$\lambda_2=\lambda_3=1$ $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1-3x_2+x_3=0$

$x_3=\alpha$

$x_2=\beta$

$x_1=3\beta-\alpha$

$$N(A-\lambda I)=\left\{\begin{bmatrix} 3\beta-\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörlerdir

Benzer Matrisler:

Teorem: A ve B, nxn tipinde matrisler olsun. Eğer A ile B benzer matrisler ise bu iki matris aynı karakteristik polinoma sahiptir ve dolayısıyla aynı özdeğere sahiptirler.

Kanıt: $P_A(\lambda)$ ve $P_B(\lambda)$ sırasıyla A ve B matrislerinin karakteristik polinomları olsun. A ve B benzer matrisler olduğundan öyle bir S matrisi vardır ki S singüler değil ve

$$B=S^{-1}AS$$

dır.

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$$
$$= \det(S^{-1}AS - \lambda I)$$
$$= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S)$$
$$= \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det S$$
$$= \det(A - \lambda I)$$
$$= P_A(\lambda)$$

Aynı karakteristik polinoma sahip olduklarından aynı özdeğerlere sahiptirler.

Örk: $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $S = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ olarak verilsin

T'nin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dür.

$\left(\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) \right)$

$A = S^{-1}TS$ alırsak, A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dür. Gerçekten

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

Köşegenleştirme:

Teorem: A, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ A'nın farklı özdeğerleri ve $x_1, x_2, \dots, x_k$'lar bunlara karşı gelen özvektörler iseler $x_1, x_2, \dots, x_k$ lineer bağımsızdır.

Tanım:

$$X^{-1}AX = D$$

eşitliğini sağlayan köşegen matris D ve singüler olmayan bir X matrisi varsa, $n\times n$ tipindeki bir A matrisine köşegenleştirilebilir denir. X'e A'yı köşegenleştirir denir.

Teorem: Bir $n\times n$ tipindeki A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır.

Notlar: 1) Eğer A köşegenleştirilebilirse, köşegenleştiren matris X'in sütun vektörleri A'nın özvektörleridir ve D'nin köşegen elemanları A'nın ilgili özdeğerleridir.

2) Köşegenleştiren matris X bir tane değildir. Köşegenleştiren matris X'in sütun vektörlerinin yerini değiştirerek veya sıfırdan

farklı bir skaler ile çarpmak yeni köşegenleştiren matris üretir.

3) Eğer A, $n\times n$ tipinde bir matris ve A'nın n-tane farklı özdeğeri varsa, A köşegenleştirilebilirdir. Eğer özdeğerler farklı değil ise A'nın köşegenleştirilebilir olup olmaması A'nın ~~f~~ n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olup olmamasına bağlıdır.

4) Eğer A köşegenleştirilebilir ise

$$A = X D X^{-1}$$

dir.

(4)'e göre

$$A^2 = (XDX^{-1})(XDX^{-1})$$

$$= XD^2X^{-1}$$

genel olarak

$$A^k = XD^kX^{-1} = X\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}X^{-1}$$

dir.

örk: 1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ $x=?$ $A^5=?$

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

iki farklı özdeğer var A köşegenleştirilebilir

$\left(D = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \right)$

$\lambda_1 = 2$'e karşı gelen özvektör

$(A-2I)X=0$ $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$-x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x = \alpha\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$
$\alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ özvektör

$\lambda_2 = 3$'e karşı gelen özvektör

$(A-3I)X=0$ $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x = \alpha\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ özvektör

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} A X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

$A^5 = ?$ $\qquad A = X D X^{-1}$

$$A^5 = X D^5 X^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ -243 & -243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -179 & -211 \\ 422 & 454 \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad X = ?$ $\qquad A^5 = ?$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}$$

251

$\lambda_1 = 0$'a karşı gelen özvektör

$$AX = 0 \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ özvektör}$$

$\lambda_2 = 1 = \lambda_3$ karşı gelen özvektörü

$$(A-I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

252

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = \alpha \ , \ x_3 = \beta \qquad x_2 = 2\alpha - 2\beta$$

$$N(A-I) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörler

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} A X = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = X D^5 X^{-1} = A \qquad (X D X^{-1} = A)$$

$$A^k = A \qquad k \in T$$ (~~Pozitif~~ tamsayılarla)

$n \times n$ tipindeki bir A matrisi n'den daha az sayıda lineer bağımsız özvektöre sahipse, A'ya <u>kusurlu</u> (<u>eksik</u>) denir. Kusurlu matris köşegenleştirilemez.

Ört: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \qquad |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$(A - I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

255

$x_2 = 0 \quad x_1 = \alpha \quad x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ özvektör

A kusurlu matristir köşegenleştirilemez.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 (4 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \; \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

A ve B matrislerinin özdeğerleri aynı.

256

$\lambda_1 = 4$ için A'nın bir özvektörü

$(A - 4I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ A'nın bir özvektörü

B'nin bir özvektörü

$(B - 4I)X = 0 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$x_1=0 \quad 6x_2-2x_3=0 \quad x_3=\alpha$

$x_2=\frac{1}{3}\alpha$

$\begin{bmatrix} 0 \\ [redacted] \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=2$ için A'nın bir özvektörü?

