boldsymbol{U}$, то это самое большое множество называют *полным* или *универсальным множеством*. Для любого множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}$, очевидно, выполняются соотношения:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}.$$

Следует отметить, что в различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть различные множества. Так, при рассмотрении множеств студентов в группе (отличники; студенты, получающие стипендию; студенты, проживающие в общежитии, и т. п.) роль универсального множества играет множество всех студентов данной группы.

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника будут обозначать различные подмножества универсального множества. Изображение множества в виде области в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называют диаграммой Эйлера – Венна.

Дополнением множества $\boldsymbol{A}$ до универсального множества $\boldsymbol{U}$ (обозначение $\overline{\boldsymbol{A}}$) называется множество всех элементов $\boldsymbol{U}$, не принадлежащих $\boldsymbol{A}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \{x \mid (x \in \boldsymbol{U}) \& (x \notin \boldsymbol{A})\},$$
$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{A}.$$

Пример 15. Если $\boldsymbol{U} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\boldsymbol{A} := \{3, 5, 7\}$, то $\overline{\boldsymbol{A}} = \{1, 2, 4, 6\}$.

На рис. 4 множество $\boldsymbol{A}$ показано заштрихованным кругом, $\overline{\boldsymbol{A}}$ представляет собой всю незаштрихованную область прямоугольника $\boldsymbol{U}$.

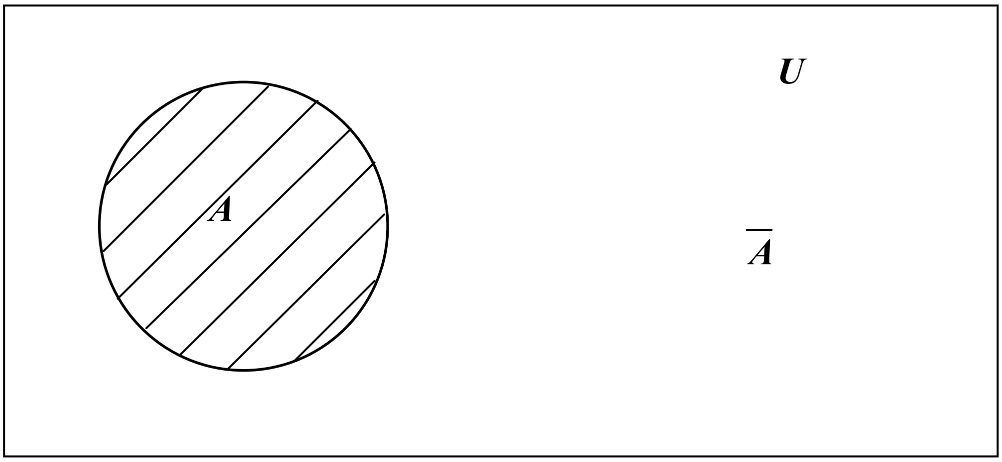


Рис. 4. Дополнение множества

Из определения дополнения множества следует, что $\boldsymbol{A}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}$ не имеют общих элементов, так что $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \varnothing$ для любого множества $\boldsymbol{A}$. Кроме того, нет элементов $\boldsymbol{U}$, которые не принадлежали бы ни $\boldsymbol{A}$, ни $\overline{\boldsymbol{A}}$, так как те элементы, которые не принадлежат $\boldsymbol{A}$, принадлежат $\overline{\boldsymbol{A}}$ и наоборот. Следовательно, $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U}$ для любого множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}$. Для любого множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}$ верно, что дополнением к $\overline{\boldsymbol{A}}$ является само множество $\boldsymbol{A}$. Таким образом, $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$.

С помощью операции дополнения можно в удобном виде представить разность произвольных множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B} = \{x \mid (x \in \boldsymbol{A}) \& (x \notin \boldsymbol{B}\} = \{x \mid (x \in \boldsymbol{A}) \& (x \in \overline{\boldsymbol{B}})\} = \boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}.$$

Наряду с понятием множества как совокупности элементов важным является понятие упорядоченного множества, или кортежа. Кортеж − это последовательность элементов, т. е. совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место. Часто кортеж называют вектором, а элементы, образующие кортеж, − его компонентами, или координатами. Компоненты нумеруются слева направо. Число компонент называется длиной, или размерностью, кортежа. Могут быть и бесконечные кортежи. В отличие от элементов множества координаты кортежа могут совпадать. Кортеж будем заключать в круглые скобки. Например, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – кортеж длиной n с элементами $a_1, \ldots, a_n$. Иногда скобки и даже запятые опускаются. Кортежи длиной 2 называют упорядоченными парами (или просто парами), кортежи длиной 3 – тройками и т. д. В общем случае кортежи длиной n называют упорядоченными n-ками (или просто n-ками).

Частным случаем является кортеж (a) длиной 1 и пустой кортеж длиной 0, обозначаемый ( ). Примеры кортежей: множество людей, стоящих в очереди; множество слов во фразе; числа, выражающие долготу и широту точки на местности, и т. п.

Место каждого элемента в кортеже является вполне определенным и не может быть произвольно изменено. В технических задачах эта определенность часто является просто предметом договоренности. Два конечных кортежа равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие компоненты равны:

$$(a_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow m = n \text{ и } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_m = b_m.$$

Прямым произведением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (обозначение $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$, а вторая – множеству $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid a \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{B}\}.$$

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – отрезки соответственно длинами a и b вещественной оси. Прямое произведение $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ представляет собой заштрихованный прямоугольник с длиной a и шириной b в декартовой системе координат XOY (рис. 5).

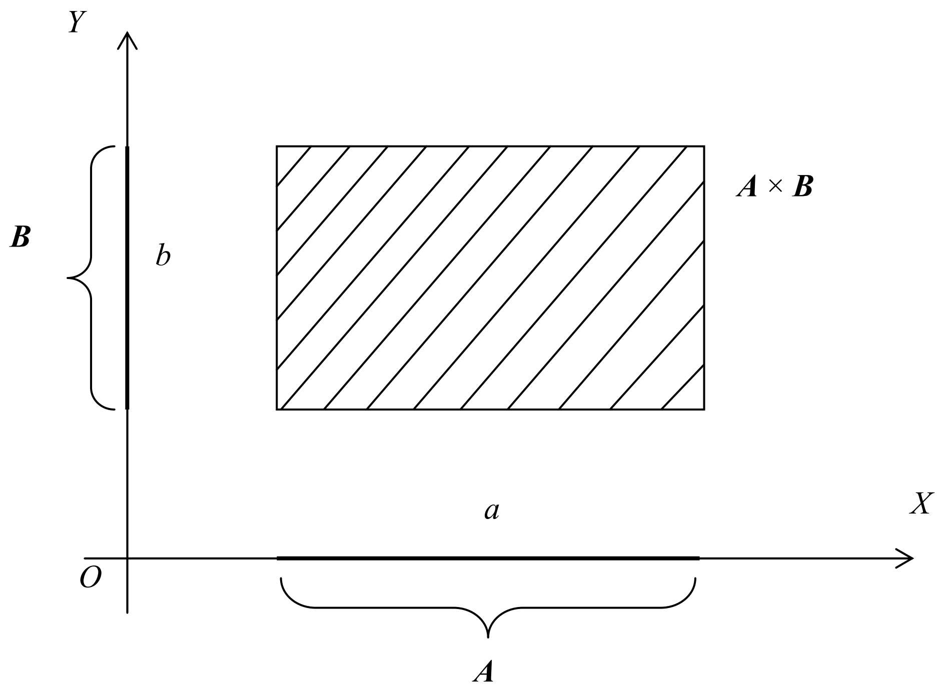


Рис. 5. Прямое произведение множеств

Пример 15. Пусть $\boldsymbol{A} := \{1, 2\}$, $\boldsymbol{B} := \{1, 3, 4\}$.

Тогда: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$,

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Этот пример показывает, что прямое произведение множеств не коммутативно в общем случае.

Операция прямого произведения легко распространяется и на большее число множеств. Прямым произведением множеств $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_r$, $r \in \boldsymbol{N}$, называется множество, состоящее из всех тех и только тех кортежей длиной r, первая компонента которых принадлежит $\boldsymbol{A}_1$, вторая $\boldsymbol{A}_2$, …, r-я $\boldsymbol{A}_r$.

$$\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{A}_r = \{(a_1, a_2, \ldots, a_r) \mid a_i \in \boldsymbol{A}_i,\ i = \overline{1, r}\}.$$

Частным случаем операции прямого произведения является понятие степени множества. Пусть $\boldsymbol{A}$ – произвольное множество. Назовем s-й степенью, $s \in \boldsymbol{N}$, множества $\boldsymbol{A}$ (обозначение $\boldsymbol{A}^s$} прямое произведение s одинаковых множеств, равных $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^s = \underbrace{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \ldots \times \boldsymbol{A}}_{s \text{ раз}}.$$

Будем полагать, что $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^0 = \{(\,)\}$.

Если $\boldsymbol{R}$ – вещественная прямая (множество вещественных чисел), то $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ представляет собой вещественную плоскость (множество всех упорядоченных пар вида (a, b), где $a, b \in \boldsymbol{R}$, которые являются координатами точек плоскости). $\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ – трехмерное вещественное пространство (множество всех упорядоченных троек вида (a, b, c), где $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, которые являются координатами точек пространства).

Координатное представление точек плоскости, предложенное французским математиком и философом Р. Декартом, – исторически первый пример прямого произведения. Поэтому иногда прямое произведение называют декартовым произведением.

Проекцией кортежа $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, на i-ю ось (обозначение $\text{пр}_i v$) называется его i-я компонента. Проекцией кортежа v на оси с номерами $i_1, \ldots, i_k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, называется кортеж $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ длиной k (обозначение $\text{пр}_{i_1, \ldots, i_k} v$).

Операция проектирования множества тесно связана с операцией проектирования кортежа и может применяться лишь к таким множествам, элементами которых являются кортежи одинаковой длины. Пусть $\boldsymbol{V}$ – множество кортежей одинаковой длины. Тогда проекцией множества $\boldsymbol{V}$ на i-ю ось называется множество проекций всех векторов из $\boldsymbol{V}$ на i-ю ось: $\text{пр}_i\boldsymbol{V} = \{\text{пр}_i v \mid v \in \boldsymbol{V}\}$. Аналогично определяется проекция множества $\boldsymbol{V}$ на несколько осей: $\text{пр}_{i_1,\ldots,\ i_k}\boldsymbol{V} = \{\text{пр}_{i_1,\ldots,\ i_k} v \mid v \in \boldsymbol{V}\}$. В частности, если $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{A}_n$, то $\text{пр}_i\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\text{пр}_{i_1,\ldots,\ i_k}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_{i_1} \times \boldsymbol{A}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A}_{i_k}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Если $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{A}_n$, то $\text{пр}_i\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{A}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\text{пр}_{i_1,\ldots,\ i_k}\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{A}_{i_1} \times \boldsymbol{A}_{i_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A}_{i_k}$.

Проекция точки плоскости на первую ось – это ее абсцисса (первая координата); проекция на вторую ось – ордината (вторая координата).

