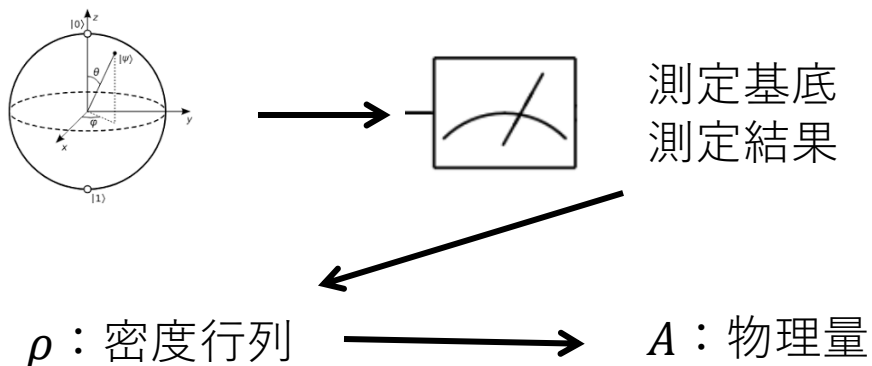


# 1.1 Classical Shadow Tomography (CST)

- ある量子状態の多数の物理量をより少ない回数の測定（また、測定によって得られた古典情報）から予測する手法
  - 量子情報を古典情報として効率的に保存し、後からその量子状態の（ある条件を満たす）物理量を取り出すことができる

