Лекция 1. Предмет линейной алгебры. Матрицы и операции над ними. Свойства операций. Понятие об обратной матрице и ее вычисление.

Среди разнообразных функциональных зависимостей, описывающих широкий круг природных и общественных явлений, *линейная зависимость* – самая простая и наиболее глубоко изученная.

Линейная алгебра – ветвь математики, исследующая *общие линейные функции конечного числа переменных*. Ее идеи и методы пронизывают многие разделы математических знаний, а результаты широко используются в приложениях математики, в том числе экономических.

Одним из традиционных методов изложения линейной алгебры как математической дисциплины для студентов прикладных профилей является обобщение хорошо известной со школьной скамьи одномерной линейной зависимости вида $ax+b$ и соответствующего ей алгебраического уравнения 1-й степени (или *линейного*) $ax+b=0$.

В основе этого обобщения лежит важное понятие ***матрицы***. В простейшем случае матрицы «сделаны» из чисел[1] и называются поэтому *числовыми*.

◀Определение▶

Матрица A *размера* $(m\times n)$[2] - это прямоугольный массив (таблица) вещественных чисел вида

(1.1) $$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

[1] Числа, образующие матрицы, будем пока считать вещественными. В свое время будет введено важное обобщение вещественных (или действительных) чисел – так называемые ***комплексные*** числа.

[2] Читается: «эм на эн»; круглые скобки иногда опускают. Матрица указанного размера (или размеров) называется также сокращенно $(m\times n)$ – матрицей.

Общепринятыми являются также следующие обозначения и наименования вертикальных и горизонтальных рядов чисел в **(1.1)**:

► $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ – ***столбец*** матрицы A (1-й), ► $\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – ее ***строка*** (m – я).

Будут использоваться также индексные обозначения столбцов и строк следующего типа: $a_{\bullet j}$ – j – й столбец, $a_{i\bullet}$ – i – я строка матрицы A. В качестве ограничителей в формуле **(1.1)** применяются, помимо круглых скобок, сдвоенные вертикальные черточки $\| * \|$ или квадратные скобки $[*]$. Имена матриц по традиции – заглавные латинские буквы. Обозначение составляющих их чисел, называемых *элементами*, вполне ясн***о*** из приведенных выше записей. Оно включает *общее имя* (часто это малая латинская буква, соответствующая имени матрицы) и пару *индексов*, первый из которых по соглашению нумерует строку (**row**) матрицы, а второй – столбец (**column**), на пересечении которых располагается в ней данный элемент[3].

Краткая форма записи матриц выглядит так:

(1.2) $$A = \{ a_{ij} \},\ i = \underline{1,m};\ j = \underline{1,n}$$

Здесь фигурные скобки обозначают упорядоченную совокупность элементов, а равенство вида $i = \underline{1,m}$ (и ему подобные) задает диапазон изменения соответствующего индекса (в данном случае строки матрицы занумерованы натуральными числами от 1 до m).

В ряде случаев бывает удобно начинать нумерацию строк и столбцов матриц не с 1, а с 0 (это принято в некоторых системах компьютерной алгебры, например, в системе MathCAD).

Понятно, что **(1.1)** и **(1.2)** – это обозначения матриц в самом общем виде. Если размеры матрицы m, n – конкретные числа, как и ее элементы, то и ее обозначение становится вполне определенным.

[3] Часто, но не всегда, это *правые нижние* индексы. Иногда индекс строки пишут справа вверху от имени элемента матрицы, а индекс столбца – справа внизу от него.

◆**Пример:**

(1.3) $$B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & \pi & 1\end{pmatrix},\ \mathbb{E}_2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\ C=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\text{ и т.п.}$$

Если в **(1.1)** $m\neq n$, то матрицу именуют *прямоугольной*; в противном случае она – *квадратная, порядка* n, где n – число строк или столбцов в ней. Так, $\mathbb{E}_2$ в **(1.3)** – квадратная матрица 2-го порядка.

При $m=n=1$ имеют дело с так называемой *матрицей-числом* $A=(a_{11})$; если $m=1$, $n>1$ – то с ***матрицей-строкой*** *длины* n, а при $n=1$, $m>1$ – с ***матрицей-столбцом*** *высоты* m.

Если строка или столбец – это часть некоторой «б**о**льшей» матрицы, то в обозначениях их элементов сохраняют оба индекса. Так, $s_3(1\times n)=\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\end{pmatrix}$ – это 3-я строка матрицы A из **(1.1)**, а $t_k(m\times 1)=\begin{pmatrix}a_{1k}\\ a_{2k}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{pmatrix}$ – это ее k – й столбец.

В ряде случаев бывает полезен более абстрактный взгляд на матрицы, отличный от их «естественной» трактовки в виде прямоугольных таблиц. Несколько слов об этом сказано ниже в п.п. **I**, **II**.

I. Как видно, каждая строка матрицы A в **(1.1)** есть *упорядоченный набор* **(*кортеж*)** из n чисел, т.е. *точка* в арифметическом пространстве $\mathbb{R}_n=\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ (n раз)[4]. Далее, поскольку в записи **(1.1)** важен не только порядок элементов в строке, а и порядок следования в таблице самих строк, то эту таблицу – нашу матрицу – можно считать упорядоченным набором этих строк, как m точек в $\mathbb{R}_n$, т.е. в итоге – *точкой* в пространстве $\mathbb{R}_{n\times m}$ = $\mathbb{R}_n\times\ldots\times\mathbb{R}_n$ (m раз), образованном m – кратным декартовым умножением на себя множества (пространства) $\mathbb{R}_n$. Поскольку точки в арифметических пространствах именуют еще и векторами, то матрицы размера $(m\times 1)$, $(1\times n)$ – точки из $\mathbb{R}_{1\times m}=\mathbb{R}_m$ и $\mathbb{R}_{n\times 1}=\mathbb{R}_n$ соответственно именуют также ***вектор-столбцом*** (высоты m) и ***вектор-строкой*** (длины n).

[4] Это n – кратное *декартово произведение* множества $\mathbb{R}$ действительных чисел на себя. Обозначается также и посредством $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что в любой матрице высота любого столбца равна числу ее строк, а длина любой строки равна числу ее столбцов.

II. Еще одна – «функциональная» точка зрения на матрицы сводится к следующему. Рассмотрим два множества натуральных чисел $I = \{1, \ldots, m\}$ и $J = \{1, \ldots, n\}$. Их декартово произведение $I \times J$ есть множество *упорядоченных пар* (i, j), где $i \in I$, так что $i = \underline{1, m}$, и $j \in J$, так что $j = \underline{1, n}$.

Теперь матрицей размеров $m \times n$ назовем числовую функцию, определенную на множестве $I \times J$, т.е. закон, сопоставляющий каждой паре $(i, j) \in I \times J$ некоторое число a_{ij}.

Определенные указанным выше способом математические объекты – числовые матрицы – следует далее наделить рядом дополнительных свойств, связанных, в частности, с возможностью выполнять над ними математические операции, подобные изученным к настоящему моменту операциям над числами, векторами или функциями. Только при обеспечении такой возможности эти новые объекты позволят решить поставленную в начале задачу обобщения понятий линейной функции и линейного уравнения.

