

Tecniche di progettazione dei filtri FIR

9.0 Introduzione

I filtri FIR sono filtri nei quali la risposta all'impulso è generalmente limitata.

I filtri FIR hanno la proprietà di essere facilmente vincolati affinché la loro risposta impulsiva soddisfi a una delle due seguenti proprietà particolarmente utili:

- *risposta di fase lineare* (con simmetria pari) o
- *risposta di fase lineare e sfasamento di 90°* (con simmetria dispari),

Per questo motivo le tecniche per il progetto di filtri FIR sono di considerevole interesse.

Le tecniche di trasformazione esaminate, generalmente producono filtri sia con poli che con zeri e quindi con risposte all'impulso di durata infinita , che non sono applicabili a un modello FIR.

Saranno di seguito descritte le quattro tecniche generali più comunemente impiegate per un modello FIR:

- **Metodo delle finestre** (*Window-Function Technique*);
- **Metodo del campionamento in frequenza** (*Frequency-Sampling Technique*);
- **Metodo “equiripple”** (*Equiripple Designs*) e
- **Progetto dei filtri massimamente piatti** (*Maximally-Flat Design*)

Premessa

Se si indica con :

- $H_d'(\omega)$ la risposta in frequenza desiderata (ideale) per il filtro FIR e con
- $h_d(n)$ la relativa risposta all'impulso

poichè $H_d'(\omega)$ la DTFT di $h_d(n)$, ricordando la definizione della DTFT e la DTFT inversa, si ha:

$$H_d'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (9.0.1)$$

dove:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d'(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (9.02)$$

La DTFT di $h_d(n)$:

$$H_d'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} \quad (9.0.1)$$

rappresenta una serie infinita di Fourier della funzione periodica $H_d'(\omega)$, dove $h_d(n)$ sono i coefficienti della serie di Fourier.

La serie è infatti infinita se $H_d'(\omega)$ o una delle sue derivate è discontinua e questo è il caso della maggior parte dei filtri di interesse.

Metodo delle finestre (*Window-Function Technique*)

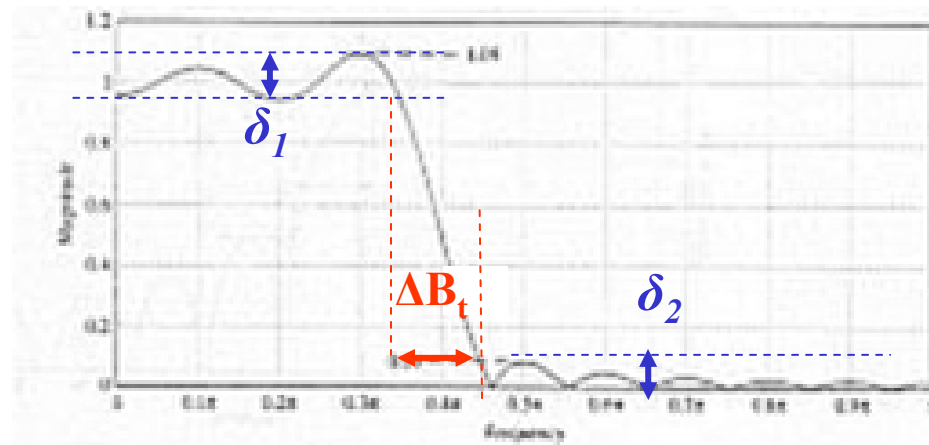
La tecnica di progettazione mediante finestre è basata sull'idea di approssimare un filtro desiderato, eventualmente non causale e con risposta all'impulso $h_d(n)$ di durata infinita, azzerando i campioni di $h_d(n)$ al di fuori di una finestra temporale di ampiezza N , nella speranza che l'approssimazione sia tanto più buona quanto più la dimensione N della finestra è grande.

La **progettazione mediante finestre** richiede la **definizione** del:

1. tipo di finestra e della
1. dimensione N dell'intervallo dei campioni da selezionare.

Per effettuare le scelte del tipo di finestra e del numero N di campioni si deve tenere presente che:

1. La massima ampiezza delle oscillazioni in banda passante δ_1 e in banda proibita o di attenuazione δ_2 , dipende dal tipo di finestra, ma non dipende da N ;
2. L'ampiezza della banda di transizione ΔB_t è inversamente proporzionale ad N , con coefficiente di proporzionalità dipendente dal tipo di finestra.



