Ayrık Matematik Önermeler

H. Turgut Uyar Ayşegül Gençata Yayımlı Emre Harmancı

2001-2012

Lisans



©2001-2012 T. Uyar, A. Yayımlı, E. Harmancı

- to Share to copy, distribute and transmit the work
 to Remix to adapt the work

Under the following conditions:

- Attribution You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
- Noncommercial You may not use this work for commercial purposes.
 Share Alike If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

Legal code (the full license):

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/

Konular

Önermeler

Giriș Birleşik Önermeler Sağlıklı Formüller Üstdil

Önerme Hesapları

Giriş Mantık Yasaları Akıl Yürütme

Önerme

Tanım

önerme: doğru ya da yanlış denebilecek bir bildirim cümlesi

- ara değeri dışlama kuralı: bir önerme kısmen doğru ya da kısmen yanlış olamaz
- çelişki kuralı: bir önerme hem doğru hem yanlış olamaz

Önerme Örnekleri

Örnek (önerme)

- ► Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner.
- ► Filler uçabilir.
- ► 3 + 8 = 11

- Örnek (önerme değil)
 - ► Saat kaç?
 - ► Ali topu at!
 - ► *x* < 43

Önerme Değişkeni

önerme değişkeni:

önermeyi simgeleyen isim

▶ Doğru (D) ya da Yanlış (Y) değerlerini alabilir

Örnek

- ▶ p₁: Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner. (D)
- ▶ p₂: Filler uçabilir. (Y)
- ▶ p_3 : 3 + 8 = 11 (D)

Birleşik Önermeler

- ▶ birleşik önermeler
 - bir önermenin değillenmesiyle, ya da
 - birden fazla önermenin mantıksal bağlaçlar ile birleştirilmesiyle
- ▶ yalın önermeler daha küçük birimlere bölünemez
- ► doğruluk tablosu:

içerdiği yalın önermelerin olası bütün değerleri için birleşik önermenin sonuçlarını listeleyen tablo Değilleme (NOT)

Tablo: ¬p

р	$\neg p$	
D	Y	
Y	D	

Örnek

- ► ¬p₁: Ay Yeryüzü'nün çevresinde dönmez.
 - ¬D: Yanlış
- ▶ ¬p₂: Filler uçamaz.
 - ¬Y: Doğru

1/0

VE Bağlacı (AND)

Tablo: $p \wedge q$

р	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Örnek

▶ p₁ ∧ p₂: Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner ve filler uçabilir. D ∧ Y: Yanlış

9 / 67

VEYA Bağlacı (OR)

Tablo: $p \lor q$

р	q	$p \lor q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek

▶ p₁ ∨ p₂: Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner veya filler uçabilir. D ∨ Y: Doğru

10 / 67

DAR VEYA Bağlacı (XOR)

Tablo: $p \vee q$

р	$p \mid q \mid p \vee$	
D	D D	
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek

▶ p₁ ¥ p₂: Ya Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner ya da filler uçabilir. D ¥ Y: Doğru

Koşullu Bağlaç (IF)

Tablo: $p \rightarrow q$

ŀ)	q	$p \rightarrow q$
L	7	D	D
L)	Y	Y
)	7	D	D
)	/	Y	D

- ▶ p: öncül
- ▶ q: sonuç
- okunuşları:
 - p ise qp, q için yeterli
 - ▶ q, p için gerekli
- ¬p ∨ q

Koşullu Bağlaç Örnekleri

Örnek

- ▶ p_4 : 3 < 8, p_5 : 3 < 14, p_6 : 3 < 2
- ▶ p₇: Güneş Yeryüzü'nün çevresinde döner.
- ▶ $p_4 \rightarrow p_5$: 3, 8'den küçükse 3, 14'den küçüktür.

 $D \to D$: Doğru

▶ $p_4 \rightarrow p_6$: 3, 8'den küçükse 3, 2'den küçüktür.

 $D \rightarrow Y$: Yanlış

 $ightharpoonup p_2
ightharpoonup p_1$: Filler uçabilirse Ay Yeryüzü'nün çevresinde döner.

