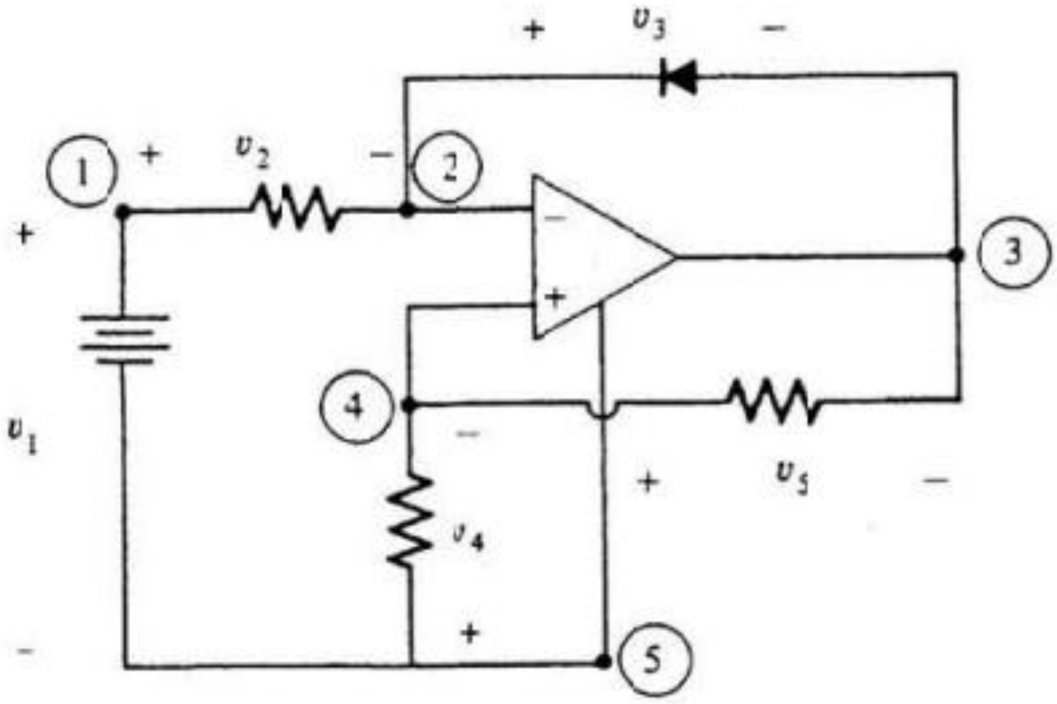


1-a) Şekilde verilen devreye ilişkin grafı çiziniz.

b) 4 düğümden oluşan 10 tane kapalı düğüm dizisi belirleyiniz ve KGY yazınız.

c) 7 tane Gauss yüzeyi belirleyiniz ve KAY yazınız.

d) 10 tane çevre seçip KGY yazınız.

e) 7 tane kesitleme seçip KAY yazınız.

f) Ağaç seçip ağacın belirlediği temel kesitleme ve temel çevreler için KAY ve KGY yazınız.

g) 4 Düğüm için KAY yazınız.

3. Kirchhoff'un Akım Yasası (KAY)

Tüm toplu parametreli devrelerde, her t anında herhangi bir kesitlemeye ilişkin akımların cebirsel toplamı sıfırdır.

Teorem:

Gauss Yüzeyleri için KAY $\Leftrightarrow$ Düğümler için KAY $\Leftrightarrow$ Kesitlemeler için KAY

Tanıt: (1) $\Rightarrow$ (2)

Gauss yüzeylerini düğümleri içerecek şekilde seç $\Rightarrow$ Düğümler için KAY

(2) $\Rightarrow$ (3) Her kesitleme düğümleri iki gruba ayırıyor.

Gruplardaki her düğüm için yazılan KAY'ları toplanırsa kesitleme için yazılan denklem elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Her kesitlemeye ilişkin yazılan KAY'sına ilişkin denklem kesitlemeye karşı düşen Gauss yüzeyine ilişkin yazılan KAY'sına ilişkin denkleme denk gelmektedir . ■

n_d düğümlü bir grafta n_d düğüm için yazılan KAY 'sına ilişkin denklemler lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturur mu?