Per i diversi tipi di finestre sono disponibili *le tabelle* con le relative

- ampiezze di oscillazione nella banda passante δ_1 e nella banda proibita δ_2

e

- l'ampiezza della banda di transizione ΔB_t

9.1 Tecnica delle finestre

Il modo più semplice e ovvio per progettare un filtro FIR è quello di annullare la risposta ideale $h_d(n)$ al di fuori dell'intervallo $0 \leq n \leq M$ per ottenere $h(n)$, cioè

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \dots, M \\ 0, & n < 0 \text{ e } n > M \end{cases} \quad (9.1.1)$$

Quando si approssima una funzione periodica attraverso una serie finita di Fourier, si ottiene un ***errore quadratico medio (MSE)***, dovuto al troncamento della serie infinita di Fourier di quella funzione, calcolabile con la seguente relazione:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H'_d(e^{j\omega}) - H'(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

Criterio di dimensionamento

Il criterio di dimensionamento consiste nel determinare il numero di campioni M tale l'errore quadratico medio effettivo ε^2 dovuto alla finestratura sia minore di un errore quadratico medio minimo $\varepsilon_{\min.\text{imp.}}^2$ opportunamente definito .

Dunque il modello della finestra rettangolare specificato dalla (9.1.1) corrisponde di fatto alla approssimazione di $H_d'(\omega)$ con $H'(\omega)$, sulla base di un errore quadratico medio (MSE) minimo imposto $\varepsilon_{\min.\text{imp.}}^2$.

Infatti la relativa sequenza $h(n)$ deve minimizzare l'espressione:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H'_d(e^{j\omega}) - H'(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega < \varepsilon_{\min.\text{imp.}}^2$$

In ogni caso il troncamento della serie di Fourier produce anche il noto *fenomeno di Gibbs*, che si manifesterà nella $H'(\omega)$, specialmente quando $H_d'(\omega)$ presenta delle discontinuità.

Poiché tutti i filtri selettivi di frequenza sono idealmente discontinui in corrispondenza delle estremità di banda, *generalmente un semplice troncamento della risposta all'impulso*

non produce



un modello FIR accettabile.

Finestra rettangolare (rectangular window)

Per mostrare più precisamente l'effetto di un semplice troncamento, si scriva la (9.1.1) come:

$$h(n) = \omega_R(n) \cdot h_d(n), \quad (9.1.2)$$

dove $\omega_R(n)$ è una funzione finestra rettangolare definita nel paragrafo 7.3 come:

$$\omega_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, M \\ 0, & n < 0 \text{ e } n > M \end{cases} \quad (9.1.3)$$

La trasformata della funzione finestra rettangolare:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, M \\ 0, & n < 0 \text{ e } n > M \end{cases} \quad (9.1.3)$$

è:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \frac{\sin\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]}$$

Quindi nel dominio della frequenza alla sequenza rettangolare $\omega_R(n)$ di $(M+1)$ campioni, corrisponde una funzione sinc con uno sfasamento proporzionale a $(M+1)/2$:

$$|W'_R(\omega)| = \left| \frac{\sin(M+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} \right|, \quad (9.1.5)$$

che è tracciato su scala logaritmica (dB) in figura 9.1 (per $M=20$).

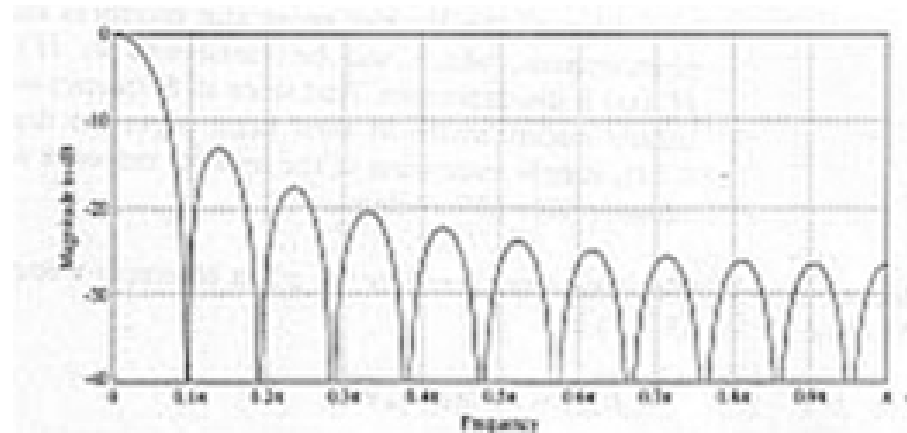


Figura 9.1 Trasformata della finestra rettangolare $|W'_R|$ in dB per $M=20$

Poiché alla moltiplicazione algebrica nel dominio del tempo:

$$h(n) = \omega_R(n) \cdot h_d(n),$$

corrisponde alla convoluzione nel dominio della frequenza, si avrà:

$$H'(\omega) = \frac{1}{2\pi} W_R'(\omega) \otimes H_d'(\omega), \quad (9.1.4)$$

dove $W_R'(\omega)$ è la DTFT di $\omega_R(n)$.

Quindi nel dominio della frequenza, la convoluzione di $W_R'(\omega)$ con la risposta di ampiezza desiderata $H_d'(\omega)$ secondo la (9.1.4), produce il fenomeno di Gibbs nella $H'(\omega)$, come illustrato in fig. 9.2 per un filtro ideale passabasso con $M=20$ e $\omega=0.4\pi$.