 $Y \rightarrow D$: Doğru

P₂ → p₇: Filler uçabilirse Güneş Yeryüzü'nün çevresinde döner. Y → Y: Doğru

13 / 67

Koşullu Bağlaç Örnekleri

Örnek

▶ "70 kg'yi geçersem spor yapacağım."

p: 70 kg'den ağırım.p: Spor yapıyorum.

▶ bu önerme ne zaman yanlış olur?

р	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Tablo: $p \rightarrow q$

14/

Karşılıklı Koşullu Bağlaç (IFF)

Tablo: $p \leftrightarrow q$

р	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Υ	Y	D

- okunuşları:
 - ightharpoonup p yalnız ve ancak q ise
 - p, q için yeterli ve gerekli
- $\blacktriangleright (p \to q) \land (q \to p)$
- $\neg (p \vee q)$

Örnek

Örnek

- Anne çocuğa: "Ödevini yaparsan bilgisayar oyunu oynayabilirsin."
- ► s: Çocuk ödevini yapar.
- ▶ t: Çocuk bilgisayar oyunu oynar.
- ▶ annenin söylediği hangisi?
 - ightharpoonup s
 ightharpoonup t
 - ¬s → ¬
 - $ightharpoonup s \leftrightarrow t$

15 / 67

Sağlıklı Formül

Yazım

- birleşik önermeler hangi kurallara göre oluşturulacak?
- kurallara uyan formüller: sağlıklı formül (SF)

Anlam

- yorum: yalın önermelere değer atayarak birleşik önermenin değerini hesaplama
- doğruluk tablosu: önermenin bütün yorumları

Formül Örnekleri

Örnek (sağlıklı değil)

- ▶ ∨p
- ▶ p ∧ ¬
- ▶ p¬ ∧ q

18 / 6

16 / 67

Öncelik Sırası

- 1. ¬
- 2. ^
- 4. →
- ▶ önceliği değiştirmek için parantez kullanılır

Öncelik Sırası Örnekleri

Örnek

- ▶ s: Filiz gezmeye çıkar.
- ▶ t: Mehtap var.
- ▶ *u*: Kar yağıyor.
- ▶ aşağıdaki SF'ler ne anlama gelir?
 - ▶ $t \land \neg u \rightarrow s$

 - $t \to (\neg u \to s)$ $\to \neg (s \leftrightarrow (u \lor t))$ $\to \neg s \leftrightarrow u \lor t$

Formül Nitelikleri

- 1. geçerli: bütün yorumlar için doğru (totoloji)
- 2. *çelişkili*: bütün yorumlar için yanlış (çelişki)
- 3. tutarlı: bazı yorumlar için doğru

Totoloji Örneği

Örnek

Tablo: $p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$

р	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge A$	$B \rightarrow q$
		(A)	<i>p</i> ∧ <i>A</i> (<i>B</i>)	
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

22 / 67

Çelişki Örneği

Örnek

Tablo: $p \wedge (\neg p \wedge q)$

р	q	$\neg p \mid \neg p \land q$		$p \wedge A$
	·		(A)	
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y
Y	Y	D	Y	Y

Üstdil

21 / 67

Tanım

hedef dil:

üzerinde çalışılan dil

Tanım

üstdil:

hedef dilin özelliklerinden söz ederken kullanılan dil

▶ geçerlilik, çelişkililik ve tutarlılık üstdile ait tanımlar

Üstdil Örnekleri

Örnek (İngilizce öğrenen bir Türk için)

hedef dil: İngilizceüstdil: Türkçe

Örnek (bir programlamaya giriş dersinde)

▶ hedef dil: C, Python, Java, ...▶ üstdil: İngilizce, Türkçe, ...

Üstmantık

▶ $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ P_1, P_2, \ldots, P_n varsayıldığında Q'nun doğruluğu tanıtlanabilir.

▶ $P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$ P_1, P_2, \dots, P_n doğruysa Q doğrudur.

26 / 67

Biçimsel Sistemler

Tanım

tutarlı: bütün P ve Q sağlıklı formülleri için $P \vdash Q$ ise $P \vDash Q$

► tanıtlanabilen bütün önermeler doğrudur

Tanım

eksiksiz: bütün P ve Q sağlıklı formülleri için $P \vDash Q$ ise $P \vdash Q$

doğru olan bütün önermeler tanıtlanabilir

Gödel Kuramı

▶ Önermeler mantığı tutarlı ve eksiksizdir.

