

Ayrık Matematik

Tanıtılma

H. Turgut Uyar Ayşegül Gençata Yayımlı Emre Harmancı

2001-2012

1 / 42

Lisans



©2001-2012 T. Uyar, A. Yayımlı, E. Harmancı

You are free:

- ▶ to Share — to copy, distribute and transmit the work
- ▶ to Remix — to adapt the work

Under the following conditions:

- ▶ Attribution — You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
- ▶ Noncommercial — You may not use this work for commercial purposes.
- ▶ Share Alike — If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

Legal code (the full license):

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

2 / 42

Konular

Temel Teknikler

Giriş
Doğrudan Tanıt
Çelişkiyle Tanıt
Eşdeğerlilik Tanıtları

Tümevarım

Giriş
Güçlü Tümevarım

3 / 42

Kaba Kuvvet Yöntemi

- ▶ olası bütün durumları teker teker incelemek

Teorem

$\{2, 4, 6, \dots, 26\}$ kümesinden seçilecek her sayı, en fazla 3 tamkarenin toplamı şeklinde yazılabilir.

Tanıt.

$2 = 1+1$	$10 = 9+1$	$20 = 16+4$
$4 = 4$	$12 = 4+4+4$	$22 = 9+9+4$
$6 = 4+1+1$	$14 = 9+4+1$	$24 = 16+4+4$
$8 = 4+4$	$16 = 16$	$26 = 25+1$
	$18 = 9+9$	

□

4 / 42

Temel Kurallar

Evrensel Özelleştirme (Universal Specification - US)

$\forall x \ p(x) \Rightarrow p(a)$

Evrensel Genelleştirme (Universal Generalization - UG)

rasgele seçilen bir a için $p(a) \Rightarrow \forall x \ p(x)$

5 / 42

Evrensel Özelleştirme Örneği

Örnek

Bütün insanlar ölümlüdür. Sokrates bir insandır.
O halde Sokrates ölümlüdür.

- ▶ \mathcal{U} : bütün insanlar
- ▶ $p(x)$: x ölümlüdür
- ▶ $\forall x \ p(x)$: Bütün insanlar ölümlüdür.
- ▶ a : Sokrates, $a \in \mathcal{U}$: Sokrates bir insandır.
- ▶ o halde, $p(a)$: Sokrates ölümlüdür.

6 / 42

Evrensel Özelleştirme Örneği

Örnek

$\forall x [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)]$	1. $\forall x [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)]$	A
$p(m)$	2. $p(m)$	A
$\therefore \neg s(m)$	3. $j(m) \vee s(m) \rightarrow \neg p(m)$	$US : 1$
	4. $\neg(j(m) \vee s(m))$	$MT : 3, 2$
	5. $\neg j(m) \wedge \neg s(m)$	$DM : 4$
	6. $\neg s(m)$	$AndE : 5$

7 / 42

Evrensel Genelleştirme Örneği

Örnek

$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$	1. $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$	A
$\forall x [q(x) \rightarrow r(x)]$	2. $p(c) \rightarrow q(c)$	$US : 1$
$\therefore \forall x [p(x) \rightarrow r(x)]$	3. $\forall x [q(x) \rightarrow r(x)]$	A
	4. $q(c) \rightarrow r(c)$	$US : 3$
	5. $p(c) \rightarrow r(c)$	$HS : 2, 4$
	6. $\forall x [p(x) \rightarrow r(x)]$	$UG : 5$

8 / 42

Boş Tanıt

boş tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için P 'nin yanlış olduğunu göstermek

9 / 42

Boş Tanıt Örneği

Teorem

$\forall S [\emptyset \subseteq S]$

Tanıt.

$\emptyset \subseteq S \Leftrightarrow \forall x [x \in \emptyset \rightarrow x \in S]$

$\forall x [x \notin \emptyset]$

□

10 / 42

Değersiz Tanıt

değersiz tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için Q 'nin doğru olduğunu göstermek

11 / 42

Değersiz Tanıt Örneği

Teorem

$\forall x \in \mathbb{R} [x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0]$

Tanıt.

$\forall x \in \mathbb{R} [x^2 \geq 0]$

□

12 / 42

Doğrudan Tanıt

doğrudan tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için $P \vdash Q$ olduğunu göstermek

13 / 42

Doğrudan Tanıt Örneği

Teorem

$\forall a \in \mathbb{Z} [3|(a-2) \Rightarrow 3|(a^2-1)]$

Tanıt.

$$\begin{aligned} 3|(a-2) &\Rightarrow a-2=3k \\ &\Rightarrow a+1=a-2+3=3k+3=3(k+1) \\ &\Rightarrow a^2-1=(a+1)(a-1)=3(k+1)(a-1) \end{aligned}$$

□

14 / 42

Dolaylı Tanıt

dolaylı tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için $\neg Q \vdash \neg P$ olduğunu göstermek

15 / 42

Dolaylı Tanıt Örneği

Teorem

$\forall x, y \in \mathbb{N} [x \cdot y > 25 \Rightarrow (x > 5) \vee (y > 5)]$

Tanıt.