Пример. Пусть $\boldsymbol{V} := \{1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)\}$. Тогда $\text{пр}_2\boldsymbol{V} = \{2, 1, 3\}$, $\text{пр}_{2,4}\boldsymbol{V} = \{(2, 4), (1, 5), (3, 3)\}$.

Пример 16. Для множества $\boldsymbol{M} := \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ найти $\text{пр}_1\boldsymbol{M}$ и $\text{пр}_2\boldsymbol{M}$.

Решение. $\boldsymbol{M}$ представляет собой окружность с центром в точке (2, 0) радиусом 1 на плоскости (рис. 6). Из данного рисунка видно, что $\text{пр}_1\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \in [1, 3]\}$ – проекция $\boldsymbol{M}$ на ось OX, $\text{пр}_2\boldsymbol{M} = \{y \in \boldsymbol{R} \mid y \in [-1, 1]\}$ – проекция $\boldsymbol{M}$ на ось OY.

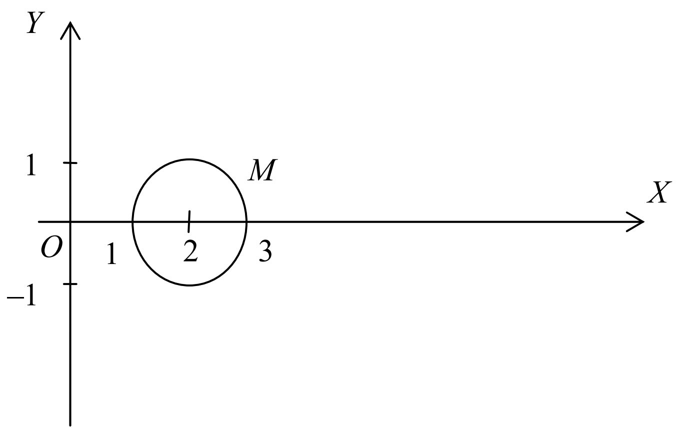


Рис. 6. Множество $\boldsymbol{M}$

Второй способ решения аналитический.

$\text{Пр}_1\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid (x-2)^2 = 1 - y^2\} = [y^2 \ge 0$ для $\forall y \in \boldsymbol{R}] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid (x-2)^2 \le 1\} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid -1 \le x - 2 \le 1\} = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 1 \le x \le 3\}$.

$Пр_2\boldsymbol{M} = \{y\in\boldsymbol{R} \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} = \{y\in\boldsymbol{R} \mid y^2 = 1 - (x-2)^2\} = [(x-2)^2 \geq 0$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}] = \{y\in\boldsymbol{R} \mid y^2 \leq 1\} = \{y\in\boldsymbol{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

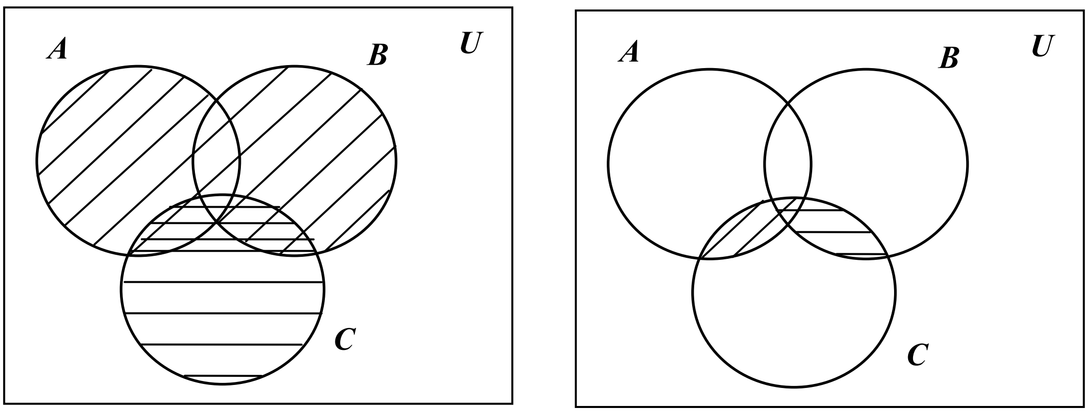
И получаем тот же результат.

Пусть задано множество $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$ – булеан множества $\boldsymbol{U}$. Алгебра $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}), \cup, \cap, -)$ называется булевой алгеброй множеств над $\boldsymbol{U}$. Элементами основного множества этой алгебры являются подмножества множества $\boldsymbol{U}$. Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют булевыми операциями над множествами.

С помощью булевых операций из множеств можно составлять различные алгебраические выражения. Если оба алгебраических выражения представляют собой одно и то же множество, то их можно приравнять друг к другу, получив алгебраическое тождество. Такие тождества бывают очень полезны при преобразованиях алгебраических выражений над множествами. Часть основных тождеств булевой алгебры множеств была приведена при рассмотрении свойств булевых операций. Приведем доказательство остальных важных тождеств данной алгебры.

Пусть $\boldsymbol{U}$ – универсальное множество, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ – произвольные подмножества $\boldsymbol{U}$. На рис. 7, *а* и *б* приведены диаграммы Эйлера – Венна для выражений $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}$ (пересечение заштрихованных множеств обозначено двойной штриховкой) и $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$ (объединение заштрихованных множеств) соответственно. Их этих диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество, так что в алгебре множеств имеет место тождество:

$$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}).$$



а *б*

Рис. 7. Диаграммы Эйлера – Венна для $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$ (*а*) и $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$ (*б*)

Таким образом, пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств.

На рис. 8, *а* и *б* приведены диаграммы Эйлера – Венна для алгебраических выражений $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C}$ (объединение заштрихованных множеств) и $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})\cap(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$ (пересечение заштрихованных множеств обозначено двойной штриховкой) соответственно. Оба эти выражения дают одно и то же множество, так что имеет место тождество:

$$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})\cap(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}).$$

Таким образом, объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств.

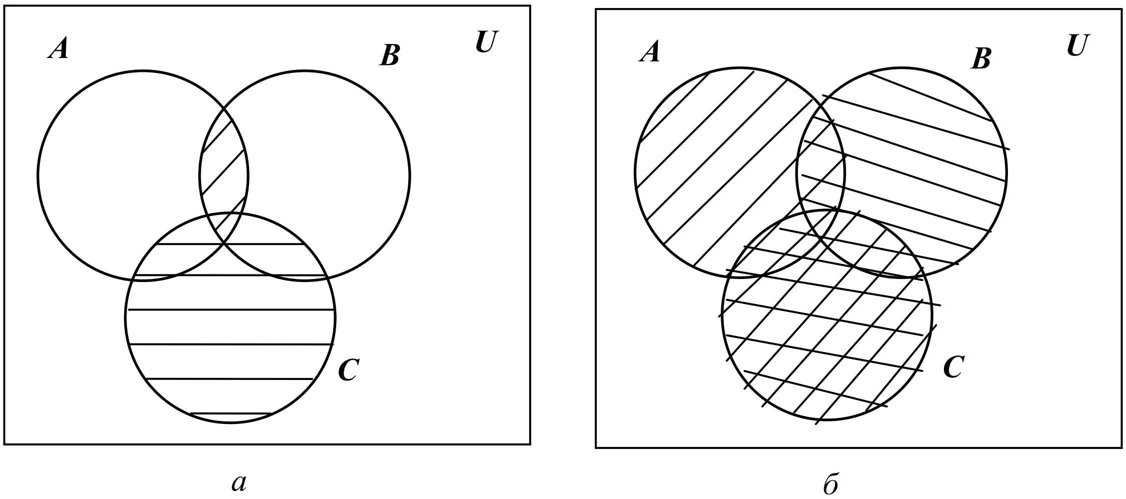


Рис. 8. Диаграммы Эйлера – Венна для $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C}$ (*а*) и $(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})\cap(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$ (*б*)

Установление тождеств алгебры множеств с помощью диаграмм Эйлера – Венна в ряде случаев оказывается неудобным. Доказательство тождеств может производиться также методом двустороннего включения, чтобы показать равенство множеств в левой и правой частях тождества (об этом уже упоминалось выше), методом преобразования одной части к другой, методом преобразования обеих частей к одному и тому же выражению.

Пусть $\boldsymbol{U}$ – универсальное множество, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – его произвольные подмножества. Докажем тождество $\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}}.$

Будем использовать метод двустороннего включения. Предположим, что $x\in\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}$, т. е. что $x\notin\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$. Это значит, что $x\notin\boldsymbol{A}$ и $x\notin\boldsymbol{B}$, т. е. $x\in\overline{\boldsymbol{A}}$ и $x\in\overline{\boldsymbol{B}}.$ Следовательно, $x\in\overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}}.$ Итак, $\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}\subseteq\overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}}.$ Предположим теперь, что $y\in\overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}}$, т. е. $y\in\overline{\boldsymbol{A}}$ и $y\in\overline{\boldsymbol{B}}.$ Это значит, что $y\notin\boldsymbol{A}$

и $y \notin B$, т. е. что $y \notin A \cup B$. Следовательно, $y \in \overline{A \cup B}$. Итак, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Таким образом, тождество доказано.

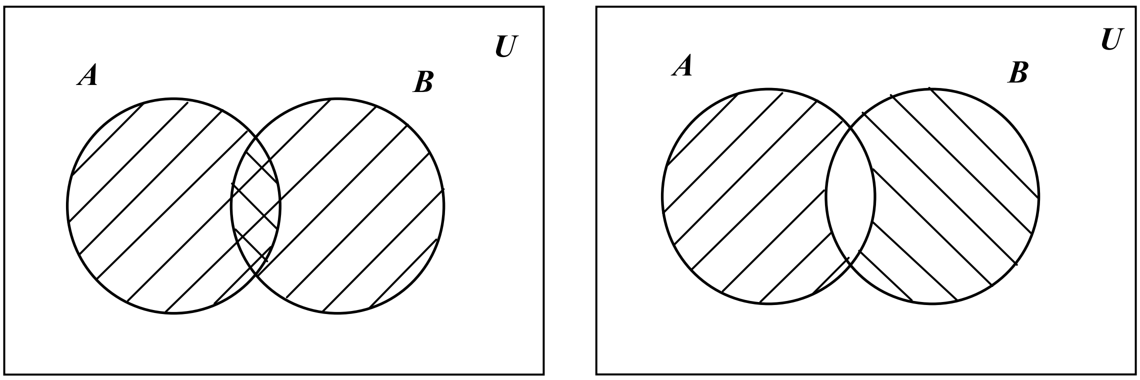
Тождество $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ докажем, приведя его части к одинаковому виду. Выполним операцию дополнения над обеими частями. Слева получим $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. Справа получим $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$, согласно предыдущему тождеству. Итак, $\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$. Справедливость тождества доказана.

В литературе два последних доказанных тождества обычно называются тождествами де Моргана.

Симметрической разностью множеств A и B (обозначение $A \Delta B$) называется множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Очевидно, что $B \Delta A = A \Delta B$ для любых множеств A и B, т. е. симметрическая разность коммутативна.