## Quantum State Tomography

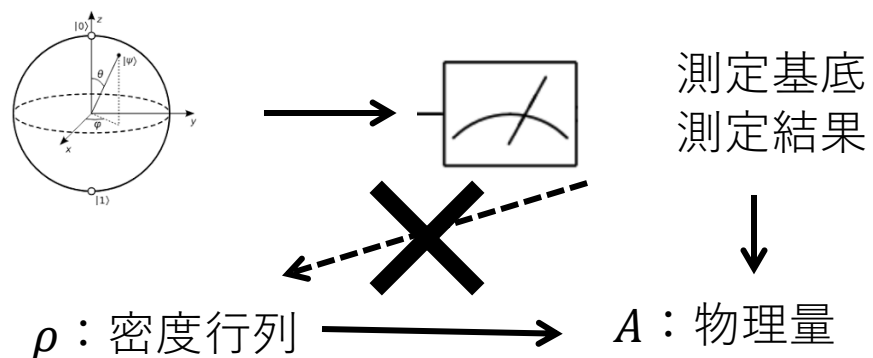
密度行列全部を測定をもとに推定し、それをもとに物理量を推定する



指数回の測定が必要

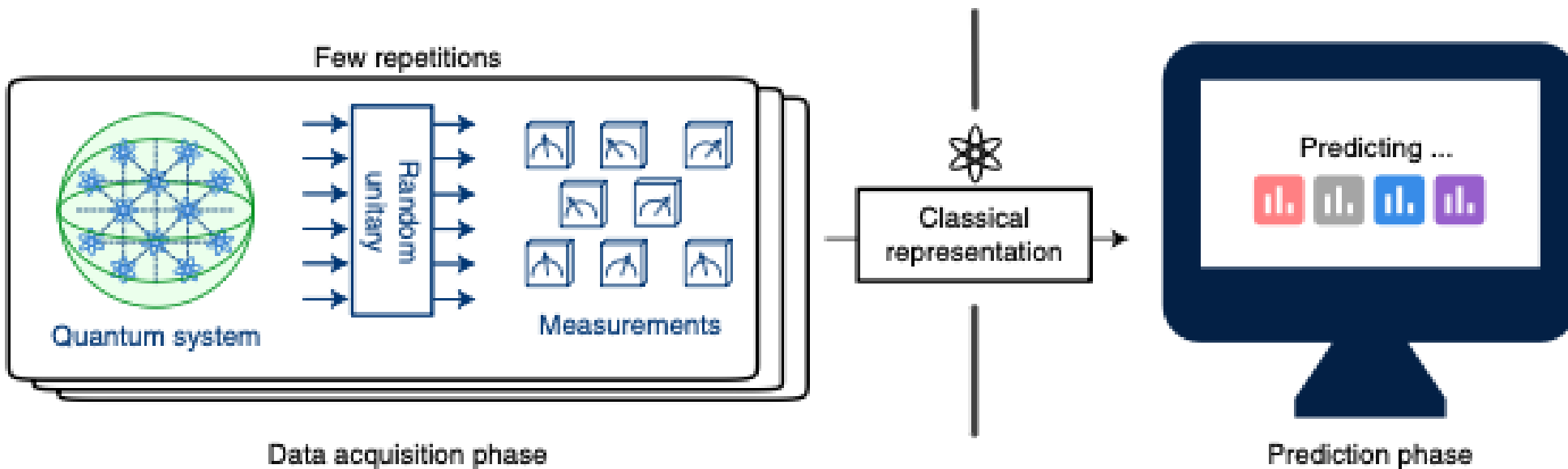
## Classical Shadow Tomography

求めたい物理量に応じて、必要なだけの情報を量子状態から取り出して推定する



多項式回の測定ですむ

# 1.2 Classical Shadow Tomography (CST)



ユニタリ演算子のアンサンブル  $\mathcal{U}$   
量子状態をランダムなユニタリ演算子で変換し測定を行う

$$U_i \in \mathcal{U}.$$

$$S(\rho; N) = \left\{ \hat{\rho}_1 = \mathcal{M}^{-1} \left( U_1^\dagger | \hat{b}_1 \rangle \langle \hat{b}_1 | U_1 \right), \dots, \right. \\ \left. \hat{\rho}_N = \mathcal{M}^{-1} \left( U_N^\dagger | \hat{b}_N \rangle \langle \hat{b}_N | U_N \right) \right\}$$

得られたClassical Shadowを  
K個ずつのグループL個に分割し、それぞれ平均値を取ること  
で密度行列の推定値を得る

$$\widehat{\rho}_{(l)} = 1/L \sum_{k \in A_l} \widehat{\rho}_k$$

物理量  $\{O_1, O_2, \dots, O_M\}$  の推定値を計算する

$$\hat{o}_i(N, K) \\ = \text{median} \{ \text{tr}(O_i \widehat{\rho}_{(1)}) , \dots , \text{tr}(O_i \widehat{\rho}_{(L)}) \}$$

# 1.3 CSTが優れた手法となる条件

物理量 $\{O_1, O_2, \dots, O_M\}$ の推定値を計算する

全ての物理量 $tr(O_1\rho), tr(O_2\rho), \dots, tr(O_M\rho)$ を加法誤差 $\epsilon$ で推定するのに、必要なランダム演算子・測定回数 $N$ は以下を満たす必要がある

$$N \geq O(\log(M) \max_i \|O_i\|_{shadow}^2 / \epsilon^2)$$

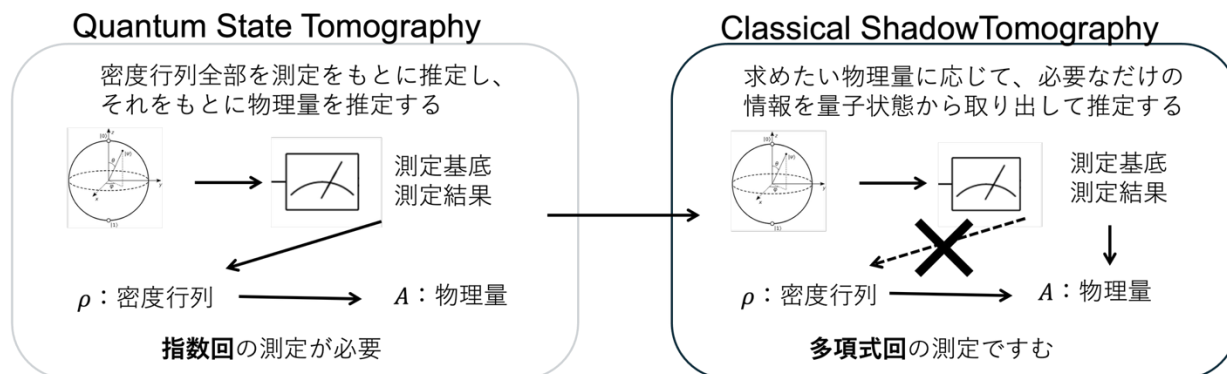
例) ランダムパウリ測定による $k$ -local パウリ演算子 $(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_k)$ の測定