Hatırlatma

Lineer Bağımsız Denklem Takımı

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_{i_1} x_1 + \alpha_{i_2} x_2 + \alpha_{i_3} x_3 + \dots + \alpha_{i_n} x_n = 0 \qquad i = 1, \dots m$$

$f_i(.)$ 'lerin belirlediği ..n... bilinmiyenli ...m...denklemin lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturduğunu nasıl anlarız?

$$\sum_{i=1}^{m} k_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ için sağlayan sıfırdan farklı k_i'ler varsa bu denklem takımı lineer bağımlıdır.

m denklem lineer bağımlı ise bazı denklemler diğerleri cinsinden ifade edilir.

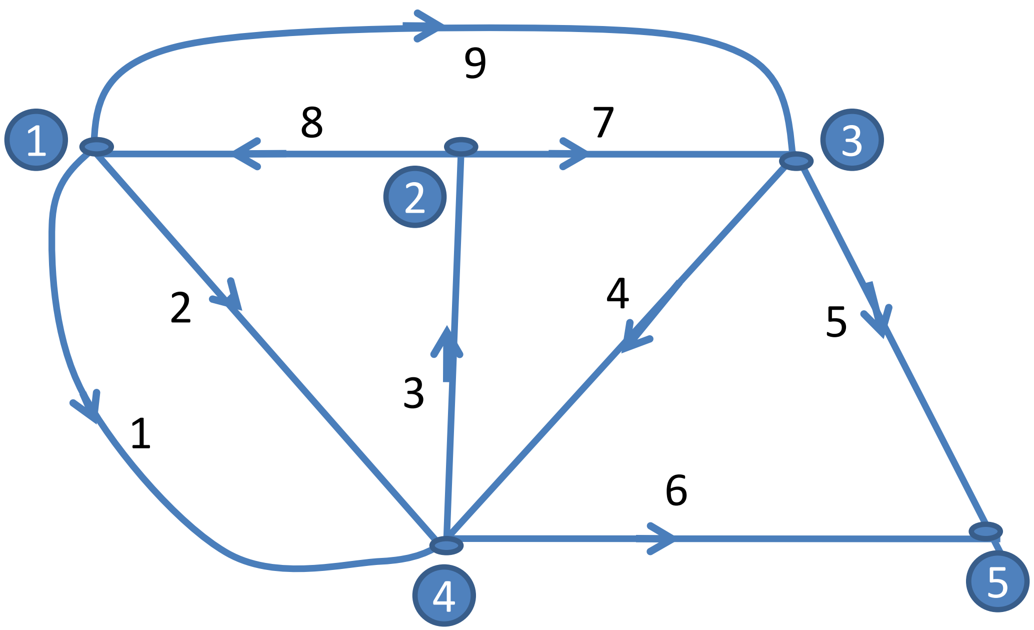
Örnek:
$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

Lineer bağımsızlar mı?

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 18x_4 = 0$$

n_d düğümlü bir grafta n_d düğüm için yazılan KAY 'sına ilişkin denklemler lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturur mu?



n bilinmiyenli
m denklem
var.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} \overbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix}}^{i} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\emptyset}$$

Lineer bağımsız denklem takımı oluşturup oluşturmadıklarını nasıl anlarız?

Boyutu ne?

...... bilinmiyenli ....denklem var ise lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturup oluşturmadıklarını nasıl anlarız?

rankı inceleriz sıfır satır oluşturacak şekilde satır/sütun işlemleri yaparız

A_a 'nın rankı kaç?

$$\begin{array}{c} 2.d \\ 3.d \\ 4.d \\ 5.d \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Boyutu ne?

Rankı ne?

$$
\begin{array}{c} 1.d \\ 2.d \\ 3.d \\ 5.d \end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}}_{A}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Boyutu ne?

Rankı ne?