Докажем, что $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ для произвольных множеств A и B, т. е. докажем тождество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Пусть A и B – произвольные подмножества некоторого универсального множества. На рис. 9, *а* и *б* приведены диаграммы Эйлера – Венна для выражений $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (объединение заштрихованных множеств $A \backslash B$ и $B \backslash A$) и $(A \cup B) \backslash (B \cap A)$ (из объединения заштрихованных множеств A и B исключается множество с двойной штриховкой $A \cap B$) соответственно. Из этих диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество. Тем самым доказана справедливость тождества и получена равносильная формула для вычисления симметрической разности множеств.



а *б*

Рис. 9. Симметрическая разность

Пример 17. Доказать справедливость следующих тождеств:

1) $A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B}$;

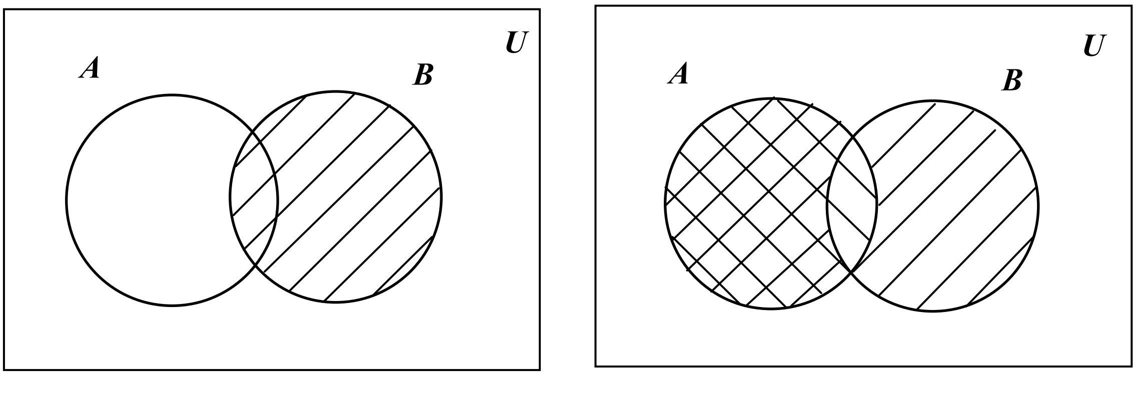
2) $B = A\Delta(A\Delta B)$;

3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Решение:

1. Будем использовать метод преобразования правой части к левой. Преобразуем правую часть согласно одному из законов де Моргана: $\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{B}$. Далее, $\overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} = A \setminus B$. Итак, тождество доказано.

2. Будем использовать метод диаграмм Эйлера – Венна для выражений в левой и правой частях. Пусть A и B – произвольные подмножества некоторого универсального множества U. На рис. 10, *а* и *б* приведены диаграммы Эйлера – Венна для выражений B (заштрихованное множество) и $A\Delta(A\Delta B)$ (отмеченное одинарной штриховкой) (сначала одной штриховкой было отмечено $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, затем другой штриховкой – множество A, двойной штриховкой отмечено $A \setminus B = A \cap (A\Delta B)$). Из данных диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество.



а *б*

Рис. 10. Метод диаграмм Эйлера – Венна

3. Докажем тождество методом двух взаимных включений.

$(A \cap B) \times C = \{(x, y) \mid x \in A \cap B, y \in C\}$,

$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in C\} \cap \{(x, y) \mid x \in B, y \in C\}$,

очевидно, что $(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C)$ и $(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq$ $\subseteq (A \cap B) \times C$. Итак, тождество доказано. Таким образом, прямое произведение дистрибутивно относительно пересечения множеств.

Упражнения

Доказать справедливость тождеств для произвольных множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$:

1. $A \cup B = (A \setminus B) \Delta B$.
2. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
6. $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$.
7. $A \setminus B = (A \cap B) \Delta A$.
8. $A \setminus B = (A \cap B) \Delta A$.
9. $\overline{(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup C$.
10. $(A \setminus B) \Delta B = (B \setminus A) \Delta A$.
11. $\overline{A \cap \overline{\overline{B}}} \cup B = \overline{A} \cup B$.
12. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$.
13. $\overline{A \cup \overline{\overline{B}}} \cap B = \overline{A} \cap B$.
14. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
15. $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$.
16. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
17. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
18. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
19. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
20. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.
21. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

1.3. Соответствия. Отображения и функции. Отношения, их свойства и типы

Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ – два непустых множества. Если определен способ сопоставления элементов $\boldsymbol{Y}$ элементам $\boldsymbol{X}$, то говорят, что между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ установлено соответствие. При этом совершенно не обязательно, чтобы в сопоставлении участвовали все элементы множеств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Для того чтобы задать соответствие между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, нужно задать множество $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, определяющее закон, по которому осуществляется соответствие, т. е. перечисляющий все пары (x, y), участвующие в сопоставлении.

Таким образом, соответствие, обозначаемое q, представляет собой тройку множеств $q = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q})$, в которой $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. В этом выражении первую компоненту $\boldsymbol{X}$ называют областью отправления соответствия, вторую компоненту $\boldsymbol{Y}$ – областью прибытия соответствия, третью компоненту $\boldsymbol{Q}$ – графиком соответствия.

Кроме рассмотренных множеств $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Q}$ с каждым соответствием неразрывно связаны еще два множества: множество $\text{пр}_1\boldsymbol{Q}$, называемое областью определения соответствия, которое состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{X}$, участвующих в сопоставлении, и множество $\text{пр}_2\boldsymbol{Q}$, называемое областью значений соответствия, которое состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Y}$, участвующих в сопоставлении. Если $(x, y)\in \boldsymbol{Q}$, то говорят, что элемент y соответствует элементу x. Геометрически это удобно изображать стрелкой, направленной от x к y. Если $\text{пр}_1\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{X}$, то соответствие называется всюду определенным, или отображением $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$ (в противном случае соответствие называется частичным). Если $\text{пр}_2\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Y}$, то соответствие называется сюръективным (сюръекцией).

Множество всех $y\in \boldsymbol{Y}$, соответствующих элементу $x\in\boldsymbol{X}$, называется образом x в $\boldsymbol{Y}$ при соответствии q. Множество всех $x\in\boldsymbol{X}$, которым соответствует элемент $y\in \boldsymbol{Y}$, называется прообразом y в $\boldsymbol{X}$ при соответствии q. Если $\boldsymbol{C}\subseteq\text{пр}_1\boldsymbol{Q}$, то образом множества $\boldsymbol{C}$ называется объединение образов всех элементов $\boldsymbol{C}$. Аналогично определяется прообраз множества $\boldsymbol{D}$ для любого $\boldsymbol{D}\subseteq\text{пр}_2\boldsymbol{Q}$. Соответствие q называется инъективным (инъекцией), если любые различные x_1 и x_2 из $\text{пр}_1\boldsymbol{Q}$ имеют различные образы и любые различные y_1 и y_2 из $\text{пр}_2\boldsymbol{Q}$ имеют различные прообразы при соответствии q.

Соответствие q называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента $x\in \text{пр}_1\boldsymbol{Q}$ является единственный элемент $y\in \text{пр}_2\boldsymbol{Q}$. Соответствие q между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называется взаимно однозначным, или биективным (биекцией) (иногда пишут «1-1-соответствие»), если оно всюду определено, сюръективно и инъективно. Однозначное отображение называется функцией. Функция является инъективной, если различным x_1 и x_2 из $\boldsymbol{X}$ соответствуют различные y_1 и y_2 из $\boldsymbol{Y}$, и сюръективной, если она сюръективна как соответствие. Функция называется биективной, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Пример 18. Пусть $\boldsymbol{X} = \{1, 2\}$, $\boldsymbol{Y} = \{3, 5\}$, значит, $\boldsymbol{X}\times \boldsymbol{Y} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий. Графики соответствий:

$\boldsymbol{Q}_0 = \{(\,)\} = \varnothing$,
$\boldsymbol{Q}_1 = \{(1, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_2 = \{(1, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_3 = \{(2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_4 = \{(2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_5 = \{(1, 3), (1, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_6 = \{(1, 3), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_7 = \{(1, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_8 = \{(1, 5), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_9 = \{(1, 5), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{10} = \{(2, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{11} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{12} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{13} = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{14} = \{(1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$,
$\boldsymbol{Q}_{15} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.

Обозначим q_i соответствие с графиком $\boldsymbol{Q}_i$, $i = \overline{0, 15}$. Рассмотрим соответствие q_9. Областью определения соответствия q_9 является пр$_1\boldsymbol{Q}_9 = \{1, 2\} = \boldsymbol{X}$, поэтому q_9 – отображение. Областью значений q_9 является пр$_2\boldsymbol{Q}_9 = \{5\} \neq \boldsymbol{Y}$, поэтому q_9 не сюръективно. 5 является образом 1 и 2 при соответствии q_9, поэтому q_9 не инъективно. Образом множества $\boldsymbol{X}$ при соответствии q_9 является множество $\{5\}$. Прообразом множества $\{5\}$ при соответствии q_9 является множество $\boldsymbol{X}$. Соответствие q_9 функционально, так как каждый из элементов 1 и 2 имеет единственный образ – элемент 5.

На рис. 11, *а* изображено геометрическое представление соответствия q_{11}. Графиком обратного соответствия q_{11}^{-1} является множество $\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}=\{(3, 1), (5, 1), (3, 2)\}$. Геометрическое представление q_{11}^{-1} приведено на рис. 11, *б*.

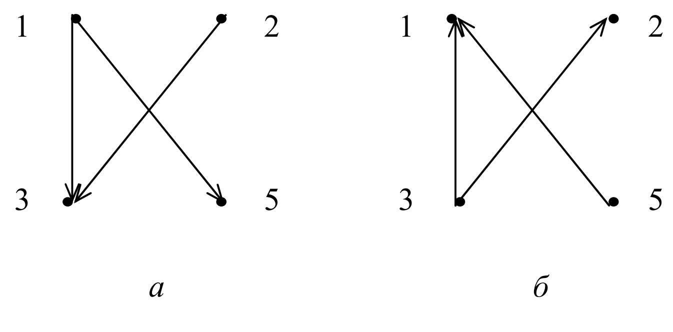


Рис. 11. Представление соответствия q_{11}

Отображениями являются соответствия q_6–q_9, q_{11}–q_{15}. Сюръективными соответствиями являются q_5, q_7, q_8, q_{10}–q_{15}. Функциональные соответствия: q_1–q_4, q_6–q_9. Инъективные соответствия: q_1–q_4, q_7, q_8. Функциями являются q_6–q_9. Биективные функции: q_7, q_8.

Рассмотрим еще несколько примеров для приведенных выше определений.

Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами английских и русских слов. Это соответствие не является функциональным, так как одному английскому слову, как правило, ставится в соответствие несколько русских слов. Кроме того, оно практически никогда не является полностью определенным: всегда можно найти английское слово, не содержащееся в данном словаре. Поскольку, как правило, всегда можно найти и русское слово, не содержащееся в данном словаре, соответствие не является сюръективным. При этом остается в стороне вопрос, является ли множество английских слов (также как и русских) точно заданным множеством.

