$$AB = \begin{bmatrix} 1.1+3.1 & 1.2+3.3 & 1.4+3.1 \\ 4.1+2.1 & 4.2+2.3 & 4.4+2.1 \\ 5.1+1.1 & 5.2+1.3 & 5.4+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 11 & 7 \\ 6 & 14 & 18 \\ 6 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

$AB = ?$ $2\times\underline{\underline{2}}$ $\underline{\underline{3}}\times 2$ AB olamaz BA çarpım yapılır

İki matrisin çarpımında aşağıdaki üç durum oluşabilir

1) A.B olabilir , BA olmayabilir
Örk: A: 3x2 B: 2x5 AB: 3x5

2) A.B ve B.A olabilir fakat tipleri aynı ~~değildir~~ olmayabilir
Örk: A: 3x2 B: 2x3 AB 3x3
BA 2x2

3) AB ve BA nxn tipinde olabilir. Fakat $AB \neq BA$

örk: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AB \neq BA$

Bir bilinmeyenli bir lineer denklem $ax=b$ formunda yazılır. Burada a, x, b'yi 1×1 tipinde matrisler olarak düşünebiliriz. Şimdi bunu genelliyelim.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

lineer sisteminde katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \quad m\times n$$

bilinmeyenler $\underset{n\times1}{X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}}$ ve $\underset{m\times1}{B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}}$

alırsak,

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times1}{X}=\underset{m\times1}{B}$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$AX = B \implies \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Cebirsel kurallar:

Teorem: α, β skaler ve A, B, C aşağıdaki işlemleri sağlayan uygun matrisler olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $(AB)C = A(BC)$
4) $A(B + C) = AB + AC$
5) $(A + B)C = AC + BC$
6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
9) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$AB \neq BA \qquad A^2 = A \cdot A \qquad A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k\text{-tane}}$

Örk: $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1&4\\2&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&4\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\0&9\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}5&7\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&12\\9&9\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}-1&4\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\5&3\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&12\\9&9\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=A(BC)=ABC$$

Birim Matris

Tanım: $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$ olmak üzere $I=(\delta_{ij})$ $n\times n$ tipinde matrise birim matris denir.

$\left(n=2 \quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad n=3 \quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right.$

$IA=AI=A$

Tanım: $n\times n$ tipinde A matrisi verilsin.

$$AB=BA=I$$

olacak şekilde bir B matrisi varsa A matrisine singüler olmayan (değil) veya tersinir matris denir. B'ye A'nın tersi denir.

Örk: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ A'nın tersi var

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A'nın tersi yok

Teorem: A'nın tersi varsa tektir.

Kanıt: B ve C A'nın tersleri olsun.

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

A tersine A^{-1}

Tanım: Eğer A matrisinin tersi yoksa, A'ya <u>singüler matris</u> denir.

Tanım: $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Elemanları $b_{ji} = a_{ij}$ olarak tanımlanan $n \times m$

tipindeki $B = (b_{ji})$ matrisine A'nın **transposesi** denir ve A^T ile gösterilir.

örk: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ 2×3

$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ 3×2 $\quad b_{21} = a_{12} = -2$, $b_{32} = a_{23} = 7$

Teorem: Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $(A^T)^T = A$ $\quad$ 2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$ $\quad$ 4) $(AB)^T = B^T A^T$

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}$

$(AB)^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$B^T . A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$

Tanım: Eğer $A^T = A$ ise $n \times n$ tipindeki A matrisine **simetrik** denir.

Elementer Matrisler.

Teorem: A ve B singüler olmayan matrisler ise A.B'de singüler değildir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ dır.}$$

Kanıt: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = \underline{I}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Genel olarak $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

Tanım: Birim matris I'nın herhangi iki satırının yer değiştirmesi ile elde edilen yeni matrise <u>I. tip elementer matris</u> denir.

Birim matris I'nın herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması ile elde edilen yeni matrise <u>II. tip elementer matris</u> denir.

Birim matris I'nın herhangi bir satırını bir sayı ile çarpıp başka bir satıra toplanması ile elde edilen yeni matrise <u>III. tip elementer matris</u> denir.

S3

Örk:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_1 ve E_4 I. tip elementer matris

E_2 II. // // // $S_3 \to 5S_2 + S_3$

E_3 III. // // //

S4

Bir matrisi bir elementer matris ile soldan çarparsak, çarpım matrisi ilk matrise o elementer satır işlemi yapılarak elde edilen matrise eşittir.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I. tip.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad EA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem: E elementer matris ise E singüler olmayan bir matristir ve E^{-1} de aynı tipte elementer matristir.

Tanım: B matrisine, $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ olacak şekilde sonlu elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrisleri varsa, A'ya <u>satırca denktir</u> denir.
(yani, B matrisi, A matrisine sonlu elementer satır işlemleri uygulanarak elde ediliyorsa B matrisine A'ya satırca denktir denir)

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = B$

A ve B denktir. (Satırca)

$B = E_1 E_2 A$

Teorem: A, $n \times n$ tipinde matris ise aşağıdakiler denktir.

1) A singüler değildir.
2) $AX=0$ yalnız aşikar çözüme sahiptir.
3) A satırca birim matris I'ya denktir.

Teorem: $AX=B$ $n \times n$ sisteminin yalnız bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart A'nın singüler olmamasıdır.

Kanıt: A singüler değilse, A^{-1} var.

$$AX=B$$
$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$$
$$IX=X=A^{-1}B$$
$$\boxed{X=A^{-1}B}$$

Tersi yapılır.

A singüler değilse A satırca birim matrise denktir.

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 A = I$$
$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 = A^{-1}$$

$$(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$$

örk: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & 13/7 \\ 0 & 1 & 0 & c & 2/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -1/7 & -1/7 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & 13/7 \\ c & 2/7 & -5/7 \\ 5/7 & -1/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$ lineer sistemini çözünüz.

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 13/7 \\ c & 2/7 & -5/7 \\ 5/7 & -1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 4b + 13/7 \cdot 5 \\ c + 2/7 \cdot 4 + (-\frac{5}{7})5 \\ 5/7 + (-\frac{1}{7}) \cdot 4 + (-\frac{1}{7}) \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{4}{7}$$

Örk: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/11 & -1/11 \end{array}\right]$$

63

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{11}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{3} & 5/33 \\ 0 & 1 & 2/11 & -1/11 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{33} & 5/33 \\ 2/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

Köşegen ve Üçgensel Matris.

Tanım: Bir $n\times n$ tipinde A matrisine $i>j$ için $a_{ij}=0$ ise <u>üst üçgensel</u>, $i<j$ için $a_{ij}=0$ ise <u>alt üçgensel</u> matris denir. Bir matris üst veya alt üçgensel ise üçgensel denir.

64

<u>Ört:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a_{21} = 0$
$a_{31} = 0$
$a_{32} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A üst üçgensel, B üst üçgensel

C alt 〃, D alt ve üst üçgens.

Tanım: Bir nxn tipindeki A matrisi $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ ise A'ya **köşegen matris** denir.

örk:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A, C, D köşegen matris
B " " değil

Bölünmüş (Parçalanmış Matrisler)

Bir matrisin yatay ve düşey çizgilerle alt matrislere ayrılmasına bölünmüş matris denir ve bu alt matrislere blok matris denir.

örk:
$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad 5 \times 6$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

2x4 2x2
3x4 3x2

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} \quad A \cdot B = ?$$