İndirgenmiş düğüm matrisi A

$Ai=0$

Teorem: n_d düğümlü birleşik bir grafta n_d-1 düğüm için yazılan KAY'ları lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturur.

Tanıt: n_d -1 tane denklemden k tanesi lineer bağımlı olsun:

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i f_i(i_1, i_2, \ldots, i_{ne}) = 0 \qquad \forall i_1, i_2, \ldots, i_{ne}$$

$$\gamma_i \neq 0, i = 1,2,\ldots,k$$

Birleşik graf → k düğüm ve n_d –k düğümü ayrı iki grup olarak düşünelim. Bu düğüm gruplarını birleştiren bir graf elemanı mutlaka vardır.

→ Bu graf elemanına ilişkin akım k denklemde sadece bir defa gözükecektir.

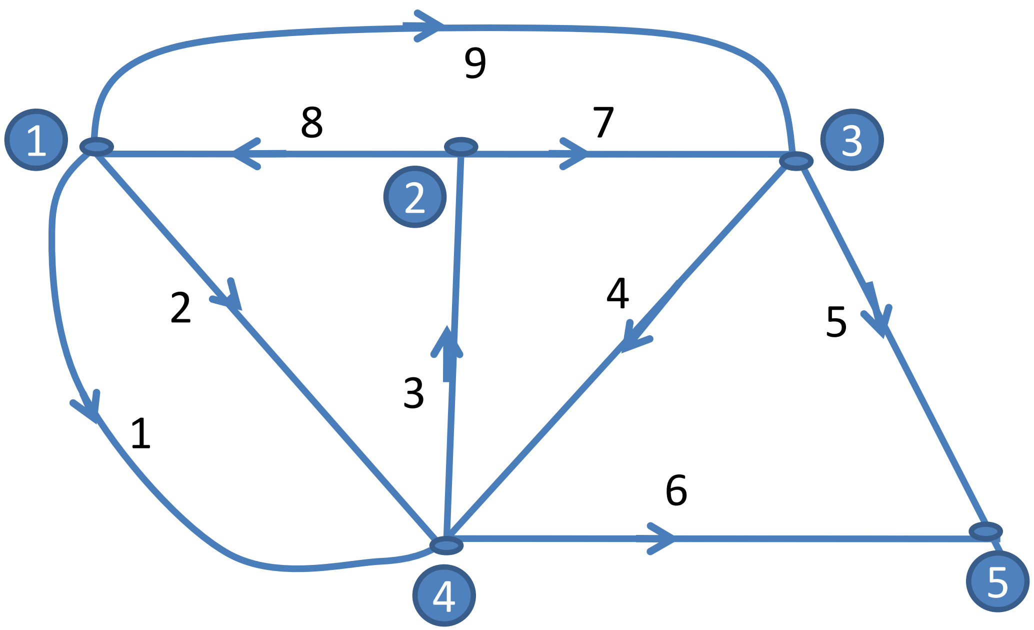
→ Yazılan k denklemde bu akım diğer akımlar cinsinden ifade edilemez.

→ k denklem lineer bağımlı olamaz.

Bu gruba bir düğüm bir denklem daha katıp aynısını yapsak....

→ n_d-1 denklem lineer bağımlı olamaz. ■

KGY 'ları ile elde ettiğimiz denklemler lineer bağımsız bir denklem takımı oluşturuyor mu?



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix}$$

M

Matrise dikkatle bakın !!!!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = M$$

Teorem: (Tellegen Teoremi)

n_e elemanlı bir G grafında $[i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_{ne}]^T = i$ KAY'sını sağlayan bir küme, $[v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_{ne}]^T = v$ KGY'sını sağlayan bir küme olsun $\rightarrow v^T i = 0$