Различные виды кодирования – кодирование букв азбукой Морзе, представления чисел в различных системах счисления, секретные шифры и т. д. – являются соответствиями между кодируемыми объектами и присваиваемыми им кодами. Эти соответствия, как правило, обладают всеми свойствами взаимно однозначного соответствия кроме, быть может, одного – сюръективности. Инъективность следует из однозначности шифровки и дешифровки. Отсутствие сюръективности подразумевает, что не всякий код имеет смысл, т. е. соответствует какому-либо объекту.

Например, кодирование телефонов г. Минска семизначными номерами не сюръективно, так как некоторые семизначные номера не соответствуют никаким телефонам.

Множество всех векторов вида $(n, 2^n)$, где $n \in \boldsymbol{N}$, задает взаимно-однозначное соответствие (биективную функцию) между множеством натуральных чисел и множеством всех натуральных степеней числа 2.

Композицией двух соответствий называется последовательное применение двух соответствий. Композиция двух соответствий есть операция с тремя множествами $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$, на которых определены два соответствия:

$$\left.\begin{aligned} q &= (\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Q}),\ \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}; \\ p &= (\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{P}),\ \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}. \end{aligned}\right\}$$

Причем область значений первого совпадает с областью определения второго соответствия: $\text{пр}_2\boldsymbol{Q} = \text{пр}_1\boldsymbol{P}$. Первое соответствие q определяет для любого $x \in \text{пр}_1\boldsymbol{Q}$ некоторый, возможно и не один, элемент $y \in \text{пр}_2\boldsymbol{Q}$. Согласно определению операции композиции соответствий, теперь нужно для каждого такого y найти все соответствующие элементы $z \in \text{пр}_2\boldsymbol{P}$, воспользовавшись вторым соответствием p.

Композицию соответствий q и p будем обозначать $p \circ q$ (знак $\circ$ аналогичен умножению и часто опускается), а график композиции соответствий – через $\boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P}$. При этом композиция соответствий p и q запишется в виде:

$$p \circ q = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P}),\ \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}.$$

Например, если q – соответствие, определяющее распределение шоферов по автомашинам, p – соответствие, определяющее распределение автомашин по маршрутам, то соответствие $p \circ q$ есть соответствие, определяющее распределение шоферов по маршрутам.

Естественно, что операцию композиции можно распространить и на большее, чем два, число соответствий. Композиция n соответствий для $n = 3, 4, 5, \ldots$ определяется аналогично случаю $n = 2$.

Пусть $\boldsymbol{X}$ – множество людей. Для каждого человека $x \in \boldsymbol{X}$ обозначим через $q(x)$ множество его детей. Тогда $q^2(x)$ – множество внуков x; $q^3(x)$ – множество правнуков x; $q^{-1}(x)$ – множество родителей x и т. д. Изображая людей точками и рисуя стрелки, идущие из x в $q(x)$, получаем родословное, или генеалогическое, дерево (рис. 12).

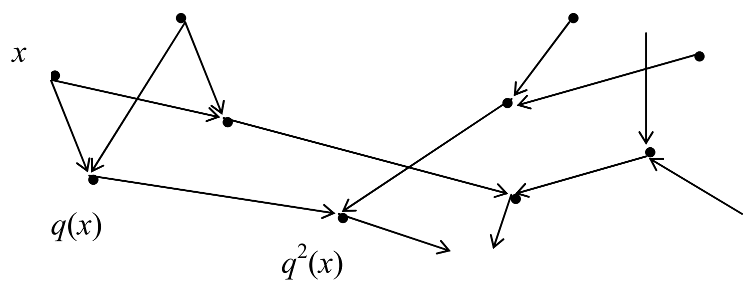


Рис. 12. Генеалогическое дерево

Пусть f: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ – функция. Будем обозначать $\boldsymbol{D}(f)$ область определения функции и $\boldsymbol{E}(f)$ область значений функции f. Каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ f ставит в соответствие единственный элемент $y \in \boldsymbol{Y}$. Это обозначается записью $f(x) = y$ либо f: $x \to y$. Элемент x называется аргументом функции, y – значением функции на x. Если $f(\boldsymbol{X})$ состоит из единственного элемента, то f называется функцией-константой. Тождественной функцией на множестве $\boldsymbol{X}$ называется функция e: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, такая что

$e(x) = x$ для любого $x \in \boldsymbol{X}$. Если $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{R}$, то функцию f называют вещественной.

Пусть даны функции f: X$\to$Y и g: Y$\to$Z. Функция h: X$\to$Z является композицией функций f и g, $h = g \circ f$, если для любого $x \in$ X $h(x) = g(f(x))$. Часто говорят, что функция h получена подстановкой f в g.

Функция, полученная из $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется суперпозицией $f_1, \ldots, f_n$. Выражение, описывающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки и символы аргументов, называется формулой.

Если $f = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q}_f)$, то

$$\boldsymbol{Q}_f = \{(x, y) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}\}.$$

Это соотношение позволяет установить способы задания функций.

1. Наиболее простой способ задания функций – это табличный. Таблицы при этом представляют собой конечные списки пар $(x, f(x))$. Однако таким способом могут быть заданы только функции, определенные на конечных множествах. Приведем примеры.

Из одного города в другой можно проехать по железной дороге, автобусом или катером. Стоимость билета будет соответственно 9000, 8000 и 10 000 руб. Стоимость билета можно представить как функцию от вида транспорта f: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{X}$ = {железная дорога, автобус, катер}, $\boldsymbol{Y}$ = {9000, 8000, 10000}. Функция f может быть задана в виде таблицы.

Функция от вида транспорта *f*

x	Железная дорога	Автобус	Катер
$f(x)$	9 000	8 000	10 000

Рассмотрим множество $\boldsymbol{X} := \{1, 2, 3\}$ и два преобразования этого множества – функции α и β; α: $1\to3$, $2\to3$, $3\to1$ и β: $1\to2$, $2\to1$, $3\to1$; α и β могут быть заданы таблично: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Композиции преобразований также можно задать таблично: $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Отсюда видно, что $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Итак, данный пример показывает, что композиция функций, а в общем случае отображений и вообще соответствий, не коммутативна.

2. Другим не менее известным способом задания функций является аналитический, или формула, описывающая функцию с помощью суперпозиции других (исходных) функций. Если способ вычисления исходных функций известен, то формула задает процедуру вычисления данной функции как некоторую последовательность вычислений исходных функций.

Пример 19. Представить функцию в виде композиции исходных функций:

$$f(x)=\left(1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$f_1(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $\boldsymbol{D}(f_1)=\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$, $\boldsymbol{E}(f_1)=\boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$, так как уравнение $\dfrac{x}{1-x}=y$ разрешимо относительно x и $x=\dfrac{y}{1+y}$ для любого $y\in\boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$.

$f_2(x)=x^2$, $\boldsymbol{D}(f_2)=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}(f_2)=\boldsymbol{R}_{\geq 0}$, $\boldsymbol{E}(f_2f_1)=\boldsymbol{R}_{\geq 0}$.

$f_3(x)=1+x$, $\boldsymbol{D}(f_3)=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}(f_3)=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}(f_3f_2f_1)=\boldsymbol{R}_{\geq 1}$.

$f_4(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{D}(f_4)=\boldsymbol{R}_{\geq 0}$, $\boldsymbol{E}(f_4)=\boldsymbol{R}_{\geq 0}$, $\boldsymbol{E}(f_4f_3f_2f_1)=\boldsymbol{R}_{\geq 1}$.

Видно, что $\boldsymbol{E}(f_i)\subset\boldsymbol{D}(f_{i+1})$, $i=\overline{1,\ 3}$.

Итак, $f(x)=f_4(f_3(f_2(f_1(x))))=f_4f_3f_2f_1(x)$, $\boldsymbol{D}(f)=\boldsymbol{D}(f_1)=\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$, $\boldsymbol{E}(f)=\boldsymbol{R}_{\geq 1}$.

Пусть функция $f=(\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q}_f)$, где $\boldsymbol{Q}_f=\{(x,x^2)\in\boldsymbol{R}^2\}$. Тогда функцию f можно задать формулой $f(x)=x^2$, $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Иногда для разных подмножеств множества $\boldsymbol{X}$ при задании функции приходится пользоваться различными формулами. Пусть $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{X}$, $i=\overline{1,n}$, $\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Обозначим через $f_i(x)$ формулу, определяющую y при $x\in\boldsymbol{A}_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда функция f, определенная на всем множестве $\boldsymbol{X}$, задается так:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ при } x\in A_1;\\ f_2(x) \text{ при } x\in A_2;\\ \qquad\dots\\ f_n(x) \text{ при } x\in A_n.\end{cases}$$

Так, функцию $f(x)=|x|$ можно задать в виде:

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ при } x\geq 0;\\ -x \text{ при } x<0.\end{cases}$$

3. Если f – вещественная функция, то элементы $(x, f(x))$ можно изобразить в виде точек на плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Полная совокупность таких точек будет представлять собой график функции f. Например, график функции f: $[-1,1]\to[0,1]$, $\boldsymbol{Q}_f = \{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$; график представлен на рис. 13.

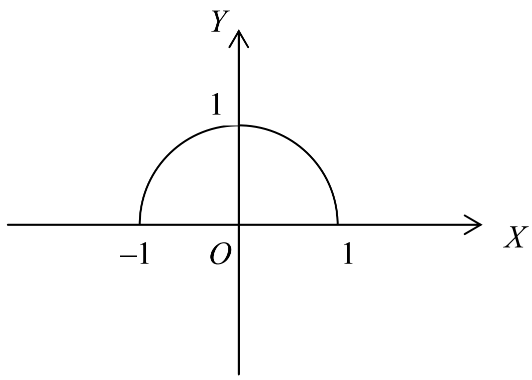


Рис. 13. График функции f

4. Вычисления функций по таблицам, формулам, а также с помощью графиков являются частными видами вычислительных процедур. Существуют вычислительные процедуры, не относящиеся к указанным трем видам. Среди них особенно следует выделить рекурсивные процедуры. Рекурсивная процедура задает функцию f, определенную на множестве $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N}\cup\{0\}$), следующим образом:

1) задается значение $f(1)$ ($f(0)$);

2) значение $f(n + 1)$ определяется через суперпозицию $f(n)$ и других, считающихся известными, функций.

Простейшим примером рекурсивной процедуры является вычисление функции $n!$:

1) $0! = 1$;

2) $(n + 1)! = n!(n + 1)$.

Для вычисления $(n + 1)!$ при $n\in \boldsymbol{N}$ требуется $(n – 1)$ умножений, т. е. число вычислительных шагов растет с ростом аргумента.

Приведем некоторые свойства функций и их композиций.

1. Композиция сюръективных функций сюръективна (следует из определений).

2. Композиция инъективных функций инъективна (следует из определений).

3. Композиция биективных функций биективна (следует из определений).

4. Композиция функций в общем случае не коммутативна.

Пример 20. f, g: $\boldsymbol{R}_{>0} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3 x$; f и g – биекции. Покажем, что их композиция не коммутативна.

$fg(2) = \log_2(\log_3 2) < 0$, так как $\log_3 2 < 1$.

$gf(2) = \log_3(\log_2 2) = \log_3 1 = 0$.

Поскольку $fg(2) \neq gf(2)$, то не может быть равенства $fg = gf$ на всей области определения $\boldsymbol{R}_{>0}$.