В дальнейшем множество числовых матриц размера $(m \times n)$ будет обозначаться как $\mathcal{M}_{m,n}$, а множество числовых квадратных матриц порядка n – как $\mathcal{M}_n$.

РАВЕНСТВО МАТРИЦ

◄Определение►

Две матрицы A и B называются равными, если имеют одинаковые размеры и равны их соответственные элементы (элементы, стоящие в этих матрицах на одинаковых местах).

Иными словами,

(1.4)
$$A \overset{\text{def}}{=} B \Leftrightarrow \begin{cases} m_A = m_B = m \\ n_A = n_B = n \\ a_{ij} = b_{ij},\ i = \underline{1, m};\ j = \underline{1, n}, \end{cases}$$

где $m_A, m_B; n_A, n_B$ – числа строк и столбцов в матрицах A и B соответственно.

Равенство матриц, очевидно, обладает свойством транзитивности (так же как равенство, например, действительных чисел):

(1.5) $$\begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = C.$$

◆**Замечание**

В **(1.5)**, как и в **(1.4)**, все матрицы – одного размера: $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

◀**Определение**▶

Пусть $A, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

(1.6) $$C \overset{\text{def}}{\equiv} \alpha \cdot A \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},\ i = \underline{1, m};\ j = \underline{1, n}\ .$$

Как видно, формула **(1.6)** определяет умножение матрицы на число *поэлементно*: произведение A на α (α на A) есть матрица C, элементы которой – это соответственные элементы A, умноженные на число α.

◆**Примеры:**

1). $$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2). $$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} (n \times n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (n \times n).$$

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

◀**Определение**▶

Пусть $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$. Тогда

(1.7) $$C \overset{\text{def}}{\equiv} A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \underline{1, m};\ j = \underline{1, n}\ .$$

Итак, складывать в соответствии с **(1.7)** можно лишь матрицы одинаковых размеров, причем элементы их суммы представляют собой суммы соответственных элементов слагаемых. Проще говоря, сложение матриц также осуществляется *поэлементно*.

◆**Пример:**

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\ C=A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ УМНОЖЕНИЯ НА ЧИСЛО И СЛОЖЕНИЯ

Операции умножения матрицы на число и сложения матриц обладают следующими свойствами, прямо вытекающими из соответствующих свойств умножения и сложения чисел **(проверьте!)**.

1°. $A+B=B+A$ – ***коммутативность*** сложения матриц (***переместительный закон***).

2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ***ассоциативность*** сложения матриц (***сочетательный закон***).

3°. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$ – ***дистрибутивность*** умножения на матрицу по отношению к сложению чисел.

4°. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ – ***дистрибутивность*** умножения на число по отношению к сложению матриц.

5°. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$.

◀**Определение**▶

Матрица, все элементы которой равны числу 0, называется *нулевой матрицей*, и далее будет обозначаться как O. Легко видеть, что если $A\in\mathcal{M}_{m,n}$, то

$A+(-1)\cdot A=O$ – нулевая матрица того же размера, что и A.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Эта операция может определяться по-разному[5] – в зависимости от потребностей в дальнейшем использовании. Одним из наиболее употребительных способов задать произведение матриц является следующий.

◀Определение▶

Пусть *первый* множитель A есть $m\times n-$матрица: $A\in\mathcal{M}_{m\,,\,n}$, а *второй* множитель $B-$это $n\times p-$матрица: $B\in\mathcal{M}_{n\,,\,p}$. Тогда элементы произведения матрицы A на матрицу B вычисляются следующим образом:

(1.8) $$C \overset{\text{def}}{=\!=} A\cdot B \Leftrightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj},\ i=\underline{1,m};\ j=\underline{1,p}\,.$$

Как видно, произведение $A\cdot B$ есть $m\times p-$ матрица, число строк которой совпадает с числом строк первого множителя, а число столбцов – с числом столбцов второго множителя. При этом элемент c_{ij} в соответствии с формулой **(1.8)** получается как сумма произведений соответствующих элементов $i-$й строки первого множителя на $j-$й столбец второго (они имеют одинаковое количество элементов n). В связи с этим описанное правило матричного умножения именуют правилом **«строка на столбец»**.

◆Примеры:

1). $$\underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}\cdot\underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}=\underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Подробное вычисление элементов произведения приводится ниже:

---

[5] Как, впрочем, и остальные. Важно понимать, что произвол в определении подобных операций ничем не ограничен. Однако, если они определены настолько «необычно» или «неудобно», что не обладают перечисленными выше свойствами, или по крайней мере большинством из них, то для них трудно найти сферу рационального использования, во многом опирающегося на хорошо известные свойства действительных чисел. Утилитарная ценность этих свойств, фактически также вводимых посредством некоторых постулатов, оправдывается всем ходом развития цивилизации.

$$\left.\begin{matrix} 1\cdot 1+0\cdot 0=1 \\ 1\cdot 0+0\cdot 1=0 \end{matrix}\right\}-\text{элементы 1-й строки произведения,}$$

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot 1+3\cdot 0=2 \\ 2\cdot 0+3\cdot 1=3 \end{matrix}\right\}-\text{элементы 2-й строки произведения,}$$

$$\left.\begin{matrix} -1\cdot 1+5\cdot 0=-1 \\ -1\cdot 0+5\cdot 1=5 \end{matrix}\right\}-\text{элементы 3-й строки произведения.}$$

2). $\underset{(2\times 1)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\cdot\underset{(1\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}=\underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$[6]:

$$\left.\begin{matrix} 0\cdot 1=0 \\ 0\cdot 0=0 \end{matrix}\right\}-\text{элементы 1-й строки произведения,}$$

$$\left.\begin{matrix} 1\cdot 1=1 \\ 1\cdot 0=0 \end{matrix}\right\}-\text{элементы 2-й строки произведения.}$$

3). $\underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}\cdot\underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}\equiv\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2=\underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$

Из этого примера следует, между прочим, что и *любая натуральная степень* рассматриваемой матрицы (т.е. ее произведение на саму себя, повторенное любое число раз) совпадает с ней. Так, например

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\ldots\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{2008\ \text{раз}}=\left[\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right]\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\ldots\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{2006\ \text{раз}}=$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\ldots\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{2007\ \text{раз}}=\ldots=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что среди действительных чисел подобным свойством обладают весьма немногие **(какие именно?)**.

[6] Читатель должен отдавать себе отчет в том, что элементы матриц – совсем необязательно только натуральные или целые числа, как в уже рассмотренных, так и в приводимых ниже примерах матричных вычислений учебного характера.

