2. Wyżej dowodząc twierdzenia 1 nie tylko zbudowaliśmy bazę, w której dana forma kwadratowa zapisuje się jako suma kwadratów współrzędnych, ale także otrzymaliśmy w pełni określone wyrażenia na współczynniki przy tych kwadratach, a mianowicie

$$\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n},$$

tak że forma kwadratowa ma postać

$$\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2 \tag{1}$$

To pozwala nam znaleźć liczbę dodatnich i ujemnych współczynników przy kwadratach. A mianowicie, jeżeli Δ_{i-1} i Δ_i mają jednakowe znaki, to współczynnik przy ξ_i^2 jest dodatni, jeżeli zaś ich znaki są różne, to współczynnik ten jest ujemny; tzn. liczba ujemnych współczynników przy kwadratach jest równa liczbie zmian znaku w ciągu

$$1, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n.$$

Dowiedliśmy więc następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. *Liczba ujemnych współczynników przy kwadratach współrzędnych w postaci kanonicznej* (8) *formy kwadratowej jest równa liczbie zmian znaku w ciągu wyznaczników*

$$1, \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n(^1).$$

Przypuśćmy w szczególności, że $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$. Wówczas istnieje baza $e_1, e_2, ..., e_3$ w której forma kwadratowa ma postać

$$A(x;x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + ... + \lambda_n\xi_n^2,$$

przy czym wszystkie $\lambda_i > 0$. A zatem $A(x;x) \geqslant 0$ dla każdego x i przy tym równość

$$A(x;x) = \sum \lambda_i\xi_1^2 = 0$$

jest możliwa tylko wówczas, gdy

$$\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_n = 0.$$

Inaczej mówiąc: *Jeżeli* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$*, to forma kwadratowa* $A(x;x)$ *jest określona dodatnio.* Przypuśćmy teraz odwrotnie, że $A(x;x)$ jest dodatnio określoną formą kwadratową. Wykażemy, że w tym przypadku

$$\Delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Najpierw pokażemy, że $\Delta_k \neq 0$. Przypuśćmy, że tak nie jest, tj. że

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1;f_1) & A(f_1;f_2) & ... & A(f_1;f_k) \\ A(f_1;f_1) & A(f_1;f_2) & ... & A(f_1;f_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(f_k;f_1) & A(f_k;f_2) & ... & A(f_k;f_k) \end{vmatrix} = 0$$

Wówczas jeden z wierszy tego wyznacznika est kombinacją liniową wierszy pozostałych, tj.

$$\mu_1 A(f_1; f_i) + \mu_2 A(f_2; f_i) + ... + \mu_k A(f_k; f_i) = 0$$

, $i = 1, 2, ..., k$, gdzie nie wszystkie μ_j są zerami. Ale wówczas

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_k f_k; f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., k)$$

a zatem

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_k f_k; \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_k f_k) = 0,$$

podczas gdy

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_k f_k \neq 0,$$

co przeczy określeniu dodatnio określonej formy kwadratowej. A zatem zgodnie z twierdzeniem 1, formę $A(x; x)$ można sprowadzić do postaci

$$A(x; x) = \lambda_1 \xi_1^2 + ... + \lambda_n \xi_n^2,$$

gdzie

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

Ponieważ dla dodatnio określonej formy kwadratowej wszystkie $\lambda_k > 0$, więc także wszystkie $\Delta_k > 0$. (Przypominamy, że $\Delta_0 = 1$). Dowiedliśmy zatem twierdzenia: TWIERDZENIE 3. *Niech $A(x; y)$ będzie symetryczną formą dwuliniową, a $f_1, f_2, ..., f_n$ bazą w n-wymiarowej przestrzeni R. Na to, aby forma kwadratowa $A(x; x)$ była określona dodatnio, potrzeba i wystarcza, aby*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad ..., \quad \Delta_n > 0.$$

Twierdzenie to nosi nazwę *warunku Sylvestera* dodatniej określonej formy kwadratowej. Moglibyśmy zamiast $f_1, f_2, ..., f_n$ wziąć jakąkolwiek inną bazę i napisać warunki dodatniej określoności formy $A(x; x)$ używając wektorów tej nowej bazy. W szczególności, jeżeli jako nową bazę weźmiemy te same wektory $f_1, f_2, ..., f_n$, ale w innej kolejności, to nowymi minorami $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ będą różne minory główne([1]) macierzy $[a_{ik}]$. Stąd wynika ciekawy