5. Композиция функций ассоциативна.

Пусть f: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, g: $\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, h: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{W}$ – произвольные функции. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \boldsymbol{X}$. $f(x) = y$, $g(y) = \mathrm{z}$, $h(z) = w$. Тогда $hgf(x) = h(gf(x)) = h(g(y)) = h(\mathrm{z}) = w$, $(hg)f(x) = hg(f(x)) = hg(y) = h(g(y)) =$ $= h(z) = w$; т. е. для любого $\mathrm{x} \in \boldsymbol{X}$ $h(gf)(x) = (hg)f(x)$. Значит, $h(gf) = (hg)f$.

Пример 21. Даны три вещественные функции:

$f(x) = 2x^9 - 7$, $g(x) = 5\operatorname{arctg}(4x) + 2$, $h(x) = \mathrm{e}^{5^x} - 17$.

Необходимо:

1) найти заданные композиции функций: fgh, hfg, ffg;

2) узнать, являются ли заданные вещественные функции f, g, h инъекциями, сюръекциями, биекциями на $\boldsymbol{R}$;

3) найти обратные функции к f, g, h. Если функции со своими областями определения обратных не имеют, то найти обратные функции к их сужениям.

1. $\boldsymbol{D}(f) = \boldsymbol{D}(g) = \boldsymbol{D}(h) = \boldsymbol{R}$, поэтому все три указанные композиции функций определены на $\boldsymbol{R}$.

$fgh(x) = f(gh(x)) = 2(gh(x))^9 - 7 = 2(5\operatorname{arctg}(4h(x)) + 2)^9 - 7 =$ $= 2(5\operatorname{arctg}(4(\mathrm{e}^{5^x} - 17)) + 2)^9 - 7 = 2(5\operatorname{arctg}(4\mathrm{e}^{5^x} - 68) + 2)^9 - 7$.

$hfg(x) = hf(g(x)) = hf(5\operatorname{arctg}(4x) + 2) = h(2(5\operatorname{arctg}(4x) + 2)^9 - 7) =$ $= \mathrm{e}^{5^{2(5\operatorname{arctg}(4x)+2)^9-7}} - 17$.

$ffg(x) = f(fg(x)) = f(2(5\operatorname{arctg}(4x) + 2)^9 - 7) = 2(2(5\operatorname{arctg}(4x) + 2)^9 - 7)^9 - 7$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^9 - 7$. Производная функции $\mathrm{f}'(x) = 18x^8 > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, поэтому f является строго возрастающей функцией на $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$; $f'(0) = 0$, $f(0) = -7 \neq f(\xi)$ для $\forall \xi \neq 0$, поэтому f инъективна.

Функция f непрерывна на $\boldsymbol{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, поэтому f является сюръекцией на $\boldsymbol{R}$. Итак, f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – биекция.

Рассмотрим функцию $g(x) = 5\operatorname{arctg}(4x) + 2$. Производная функции g $g'(x) = \dfrac{20}{1 + 16x^2} > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, функция строго возрастает на всей области определения $\boldsymbol{R}$. Поэтому g – инъекция. Поскольку $-\pi/2 < \operatorname{arctg}(4x) < \pi/2$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, то $-5\pi/2 + 2 < g(x) < 5\pi/2 + 2$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Значит, g не является сюръекцией на $\boldsymbol{R}$. Итак, g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не является биекцией.

Рассмотрим функцию $h(x) = \mathrm{e}^{5^x} - 17$. $h = h_3h_2h_1$, где $h_1(x) = 5^x$, $h_2(x) = \mathrm{e}^x$, $h_3(x) = x - 17$, $\boldsymbol{D}(h_i) = \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3$; $h_1'(x) = \ln 5 \cdot 5^x > 0$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, следовательно, h_1 строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, значит, h_1 – инъекция. $h_2'(x) = \mathrm{e}^x > 0$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, следовательно, h_2 строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, значит, h_2 – инъекция. Пусть $x_1 \neq x_2$; из равенства $x_1 - 17 = x_2 - 17$ следует, что $x_1 = x_2$, поэтому h_3 – инъекция. h является инъективной функцией как композиция инъекций (по свойству 2 композиции функций). $0 < 5^x < +\infty$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, $1 < \mathrm{e}^{5^x} < +\infty$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, $-16 < \mathrm{e}^{5^x} - 17 < +\infty$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Значит, h не является сюръекцией на $\boldsymbol{R}$. Итак, h: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не является биекцией.

3. Поскольку f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – биекция, то на $\boldsymbol{R}$ существует обратная функция к f – f^{-1}: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

$$2x^9 - 7 = y;$$

$$x^9 = \frac{y+7}{2};$$

$$x = \sqrt[9]{\frac{y+7}{2}}.$$

Итак, $f^{-1}(x) = \sqrt[9]{\dfrac{x+7}{2}}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

$\boldsymbol{E}(g) = (-5\pi/2 + 2,\ 5\pi/2 + 2)$. Поскольку g – инъекция на $\boldsymbol{R}$, то g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{E}(g)$ – биекция. Поэтому на $\boldsymbol{E}(g)$ существует обратная функция к g – g^{-1}: $\boldsymbol{E}(g) \to \boldsymbol{R}$.

$$5\operatorname{arctg}(4x) + 2 = y;$$

$$5\operatorname{arctg}(4x) = y - 2;$$

$$\operatorname{arctg}(4x) = \frac{y-2}{5};$$

$$4x = \operatorname{tg}\left(\frac{y-2}{5}\right);$$

$$x = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{y-2}{5}\right).$$

Итак, $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\left(\frac{x-2}{5}\right)$, $x \in (-5\pi/2 + 2,\ 5\pi/2 + 2)$.

$\boldsymbol{E}(h) = (-16; +\infty)$. Поскольку h – инъекция на $\boldsymbol{R}$, то h: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{E}(h)$ – биекция. Тогда для функции h существует обратная функция h^{-1}: $\boldsymbol{E}(h) \to \boldsymbol{R}$.

$e^{5^x} - 17 = y$;

$e^{5^x} = y + 17$;

$5^x = \ln(y + 17)$;

$x = \log_5(\ln(y + 17))$.

Итак, $h^{-1}(x) = \log_5(\ln(x + 17))$, $x \in (-16; +\infty)$.

Говоря об отображении f: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ как о функции с вещественными значениями, на характер элементов множества $\boldsymbol{X}$ каких-либо особых ограничений не накладывали. Однако важным для практики является случай, когда множество $\boldsymbol{X}$ представляет собой множество функций, а множество $\boldsymbol{Y}$ – множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию функционала, подробное рассмотрение которого удобно провести на примере.

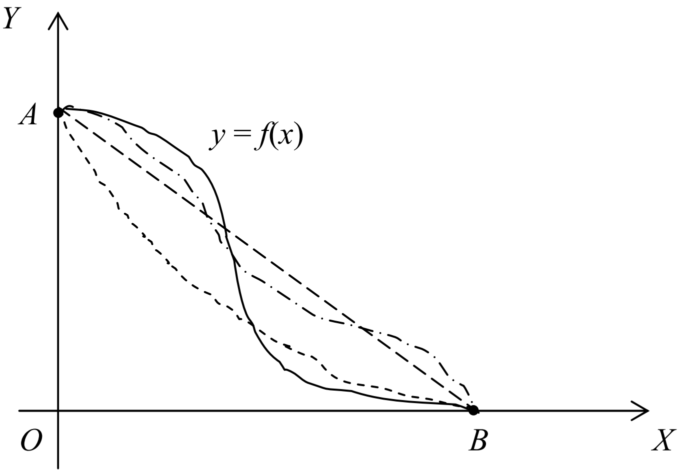


Рис. 14. График линий $y = f(x)$

Представим себе некоторую линию $y = f(x)$ в плоскости XOY, соединяющую фиксированные точки A и B, как показано на рис. 14, по которой скатывается свободно движущийся шарик. Обозначим через t время, которое шарик затратит на перемещение из точки A в точку B. Это время зависит от характера линии AB, т. е. от вида функции $f(x)$. Если обозначить через $\boldsymbol{F}(x)$ множество различных функций, изображающих линию AB, а через $\boldsymbol{T}$ множество вещественных чисел t, определяющих время движения шарика, то зависимость времени движения от вида функции может быть записана как функциональное отображение

j: $\boldsymbol{F}(x) \to \boldsymbol{T}$.

$J = (\boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{T}, \boldsymbol{J})$, где $\boldsymbol{J} = \{(f(x), t) \mid f(x) \in \boldsymbol{F}(x), t \in \boldsymbol{T}\}$.

В этом случае говорят, что вещественное число $t \in \boldsymbol{T}$ представляет собой значение функционала j от функции $f(x) \in \boldsymbol{F}(x)$, записывают это в виде:

$t = j[f(x)]$.

В задачах управления функционалы используются как критерии качества управления. Так, в рассмотренном примере время перемещения шарика из точки A в точку B можно трактовать как критерий «качества» выбранной функции $f(x)$. При этом говорят об оптимальном управлении как о таком, при котором соответствующий критерий качества обращается в минимум. С этой точки зрения определение «оптимального» вида функции $f(x)$ сводится к выполнению условия $\min\limits_{f \in F} j[f(x)]$, при котором время t будет минимальным. В математике подобная линия наискорейшего спуска получила название брахистохроны.

Оператором называется функциональное отображение l: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, в котором $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ являются множествами функций одного аргумента t.

$l = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{L})$,

где $\boldsymbol{L} = \{(x(t), y(t)) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}\}$, $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. В этом случае говорят, что оператор l преобразует функцию $x(t)$ в функцию

$y(t) = l[x(t)]$.

Примером оператора служит оператор дифференцирования p, ставящий в соответствие функции $f(x)$ другую функцию $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$, что может быть записано в виде:

$$f'(x) = p[f(x)].$$

В задачах управления роль оператора часто выполняет сама управляемая система, преобразующая по некоторому закону l входной сигнал $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$, как это показано на рис. 15.

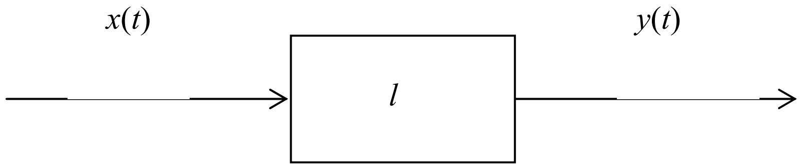


Рис. 15. Функциональное отображение

Пример 22. Рассмотрим предложенную фон Нейманом блок-схему ЭВМ, которая состоит из множества взаимосвязанных устройств $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e\}$, где a – устройство ввода, b – арифметическое устройство (процессор), c – устройство управления, d – запоминающее устройство, e – устройство вывода.

Рассмотрим информационный обмен между устройствами m_i и m_j, которые находятся в отношении $\boldsymbol{T}$ (m_i, m_j), если из устройства m_i поступает информация в устройство m_j. Опишем отношение $\boldsymbol{T}$ как множество упорядоченных пар: $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{M}^2$.

$\boldsymbol{T} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, c)\}$.

Построим матрицу данного отношения:

$$C = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Построим график данного отношения (рис. 16).