Gödel Kuramı

 Sıradan aritmetiği ifade edecek kadar güçlü hiçbir mantıksal sistem hem tutarlı hem eksiksiz olamaz.

27 / 67

1. anlamsal yaklaşım: doğruluk tabloları

Önerme Hesabı Yaklaşımları

b değişken sayısı artınca yönetimi zorlaşıyor

2. yazımsal yaklaşım: akıl yürütme kuralları

 var olan önermelerden mantiksal gerektirmeler kullanarak yeni önermeler üretme

3. aksiyomatik yaklaşım: Boole cebri

• eşdeğerli formülleri denklemlerde birbirlerinin yerine koyma

Doğruluk Tablosu Örneği

Örnek $(p \rightarrow q)$

р	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$
D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	D
Y	D	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D	D

ightharpoonup kontrapozitif. $\neg q \rightarrow \neg p$

▶ konvers: $q \rightarrow p$

▶ invers: $\neg p \rightarrow \neg q$

30 / 67

Mantıksal Eşdeğerlilik

Tanım

 $P \leftrightarrow Q$ totoloji ise P ve Q mantıksal eşdeğerli:

 $P \Leftrightarrow Q$

Mantıksal Eşdeğerlilik Örneği

Örnek

$$\blacktriangleright \neg p \Leftrightarrow p \to Y$$

Tablo: $\neg p \leftrightarrow p \rightarrow Y$

	р	$\neg p$	$p \rightarrow Y$	$\neg p \leftrightarrow A$
			(A)	
	D	Y	Y	D
ĺ	Y	D	D	D

7

Mantıksal Eşdeğerlilik Örneği

Örnek

$$\blacktriangleright \ p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$$

Tablo: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$

р	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$A \leftrightarrow B$
		(A)		(B)	
D	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D

Mantık Yasaları

Çifte Değilleme (Double Negation - DN)

 $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Değişme (Commutativity - Co)

 $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \qquad \qquad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Birleşme (Associativity - As)

 $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Sabit Kuvvetlilik (Idempotence - Ip)

 $p \land p \Leftrightarrow p$ $p \lor p \Leftrightarrow p$

Terslik (Inverse - In)

 $p \land \neg p \Leftrightarrow Y$ $p \lor \neg p \Leftrightarrow D$

33 / 67

Mantık Yasaları

Etkisizlik (Identity - Id)

 $p \wedge D \Leftrightarrow p$

 $p \lor Y \Leftrightarrow p$

Baskınlık (Domination - Do)

 $p \wedge Y \Leftrightarrow Y$

 $p \lor D \Leftrightarrow D$

Dağılma (Distributivity - Di)

 $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r) \quad p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$

Yutma (Absorption - Ab)

 $p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$

 $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$

DeMorgan Yasaları (DM)

 $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$

 $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

Eşdeğerlilik Hesabı Örneği

Örnek

$$p \to q$$

$$\Rightarrow \neg p \lor q$$

$$\Leftrightarrow q \lor \neg p \quad Cc$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg q \lor \neg p DN$$

$$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

Eşdeğerlilik Hesabı Örneği

Örnek

$$\begin{array}{cccc} \neg(\neg((p\vee q)\wedge r)\vee\neg q) \\ \Leftrightarrow & \neg\neg((p\vee q)\wedge r)\wedge\neg\neg q & DM \\ \Leftrightarrow & ((p\vee q)\wedge r)\wedge q & DN \\ \Leftrightarrow & (p\vee q)\wedge(r\wedge q) & As \\ \Leftrightarrow & (p\vee q)\wedge(q\wedge r) & Co \\ \Leftrightarrow & ((p\vee q)\wedge q)\wedge r & As \\ \Leftrightarrow & q\wedge r & Ab \end{array}$$

Dualite

Tanım

 \land ve \lor dışında bir bağlaç içermeyen bir s önermesinin dual önermesi $s^d,$

 \land yerine \lor , \lor yerine \land , D yerine Y , Y yerine D konarak elde edilir.