L'entità delle oscillazioni (ripple) dipende dall'ampiezza dei lobi laterali.

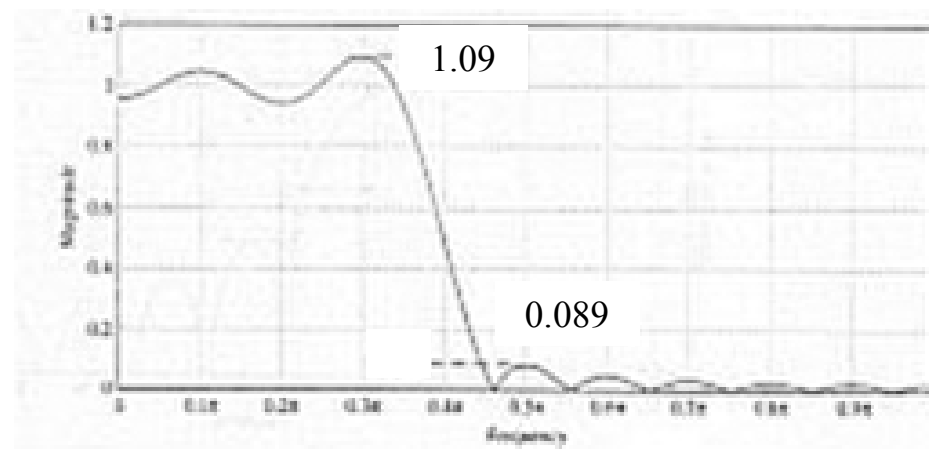


Figura 9.2 Risposta in ampiezza del filtro a fase lineare ottenuto con una finestra rettangolare con $M=20$ e $\omega=0.4\pi$, dove è presente il fenomeno di Gibbs -si noti che la caratteristica presenta il 9% di sovralongazione (overshoot) sia nel passabanda che nell'attenuabanda di $|H'(\omega)|$.

Questa *sovralongazione* (overshoot) rimane:

- approssimativamente costante comunque si renda grande M , mentre
- la larghezza delle oscillazioni (ripples) diventa più stretta in prossimità della frequenza di taglio, all'aumentare di M .

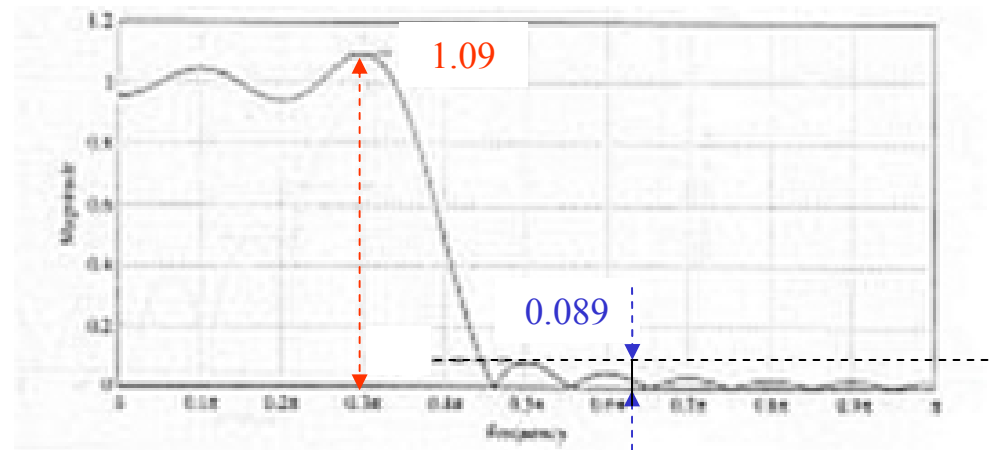


Figura 9.2 Risposta in ampiezza del filtro a fase lineare ottenuto con una finestra rettangolare con $M=20$ e $\omega=0.4\pi$, dove è presente il fenomeno di Gibbs

- Nel caso esaminato l'oscillazione (ripple) massima di passabanda $1+\delta_1$ è di 0.75 dB (valore normalizzato: 1.09) al di sopra del guadagno desiderato di 0 dB (valore normalizzato: 1),
- mentre l'attenuazione associata alla massima oscillazione (ripple) δ_2 è di -21 dB (valore normalizzato: 0.089).

Per questo esempio, $|H'(\omega)|$ è riportato in forma logaritmica nella figura 9.3.

Infatti se l'oscillazione (ripple) massima di passabanda è di 0.75 dB , indicando con **a** il valore normalizzato della attenuazione si ha:

$$20 \log_{10} a = 0.75 \text{ dB} \Rightarrow \log_{10} a = \left(\frac{0.75}{20} \right) \Rightarrow a = 10^{\left(\frac{0.75}{20} \right)} = 1.09$$

Il valore normalizzato pari a 1.09 è maggiore del guadagno desiderato di 0 dB, a cui corrisponde un valore normalizzato pari a 1, ossia si è in presenza di una sovraelongazione nella banda passante.