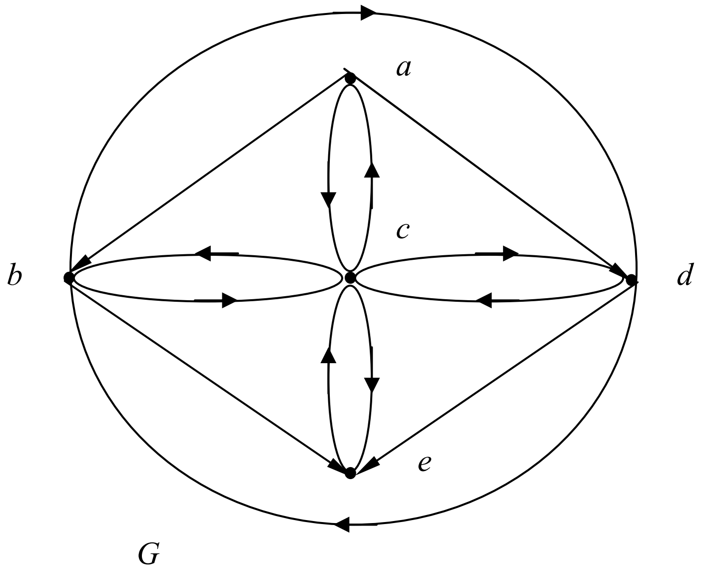


Рис. 16. Граф блок-схемы ЭВМ

Упражнения

Задача № 1. Даны три вещественных функции:

$f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^3 + 7x - 8$, $h(x) = 2^{x^2+16x}$.

1. Найти заданные композиции функций: fgh, hfg, ffg.

2. Являются ли заданные вещественные функции f, g, h инъекциями, сюръекциями, биекциями на $\boldsymbol{R}$?

3. Найти обратные функции к f, g, h. Если функции со своими областями определения обратных не имеют, то найти обратные функции к их сужениям.

Задача № 2. Даны три вещественных функции:

$f(x) = 3x + 14$, $g(x) = 3^x - 17$, $h(x) = x^3 - 2x + 7$.

1. Найти заданные композиции функций: fgh, hgf, ffh.

2. Являются ли заданные вещественные функции f, g, h инъекциями, сюръекциями, биекциями на $\boldsymbol{R}$?

3. Найти обратные функции к f, g, h. Если функции со своими областями определения обратных не имеют, то найти обратные функции к их сужениям.

Задача № 3. Даны три вещественных функции:

$f(x) = \sin(3x) - 2$, $g(x) = 6\operatorname{arctg}(5x) - 3$, $h(x) = 5x - 9$.

1. Найти заданные композиции функций: fgh, ghf, hhg.

2. Являются ли заданные вещественные функции f, g, h инъекциями, сюръекциями, биекциями на $\mathbf{R}$?

3. Найти обратные функции к f, g, h. Если функции со своими областями определения обратных не имеют, то найти обратные функции к их сужениям.

Задача № 4. Даны три вещественных функции:

$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $g(x) = 3\operatorname{arctg}(7x) + 9$, $h(x) = \ln(x + 1)$.

1. Найти заданные композиции функций: fgh, hgf, fgg.

2. Являются ли заданные вещественные функции f, g, h инъекциями, сюръекциями, биекциями на $\boldsymbol{R}$?

3. Найти обратные функции к f, g, h. Если функции со своими областями определения обратных не имеют, то найти обратные функции к их сужениям.

2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1. Определение графа. Основные понятия теории графов

Теория графов как математическая дисциплина сформировалась в середине 30-х гг. XX ст. Термин «граф» (определение графа) впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г. При использовании понятия «граф» в математике чаще всего имеют в виду графическое определение (задание) связей между объектами произвольной природы. Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации, построение контактных схем и исследование конечных автоматов, календарное планирование промышленного производства, сетевое планирование и управление, тактические и логические задачи, головоломки, занимательные игры, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, задачи идентификации в органической химии, моделирование жизнедеятельности и нервной системы живых организмов, исследование случайных процессов, связей между людьми и группами людей и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, теория групп, математическая логика, численный анализ, теория вероятностей, топология, комбинаторный анализ. За последние три-четыре десятилетия теория графов превратилась в один из наиболее бурно развивающихся разделов математики. Это вызвано запросами стремительно расширяющейся области приложений.

Граф может интерпретироваться либо как некоторая геометриическая фигура в пространстве, состоящая из точек и соединяющих их линий, либо как некоторый теоретико-множественный объект.

Пусть $\boldsymbol{V}$ – непустое множество и $\boldsymbol{E}$ – набор пар элементов множества $\boldsymbol{V}$, причем в парах могут быть одинаковые элементы и допускается повторение пар. Тогда совокупность $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ называется графом G.

Будем обозначать иногда этот граф $G(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$. Элементы множества $\boldsymbol{V}$ называются вершинами графа, а элементы множества $\boldsymbol{E}$ – ребрами.

Ребра графа могут представляться как неупорядоченными парами $\{v_i, v_j\}$, так и упорядоченными (v_i, v_j). В последнем случае ребро называется ориентированным, или дугой, v_i – начальной вершиной (началом), v_j – конечной вершиной (концом) данной дуги. Ребро $\{v_i, v_i\}$ или (v_i, v_i) называется петлей.

Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется неориентированным, а граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг, – ориентированным (орграфом). Графы, содержащие как ребра, так и дуги, именуются смешанными.

Теоретико-множественное определение графа в значительной степени является абстрактным, и поэтому для введения других понятий и определений целесообразно иметь геометрическую интерпретацию графа, являющуюся более наглядной. Геометрической интерпретацией графа является рассматриваемая в евклидовом пространстве фигура Г, состоящая из точек $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ (вершин) и соединяющих их линий, являющихся либо дугами эллипсов, либо отрезками прямых. Если все линии фигуры Г направленные, то это геометрическая интерпретация орграфа, если все линии ненаправленные – геометрическая интерпретация неориентированного графа. Геометрическая интерпретация смешанного графа содержит как направленные, так и ненаправленные линии. Петли могут быть ориентированы либо по часовой стрелке, либо против, однако ориентацию петли можно не учитывать. На рис. 17 представлена геометрическая интерпретация смешанного графа $G(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ на плоскости, где $\boldsymbol{V} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\boldsymbol{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $e_1 = \{x_1, x_1\}$, $e_2 = \{x_1, x_2\}$, $e_3 = \{x_2, x_3\}$, $e_4 = \{x_1, x_3\}$, $e_5 = \{x_1, x_3\}$, $e_6 = \{x_4, x_4\}$.

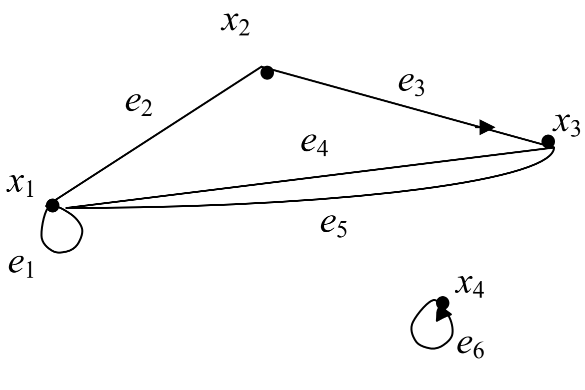


Рис. 17. Смешанный граф

Между графом, интерпретируемым в теоретико-множественном смысле, и его геометрической интерпретацией существует взаимно-однозначное соответствие. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии – ребрам (дугам).

Противоположно направленные дуги орграфа, отображающие ориентацию связи в обоих направлениях, по существу равноценны неориентированной связи и могут быть заменены ребром.

Вершины, соединенные между собой хотя бы одним ребром или дугой, называются смежными. На рис. 17 смежными являются вершины x_1 и x_1, x_1 и x_2, x_1 и x_3, x_2 и x_3, x_4 и x_4. Аналогично, два ребра, имеющие хотя бы одну общую вершину, называются смежными. На рис. 17 смежными являются ребра e_1 и e_2, e_1 и e_4, e_1 и e_5, e_2 и e_3, e_2 и e_4, e_2 и e_5, e_3 и e_4, e_3 и e_5, e_4 и e_5. Если ребро e_k соединяет две вершины, т. е. $e_k = \{v_i, v_j\}$или $e_k = (v_i, v_j)$, или $e_k = (v_j, v_i)$, то ребро e_k называется инцидентным вершинам v_i и v_j или вершины v_i и v_j называются инцидентными ребру e_k. Заметим, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Граф называется конечным, если множества его вершин и ребер конечны (пустое множество тоже рассматривается как конечное).

Назовем граф обыкновенным или простым, если в нем отсутствуют петли и кратные ребра (дуги). Граф, имеющий кратные ребра (дуги), называется мультиграфом, а граф, в котором есть хотя бы одна петля, называется псевдографом.

Два графа G и H изоморфны (записывается $G \cong H$), если между их множествами вершин существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу. Например, графы на рис. 18 изоморфны.

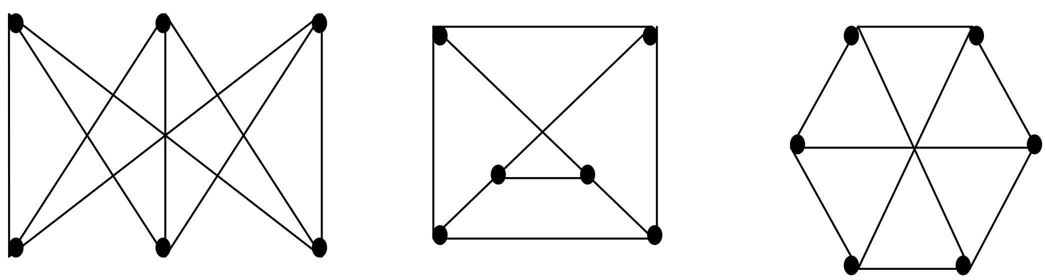


Рис. 18. Изоморфные графы

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных класссов не изоморфны. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими (их можно изображать одним рисунком).

Обыкновенный неориентированный граф называется полным, если любые две различные его вершины смежные. Обыкновенный орграф называется полным, если в нем любые две различные вершины соединены парой антипараллельных дуг.

Число ребер неориентированного графа, инцидентных вершин v, называется степенью, или порядком, этой вершины. При подсчете числа ребер, инцидентных вершине v, некоторую неопределенность вносит петля, так как ее можно считать и как единственное, и как двойное ребро. В зависимости от рассматриваемой задачи может оказаться более удобным как тот, так и другой способ подсчета. Таким образом, в каждом случае должно быть указано, считается петля однократной или двойной. Будем обозначать степень вершины v через $\mathrm{d}(v)$ (или $\deg(v)$).

Изолированными называются вершины, которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Изолированность вершины v в неориентированном графе эквивалентна условию $\mathrm{d}(v) = 0$. Вершина степени 1 (единица) называется концевой, или висячей, вершиной, если петля считается двойной.

