Системы счисления

Система счисления (СС) – это набор символов цифр для представления величин. Системы счисления бывают позиционные и непозиционные. В позиционных системах счисления *каждая цифра всегда обозначается одним символом*. Благодаря этому, у чисел в позиционных системах счисления есть такая характеристика как разрядность. ***Разрядность*** – это количество цифр в записи числа. По разрядности числа можно судить о его величине – чем больше разрядов, тем больше число. Примером позиционной системы счисления являются Арабские цифры. В непозиционных СС одна цифра может быть представлена несколькими символами, поэтому количество разрядов в непозиционных числах определить невозможно и понятие разрядности у них отсутствует. Из-за этого мы не можем умножать непозиционные числа, возводить их в степень и т. д.

У любой позиционной системы счисления есть основание. ***Основание системы счисления*** – это число, которое показывает, сколько символов используется для обозначения цифр. Или проще говоря: ***Основание системы счисления*** – это количество цифр в системе счисления. Также основание системы счисления показывает во сколько раз следующий (старший) разряд больше предыдущего (младшего).

У каждого разряда в позиционной СС есть вес, который зависит от его положения в записи числа. ***Вес разряда*** – это основание системы счисления, возведенное в степень, равную номеру разряда. Разряды всегда нумеруются с нуля, то есть младший разряд (крайний справа), является нулевым а не первым. У старших разрядов (те которые справа) вес больше чем у младших (те которые слева). Системы счисления собственно и называют *позиционными*, потому что одна цифра имеет разный вес (величину), в зависимости от своей *позиции* в записи числа.

Любое число в позиционной системе счисления можно разложить на сумму произведений веса разряда на значение соответствующего разряда следующим образом:

$$X = a^{n-1} \cdot x_{n-1} + a^{n-2} \cdot x_{n-2} + ... + a^2 \cdot x_2 + a^1 x_1 + a^0 \cdot x_0; \qquad (1)$$

где: X – конечное число;

a – основание системы счисления (количество символов, из которого составляются числа);

n – разрядность числа (количество цифр в записи числа);

x – значение разряда (произвольная цифра из множества возможных);

a^0, a^1, a^2 … – весовые коэффициенты разрядов.

Например, число 2 849 в десятичной системе счисления можно записать следующим образом:

$$2\ 849 = 10^3 \cdot 2 + 10^2 \cdot 8 + 10^1 \cdot 4 + 10^0 \cdot 9 = 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 1 \cdot 9 =$$
$$= 2000 + 800 + 40 + 9 = 2\ 849;$$

здесь 10 – основание системы счисления (десятичная система); показатели степени 0 1 2 3 – номера соответствующих разрядов (счет всегда начинается с нуля); основание системы счисления, возведенное в степень равную номеру разряда, называется ***весом разряда***; цифры 2 4 8 и 9 – значения соответствующих разрядов.

Наиболее распространенной позиционной системой счисления является десятичная, ее основание (a) равно 10. Существуют и другие позиционные системы счисления, например двоичная (a = 2), восьмеричная (a = 8) и шестнадцатеричная (a = 16). За основание системы счисления можно принять любое натуральное число, следовательно систем счисления может быть столько же сколько и натуральных чисел, просто наибольшее распространение в вычислительной технике получили вышеперечисленные.

Одно и тоже число можно представить в различных системах счисления, при этом оно не изменит свою величину. Для примера рассмотрим таблицу, в которой представлены числа от 0 до 15 в различных системах счисления.

Таблица 1 – Числа в различных системах счисления.

***Decimal* (*a* = 10)**	***Binary* (*a* = 2)**	***Octal* (*a* = 8)**	***Hexadecimal* (*a* = 16)**
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Как видно из таблицы 1, одно и тоже число в различных системах счисления имеет разную разрядность. Следовательно, при одной и той же разрядности, в различных системах счисления, можно записать различное количество возможных чисел (комбинаций символов). Для того, чтобы определить сколько всего можно записать чисел (набрать комбинаций) в заданной системе счисления при заданной разрядности можно использовать следующую формулу:

$$N = a^n; \tag{2}$$

где: N – количество комбинаций; a – основание системы счисления; n – разрядность числа.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

1. Для перевода чисел из десятичной системы счисления в любую другую необходимо делить десятичное число на основание той системы счисления, в которую переводим, и записывать остатки от деления. Для получения конечного результата необходимо переписать остатки от деления в обратном порядке, начиная с последнего результата от деления.
2. Для перевода числа из любой системы счисления в десятичную, необходимо веса разрядов исходного числа, записанные в десятичной системе счисления, перемножить на значения соответствующих разрядов, также записанные в десятичной системе счисления и сложить их. Это правило выражается формулой (1)(см. выше).

Таким образом, при переводе числа из десятичной СС в любую другую используя правило 1 можно сделать проверку, используя правило 2.

Рассмотрим пример: десятичное число 22, необходимо перевести в двоичную систему счисления. Для этого, будем делить его на 2, потому что переводим в двоичную систему счисления, и записывать остатки от деления.

$22_{10} = ?_2$;

22	2			
22	11	2		
0	10	5	2	
	1	4	2	2
		1	2	1
			0	

$22_{10} = 1\,0110_2$;

Сделаем проверку по формуле (1), заметим что $a = 2$, $n = 5$:

$$X = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22;$$

Как видите все совпадает.