СВОЙСТВА МАТРИЧНОГО УМНОЖЕНИЯ И ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО СЛОЖЕНИЕМ

1°. $(AB)C = A(BC)$ [7]

Приведенное равенство означает ассоциативность матричного умножения, при условии, что любая из ассоциаций сомножителей, образованная посредством круглых скобок, и все прочие произведения имеют смысл. Проще говоря, имеющее смысл произведение нескольких матричных сомножителей можно вычислять, группируя их произвольным образом.[8]

Доказательство

Пусть $A \in \mathcal{M}_{m\,,\,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\,,\,p}$, так что $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\,,\,p}$. В соответствии с правилом **(1.8)** можем написать

$$(AB)_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{kj}\,, \text{ где } i = \underline{1, m};\; j = \underline{1, p}\,.$$

Для того, чтобы произведение $(A \cdot B) \cdot C$ имело смысл, необходимо, чтобы было $C \in \mathcal{M}_{p\,,\,l}$. Тогда

$$[(AB)C]_{u\,v} = \sum_{j=1}^{p} [(AB)_{uj} \cdot c_{jv}] = \sum_{j=1}^{p}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{u\,k} b_{kj}\right)\cdot c_{jv}\right] = \sum_{j=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_{u\,k} b_{kj} c_{jv}\right)\right] = \bullet$$ [9]

как известно, в суммах подобного рода суммирования по различным индексам перестановочны, а умножение на c_{jv} можно внести под знак суммирования по индексу «k», от которого этот множитель не зависит, чем и воспользуемся далее:

$$\bullet = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{p}\left(a_{u\,k} b_{kj} c_{jv}\right)\right] = \bullet$$

здесь первый множитель в круглой скобке не зависит от индекса «j» и потому может быть вынесен за знак суммирования по этому индексу, а сумма $\sum_{j=1}^{p} b_{kj} \cdot c_{jv}$ есть элемент произве-

---

[7] Иногда в целях упрощения записи формул знак умножения в виде точки будем опускать.

[8] *Порядок следования* множителей в этом произведении *меняться не должен*.

[9] Так всюду ниже будет обозначаться обрыв выкладок, связанный с целесообразностью прежде выполнить некоторые дополнительные преобразования или дать необходимые разъяснения. Возврат к прерванным вычислениям обозначается при помощи того же значка в начале строки.

дения B на C с индексами «k, v», так что

$$\bullet = \sum_{k=1}^{n}\left[a_{uk}\sum_{j=1}^{p}\left(b_{kj}c_{jv}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[a_{uk}\cdot(BC)_{kv}\right] = \left[A(BC)\right]_{uv},\ u=\underline{1,m};\ v=\underline{1,l}\,.$$

В соответствии с определением равенства матриц заключаем отсюда, что $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ – это и требовалось доказать.

2°. $A(B+C) = AB + AC$ – умножение слева дистрибутивно по отношению к сложению **(докажите самостоятельно)**.

Это же касается и умножения справа:

3°. $(A+B)C = AC + BC$ **(докажите самостоятельно)**.

Заметим, что об умножении слева и справа приходится говорить здесь в связи с тем, что ***умножение матриц не подчиняется переместительному закону*** **(*некоммутативно*)**. В самом деле, если произведение AB определено, то в общем случае BA не только не равно AB, но даже может не существовать.

◆**Пример:**

$A \in \mathcal{M}_{7,5},\ B \in \mathcal{M}_{5,10} \Rightarrow \exists AB \in \mathcal{M}_{7,10}$ и $\nexists BA$, т.к. $10 \neq 7$[10].

◀**Определение**▶

Матрицы A и B, для которых выполнено равенство $AB = BA$, называют *перестановочными,* или *коммутирующими*.

▲ Докажите, что коммутировать могут только квадратные матрицы одного размера и приведите примеры таких матриц.

▲ Задайте матрицу $A \in \mathcal{M}_2$ и отыщите все матрицы, с ней перестановочные.

---

[10] В тексте иногда будет использоваться символика математической логики, причем не только в формулах, а и в обычных предложениях с целью сокращения письма. Предполагается, что смысл соответствующих символов (кванторы существования, всеобщности и пр.) известен читателю.

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ

◀Определение▶

Для всякой матрицы $A \in \mathcal{M}_{m\,,\,n}$ транспонированная (иногда говорят – по отношению к A) матрица C определяется условием

$$C \stackrel{\text{def}}{=} A^T \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ji},\ i = \underline{1,m},\ j = \underline{1,n}$$ [11].

Из приведенного определения вытекает, что $C = A^T \in \mathcal{M}_{n\,,\,m}$, причем всякая строка (всякий столбец) транспонированной матрицы совпадает с соответствующим столбцом (строкой) матрицы A[12].

◆**Примеры:**

1). $\underset{(1\times 2)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{(2\times 1)}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2). $\underset{(2\times 3)}{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{(3\times 2)}{B^T} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$.

3). $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = M$.

4). Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец размера $(n \times 1)$. Тогда $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ – вектор-строка размера $(1 \times n)$. Ясно, что определено матричное умножение x^T на x, равное

$x^T x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Для $n = 1,2,3$ эта сумма в соответствии с теоремой Пифагора выражает квадрат длины вектора с декартовыми прямоугольными ко-

---

[11] Транспонированная матрица часто обозначается также посредством A'.

[12] Математически строгий синоним такого совпадения – их поэлементное равенство.

ординатами x_1, x_2; x_1, x_2, x_3 соответственно.

В результате обобщения на произвольное значение $n \in \mathbb{N}$ говорят о длине или так называемой *евклидовой норме* любого вектора $x(n \times 1)$:

(1.9) $$\| x \| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} = (x^T x)^{1/2} .$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ

1°. $\left(A^T\right)^T = A$ **(докажите)**.

2°. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$.

Доказательство

Пусть $A, B, C = A+B \in \mathcal{M}_{m\,,\,n}$. Тогда $C^T \in \mathcal{M}_{n\,,\,m}$ и

$$(C^T)_{ij} = c_{ji} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij} .$$

Итак, $(C^T)_{ij} = \left[(A+B)^T\right]_{ji} = (A^T + B^T)_{ij}$, $i = \underline{1,m}$, $j = \underline{1,n}$, а это по определению и означает, что $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3°. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство

Пусть $A \in \mathcal{M}_{m\,,\,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\,,\,p} \Rightarrow (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = \underline{1,m}$, $j = \underline{1,n}$.

Далее, $B^T \in \mathcal{M}_{p\,,\,n}$, $A^T \in \mathcal{M}_{n\,,\,m}$, так что определено произведение $B^T \cdot A^T$, элементы которого выражаются следующим образом:

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji} = [(AB)^T]_{ij}$$ для всех указанных выше значений индексов i, j .

По определению равенства матриц это означает, что $(AB)^T = B^T A^T$.

◆**Замечание**

Доказанное только что свойство операции транспонирования легко обобщается на любое число сомножителей. Так, например, $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ и т.п. **(докажите)**.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

◄**Определение**►

В квадратной матрице $\{a_{ij}\} = A \in \mathcal{M}_n$ совокупность элементов, индексы которых удовлетворяют уравнению $i = j$, образует так называемую ***главную диагональ*** (идет из левого верхнего угла в правый нижний), а совокупность элементов, для которых $i + j = n + 1$, образует ***побочную диагональ*** (идет из правого верхнего угла в левый нижний)[13]:

главная диагональ

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ

◄**Определение**►

Сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы называется ее ***следом***:

$$\operatorname{tr} A \overset{\text{def}}{\equiv} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ ^{14}.$$

[13] Обратите внимание, что при записи матрицы в общем виде при отделении буквенных индексов приходится использовать запятую.

[14] Обозначается также $\operatorname{Sp} A$ от «Spur» – след (нем.)

Ниже приводятся основные свойства этой важной характеристики числовой квадратной матрицы.

СВОЙСТВА СЛЕДА МАТРИЦЫ

1°. $\operatorname{tr}(\alpha A)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha A)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii})=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\alpha\operatorname{tr}A$ – при умножении матрицы на число ее след также умножается на это число.