$\|O_i\|_{shadow}^2$  は $k$ が大きくなるにつれて指数で増える

測定したい物理量に関わる系が小さい部分系の際はCSTは優れているが、多くの量子ビットに渡るとQSTと同程度

## 2.1.1 GHZ状態の2-local Pauliの期待値推定

### CSTとNaïve methodの比較



任意の2-local Pauliの期待値推定を行い、CSTがより効率的に2-local Pauliの期待値を推定できることを示す

### CST推定分散と量子ビット数・Localityの依存性を確認

4量子ビットの場合の2-local Pauli

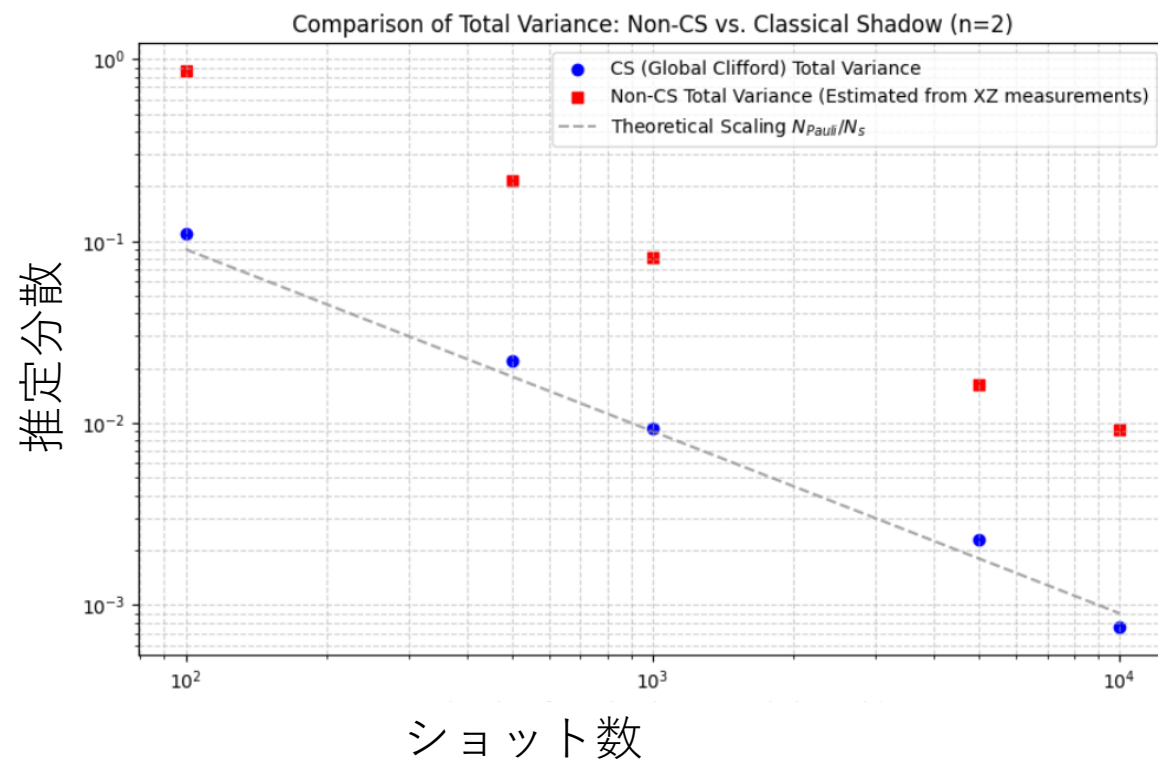
$$\begin{aligned} &X \otimes X \otimes I \otimes I \\ &X \otimes I \otimes X \otimes I \\ &X \otimes I \otimes Y \otimes I \\ &Y \otimes I \otimes I \otimes Z, \dots \end{aligned}$$