- ▶ $\neg Q \Leftrightarrow (0 \leq x \leq 5) \wedge (0 \leq y \leq 5)$
- ▶ $0 = 0 \cdot 0 \leq x \cdot y \leq 5 \cdot 5 = 25$

□

16 / 42

Dolaylı Tanıt Örneği

Teorem

$(\exists k, a, b, k \in \mathbb{N} [ab = 2k]) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N} [a = 2i]) \vee (\exists j \in \mathbb{N} [b = 2j])$

Tanıt.

- ▶ $\neg Q \Leftrightarrow (\neg \exists i \in \mathbb{N} [a = 2i]) \wedge (\neg \exists j \in \mathbb{N} [b = 2j])$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N} [a = 2x + 1]) \wedge (\exists y \in \mathbb{N} [b = 2y + 1]) \\ &\Rightarrow ab = (2x + 1)(2y + 1) \\ &\Rightarrow ab = 4xy + 2(x + y) + 1 \\ &\Rightarrow \neg(\exists a, b, k \in \mathbb{N} [ab = 2k]) \end{aligned}$$

□

17 / 42

Çelişkiyle Tanıt

çelişkiyle tanıt

P tanıtı için $\neg P \vdash Q \wedge \neg Q$ olduğunu göstermek

18 / 42

Çelişkiyle Tanıt Örneği

Teorem

En büyük asal sayı yoktur.

Tanıt.

- ▶ $\neg P$: En büyük asal sayı vardır.
- ▶ Q : En büyük asal sayı S .
- ▶ asal sayılar: $2, 3, 5, 7, 11, \dots, S$
- ▶ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot S + 1$ sayısı,
2.. S aralığındaki hiçbir asal sayıya kalansız bölünmez
 1. ya kendisi asaldır: $\neg Q$
 2. ya da S 'den büyük bir asal sayıya bölünür: $\neg Q$

□

19 / 42

Çelişkiyle Tanıt Örneği

Teorem

$\neg \exists a, b \in \mathbb{Z}^+ [\sqrt{2} = \frac{a}{b}]$

Tanıt.

- ▶ $\neg P$: $\exists a, b \in \mathbb{Z}^+ [\sqrt{2} = \frac{a}{b}]$
- ▶ Q : $\text{obeb}(a, b) = 1$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{Z}^+ [a^2 = 2i]$$

$$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z}^+ [a = 2j]$$

$$\Rightarrow 4j^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2j^2$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+ [b^2 = 2k]$$

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}^+ [b = 2l]$$

$$\Rightarrow \text{obeb}(a, b) \geq 2 : \neg Q$$

□

20 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtları

- ▶ $P \Leftrightarrow Q$ tanıtı için hem $P \Rightarrow Q$, hem de $Q \Rightarrow P$ tanıtlanmalı
- ▶ $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P_n$ tanıtı için bir yöntem:
 $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$

21 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$a, b, n, q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathbb{Z}^+$

$a = q_1 \cdot n + r_1$

$b = q_2 \cdot n + r_2$

$r_1 = r_2 \Leftrightarrow n|(a - b)$

22 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$$r_1 = r_2 \Rightarrow n|(a - b).$$

$$n|(a - b) \Rightarrow r_1 = r_2.$$

$$\begin{aligned} a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\ &\quad - (q_2 \cdot n + r_2) \\ &= (q_1 - q_2) \cdot n \\ &\quad + (r_1 - r_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 = r_2 &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\ &\Rightarrow a - b = (q_1 - q_2) \cdot n \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\ &\quad - (q_2 \cdot n + r_2) \\ &= (q_1 - q_2) \cdot n \\ &\quad + (r_1 - r_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n|(a - b) &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = r_2 \end{aligned}$$

□

23 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$$\begin{aligned} A &\subseteq B \\ \Leftrightarrow A \cup B &= B \\ \Leftrightarrow A \cap B &= A \\ \Leftrightarrow \overline{B} &\subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

24 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A \cup B$$

$$B \subseteq A \cup B$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$A \subseteq B \Rightarrow x \in B$$

$$\Rightarrow A \cup B \subseteq B \quad \square$$

25 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A.$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B$$

$$A \cap B \subseteq A$$

$$y \in A \Rightarrow y \in A \cup B$$

$$A \cup B = B \Rightarrow y \in B$$

$$\Rightarrow y \in A \cap B$$

$$\Rightarrow A \subseteq A \cap B \quad \square$$

26 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$$A \cap B = A \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}.$$

$$z \in \bar{B} \Rightarrow z \notin B$$

$$\Rightarrow z \notin A \cap B$$

$$A \cap B = A \Rightarrow z \notin A$$

$$\Rightarrow z \in \bar{A}$$

$$\Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A} \quad \square$$

□

27 / 42

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$$\bar{B} \subseteq \bar{A} \Rightarrow A \subseteq B.$$

$$\neg(A \subseteq B) \Rightarrow \exists w [w \in A \wedge w \notin B]$$

$$\Rightarrow \exists w [w \notin \bar{A} \wedge w \in \bar{B}]$$

$$\Rightarrow \neg(\bar{B} \subseteq \bar{A})$$

□

28 / 42

Tümevarım

Tanım

$S(n)$: $n \in \mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanan bir yüklem