2°. $\operatorname{tr}A^T=\operatorname{tr}A$ – транспонирование квадратной матрицы, представляющее собой *симметричное отражение ее элементов относительно главной диагонали*, не меняет следа, поскольку оно оставляет неизменными все элементы, стоящие на главной диагонали.

3°. $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$. В самом деле, $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Rightarrow(AB)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$, а также

$$(BA)_{mn}=\sum_{l=1}^{n}b_{ml}a_{ln}\Rightarrow(BA)_{mm}=\sum_{l=1}^{n}b_{ml}a_{lm}=\sum_{k=1}^{n}b_{mk}a_{km}.$$

Суммируя теперь диагональные элементы обеих матриц, получаем, что

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},\ \operatorname{tr}(BA)=\sum_{m=1}^{n}(BA)_{mm}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{mk}a_{km}=(m\leftarrow k,\,k\leftarrow i)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\operatorname{tr}(AB).$$

4°. $\operatorname{tr}(A^TA)=\operatorname{tr}(AA^T)\geq 0$.[15]

Имеем $\operatorname{tr}(A^TA)=\sum_{i=1}^{n}(A^TA)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(A^T)_{ik}(A)_{ki}\right]=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}^2\geq 0$. Равенство здесь имеет место в том и только том случае, когда $a_{ki}=0$, $k,i=\underline{1,n}$ $A=O\in\mathcal{M}_n$.

◀Определение▶

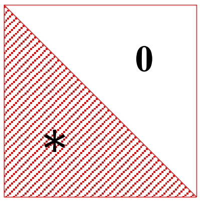
Квадратная матрица A называется:

● ***Симметрической*** если $A^T=A$.

[15] Докажите первое равенство в этой формуле.

- ***Кососимметрической (антисимметрической)*** если $A^T = -A$.

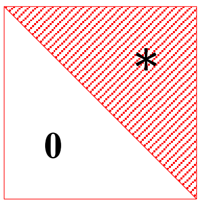
- ***Нижнетреугольной*** если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.



все элементы над главной диагональю – нули

главная диагональ

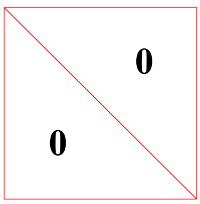
- ***Верхнетреугольной*** если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.



все элементы под главной диагональю – нули

главная диагональ

- ***Диагональной*** если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.



все элементы вне главной диагонали – нули

главная диагональ

Запись $B = \operatorname{diag}(1,-1,0,7)$ (и ей подобные) означает диагональную матрицу с перечисленными элементами, образующими ее главную диагональ:

$$\operatorname{diag}(1,-1,0,7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Частные случаи диагональной матрицы – это нулевая матрица $O \in \mathcal{M}_n$ и так называемая *единичная матрица*

$\mathbb{E}_n = \underset{n\ \text{единиц}}{\mathrm{diag}(1,\ldots,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.[16] Элементы единичной матрицы часто означают в индексной форме так: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, где $i = \underline{1,n}$, $j = \underline{1,n}$ и называют *объект* δ_{ij} ***символом Кронекера***.

Очевидно, матрица $\mathbb{E}_n$ обладает свойством $\mathbb{E}_n \cdot \underset{(n\times n)}{A} = A \cdot \mathbb{E}_n = A$, т.е. играет в множестве $\mathcal{M}_n$ квадратных матриц порядка n ту же роль, которую играет в множестве действительных чисел число 1. Роль числа 0 принадлежит в $\mathcal{M}_n$ нулевой матрице, поскольку $A \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \cdot A = \mathcal{O}$.

● ***Ортогональной*** если $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{E}_n$.

▲ Докажите, что если s_i, s_j – строки ортогональной матрицы, то $s_i \cdot s_j^T = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Говорят, что система строк, удовлетворяющая написанному условию, – *ортонормирована*: норма **(1.7)** каждой из строк равна 1, а произведение $s_i \cdot s_j^T$ для не равных друг другу значений индексов i, j (аналог *скалярного произведения* векторов в геометрии) равно 0 (напомним: таким свойством обладают базисные векторы д.п.с.к.[17] в геометрии, обозначаемые $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно в двумерном и трехмерном случаях).

Как вы думаете, будет ли система столбцов ортогональной матрицы ортонормированной? Обоснуйте свою догадку.

Заметим, что прямоугольная (не квадратная) матрица может обладать *ровно одним* из свойств $A \cdot A^T = \mathbb{E}_n$ или $A^T \cdot A = \mathbb{E}_n$[18]. Такие матрицы называются ***полуортогональными***.

---

[16] Обозначается также посредством $\mathbb{I}_n$.

[17] Декартова **п**рямоугольная **с**истема **к**оординат.

[18] При этом обе матрицы $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$ определены, но лишь одна из них – единичная.

▲ Дайте пример полуортогональной матрицы размера (2×3).

● Матрица B, удовлетворяющая равенству $B^2 = A$ ($A, B \in \mathcal{M}_n$) называется ***квадратным корнем*** из матрицы A и обозначается $A^{1/2}$.

Оказывается, что не для всех матриц A существует квадратный корень[19] $A^{1/2}$, а если существует, то он *необязательно единственный* (**!**).

▲ Извлеките квадратный корень из матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Существует ли $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{1/2}$?

● ***Матрицей перестановки***[20] если в любой ее строке, а также в любом ее столбце все элементы, кроме одного, равного 1, – нули.

Переставляя в матрице перестановки строки и/или столбцы, ее можно перевести в единичную.

◆**Пример:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_3,$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_3.$$

● ***Идемпотентной*** если $A^2 = A$[21].

---

[19] Так было уже для действительных чисел.

[20] Матрица перестановки – частный случай так называемой ***бинарной матрицы*** – прямоугольной матрицы, все элементы которой – нули или единицы.

[21] В условие идемпотентности иногда включают симметричность матрицы A.

◆ **Пример:**

Рассмотрим вектор-столбец $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ и «подействуем» на него матрицей $P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$P_x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Имеем $P_x^2 = P_x \cdot P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, P_x – идемпотентная матрица. У этого обстоятельства имеется очень простой и важный *геометрический смысл*. Действительно, пусть a, b, c – это координаты некоторого трехмерного геометрического вектора $\vec{u}$ в выбранной д.п.с.к. $Oxyz$. Ясно, что $a, 0, 0$ – это координаты вектора, являющегося *проекцией* $\vec{u}$ *на ось абсцисс*. Итак, P_x – это проектор (или *оператор проектирования*) на указанную ось: результат «действия» (т.е. умножения) проектора на вектор дает искомую проекцию $\vec{u}_x$. Если подействовать на $\vec{u}_x$ *повторно* этим же проектором, то получится опять $\vec{u}_x$, поскольку этот вектор *уже лежит* на оси Ox. В самом деле, $P_x \cdot \vec{u}_x = P_x \cdot (P_x \cdot \vec{u}) = (P_x \cdot P_x) \cdot \vec{u} = P_x^2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \vec{u}_x = P_x \cdot \vec{u}$. Следовательно, $P_x^2 \cdot \vec{u} = P_x \cdot \vec{u}$, или $(P_x^2 - P_x) \cdot \vec{u} = O$, откуда в силу произвольности вектора $\vec{u}$ выводим, что $P_x^2 - P_x = O$, или $P_x^2 = P_x$.