Analogamente si ha che l'attenuazione associata alla massima oscillazione (ripple) nella banda di attenuazione è di -21 dB, per cui:

$$20 \log_{10} a = -21 \text{ dB} \Rightarrow \log_{10} a = \left(-\frac{21}{20} \right) \Rightarrow a = 10^{\left(-\frac{21}{20} \right)} = 0.089$$

Il valore normalizzato pari a 0.089 è maggiore del guadagno desiderato, pari a un valore normalizzato 0, ossia si è in presenza di un ripple anche nella banda di attenuazione.

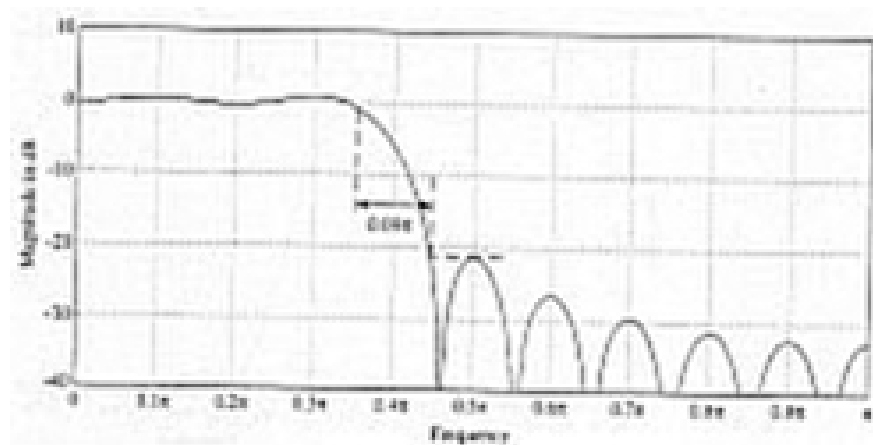


Figura 9.3 Risposta in ampiezza del filtro a fase lineare ottenuto con una finestra rettangolare con $M=20$ e $\omega=0.4\pi$.

Il problema di base con la finestra rettangolare è il brusco troncamento di $h_d(n)$ in corrispondenza della frequenza di taglio. Come si potrà verificare, questo problema è analogo a ciò che si verifica quando si cerca di ottenere una banda di transizione troppo stretta in $H'(\omega)$.

Sorge quindi *la necessità di ottenere finestre che presentino una riduzione graduale di ampiezza (troncamento graduale) in prossimità delle estremità della banda di transizione in modo da ottenere ondulazioni più piccole in $H(\omega)$, a discapito di bande di transizione più larghe.*

Occorre dunque trovare una soluzione di compromesso per soddisfare contemporaneamente le due esigenze, ossia

ottenere:

risposte con ripple limitato

e

banda di transizione ridotta.

A tale scopo sono disponibili molte funzioni finestra.
Sebbene la maggior parte di queste siano state sviluppate originariamente per essere utilizzate nell'analisi spettrale di segnali di durata finita (trattati nel paragrafo 7.3) in quel contesto la trasformazione traslata con la funzione finestra $W'(\omega - \omega_0)$ è essa stessa la risposta in frequenza dei filtri effettivi passabanda, che compongono l'analizzatore di spettro.

Sono di seguito riportate alcune di queste funzioni finestra tra le più comunemente utilizzate.

Hanning window

L'Hanning window corrisponde a un semplice coseno traslato verso l'alto avente la seguente espressione:

$$w_N(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{M} \right] = \sin^2 \frac{\pi n}{M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (9.1.6)$$

Naturalmente questa e tutte le altre funzioni finestra sono uguali a zero all'esterno dell'intervallo $0 \leq n \leq M$.

Si noti che la finestra di Hanning ha una larghezza reale di M-1, non M+1 perché i due valori estremi definiti dalla (9.1.6) sono anch'essi nulli.

Il primo lobo laterale della funzione di trasferimento window $W_N'(\omega)$ è al di sotto di 31 dB rispetto all'ampiezza del lobo principale e la larghezza del lobo principale è di $8\pi/M$ (figura 7.8).

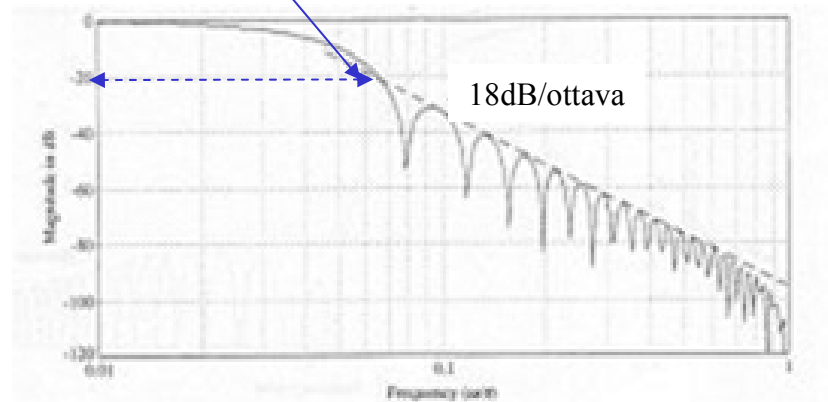


Figura 7.8 Ampiezza della trasformata della finestra di Hanning con il picco del lobo laterale di -31dB e pendenza di 18dB/ottava

Ma il primo lobo laterale della finestra laterale sta al di sotto di 13 dB e la larghezza del lobo principale è $4\pi/(M+1)$.