Tanıt: Referans düğümünü belirle ve A matrisini tanımla

$$Ai = 0$$

$$A^T e = v$$

$$\begin{aligned} v^T i &= (A^T e)^T i \\ &= e^T (A^T)^T i \\ &= e^T Ai = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tellegen Teoremi 'ne dikkat edersek:

v ve i birbirleriyle ilgili değil sadece G grafı için KGY ve KAY sağlamamları Yeterli. G için v' ve v'' KGY, i' ve i'' KAY'yi sağlıyorsa →

$$v'^T i' = 0$$

$$v'^T i'' = 0$$

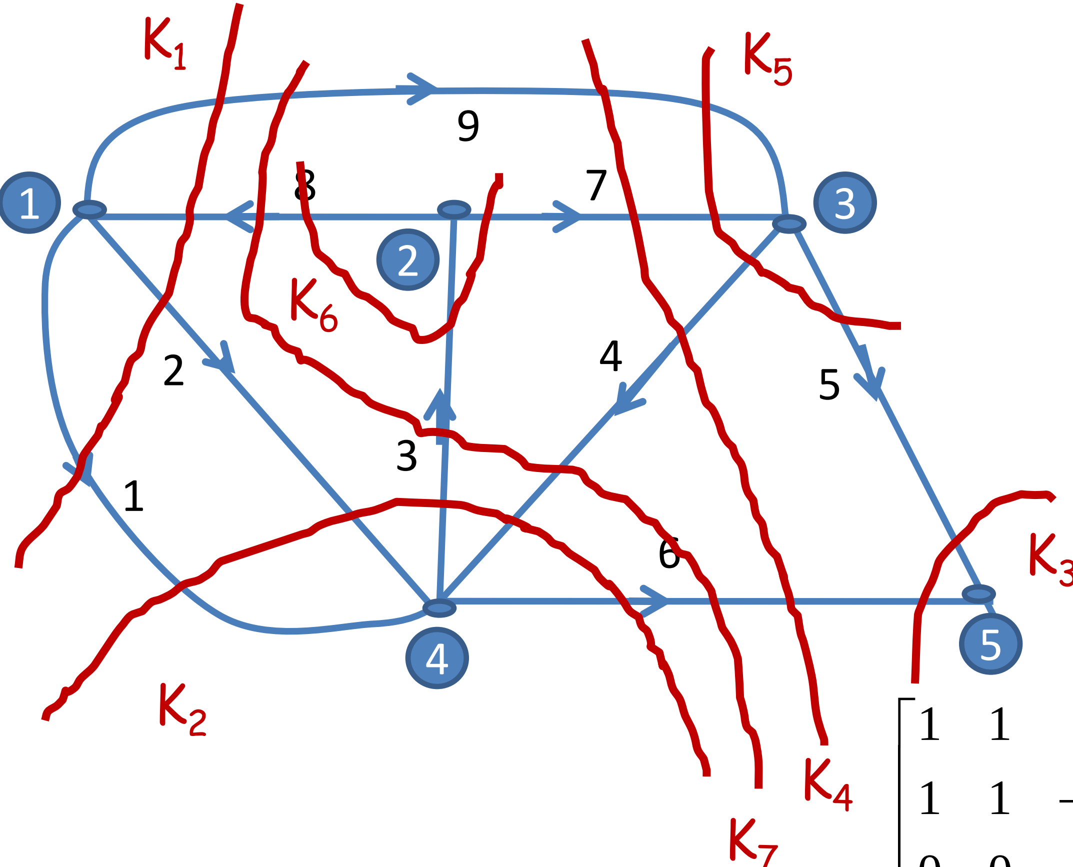
$$v''^T i' = 0$$

$$v''^T i'' = 0$$

→ Tellegen Teoremi sadece devrenin topolojisine bağlıdır

Lineer bağımsız akım ve gerilim denklemlerini elde etmenin başka yolu var mı?

KAY'sı ve KGY'sını başka nerede yazdık?