Далее формально легко убедиться, что любая натуральная степень оператора P_x совпадает с P_x. Например, $P_x^3 = P_x^2 \cdot P_x = P_x \cdot P_x = P_x$ и т.д. Геометрически это означает, что второе, третье и все вообще следующие проектирования не меняют вектора, поскольку результат первого проектирования, оказавшись на Ox, переходит сам в себя посредством описываемого преобразования векторов.

Аналогично $P_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – проектор на координатную плоскость Oxy, т.к.

$P_{xy} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$. Вновь убеждаемся, что $P_{xy}^2 = P_{xy}$, т.е. матрица P_{xy} – идемпотентная.

Преобразование вектора $\vec{u}$ в самого себя тоже можно считать проектированием в само пространство $Oxyz = \mathbb{R}_3$. Очевидно, оно реализуется единичной матрицей $\mathbb{E}_3$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Можем утверждать (и это легко проверить), что всякая единичная матрица идемпотентна: $\mathbb{E}_n^2 = \mathbb{E}_n$ [22].

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Далее важную роль в различных разделах линейной алгебры будут играть некоторые простейшие преобразования матриц, которые принято называть *элементарными*. К ним относятся следующие:

(1.10)

1. Перестановка (транспозиция) двух строк матрицы.
2. Умножение строки матрицы на число, отличное от нуля..
3. Сложение строки матрицы с некоторой другой ее строкой[23].
4. Те же действия со столбцами матрицы.

Нетрудно показать, что элементарные преобразования **(1.10)** можно реализовать при помощи умножения матрицы на некоторую квадратную матрицу K, что ниже демонстрируется на простых примерах.

---

[22] Операторы проектирования широко используются в экономических приложениях линейной алгебры. Например, в задачах *линейной регрессии* лучшей оценкой некоторого *признака*, получаемой на основе ряда значений т.н. *объясняющих переменных* или *предикторов* при помощи ***метода наименьших квадратов***, оказывается ортогональная проекция вектора наблюденных значений признака на подпространство предикторов.

[23] Умножение здесь и сложение в следующем пункте – поэлементные.

◆**Примеры:**

1). $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{A(m\times n),\, m=3,\, n=2} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$

∗Умножение на K слева реализует умножение строки (здесь – 1-й) на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Чтобы умножить в матрице $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ ее j – ю строку на α, в качестве K следует взять квадратную матрицу m – го порядка, которая получается из $\mathbb{E}_m$ умножением ее j – й строки на α.

2). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

∗Перестановку строк в матрице $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ реализует умножение ее слева на перестановочную матрицу K, полученную из $\mathbb{E}_m$ перестановкой двух строк с теми же номерами.

3). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{\text{к 1-й строке матрицы } A \text{ прибавилась ее 3-я строка}}.$

∗Чтобы прибавить в матрице $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ к ее i – й строке j – ю строку, $i \neq j$, достаточно умножить ее слева на матрицу K, которая отличается от $\mathbb{E}_m$ тем, что в ней на (i, j) – м месте стоит 1 вместо 0. так, в рассмотренном выше примере умножение A слева на $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ приведет к прибавлению к ее 3 – й строке 2 – й строки, а умножение слева на $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – к прибавлению к ее 2 – й строке 1 – й строки **(проверьте)**.

◆**Замечание**

Рассмотрим преобразование матрицы, состоящее в прибавлении к ее строке s другой ее строки r, умноженной на число α. При $\alpha = 0$ это, очевидно, тождественное преобразование матрицы, поскольку оно не меняет ее строк. Если же $\alpha \neq 0$, то такое преобразование есть композиция следующих элементарных преобразований: **(1)** умножение r на α: $r \leftarrow R = \alpha r$, **(2)** сложение s с R: $s \leftarrow s + R$, **(3)** умножение R на $1/\alpha$: $R \leftarrow (1/\alpha)R = = r$.

Таким образом, применяя это преобразование, *можно* снять требование отличия множителя α от нуля, чего, напротив, **нельзя** сделать при использовании элементарного преобразования второго типа, так сказать, в чистом виде (умножение строки на число).

Это замечание, конечно, в равной степени относится и к столбцам матрицы.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

◀**Определение**▶

Пусть для квадратной матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ существует матрица, обозначаемая A^{-1}[24] и обладающая свойствами

(1.11) $$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{E}_n .$$

Тогда матрица A называется ***невырожденной*** (***обратимой***), а A^{-1} – матрица, ***обратная*** по отношению к A.

Свойство **(1.11)** является прямым аналогом связи действительного числа a и обратного к нему числа $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Известно, что среди действительных чисел лишь одно, а именно $a = 0$, не имеет обратного. Класс квадратных матриц, не имеющих обратной матрицы, боле широк.

[24] $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, A^{-1} – нерасчленимое обозначение, *символическое* возведение в степень «-1», сходное с обозначением обратной функции.

В самом деле, пусть A – идемпотентная матрица, т.е. $A^2 = A$ и существует A^{-1}. Тогда $A^2 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1}$, или $A \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{\mathbb{E}_n} = \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{\mathbb{E}_n}$, так что необходимо $A = \mathbb{E}_n$. Итак, единственной идемпотентной невырожденной матрицей является единичная, а все остальные – необратимы (для них $\nexists A^{-1}$). Например, матрица $O \in \mathcal{M}_n$ – вырожденная.

Указанное обстоятельство имеет глубокое геометрическое истолкование. Действительно, выше уже отмечалось, что идемпотентные матрицы можно трактовать как некоторые проекторы. Но при проектировании (если оно не является тождественным преобразованием n – мерного вектора[25] в пространство $\mathbb{R}_n$ того же числа измерений) *безвозвратно теряется* информация о некоторых координатах проектируемого вектора в том смысле, что по проекции невозможно однозначно восстановить его. Это и понятно: одну и ту же проекцию, скажем, на одну из координатных осей, имеет бесчисленное множество векторов. Следовательно, и *не существует* обратного «отображения» результата проектирования в проектируемый вектор, а если бы оно существовало, то реализовалось бы как раз умножение проекции слева на A^{-1}: $A^{-1}\underbrace{(A\vec{u})}_{\text{проекция}} = (A^{-1}A)\vec{u} = \mathbb{E}_n\vec{u} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{исходный вектор}}$. Поэтому-то все идемпотентные матрицы, кроме единичной, являются вырожденными.

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

При условии невырожденности всех фигурирующих в формулах матриц справедливы следующие утверждения.

1°. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Действительно, положим $B = A^{-1}$ и докажем, что $B^{-1} = A$, т.е. что A – обратная матрица для B. Имеем: $B \cdot A = A^{-1} \cdot A = \mathbb{E}$[26]. С другой стороны, $A \cdot B = A \cdot A^{-1} = \mathbb{E}$, откуда в соответствии с определением **(1.11)** следует, что матрица $B = A^{-1}$ имеет обратную матрицу, равную A – требуемое доказано.

Следствие: A и A^{-1} – ***взаимно обратные матрицы***.