2.2. Смежность и инцидентность

Кроме рассмотренных теоретико-множественной и геометрической форм определения (задания) графов, часто используется матричная форма их представления. Существуют различные виды матриц графов, однако все они, как правило, полностью передают основные свойства графов. Матричная форма задания графов обладает достаточной наглядностью при любой степени сложности графа и, что самое важное, позволяет автоматизировать процесс обработки информации, представленной в терминах теории графов, – любая матрица графа может быть введена в ЭВМ.

При задании графов в матричной форме могут учитываться либо отношения смежности (вершин или ребер (дуг)), либо отношения инцидентности (вершин и ребер (дуг)). В связи с этим матрицы графов делятся на два основных класса: матрицы смежности и матрицы инцидентности.

Матрицей смежности вершин неориентированного графа G называется квадратная матрица $A(G) = (a_{ij})$ порядка p (p – количество вершин графа), элементы a_{ij} которой равны числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j (при этом петля может означать одно или два ребра по договоренности).

Построим матрицу смежности вершин для графа G:

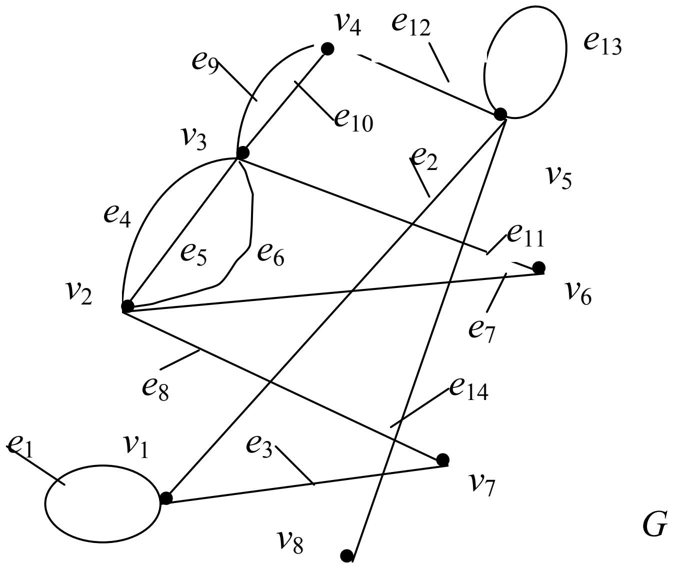


Рис. 19. Граф G

Матрица смежности вершин графа G, представленного на рис. 19, имеет вид:

$$A(G)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В данном случае петля считается двойным ребром.

Из определения матрицы смежности вершин неориентированного графа непосредственно вытекают свойства матриц этого вида.

1. Матрица $A(G)$ является квадратной и симметрической.

2. Элементами матрицы $A(G)$ являются целые неотрицательные числа.

3. Сумма элементов матрицы $A(G)$ по i-й строке (или по i-му столбцу) равна степени $d(v_i)$ соответствующей вершины v_i.

Очевидно, что соответствие $G \rightarrow A(G)$ определяет биекцию множества неориентированных графов с заданными отношениями смежности вершин на множество квадратных симметрических матриц с целыми неотрицательными элементами.

Матрицей смежности вершин ориентированного графа G называется квадратная матрица $A(G) = (a_{ij})$ порядка p (p – количество вершин графа), элементы a_{ij} которой равны числу дуг, исходящих из вершины v_i и заходящих в вершину v_j.

Построим матрицу смежности вершин для ориентированного графа G:

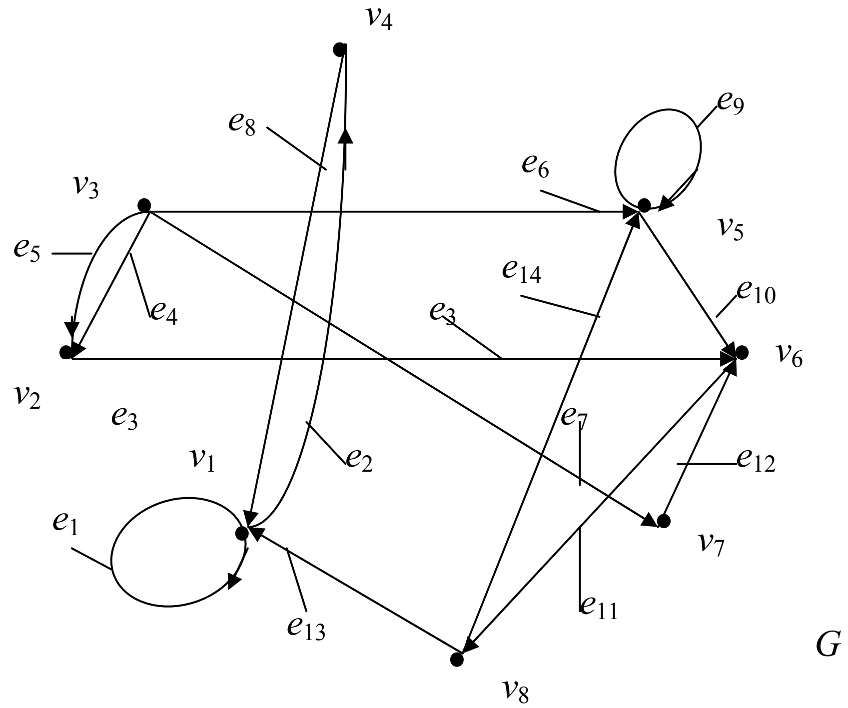


Рис. 20. Орграф G

Матрица смежности вершин ориентированного графа G, представленного на рис. 20, имеет вид:

$$A(G)=\begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Перечислим основные свойства матриц смежности вершин ориентированного графа, вытекающие из определения.

1. Матрица $A(G)$ является квадратной и может оказаться симметрической только в частных случаях.

2. Элементами матрицы $A(G)$ являются целые неотрицательные числа.

3. Сумма элементов по i-й строке матрицы $A(G)$ равна полустепени исхода $d^{+}(v_i)$, а по i-му столбцу – полустепени захода $d^{-}(v_i)$ соответствующей вершины v_i.

И снова соответствие $G \rightarrow A(G)$ определяет биекцию множества ориентированных графов с заданными ориентированными отношениями смежности вершин на множество квадратных матриц с целыми неотрицательными элементами.

Изоморфные графы различаются только нумерацией вершин. Изменение нумерации вершин графа равносильно перестановке отдельных строк и тех же столбцов в его матрице смежности вершин.

Матрицей инцидентности неориентированного графа G называется матрица $B(G) = (b_{ij})$ размерности $p \times q$ (p и q – количество вершин и ребер графа соответственно), элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Иногда, если петля e_j инцидентна вершине v_i, полагают $b_{ij} = 2$.

Перечислим свойства матрицы инцидентности неориентированного графа.

1. Сумма элементов i-й строки матрицы равна степени вершины v_i.

2. Сумма элементов j-го столбца матрицы равна 2 (если петлю не считать двойным ребром и e_j – петля, то сумма элементов j-го столбца равна 1).

3. Между строками матрицы существует очевидная зависимость. Так как каждый столбец содержит только два единичных элемента или один элемент, равный двум (если петлю считать двойным ребром), а остальные элементы нулевые, то сумма всех строк по модулю два равна нулю. Поэтому, без потери информации о графе, вместо матрицы $B(G)$ можно рассматривать сокращенную матрицу $B_0(G)$, получаемую из $B(G)$ вычеркиванием любой строки (чаще всего последней).

Матрица инцидентности графа G, изображенного на рис. 19, имеет вид:

$$B(G)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

В данном случае петля считается двойным ребром.

Как и выше, соответствие $G \to B(G)$ является биекцией множества всех неориентированных графов на множество всех прямоугольных матриц с элементами 0, 1, 2, каждый столбец которых содержит только два ненулевых элемента 1 или один ненулевой элемент 2 (или 1).

Матрицей инцидентности орграфа G с вершинами p и ребрами q называется матрица $B(G) = (b_{ij})$ размерности $p \times q$, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i - \text{ начало дуги } e_j, \\ -1, \text{ если вершина } v_i - \text{ конец дуги } e_j, \\ \pm 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна петле } e_j, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } e_j. \end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа обладает следующими свойствами.

1. Сумма элементов 1 в строке равна полустепени исхода соответствующей вершины, а сумма элементов –1 – полустепени захода.

2. Сумма элементов любого столбца матрицы равна 0.

3. Сумма всех строк как векторов длины q равна нулевому вектору. Поэтому, как и в случае неориентированного графа, вместо матрицы $B(G)$ можно рассматривать сокращенную матрицу $B_0(G)$.

Соответствие $G \to B(G)$ является биекцией множества всех ориентированных графов на множество всех прямоугольных матриц с элементами 0, 1, –1, ± 1 таких, что каждый столбец содержит только два ненулевых элемента 1 и –1 или один ненулевой элемент ± 1.

Для графа G, изображенного на рис. 20, матрица инцидентности имеет вид:

$$B(G)=\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ \hline
v_1 & \pm1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
v_2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \pm1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
v_6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Неориентированные (ориентированные) графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

В каждом столбце матрицы инцидентности для неориентированного или ориентированного графа только два элемента отличны от 0 (или один, если ребро является петлей). Поэтому такой способ задания графа оказывается недостаточно экономным. Отношение инцидентности можно еще задать списком ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, в нем записаны номера вершин, инцидентных ему. Для неориентированного графа порядок этих вершин в строке произволен, для ориентированного первым стоит номер или другое наименование начала дуги, а вторым – ее конец. По списку ребер графа легко построить его матрицу инцидентности.

2.3. Операции над графами и их свойства

Дополнение графа. Пусть $G(V,E)$ – обыкновенный граф. Дополнение $\overline{G}$ графа G (также обыкновенный граф) имеет в качестве множества вершин множество V. Любые две несовпадающие вершины в $\overline{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рис. 21 изображены графы G_1, G_2 и их дополнения $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ соответственно.

Очевидно, что $\overline{\overline{G}}=G$ и $G\cong H$ тогда и только тогда, когда $\overline{G}\cong\overline{H}$.

Теорема 2.1. Пусть G – обыкновенный граф с матрицей смежности вершин A. Тогда матрицей смежности вершин графа $\overline{G}$ является матрица $\overline{A}$, образованная поэлементным логическим отрицанием матрицы A с исключением диагональные элементы, которые остаются нулевыми.

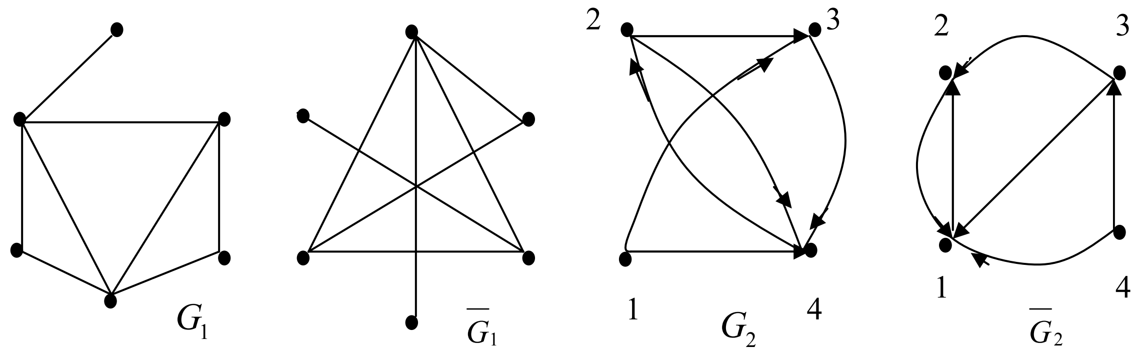


Рис. 21. Дополнение графов

Пример 23. Матрицы смежности вершин A графа $\overline{G}_2$ и $\overline{A}$ графа $\overline{G}_2$, изображенных на рис. 21, имеют вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \overline{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Правильность построения матрицы $\overline{A}$ можно легко проверить по рис. 21.