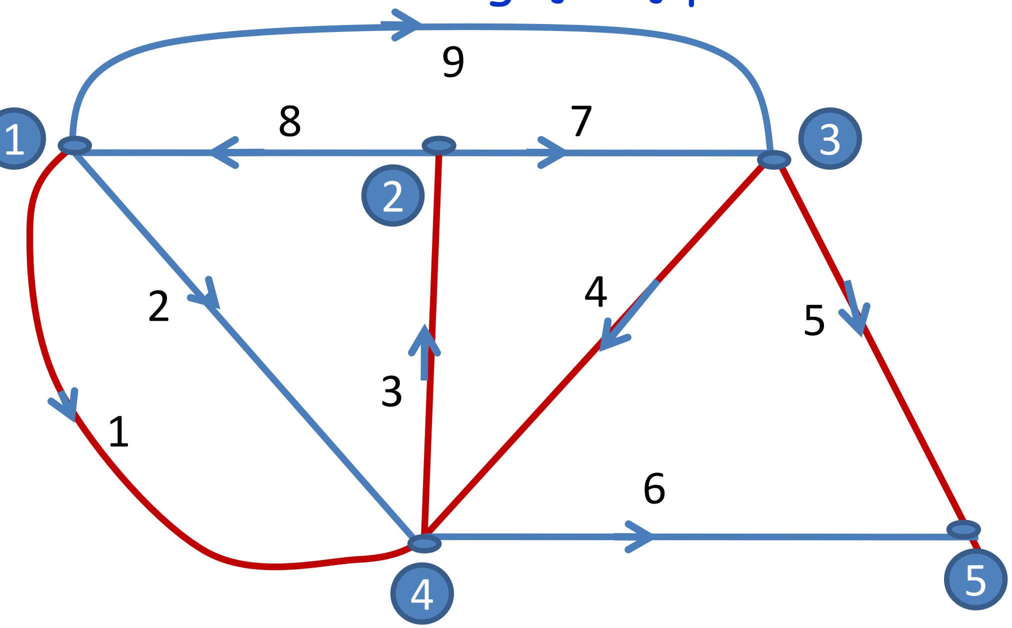
KAY'den başlayalım

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_a} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_2 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada aslında kaç tane lineer bağımsız denklem var?

Bu sayı aynı zamanda neye eşit?