任意の2-local Pauliの期待値推定を行い、 $K$ が一定であれば、CSTによる推定量の誤差の最大値が量子ビット数に依存しない

また $K$ が大きくなると指数的に必要なショット数が増えることを確認する

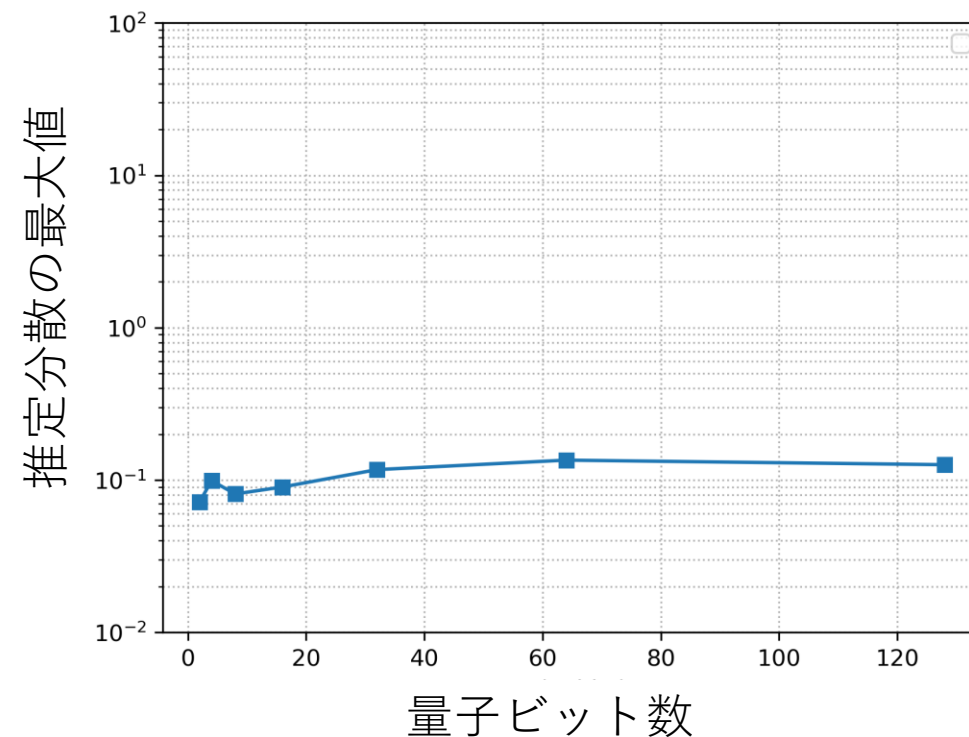
## 2.1.2 GHZ状態の2-local Pauliの期待値推定

### CSTとNaïve methodの比較



- CSTはQSTと比較して、より少ないショット数で一定の2-local Pauliの期待値の推定分散を達成している

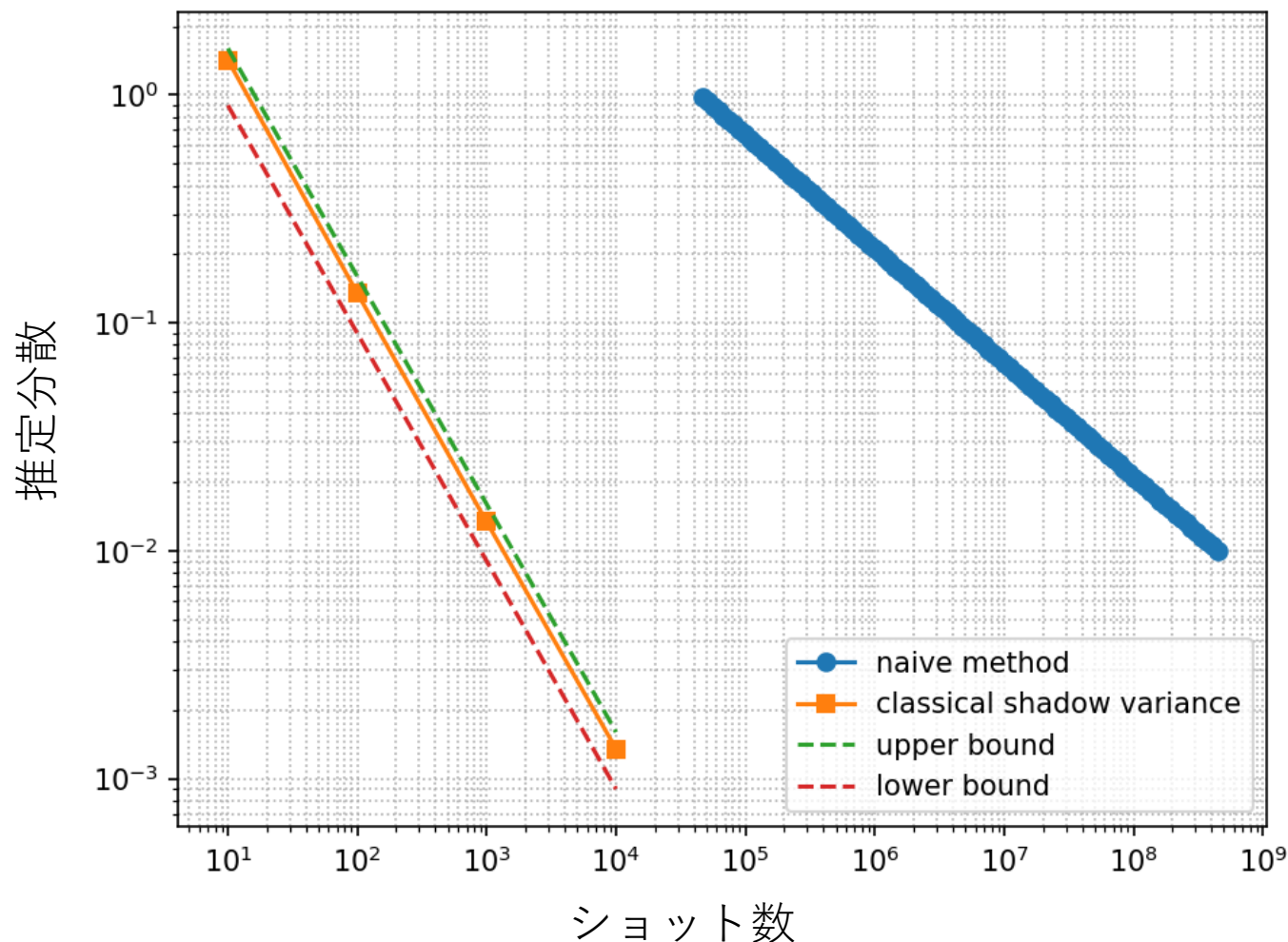
### CST推定分散と量子ビット数・Localityの依存性を確認



- 量子ビット数によらず、2-local Pauliの期待値の推定分散の最大値が変わらない

## 2.1.3 GHZ状態のk-local Pauliの期待値推定

100量子ビットのGHZ状態にCSTを適用し、2-local Pauliの期待値を推定



- 一定の推定分散を達成するのに、Full Tomographyと比べて、CSTはより少ないショット数しか必要としない
- Classical Shadow Tomographyのショット数の理論的評価