Объединение графов. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы. Объединением $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф со множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \cup E_2$.

Операция объединения графов может быть выполнена в матричной форме.

Теорема 2.2. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V,E) = G_1 \cup G_2$ является матрица A, полученная поэлементным взятием максимального элемента вспомогательных матриц A_1' и A_2'. Матрицы A_i', $i = 1, 2$, получаются из A_i с помощью добавления нулевых строк и столбцов, соответствующих вершинам, отсутствующим в V_1, но присутствующим в $V = V_1 \cup V_2$.

Следствие. Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия максимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин A графа $G = G_1 \cup G_2$ соответствует логической сумме элементов.

Пример 24. На рис. 22 приведены графы G_1, G_2 и их объединение $G = G_1 \cup G_2$.

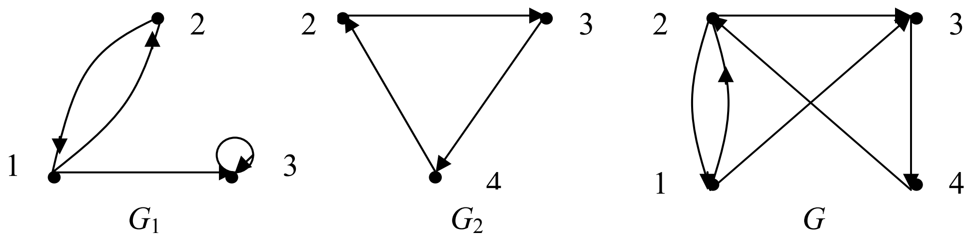


Рис. 22. Объединение графов

Составим матрицы смежности вершин графов.

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Так как $V = V_1 \cup V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, то составим матрицы смежности вершин вспомогательных графов G_1' и G_2'.

$$A_1' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_2' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица A графа G имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Правильность построения матрицы A легко проверяется по рис. 22, где изображен граф G.

Пересечение графов. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы. Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф со множеством вершин $V = V_1 \cap V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \cap E_2$.

Для того чтобы операция пересечения была всеобъемлющей, необходимо ввести понятие пустого графа. Граф G называется пустым, если его множество вершин пусто. Заметим, что в этом случае множество ребер графа также пусто. Пустой граф обозначается символом $\varnothing$. Пустой граф может быть получен в результате выполнения операции пересечения графов, у которых множества вершин, а следовательно, и множества ребер, не пересекаются.

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

Теорема 2.3. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G_1 \cap G_2$ является матрица A, полученная поэлементным взятием минимума вспомогательных матриц A_1' и A_2'. Матрицы A_i', $i = 1, 2$, получаются из A_i с помощью удаления строк и столбцов, соответствующих вершинам, не вошедшим в $V = V_1 \cap V_2$.

Следствие. Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия минимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин A графа $G = G_1 \cap G_2$ соответствует логическому (обычному) произведению элементов.

Пример 25. На рис. 23 представлены графы G_1, G_2 и их пересечение $G = G_1 \cap G_2$.

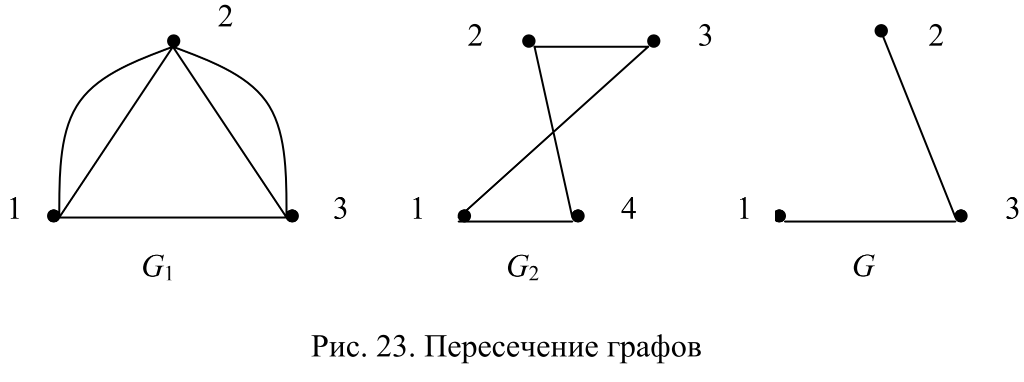


Рис. 23. Пересечение графов

Составим матрицы смежности вершин исходных графов:

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Находим множество вершин результирующего графа: $V = V_1 \cap V_2 =$ $= \{1, 2, 3\}$.

Составим матрицы смежности вершин вспомогательных графов G_1' и G_2':

$$A_1' = A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad A_2' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Найдем матрицу смежности вершин графа G:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Полученная матрица смежности вершин A соответствует графу G, изображенному на рис. 22.

Упражнения

Задачи № 1–7. Для графов G_1 и G_2 (рис. 1–7) построить графы $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1(G_2)$, $G_2(G_1)$, матрицы смежности вершин $A(G_1)$, $A(G_2)$ и матрицы инцидентности $B(G_1)$, $B(G_2)$, введя предварительно нумерацию дуг. По матрицам смежности вершин исходных графов построить матрицы смежности вершин $A(G_1 \cup G_2)$, $A(G_1 \cap G_2)$, $A(G_1(G_2))$, $A(G_2(G_1))$. Будут ли изоморфны графы $G_1(G_2)$ и $G_2(G_1)$?

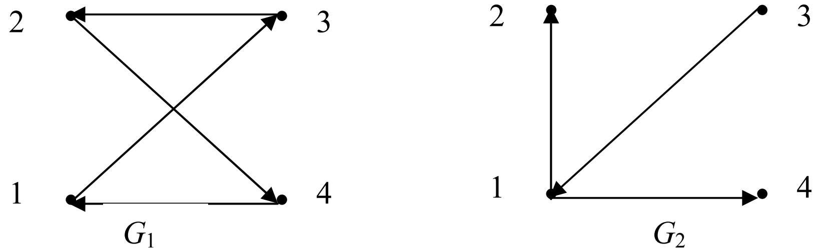


Рис. 1

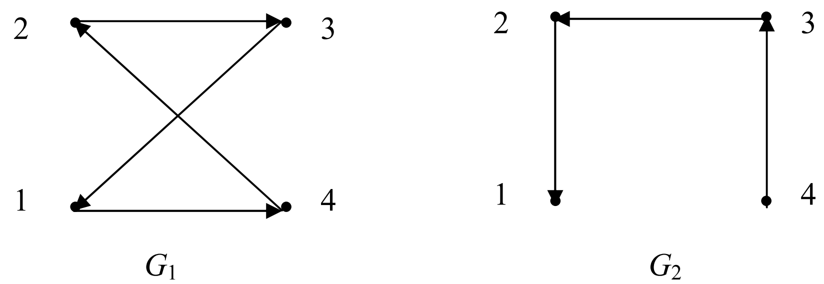


Рис. 2

Рис. 3

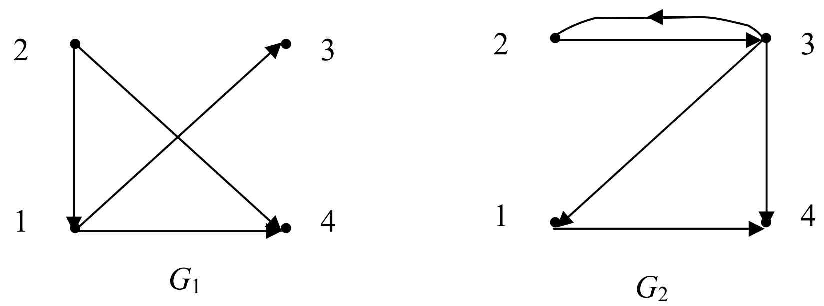


Рис. 4

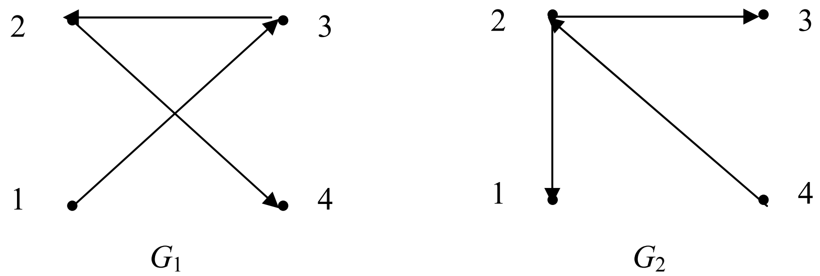
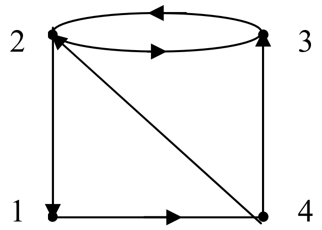
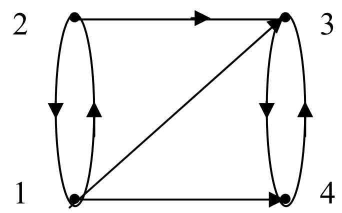


Рис. 5

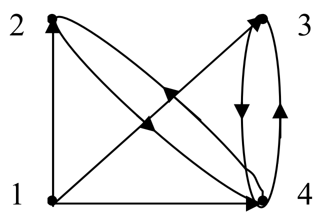


G_1

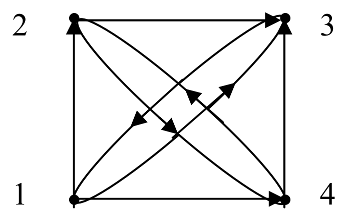


G_2

Рис. 6



G_1



G_2

Рис. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2005. – 364 с.

2. Баканович, Э. А. Дискретная математика: учеб. пособие / Э. А. Баканович, Н. А. Волорова, А. В. Епихин. – Минск: БГУИР, 1998. – 52 с.

3. Берж, К. Теория графов и ее применения: пер. с франц. / К. Берж. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.

4. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.] – М.: Наука, 1990. – 384 с.

5. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергия, 1980. – 409 с.

6. Харари, Ф. Теория графов: пер. с англ. / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 301 с.

7. Карпов, В. Г. Математическая логика и дискретная математика: учеб. пособие / В. Г. Карпов, В. А. Мощенский. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 256 с.

8. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики: учеб. пособие для вузов / Ю. М. Коршунов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 376 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВЫ
ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Составитель **Лащенко** Анатолий Павлович

Редактор *О. П. Соломевич*
Компьютерная верстка *О. П. Соломевич*

Подписано в печать 30.10.2009. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,1.
Тираж 100 экз. Заказ .

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13.
ЛП № 02330/0150477 от 16.04.2009.