[25] Строгий смысл этого и следующего словосочетаний станет ясен из дальнейшего, см. **Лекцию 6**.

[26] Там, где в этом нет необходимости, значок порядка квадратной матрицы будем опускать.

2°. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ – транспонирование и обращение – *перестановочны* (коммутируют).

Пусть $A\in\mathcal{M}_n$ и $\exists A^{-1}$. Покажем, что тогда $\exists (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$. По определению обратной матрицы должно быть $(A^T)\cdot(A^T)^{-1}=(A^T)^{-1}\cdot(A^T)=\mathbb{E}$. Проверим это, полагая $C=A^T\cdot(A^{-1})^T$. По правилу умножения напишем

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{(A^T)_{ik}}_{a_{ki}}\cdot\underbrace{(A^{-1})^T_{kj}}_{(A^{-1})_{jk}}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(A^{-1})_{jk}=\sum_{k=1}^{n}(A^{-1})_{jk}\,a_{ki}=\bullet$$

Равенства **(1.11)** можно представить в форме

$$(A\cdot A^{-1})_{ij}=(A^{-1}\cdot A)_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases},$$ причем $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ – единичная матрица симметрична.

Учтем еще, что $(A^{-1}\cdot A)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(A^{-1})_{ik}\cdot(A)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(A^{-1})_{ik}\cdot a_{kj}$;

$\bullet=\delta_{ji}=\delta_{ij}$. Но это означает, что $C=\mathbb{E}$. По той же схеме можно доказать **(докажите!)**, что и $(A^{-1})^T\cdot A^T=\mathbb{E}$. В итоге матрицы A^T и $(A^{-1})^T$ – взаимно обратные, что и требовалось установить.

3°. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Действительно, пусть A и B – невырожденные матрицы, т.е. $\exists A^{-1}$, $\exists B^{-1}$. Тогда и $A\cdot B$ – невырожденная матрица, причем обратной для нее служит матрица $B^{-1}\cdot A^{-1}$, поскольку $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})=A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot\mathbb{E}\cdot A^{-1}=(A\cdot\mathbb{E})\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=\mathbb{E}$.

Можно также доказать, что невырожденность произведения матриц влечет невырожденность всех сомножителей (доказанное равенство будет по-прежнему справедливо).

Обобщение свойства **3°.** для любого конечного числа сомножителей выглядит так:

$$(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1}\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1}A_1^{-1},$$

где все матрицы $A_i,\ i=\underline{1,k}$ – квадратные и одного порядка.

4°. Невырожденная квадратная матрица не может иметь более одной обратной матрицы.

Пусть для матрицы $A\in\mathcal{M}_n$ существует две обратных матрицы, которые обозначим как B_1 и B_2. Составив произведение $C=B_1AB_2$, усматриваем, что

1) $C=(B_1A)B_2=\mathbb{E}B_2=B_2$

2) $C=B_1(AB_2)=B_1\mathbb{E}=B_1$

Поскольку равенство матриц транзитивно, то отсюда последует, что $B_1=B_2$, так что обратная по отношению к A матрица – *единственна*.

◆**Замечания**

1. Пусть $A,X\in\mathcal{M}_n$ Тогда если $A\cdot X=\mathbb{E}_n$ ($X\cdot A=\mathbb{E}_n$), то и $X\cdot A=\mathbb{E}_n$ ($A\cdot X=\mathbb{E}_n$). Мы вернемся к доказательству этого утверждения несколько позже (см. **Лекцию 5**), когда сможем увязать вырожденность квадратной матрицы с линейной зависимостью системы ее столбцов (строк). Пока же заметим, что приведенное утверждение позволяет проверять выполнение *лишь одного* из равенств **(1.11)**, если, например, контролируется правильность отыскания обратной матрицы.

2. Если $A\in\mathcal{M}_{m,n}$, а $B\in\mathcal{M}_{n,m}$ $m\neq n$, то может оказаться, что *ровно одно* из произведений – AB или BA равно единичной матрице соответствующего порядка (т.е. либо $\begin{cases}AB=\mathbb{E}_m\\ BA\neq\mathbb{E}_n\end{cases}$, либо $\begin{cases}AB\neq\mathbb{E}_m\\ BA=\mathbb{E}_n\end{cases}$).

Позже (см. **Лекцию 5**) будет доказано, что одновременное равенство возможно лишь для взаимно обратных матриц, когда $m=n$.

▲ Приведите пример матриц указанного вида.

3. Несмотря на то, что пока мы не располагаем средствами вычисления обратной матрицы, в некоторых простейших случаях ее отыскание не вызывает труда. Так, например, если $A=\mathbb{E}$, то ясно, что поскольку равенство $\mathbb{E}\mathbb{E}^{-1}=\mathbb{E}$ выполняется для $\mathbb{E}^{-1}=\mathbb{E}$, то в силу единственности обратной матрицы доказано существование матрицы, обратной по отношению к единичной и равенство этой обратной матрицы самой единичной матрице: $(\mathbb{E})^{-1}=\mathbb{E}$.

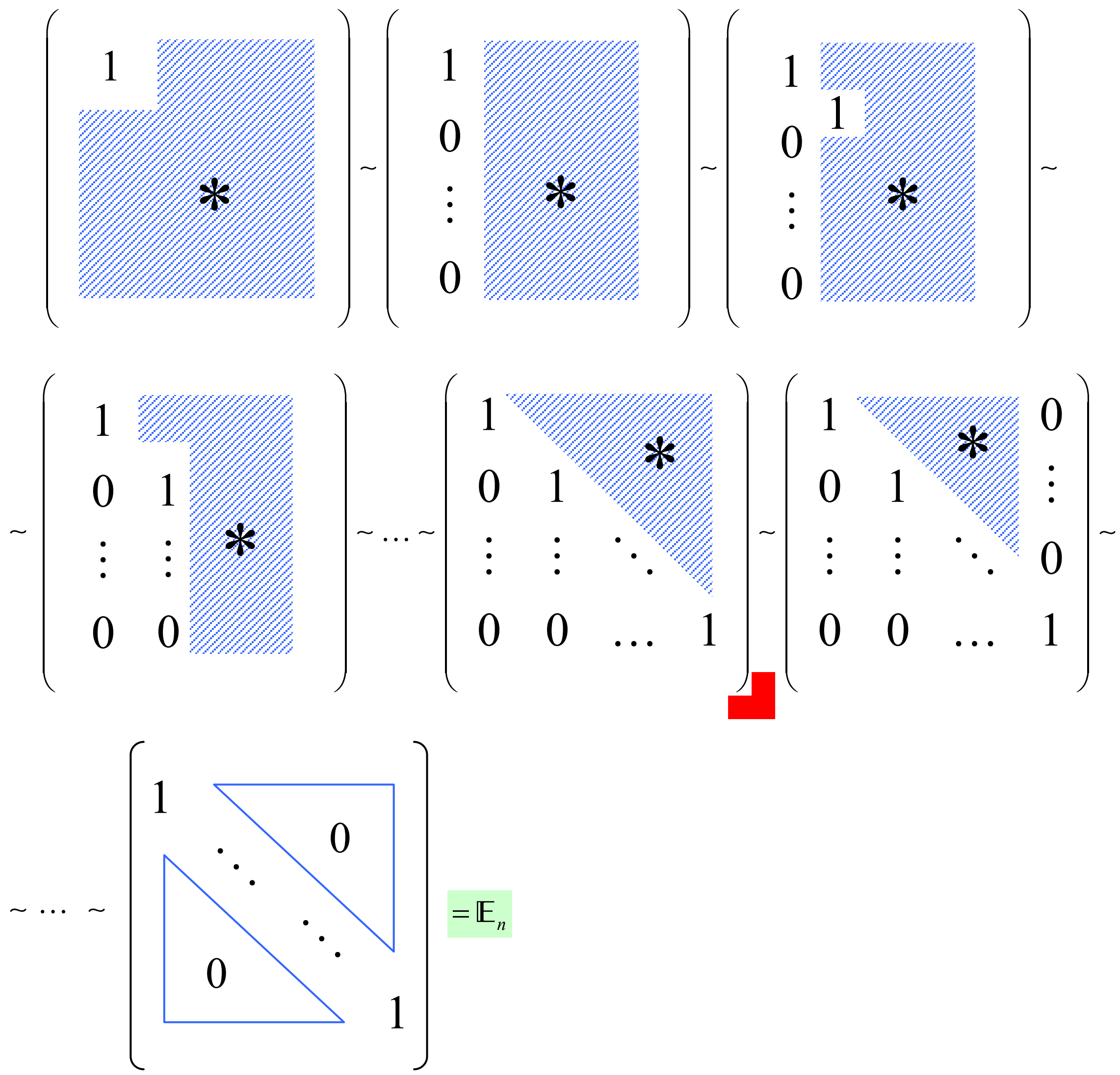
Представляет интерес выяснить, как широк класс матриц, обладающих этим свойством – совпадать со своей обратной матрицей, т.е. удовлетворяющих *матричному уравнению* $A=A^{-1}$. Умножив последнее равенство справа на A, получим $A^2=\mathbb{E}$ и сведем эту задачу к отысканию всех квадратных корней из единичной матрицы заданного порядка.