Quando $W_N'(\omega)$ è convoluta con $H_d'(\omega)$ per produrre $H'(\omega)$, il massimo ripple dell'attenuabanda del filtro risultante selettivo in frequenza è al di sotto di circa -44dB dal guadagno passabanda come mostrato in figura 9.4, confrontato con soli -21 dB per la finestra rettangolare

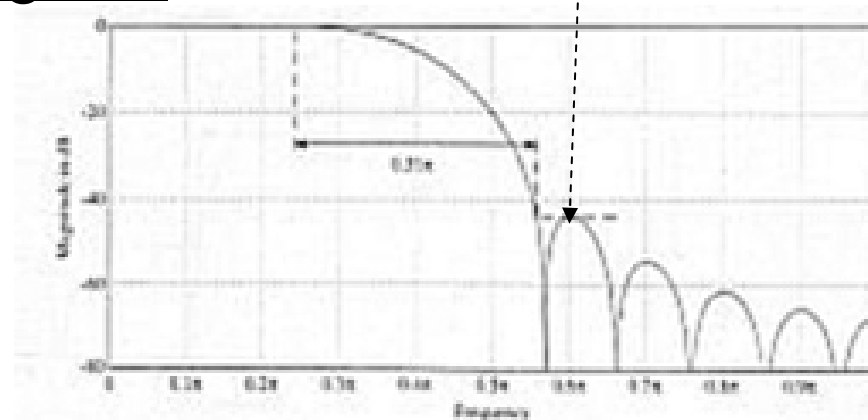


Figura 9.4 Risposta in ampiezza del filtro a fase lineare ottenuto con una finestra di Hanning per $M=20$ e $\omega_d=0.4\pi$.

Quindi, poiché la larghezza della banda di transizione corrisponde grossolanamente alla larghezza del lobo principale di $W_N'(\omega)$, essa è più del doppio di quella risultante dalla finestra rettangolare.

Hamming window

La Hamming window è data da

$$w_M = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (9.1.7)$$

che corrisponde al coseno traslato verso l'alto con pesi differenti per i termini della costante e del coseno. Si noti che la finestra di Hamming non tende a zero nei valori finali, ma a 0.80.

La trasformata $W_M'(\omega)$ è mostrata in fig.7.9, da essa appare che il lobo laterale di picco è ora il terzo e non il primo, ed è al di sotto di circa -41dB dal livello del lobo principale.

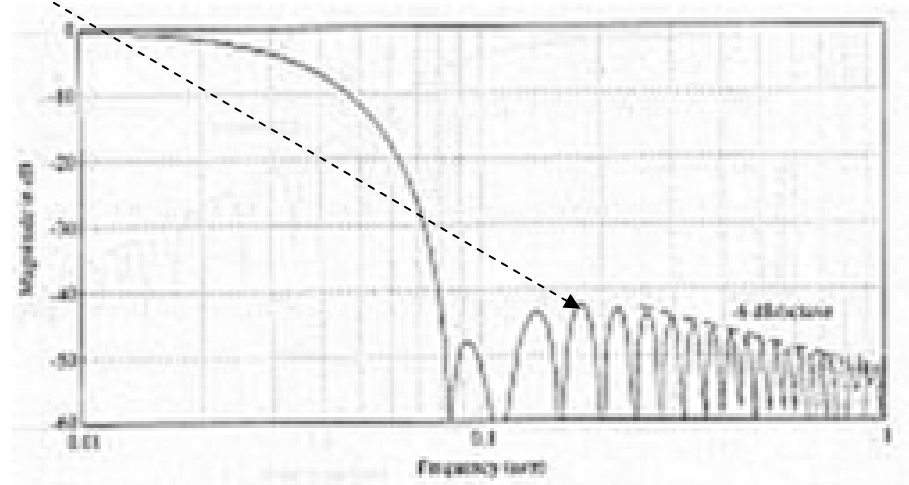


Figura 7.9 Ampiezza della trasformata di Hamming $W'_M(\omega)$, con il picco del lobo laterale di -41dB e la pendenza di 6dB / ottava.

La larghezza del lobo principale è comunque circa la stessa di quella della finestra di Hanning.

La massima attenuazione di stop-banda per il filtro selettivo in frequenza progettato attraverso la finestra di Hamming è approssimativamente di 53 dB inferiore al guadagno passa-banda, come visto in figura 9.5.