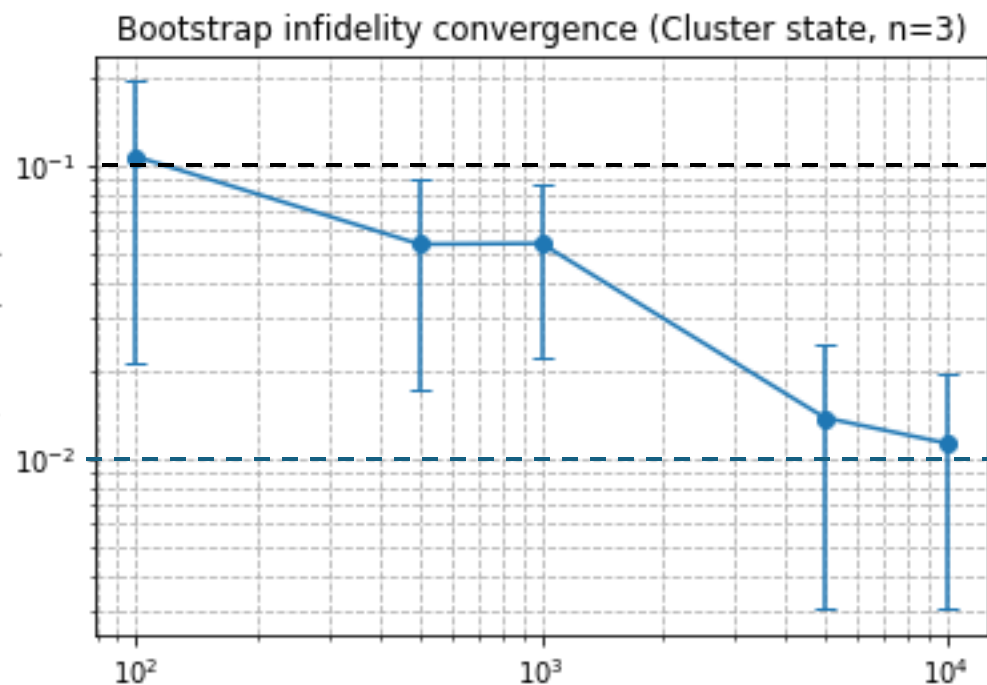
$$\text{上限} = \frac{4^k}{\epsilon^2}$$

$$\text{下限} = \frac{3^k}{\epsilon^2}$$



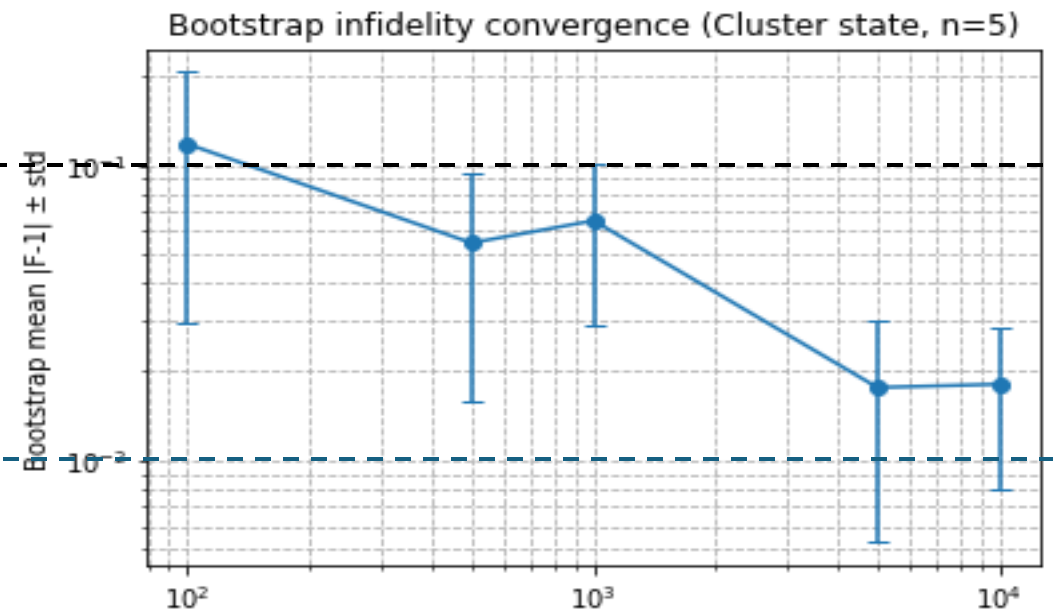
## 2.2 クラスタ状態のk-local PauliのFidelity推定

Infidelityの平均 (標準偏差)



ショット数

3量子ビットのクラスタ状態



ショット数

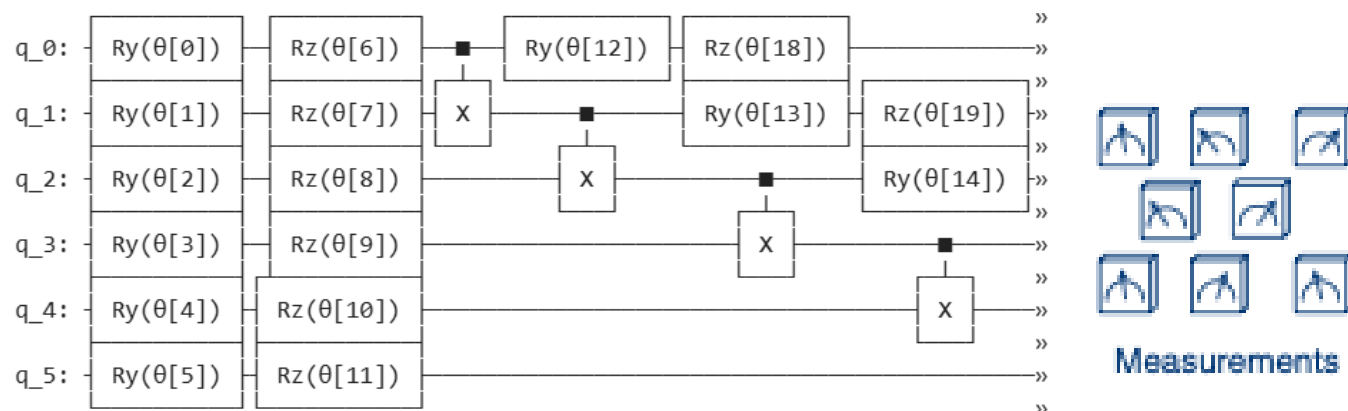
5量子ビットのクラスタ状態

クラスタ状態のInfidelity推定値はショット数が大きくなるにつれて値が減少し、その値はショット数が一定で量子ビット数が3から5に増えても変化しない

## 2.3.1 CSTをIsing modelの基底状態の解析

### Ising model

$$\tilde{\mathcal{H}} = U_{dis}^\dagger \mathcal{H} U_{dis},$$



VQE

基底状態  $\rho$

### Classic shadow

$$S(\rho; N) = \left\{ \hat{\rho}_1 = \mathcal{M}^{-1} \left( U_1^\dagger | \hat{b}_1 \rangle \langle \hat{b}_1 | U_1 \right), \dots \right. \\ \left. \hat{\rho}_N = \mathcal{M}^{-1} \left( U_N^\dagger | \hat{b}_N \rangle \langle \hat{b}_N | U_N \right) \right\}$$