Даже для небольших значений n эта проблема нетривиальна и не имеет уже простого решения, напоминающего решение $x = \pm 1$ соответствующего алгебраического уравнения $x^2 = 1$.

▲ Проверьте, что матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 7 & -48 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ удовлетворяют указанному уравнению и являются тем самым квадратными корнями из $\mathbb{E}_2$. Решите задачу в общем виде для $n = 2$ покажите, что решение зависит от 2-х параметров.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим элементарные преобразования ***строк*** квадратной матрицы A, схематически изображенные ниже.



(1.12)

Здесь знак «$\sim$» связывает матрицы, полученные одна из другой элементарным преобразованием строк, а отраженные в схеме этапы редукции A к $\mathbb{E}_n$ можно описать так:

- сделать 1 на 1-м диагональном месте (индексы $i = j = 1$). Для этого можно переставить строки (если среди них есть начинающаяся с 1), прибавить к некоторой строке другую, умноженную на подходящее число (это преобразование есть композиция элементарных преобразований типов 1, 2, см. стр. 19) или умножить первую строку на число, обратное ее первому элементу, если он отличен от нуля. Заметим, что при ручном счете таких делений рекомендуется избегать, пока это возможно;
- умножая 1-ю строку на подходящие числа, обнулить в первом столбце все элементы, кроме 1-го, складывая результат умножения с нижележащими строками;
- создать 1 на втором диагональном месте.
- умножая 2-ю строку на подходящие числа, обнулить все элементы второго столбца, лежащие под единицей, как это уже делалось выше;
- продолжить эту процедуру, пока на главной диагонали не получатся единицы, а всюду под ней – нули;
- умножая последнюю строку на подходящие числа, обнулить в последнем столбце все элементы над единицей;
- продолжить процесс, пока не получится $\mathbb{E}_n$.

■ Ниоткуда не следует, что такое преобразование выполнимо для всех квадратных матриц (иначе, как увидим ниже, все они были бы обратимы). В самом деле, если, например, в A 1-й столбец состоит из одних нулей, то ясно, что в описанной процедуре нельзя сделать даже 1-й шаг.

Обдумав это обстоятельство, можем утверждать, что если в процессе преобразований в матрице была, или (возможно) появится на некотором шаге «помеха» в виде нулевого столбца или нулевой строки, которых нет в матрице $\mathbb{E}_n$ – конечном «пункте» преобразований, то алгоритм нельзя будет довести до стадии, отмеченной в схеме знаком ▟, а тогда и до конца.

Как совсем скоро станет ясно (**Лекция 3**, свойство 5°), это может означать лишь одно: A – ***вырожденная матрица, не имеющая обратной!***

Итак, теперь нам предстоит понять, как именно описанная процедура элементарных преобразований строк матрицы ведет к этому выводу и как, собственно, искать обратную матрицу, если она существует. Оказывается, что ответы на эти назревшие вопросы не выводят за рамки алгоритма редукции A к $\mathbb{E}_n$, лежат в нем самом.

Действительно, выше было продемонстрировано, что всякое элементарное преобразование строк матрицы (в том числе квадратной) равносильно ее умножению слева на некоторую матрицу K. Поскольку алгоритм **(1.12)** состоит, очевидно, из *конечного* числа шагов (обозначим его посредством N), то имеем

(1.13) $K_N \cdot K_{N-1} \cdot \ldots \cdot K_2 \cdot K_1 \cdot A = \mathbb{E}_n$, где матрицы K_j, $j = \overline{1,N}$ реализуют его последовательные шаги.

Умножим равенство **(1.13)** справа на A^{-1} в предположении, что матрица A невырождена. Получаем

$$K_N \cdot K_{N-1} \cdot \ldots \cdot K_2 \cdot K_1 \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{\mathbb{E}_n} = \underbrace{\mathbb{E}_n \cdot A^{-1}}_{A^{-1}}, \text{ или}$$

$$K_N \cdot K_{N-1} \cdot \ldots \cdot K_2 \cdot K_1 \cdot \mathbb{E}_n = A^{-1}.$$

Это последнее равенство показывает, что те же преобразования **(1.12)**, что переводят A в $\mathbb{E}_n$, переводят $\mathbb{E}_n$ в A^{-1}.

В результате:

I. получен критерий, при помощи которого можем устанавливать вырожденность (невырожденность) заданной матрицы:[27]

> Матрица $A \in \mathcal{M}_n$ невырождена (обратима) в том и только том случае, когда элементарными преобразованиями строк она может быть редуцирована к единичной матрице того же порядка.

[27] Читатель должен отдавать себе отчет в том, что предложенное эвристическое обоснование существования обратной матрицы пока нельзя признать вполне строгим. Исчерпывающее изложение темы можно найти в расширенных руководствах по линейной алгебре.

II. Найден способ отыскания обратной матрицы в случае, если она существует. Именно, для того, чтобы построить A^{-1}, нужно организовать одновременное преобразование строк исходной матрицы A, сводящее ее к $\mathbb{E}_n$, и тех же строк $\mathbb{E}_n$, преобразующее ее в A^{-1}.