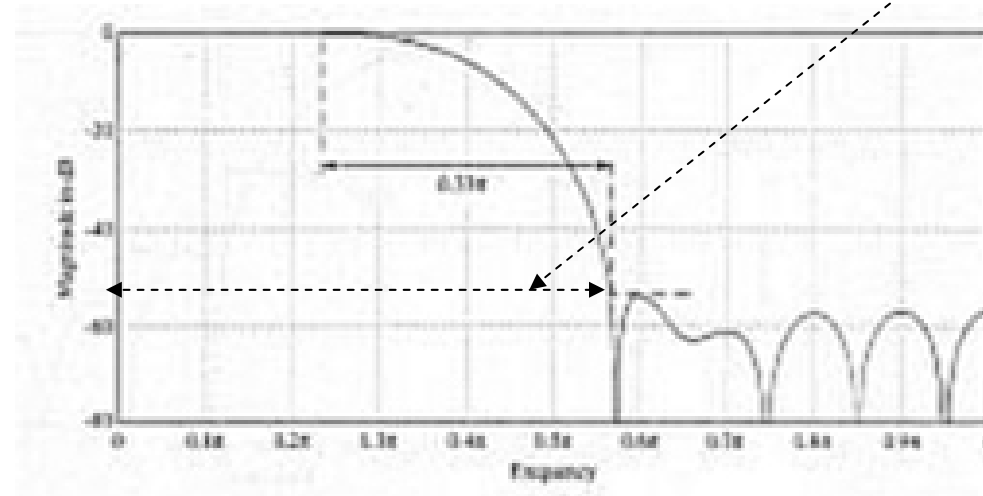


Figura 9.5 Risposta di ampiezza del filtro a fase lineare ottenuto con la finestra di Hamming per $M=20$ e $\omega_d=0.4\pi$.

Quindi, poiché le larghezze di transizione risultanti dalla finestra di Hamming e di Hanning sono circa le stesse, la finestra di Hamming è generalmente più appropriata per il modello del filtro FIR.

Nel paragrafo 7.3 si nota che si verifica l'opposto per l'analisi spettrale. La finestra di Hanning è più appropriata perché i lobi laterali di $W_N'(\omega)$ decrescono ad una velocità di 18dB/ottava, mentre $W_M'(\omega)$ decresce solo di 6dB/ottava.

Blackman window

Un lobo laterale pari più basso si ottiene con una finestra di Blackman:

$$\omega_B(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (9.1.8)$$

La larghezza del lobo principale è di $12\pi/M$, che è 50% più largo delle finestre di Hanning e di Hamming.

$Wb'(\omega)$ è mostrata in fig. 7.10 e un filtro risultante in figura 9.6.

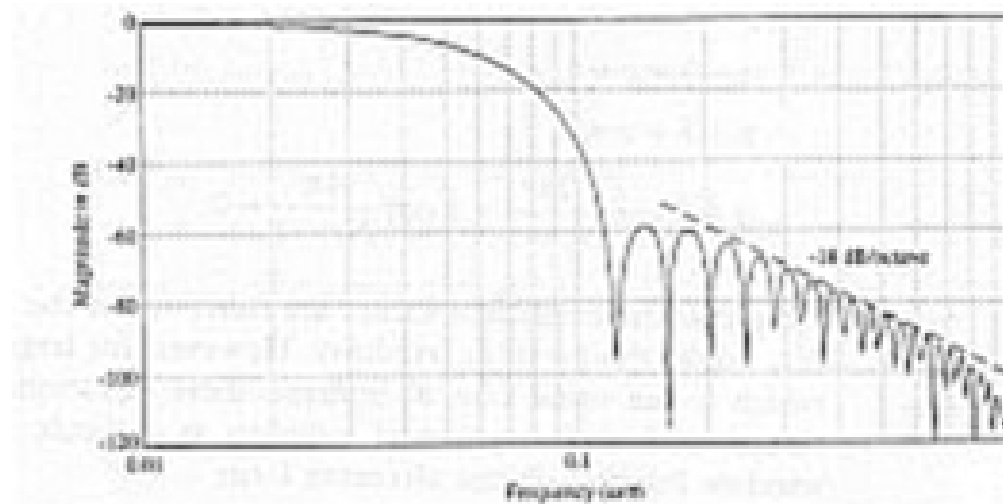


Figura 7.10 Ampiezza della trasformata della finestra di Blackman , con il picco del lobo laterale di -57 dB e la pendenza di 18db/ottava .

- Il massimo lobo laterale per questa finestra è al disotto di -57 dB, mentre
- la massima ondulazione (ripple) di stop-banda per il filtro risultante FIR è al di sotto di -74dB .