Örnek (dual önerme)

 $s: (p \land \neg q) \lor (r \land D)$ $s^d: (p \lor \neg q) \land (r \lor Y)$

38 / 67

Dualite İlkesi

Dualite İlkesi

s ve t, \wedge ve \vee dışında bir bağlaç içermeyen önermeler olsun. $s \Leftrightarrow t$ ise $s^d \Leftrightarrow t^d.$

Mantiksal Gerektirme

Tanım

 $P \to Q$ bir totoloji ise P formülü Q formülünü mantıksal gerektirir: $P \Rightarrow Q$

40 / 67

Mantıksal Gerektirme Örneği

Örnek

$$\blacktriangleright p \land (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

Tablo:
$$p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

р	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge A$	$B \rightarrow q$
		(A)	(B)	$B \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

Akıl Yürütme

 doğruluğu varsayılan ya da tanıtlanmış bir önermeler kümesinden yola çıkarak bir önermenin doğruluğuna varma

gösterilim

$$\begin{array}{ccc}
\rho_1 \\
\rho_2 \\
\dots \\
\rho_1 \wedge \rho_2 \wedge \dots \wedge \rho_n \Rightarrow q \\
\hline
\vdots & q
\end{array}$$

42 / 6

Temel Kurallar

Özdeşlik (Identity - ID)

Çelişki (Contradiction - CTR)

Temel Kurallar

Koşul Ekleme (Implication Introduction - Impl)

$$\frac{p \vdash q}{\therefore \vdash p \to q}$$

- ightharpoonup p doğru varsayıldığında q doğru olduğu gösterilebiliyorsa, p doğru varsayılmadan p
 ightharpoonup q doğrudur
- ▶ p bir geçici varsayım (PA provisional assumption)
- ▶ geçici varsayımlar sonradan kaldırılabilmeli

43 / 67

Temel Kurallar

VE Ekleme (AND Introduction - AndI)

$$\begin{array}{c}
p \\
q \\
\therefore p \land a
\end{array}$$

VE Eleme (AND Elimination - AndE)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

45 / 67

Temel Kurallar

VEYA Ekleme (OR Introduction - Orl)

$$\frac{p}{\therefore p \lor q}$$

VEYA Eleme (OR Elimination - OrE)

$$\begin{array}{c}
p \lor q \\
p \vdash r \\
q \vdash r \\
\hline
\vdots \vdash r
\end{array}$$

46 / 67

Temel Kurallar

Modus Ponens (Implication Elimination - ImpE)

$$\frac{p \to q}{\therefore q}$$

Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{c}
p \to q \\
\neg q \\
\hline
\vdots \neg p
\end{array}$$

Modus Tollens

Örnek

$$\begin{array}{c}
p \to q \\
 \hline
 \neg q \\
 \hline
 \vdots \neg p
\end{array}$$

1.
$$p \rightarrow q$$

2.
$$\neg q \rightarrow \neg p$$
 1

4.
$$\neg p$$
 $ImpE : 2, 3$

48 / 6

Modus Ponens Örneği

Örnek

- ▶ Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ▶ Ali piyangoyu kazandı.
- ► O halde, Ali araba alacak.

Modus Tollens Örneği

Örnek

- ▶ Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ► Ali araba almadı.
- ▶ O halde, Ali piyangoyu kazanmadı.

49 / 67

50 / 67

52 / 67

Yanılgılar

sonucu onaylama yanılgısı

$$\begin{array}{c}
p \to q \\
\hline
q \\
\hline
\vdots p
\end{array}$$

▶ $(p \rightarrow q) \land q \rightarrow p$ bir totoloji değil: p = Y, q = D ise: $(Y \rightarrow D) \land D \rightarrow Y$ Sonucu Onaylama Yanılgısı Örneği

Örnek

- ► Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ► Ali araba aldı.
- ► O halde, Ali piyangoyu kazandı.