С этой целью матрицы A и $\mathbb{E}_n$ объединяют в так называемую расширенную матрицу $(A|\mathbb{E}_n)$ размеров $(n\times 2n)$[28] и работают со строками этой матрицы, пока на месте, занятом матрицей A, не появится $\mathbb{E}_n$ (или алгоритм не прервется по причине вырожденности A). Тогда не месте, первоначально занятом матрицей $\mathbb{E}_n$ в расширенной матрице, ***автоматически возникнет*** A^{-1}!

◆Замечание

Известны (и в соответствующих разделах данного курса линейной алгебры будут рассмотрены) и другие критерии существования обратной матрицы для взятой матрицы $A\in\mathcal{M}_n$. Однако в вычислительном аспекте приведенный выше критерий – один из наиболее эффективных. Помимо этого, он конструктивен – альтернативой утверждения о вырожденности A фактически является отыскание обратной матрицы[29].

◆Примеры:

1). Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ найти обратную или убедиться в вырожденности A. Если матрица A обратима, сделать проверку найденной обратной матрицы.

$$(A\,|\,\mathbb{E}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{array}\right).$$

---

[28] Присоединяют $\mathbb{E}_n$ справа к A, отчего описанный алгоритм именуют еще ***методом присоединенной матрицы***.

[29] В действительности невырожденность матрицы становится ясна несколько раньше окончания алгоритма редукции, а именно, если его удается довести до стадии, отмеченной на приведенной выше схеме **(1.12)**.

Итак, $\exists A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Проверим это, умножая исходную матрицу на результат:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbb{E}_2,$$ поскольку

• $1\cdot(-2)+2\cdot\frac{3}{2}=1,\ 3\cdot(-2)+4\cdot\frac{3}{2}=0;$

• $1\cdot 1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ 3\cdot 1+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$

2). Задание прежнее, $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

$$(A\,|\,\mathbb{E}_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{1)}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{2)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -6 & 3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{3)}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right).$$

1). вычитание первой строки из двух последних;

2). третья строка поставлена на первое место и все элементы первого столбца, кроме первого, обнулены по схеме **(1.12)**;

3). вторая строка с получившейся единицей на втором диагональном месте комбинируется с лежащими ниже строками.

Поскольку все элементы четвертой строки при этом обращаются в нуль, то заключаем отсюда, что $\nexists A^{-1}$, т.е. A – вырожденная матрица.

3). Прежнее задание для матрицы $A=\begin{pmatrix}0&5&0&0&0\\0&0&0&0&2\\1/2&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&4&0\end{pmatrix}$.

$$\left(A\,|\,\mathbb{E}_5\right)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}0&5&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&1&0&0&0\\1/2&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&4&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1/2&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&5&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&4&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&2&0&1&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&0&0&1/5&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&1/4\\0&0&0&0&1&0&1/2&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\exists A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2&0&0\\1/5&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1/4\\0&1/2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Самостоятельно проверьте правильность ответа).

4). Как можно было видеть из сказанного выше о матрице перестановки, она «сделана» из строк единичной матрицы такого же размера, но идущих в некотором другом порядке. Отсюда немедленно следует обратимость любой матрицы перестановки, поскольку она редуцируется к единичной одними только перестановками строк.

Предположим, что в некоторой матрице перестановки A *на $k-$м месте среди ее строк* (строки считаем в традиционном направлении сверху вниз) *стоит $i-$я строка единичной матрицы*. Понятно, что в расширенной матрице $\left(A\,|\,\mathbb{E}\right)$ против нее окажется $k-$я строка единичной матрицы. Если теперь, следуя схеме **(1.12)**, переместить в зоне A слева от «|» $i-$ю строку единичной матрицы с $k-$го места на «родное» $i-$е место, то одновременно с этим в зоне A^{-1} справа от «|» $k-$*я строка единичной матрицы окажется на $i-$м месте среди строк* A^{-1}. Таким образом, если в матрице A имеется единица с индексами (k,i), то в матрице A^{-1} имеется единица с индексами (i,k). Кроме единиц как в A, так и в A^{-1} – только нули. Но это означает, что обратной для матрицы перестановки является ее транспонированная матрица A^T: $A^{-1} = A^T$. Таким образом, любая матрица перестановки есть *ортогональная* матрица.

◆**Пример:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица перестановки } 4-\text{го порядка} \Rightarrow$$

$$\left(A \mid \mathbb{E}_4\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Зона } A}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Зона } A^{-1}}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3-я строка единичной матрицы – на 4-м месте

4-я строка единичной матрицы – на 3-м месте

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^T$, или $A^{-1} \cdot A^T = A^T \cdot A^{-1} = \mathbb{E}_4$ **(проверьте!)**.

▲ Предположим, что некто захотел бы редуцировать A к $\mathbb{E}_n$ путем элементарных преобразований столбцов, а не строк, как только что было показано. Объясните подробно последовательность шагов такого преобразования. Где следовало бы в этом случае присоединить $\mathbb{E}_n$ к A?

◆**Замечание**

Выше операция обращения матриц была определена только для квадратных невырожденных матриц. В ряде случаев целесообразно иметь обобщение этого понятия на случай вырожденных и неквадратных матриц. Одним из таких общений является ***обращение Мура-Пенроуза*** (МП-обращение).

◄Определение►

Для любой прямоугольной матрицы $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ матрица $A^+ \in \mathcal{M}_{n,m}$, определяемая системой условий $\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^T = AA^+ \\ (A^+A)^T = A^+A \end{cases}$, называется МП-обратной[30] по отношению к A.

▲ Проверьте, что МП-обращение обладает свойствами:

1°. $A^+ = A^{-1}$ для любой квадратной невырожденной матрицы.

2°. $(A^+)^+ = A$.

3°. $(A^T)^+ = (A^+)^T$.

4°. Если $\begin{cases} A^T = A \\ A^2 = A \end{cases}$, то $A^+ = A$ – для симметрической идемпотентной матрицы A МП-обратная матрица совпадает с A.

5°. Матрицы AA^+, A^+A – идемпотентные.

6°. $A^TAA^+ = A^T = A^+AA^T$.

7°. $A^T(A^+)^TA^+ = A^+ = A^+(A^+)^TA^T$.

8°. $(A^TA)^+ = A^+(A^+)^T, (AA^T)^+ = (A^+)^TA^+$.

9°. $A(A^TA)^+A^TA = A = AA^T(AA^T)^+A$.

10°. $A^+ = (A^TA)^+A^T = A^T(AA^T)^+$.

11°. $A = O \Leftrightarrow A^+ = O$.

12°. $AB = O \Leftrightarrow B^+A^+ = O$.

13°. $A^+B = O \Leftrightarrow A^TB = O$.

---

[30] Иногда говорят: псевдообратной матрицей.

▲ Проверьте справедливость следующих утверждений:

1). Для любой нулевой матрицы МП-обратная матрица совпадает с транспонированной.

2). Для матрицы-числа A с единственным элементом a $A^{+}=\dfrac{1}{a}$, если $a\neq 0$, и $A^{+}=0$, если $a=0$.

3). Для всякой матрицы $A\in\mathcal{M}_{m\,,\,n}$ МП-обратная матрица A^{+} существует и единственна.

Краткая биографическая справка

- Кронеккер Леопольд (1823–1891 г.г.) – немецкий математик.
- Мур Элиаким Гастингс (1862–1932 г.г.) – американский математик.
- Пенроуз Роджер (1931 г. –) – английский математик.