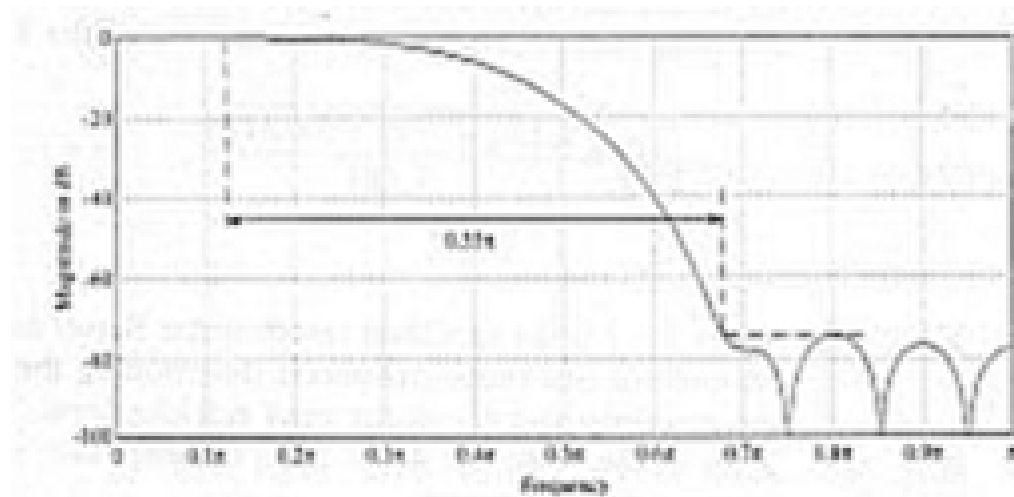


Figura 9.6 Ampiezza della risposta del filtro a fase lineare ottenuta con una finestra di Blackman per $M=20$ e $\omega_d=0.4\pi$.

Le caratteristiche salienti delle finestre rettangolari Hanning, Hamming e Blackman sono riassunte nella tabella 1, che fornisce una stima più accurata della larghezza di banda di transizione per modelli risultanti dei filtri FIR.

Table 1. Window Parameters, Including Peak Sidelobe Level of the Window Transform Itself, and Approximate Transition Bandwidth and Maximum Stopband Ripple (Minimum Attenuation) for the Corresponding Filter Designs

Window	Peak Sidelobe Level (dB)	Transition Bandwidth ($2\pi/M$)	Max. Stopband Ripple (dB)
Rectangular	-13 (0.2239)	0.9	-21 (0.0891)
Hanning	-31 (0.0282)	3.1	-44 (0.0063)
Hamming	-41 (0.0089)	3.3	-53 (0.0022)
Blackman	-57 (0.0014)	5.5	-74 (0.00019)

Queste larghezze di banda di transizione sono definite per il filtro base passa-basso assumendo che:

- l'intervallo di non attenuazione finisca in corrispondenza della frequenza (ω_c), dove la risposta di ampiezza è minore di $1-\delta_1$ (vedi fig. 9.13 e 9.14) e che
- il campo di valori di frequenza per i quali si ha l'attenuazione, inizia in corrispondenza del primo valore di frequenza (ω_r), dove la risposta è minore di δ_2 .

Una stima grossolana della larghezza di banda di transizione ΔB_t in funzione della larghezza del lobo principale della finestra è data dalla relazione: $\Delta B_t = 2k\pi/M$, dove per la finestra rettangolare $k=2$, per le finestre di Hanning e Hamming $k=4$, e per la finestra di Blackman $k=6$. ΔB_t corrisponde alla spaziatura tra l'ultimo picco $(1+\delta_1)$ nella banda passante e il primo picco nella attenuabanda δ_2 .

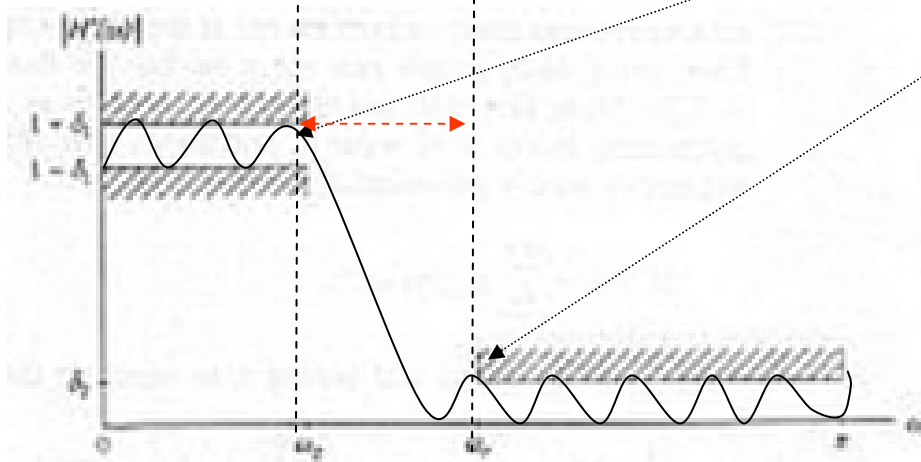


Figura 9.13 Specifiche della ampiezza della risposta modificabili in sede di dimensionamento dei filtri FIR a fase lineare.