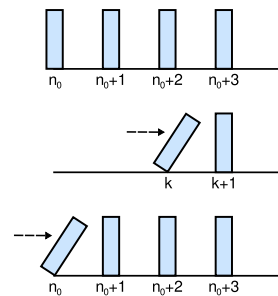
$$S(n_0) \wedge (\forall k \geq n_0 [S(k) \Rightarrow S(k+1)]) \Rightarrow \forall n \geq n_0 S(n)$$

► $S(n_0)$: *taban adımı*

► $\forall k \geq n_0 [S(k) \Rightarrow S(k+1)]$: *tümevarım adımı*

29 / 42

Tümevarım



30 / 42

Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2]$$

Tanıt.

- ▶ $n = 1$: $1 = 1^2$
- ▶ $n = k$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ kabul edelim
- ▶ $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

□

31 / 42

Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 4 [2^n < n!]$$

Tanıt.

- ▶ $n = 4$: $2^4 = 16 < 24 = 4!$
- ▶ $n = k$: $2^k < k!$ kabul edelim
- ▶ $n = k + 1$:
 $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$

□

32 / 42

Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 14 \exists i, j \in \mathbb{N} [n = 3i + 8j]$$

Tanıt.

- ▶ $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
- ▶ $n = k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- ▶ $n = k + 1$:
 - ▶ $k = 3i + 8j, j > 0 \Rightarrow k + 1 = k - 8 + 3 \cdot 3$
 $\Rightarrow k + 1 = 3(i + 3) + 8(j - 1)$
 - ▶ $k = 3i + 8j, j = 0, i \geq 5 \Rightarrow k + 1 = k - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 8$
 $\Rightarrow k + 1 = 3(i - 5) + 8(j + 2)$

□

33 / 42

Güçlü Tümevarım

Tanım

$$S(n_0) \wedge (\forall k \geq n_0 [(\forall i \leq k S(i)) \Rightarrow S(k + 1)]) \Rightarrow \forall n \geq n_0 S(n)$$

34 / 42

Güçlü Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$$

n asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir

Tanıt.

- ▶ $n = 2$: $2 = 2$
- ▶ $\forall i \leq k$ için doğru kabul edelim
- ▶ $n = k + 1$:
 1. asalsa: $n = n$
 2. asal değilse: $n = u \cdot v$
 $u < k \wedge v < k \Rightarrow u$ ve v sayılarının her biri asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir

□

35 / 42

Güçlü Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 14 \exists i, j \in \mathbb{N} [n = 3i + 8j]$$

Tanıt.

- ▶ $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
- ▶ $n = 15$: $15 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 0$
- ▶ $n = 16$: $16 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 2$
- ▶ $n \leq k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- ▶ $n = k + 1$: $k + 1 = (k - 2) + 3$

□

36 / 42

Hatalı Tümevarım Örneği

Teorem

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ [1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2+n+2}{2}]$$

taban adımı geçersiz

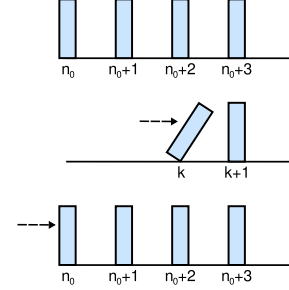
- $n = k$: $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k^2+k+2}{2}$ kabul edelim
- $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2}{2} + \frac{2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 4}{2} = \frac{(k + 1)^2 + (k + 1) + 2}{2} \end{aligned}$$

- $n = 1$: $1 \neq \frac{1^2+1+2}{2} = 2$

37 / 42

Hatalı Tümevarım Örnekleri



38 / 42

Hatalı Tümevarım Örnekleri

Teorem

Bütün atlar aynı renktir.

$A(n)$: n atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ A(n)$$

39 / 42

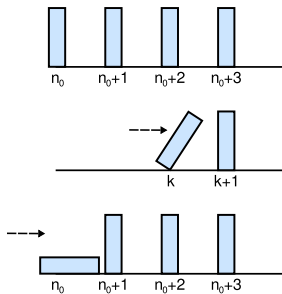
Hatalı Tümevarım Örnekleri

n üzerinden hatalı tümevarım

- $n = 1$: $A(1)$
1 atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $n = k$: $A(k)$ doğru kabul edelim
 k atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $A(k + 1) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cup \{a_2, a_3, \dots, a_{k+1}\}$
 - $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renk (a_2)
 - $\{a_2, a_3, \dots, a_{k+1}\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renk (a_2)

40 / 42

Hatalı Tümevarım Örnekleri



41 / 42

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 2: Fundamentals of Logic
 - 2.5. Quantifiers, Definitions, and the Proofs of Theorems
- Chapter 4: Properties of Integers: Mathematical Induction
 - 4.1. The Well-Ordering Principle: Mathematical Induction

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

- Chapter 4: Induction

42 / 42