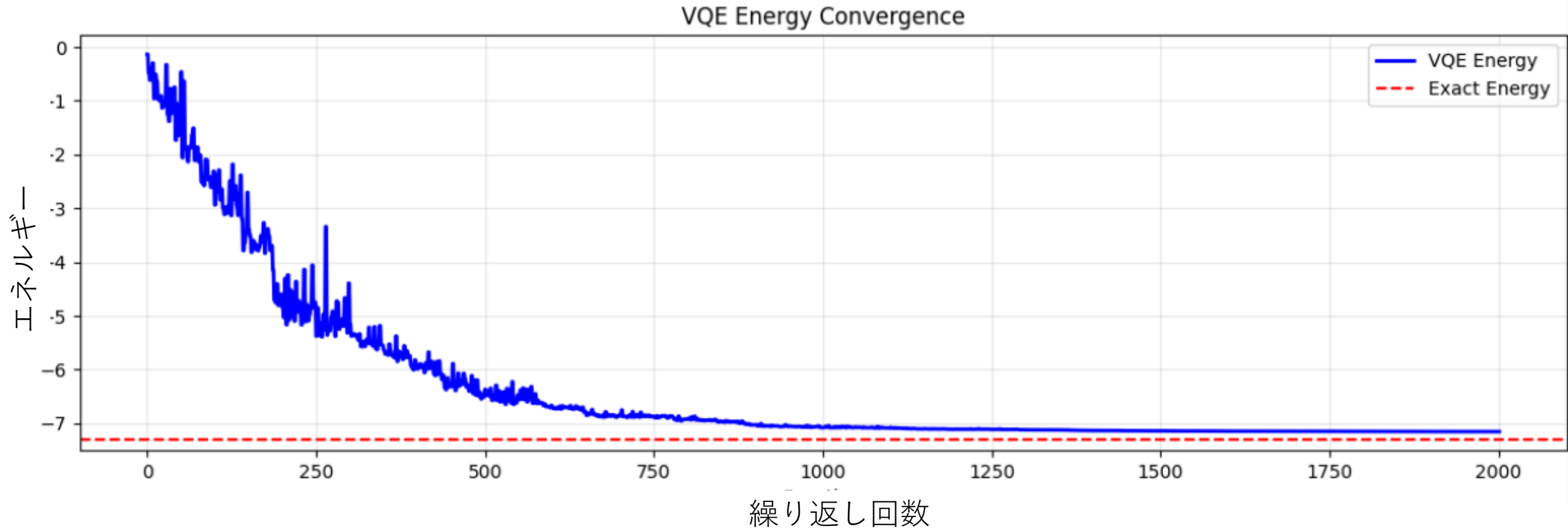


### Prediction

- 磁化率
- 比熱
- 相関関数
- 臨界指数



## 2.3.2 CSTをIsing modelの基底状態の解析



- VQEによって、対応する量子状態のエネルギー期待値が基底状態に収束している

# まとめ

- Classical Shadow Tomography (CST)はある量子状態の多数の物理量をより少ない回数の測定（また、測定によって得られた古典情報）から予測する手法である。
- CSTをGHZ状態の2-local Pauliの期待値推定に適用し、従来のQuantum State Tomographyよりより少ないshotの回数で高い推定制度を達成できること、また、ある精度を達成するのに必要なショット数が量子ビット数によらないことを実証した。
- VQEによって推定した1D Isingモデルの基底状態にCSTによる物理量の推定が有効であると予想し、その実証を試みた

# 問題設定と手法

問題: low-Pauli rank の量子状態を対象とした状態の再構成 (推定)。  
通常のPauli基底tomographyとClassical shadow tomographyで行い比較。

$n$ -qubit low Pauli-rank状態:  $\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^l c_i P_i$  , where  $c_i = \text{Tr}[P_i \rho]$ .

任意の量子状態は $4^n$ 個のPauli基底の線形結合で表せる。(Pauli基底: e.g.  $P_i = X \otimes I \otimes Z$ など)  
その際のPauli-rank  $l$  が  $4^n$  に比べて十分に小さい ( $l \ll 4^n$ ) 状態をlow-Pauli rankと呼ぶ。  
ただし、どのPauli基底かは事前に知らないことに注意。