$(A-2I)X=0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

$x_2=0 \quad x_1=0 \quad x_3=\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektör

A kusurludur köşegenleştirilemez.

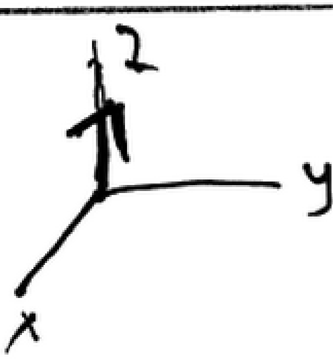
B'nin özvektörü?

$(B-2I)X=0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

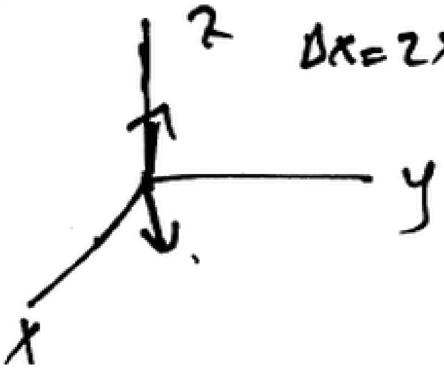
$-x_1+2x_2=0 \quad x_2=\alpha \quad x_1=2\alpha \quad x_3=\beta$

$N(B-2I)=\left\{\alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörler. B köşegenleştirilebilir.



$Ax=2X$



$Bx=2X$

259

6. DİKLİK

$\mathbb{R}^n$'de skaler çarpım:

$\mathbb{R}^n$'de iki vektör x ve y'yi $n\times 1$ tipinde matrisler olarak düşünebiliriz. Bu durumda $x^T.y$ çarpımını $\mathbb{R}^1$'de 1×1 tipinde bir matris veya bir reel sayı olarak ifade edebiliriz. $x^T.y$ çarpımına, x ve y'nin <u>skaler çarpımı</u> denir.

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

260

Eğer $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ ve $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$ ise

$$x^T.y=(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

$$=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

Örk: $x=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $y=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}=(1,2,5)^T$ ise

$$x^T.y=[4\ \ 1\ \ -2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}=4.1+1.2+(-2).5$$

$$=-4$$

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'de skaler çarpım:

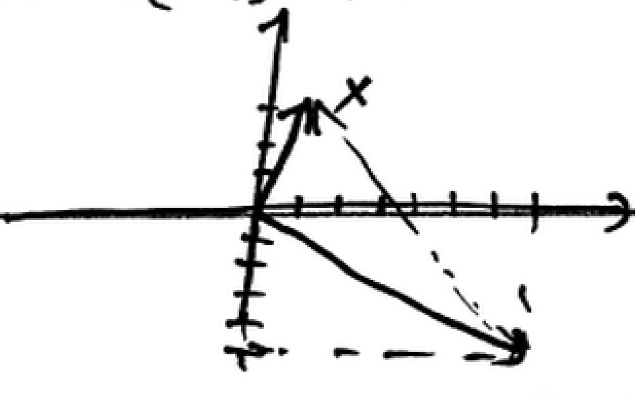
$\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de skalar çarpımın geometrik anlamı verebiliriz. $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de vektörleri yönlü (doğrultu) doğru parçaları olarak düşünebiliriz. $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de verilen bir x vektörü için onun Öklid uzunluğu, kendisiyle skalar çarpımının karekökü olarak tanımlanır.

$$\|x\| = \sqrt{x^T \cdot x} = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x \in \mathbb{R}^2 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Tanım: $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de verilen x ve y vektörleri arasındaki uzaklık $\|x-y\|$ olarak tanımlanır.

örn: $x = (1,3)^T \quad y = (7,-5)^T = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\|x-y\| = \sqrt{(1-7)^2 + (3-(-5))^2} = 10$$



$$x - y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-7 \\ 3-(-5) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

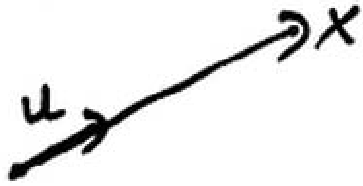
Teorem: x ve y, $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı iki vektör ve θ, bunların arasındaki açı ise

$$x^T \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$$

dır.

Eğer x sıfırdan farklı bir vektör ise bu vektör doğrultusundaki birim vektör

$$u = \frac{1}{\|x\|} \cdot x \text{ dir.}$$



Bu durumda x ve y arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{x^T \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} = u^T \cdot v \qquad u = \frac{x}{\|x\|}, \quad v = \frac{y}{\|y\|}$$

dır.

Örk: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ile x ve y arasındaki açı?

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$u = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{y}{\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = u^T \cdot v = \begin{bmatrix}3/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{8}{5\sqrt{5}} = +\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: x ve y, $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'de vektörler ise

$$|x^T y| \leq \|x\| \, \|y\|$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak vektörlerden biri sıfır veya biri diğerinin katı olduğunda söylenir.

Eğer $x^T \cdot y = 0$ ise yukarıdaki teoreme göre vektörlerden biri sıfır veya $\cos\theta = 0$ dır. $\cos\theta = 0$ ise bu iki vektör birbirine diktir.