Finestra di Kaiser

Una famiglia molto versatile di “funzioni finestra” è stata sviluppata da Kaiser.

Queste finestre soddisfano quasi completamente le condizioni di ottimo poiché hanno una energia più grande nel lobo principale, per un dato livello di picco del lobo laterale.

Esse sono strettamente legate alle funzioni β (*prolate spheroidal wavefunction*), che sono funzioni continue ottime e limitate nel tempo.

Le finestre di Kaiser sono esprimibili in funzione delle β con:

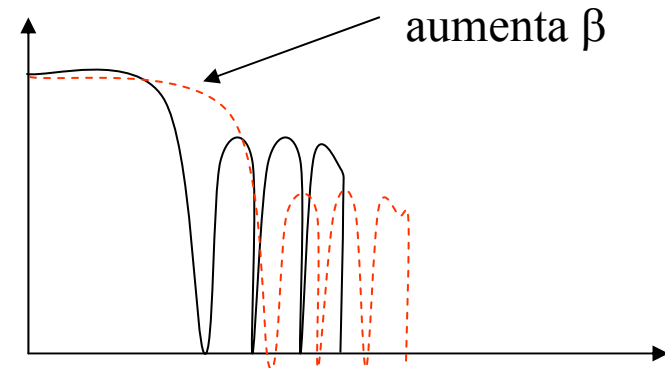
$$\omega_K(n) = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - (1 - 2n/M)^2} \right]}{I_0[\beta]} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (9.1.9)$$

Finestra di Kaiser

$$\omega_K(n) = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - (1 - 2n/M)^2} \right]}{I_0[\beta]} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (9.1.9)$$

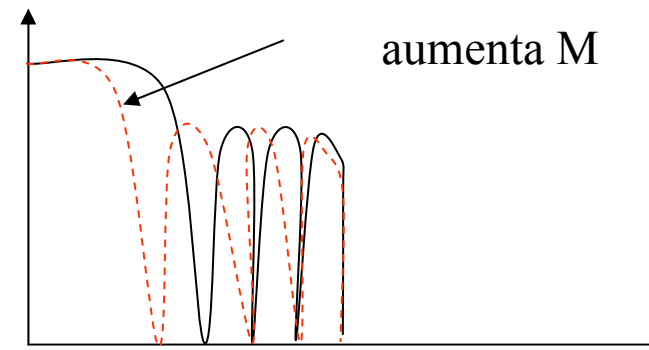
Se β aumenta:

- si allarga il lobo principale
- si abbassano i lobi laterali



Se M aumenta :

- si stringe il lobo principale
- non varia l'altezza dei lobi laterali



Dove $I_0[]$ è la funzione di Bessel modificata di ordine zero del primo tipo e β è il parametro di forma, definito attraverso un compromesso (trade off) tra la larghezza del lobo principale desiderata e il livello del picco del lobo laterale desiderato.

Valori tipici di β sono: $4 < \beta < 9$, I_0 è più facilmente valutabile dalla sua espansione in serie di potenze:

$$I_0[x] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^m}{m!} \right]^2, \quad (9.1.10)$$

e per molte applicazioni sono sufficienti i primi 15 termini.

L'effetto di β sulle varie caratteristiche di interesse della finestra che si vuole realizzare, è illustrato nella tabella 2, dovuta a Kaiser.

Table 2. Parameter Values for the Kaiser Window Transform and Corresponding Filter Designs

β Parameter	Peak Sidelobe Level (dB)	Transition Bandwidth ($2\pi/M$)	Max. Stopband Ripple (dB)
2.0	-19	1.5	-29
3.0	-24	2.0	-37
4.0	-30	2.6	-45
5.0	-37	3.2	-54
6.0	-44	3.8	-63
7.0	-51	4.5	-72
8.0	-59	5.1	-81
9.0	-67	5.7	-90
10.0	-74	6.4	-99

Sono state derivate da Kaiser anche le formule dei modelli empirici per i parametri β e M , dati i valori desiderati per la larghezza della banda di transizione ω e il livello del picco del lobo laterale . Riferendosi alla figura 8.1 assumiamo che la larghezza della banda di transizione normalizzata sia definita da:

$$\Delta\omega = (\omega_r - \omega_c) / 2\pi \quad (9.1.11)$$

e l'attenuazione della stop-banda sia scritta come:

$$A = -20 \log_{10} \delta_2 \quad (9.1.12)$$

(Naturalmente per filtri progettati attraverso tecniche di funzione window, $\delta_1 \approx \delta_2$, come definito in fig.9.13). Quindi l'ordine M del filtro FIR, è strettamente approssimato da:

$$M \approx \frac{A - 7.95}{14.36 \Delta \omega} \quad (9.1.13)$$

Il parametro di forma β può essere determinato dalle relazioni:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & A \geq 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \end{cases} \quad (9.1.14)$$

che sono più precise dell'1% sul range utilizzato per A.