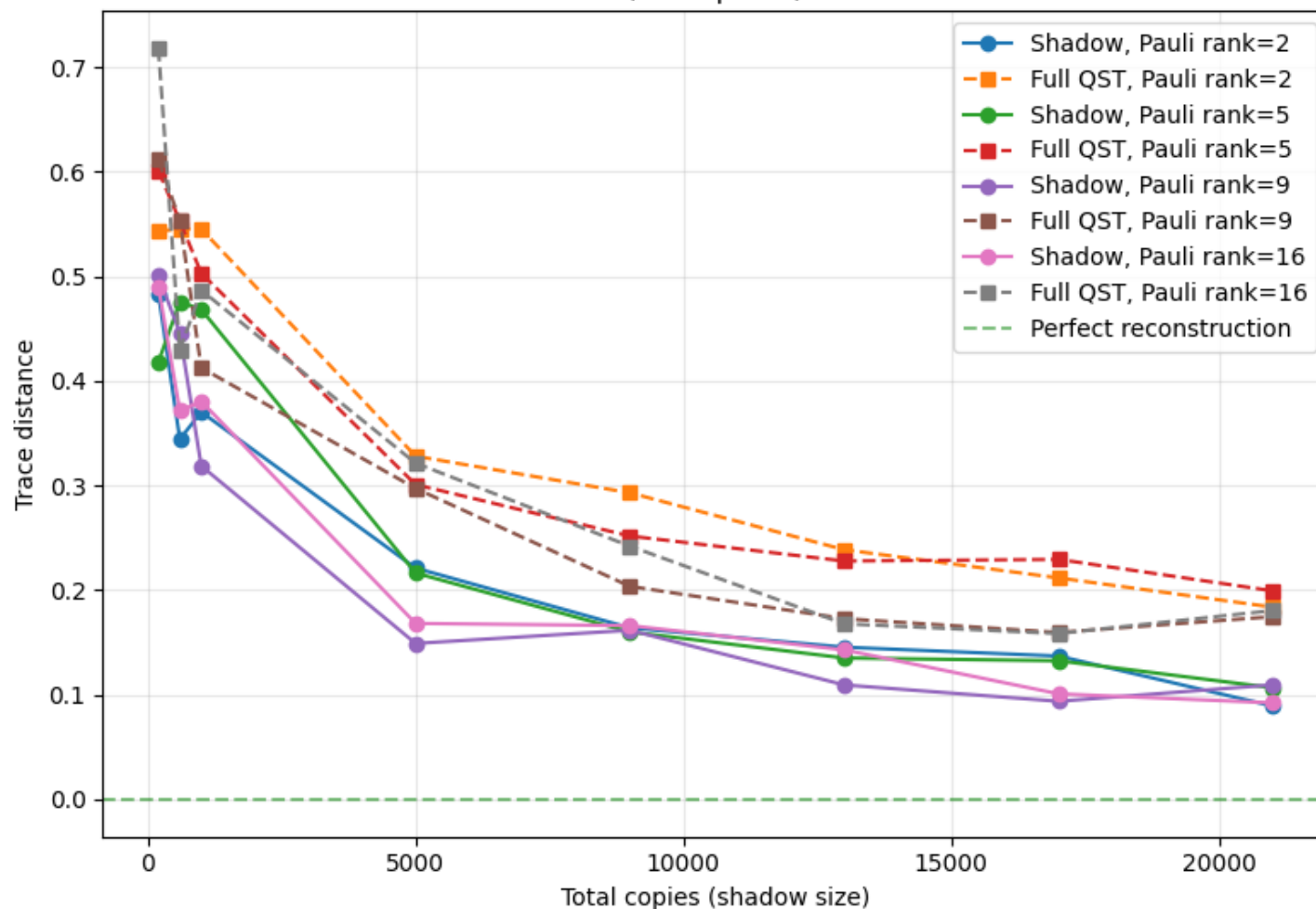
このlow Pauli-rank状態の複数個のコピーを用いた量子状態の再構成を、通常の $c_i$ をPauli基底の期待値から推定するtomographyと、今回のテーマであるClassical shadowを使って $c_i$ を推定するtomography の2つで行い結果を比較する

手法: 

- ・ 通常のtomography: 状態のコピーを $4^n$ 個のPauli基底に等分に割り当て $c_i$ を推定する。
- ・ Classical shadow tomography: ランダムPauliを用いる ( $U \in \text{Cl}(2)^{\otimes n}$ ) 方針。

# 結果

Classical Shadow vs Full QST: Trace Distance vs Copies  
(n=3 qubits)



横軸: コピー数

縦軸: 再構成 (推定)された状態のエラー  
真の状態とのtrace距離で測った。

点線: 通常のtomography (Full QST)

実線: classical shadow tomography

色の違い: Pauli-rank の違い。

Pauli-rank = 2, 5, 9, 16を行った。  
(最大 $4^3 = 64$  (n=3 qubitsで))

コピー数が増える(右に行く)ほどエラー  
が下がる(下に行く)挙動は(当然だが)共通  
している。

若干Classical shadowを用いる方が、同じ  
コピー数に対して優位性があるように思  
われる。

# 考察

若干ではあったがClassical shadow tomographyに優位性があるように見える結果が得られた。

理論的にも漸近極限で ( $n$ -qubit 状態をエラー $\epsilon$ で再構成(推定)するにあたり)

通常のPauli tomography:  $\mathcal{O}(n4^n/\epsilon^2)$  コピー に対し

Classical shadow tomography:  $\mathcal{O}(n\alpha^n/\epsilon^2)$  コピー であるため、当然の結果ともいえる。  
 $3 < \alpha < 4$

ただ、今回比較対象として用いた通常のPauli tomography は現在知られているtomographyのうち最もよいものではないことに注意。

現在の最適なtomography は(collective な操作を必要としたもので):  $\mathcal{O}(r2^n/\epsilon^2)$  コピーである。ここで  $r$  は状態のランク( $\neq$ Pauli-rank)。このtomographyとも有限のコピー数で比較を行うことは有意義かもしれない(が実装は少々工夫が必要にも思える)。

Low Pauli-rank 性が効いているのか、効いているとしたらどう効いているのかといったことに対する議論は今後の課題である。