Bir ağaç seçip temel kesitlemeleri belirleyelim



Ağaç: {1,3,4,5}

temel kesitlemeler

TK_1: {1,2,8,9}

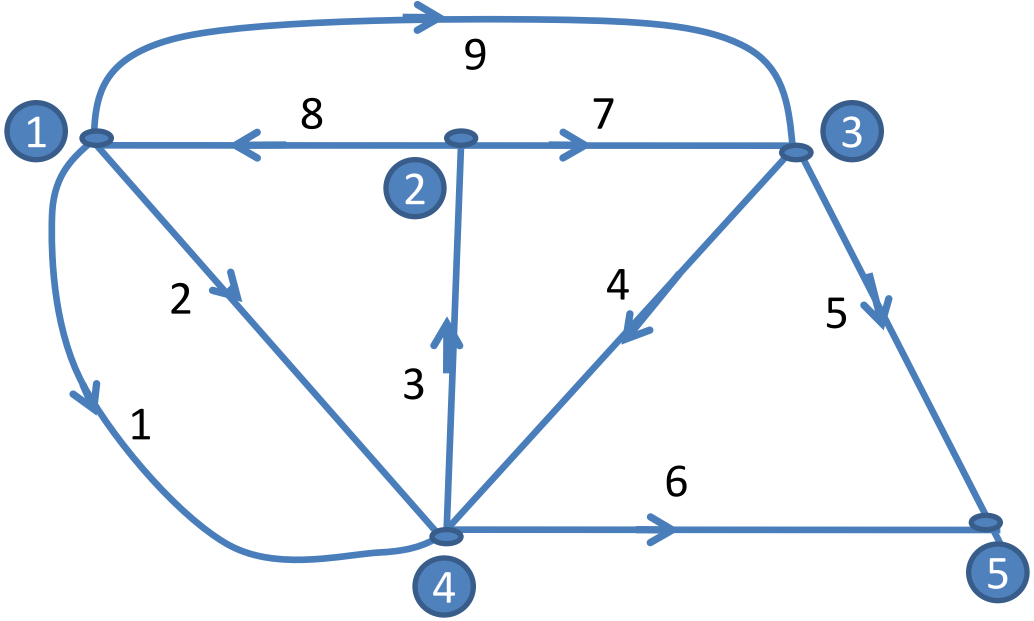
TK_2: {3,7,8}

TK_3: {4,6,7,9}

TK_4: {5,6}

$$Qi=0$$

$$\underbrace{\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0&0&-1&1\\0&0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0&-1\\0&1&0&0&0\end{matrix}}_{Q_L}\right]}_{Q}\begin{bmatrix}i_1\\i_3\\i_4\\i_5\\i_2\\i_6\\i_7\\i_8\\i_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$



Şimdi de KGY'sına bakalım

Çevreleri belirleyelim

Ç$_1$: {1,2}

Ç$_2$: {2,3,8}

Ç$_3$: {3,4,7}

Ç$_4$: {4,5,6}

Ç$_5$: {7,8,9}

Ç$_6$: {1,3,8}

Ç$_7$: {1,4,7,8}

Ç$_8$: {1,5,6,7,8}

Ç$_9$: {2,4,9}

Ç$_{10}$: {2,5,6,9}

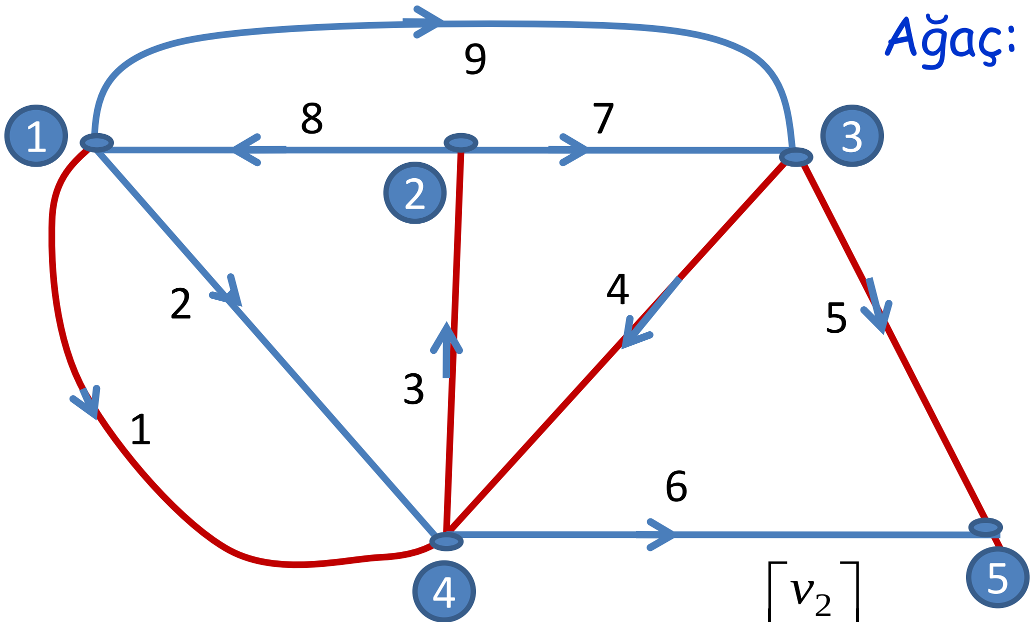
Ç$_{11}$: {2,5,6,9}

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Burada aslında
kaç tane lineer
bağımsız denklem var?

5

Şimdi de temel çevreleri belirleyelim



Ağaç: {1,3,4,5} kirişler: {2,6,7,8,9}

temel çevreler

$Ç_1$: {1,2} $Ç_3$: {3,4,7}

$Ç_2$: {4,5,6} $Ç_4$: {1,3,8}

$Ç_5$: {1,4,9}

$$\underbrace{\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}-1&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\end{matrix}}_{B_t}\right]}_{B}\begin{bmatrix}v_2\\v_6\\v_7\\v_8\\v_9\\v_1\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$Bv=0$$