51 / 67

Yanılgılar

öncülü yadsıma yanılgısı

$$\frac{p \to q}{\neg p}$$

▶ $(p \rightarrow q) \land \neg p \rightarrow \neg q$ bir totoloji değil: p = Y, q = D ise: $(Y \rightarrow D) \land D \rightarrow Y$ Öncülü Yadsıma Yanılgısı Örneği

Örnek

- ► Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ► Ali piyangoyu kazanmadı.
- ► O halde, Ali araba almayacak.

54 / 6

Ayırıcı Kıyas

Ayırıcı Kıyas (Disjunctive Syllogism - DS)

$$\frac{p \vee q}{\neg p}$$

$$\therefore q$$

1.
$$p \lor q$$

3.
$$p \rightarrow Y$$
 3

$$5. \hspace{1.5cm} \textit{q} \hspace{1.5cm} \textit{OrE}: 1, 4\textit{a}, 4\textit{b}$$

Ayırıcı Kıyas Örneği

Örnek

- ► Ali'nin cüzdanı cebinde veya masasında.
- ► Ali'nin cüzdanı cebinde değil.
- ► O halde, Ali'nin cüzdanı masasında.

Varsayımlı Kıyas

Varsayımlı Kıyas (Hypothetical Syllogism - HS)

$$\begin{array}{c}
p \to q \\
q \to r \\
\hline
\vdots \quad p \to r
\end{array}$$

2. $p \rightarrow q$ A

ImpE: 2, 1

ImpE: 4, 3

6. $p \rightarrow r$ Impl: 1,5

Varsayımlı Kıyas Örneği

Örnek (Uzay Yolu)

Spock - Yarbay Decker:

Şu anda düşman gemisine saldırmak intihar olur. İntihara teşebbüs eden biri Atılgan'ın komutanlığını yapmaya psikolojik olarak yetkin değildir. O halde, sizi görevden almak zorundayım.

Varsayımlı Kıyas Örneği

Örnek (Uzay Yolu)

- ▶ p: Decker düşman gemisine saldırır.
- ▶ q: Decker intihara teşebbüs eder.
- r: Decker Atılgan'ın komutanlığını yapmaya psikolojik olarak yetkin değildir.
- ▶ s: Spock Decker'ı görevden alır.

Varsayımlı Kıyas Örneği

Örnek

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$r \rightarrow s$$

$$q \rightarrow r$$
 $r \rightarrow s$

1.
$$p \rightarrow q$$

2.
$$q \rightarrow r$$
 A

3.
$$p \rightarrow r$$
 $HS: 1, 2$

4.
$$r \rightarrow s$$
 A

5.
$$p \rightarrow s$$
 $HS: 3, 4$

7.
$$s$$
 $ImpE: 5, 6$

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$\begin{array}{c} (\neg p \lor \neg q) \to (r \land s) \\ r \to x \\ \hline \neg x \\ \hline \vdots p
\end{array}$$

8.

9.

6. $(\neg p \lor \neg q) \to (r \land s)$ A

 $\neg \chi$

 $\neg(\neg p \lor \neg q)$

MT: 6, 5

MT: 1, 2 $\neg r$

 $p \wedge q$

DM:7

 $\neg r \lor \neg s$ Orl : 3

р

AndE : 8

 $\neg (r \land s) \quad DM:4$

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$\begin{array}{c}
p \to (q \lor r) \\
s \to \neg r \\
q \to \neg p \\
p \\
s \\
\hline
\therefore Y
\end{array}$$

1. Α $q \rightarrow \neg p$

2. р

3. $\neg q$

MT: 1, 2

Α

Α

Α

6. ImpE: 5, 4

7. $p \rightarrow (q \lor r)$

 $q \vee r$ 8.

ImpE: 7, 2

9. q

DS: 8,6

10. $q \land \neg q : Y \quad Andl : 9,3$

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

Eğer yağmur yağması olasılığı varsa veya saç bandını bulamazsa, Filiz çimleri biçmez. Hava sıcaklığı 20 dereceden fazlaysa yağmur yağma olasılığı yoktur. Bugün hava sıcaklığı 22 derece ve Filiz saç bandını takmış. O halde, Filiz çimleri biçecek.

63 / 67

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

- ▶ p: Yağmur yağabilir.
- ▶ q: Filiz'in saç bandı kayıp.
- ▶ r: Filiz çimleri biçer.
- ▶ s: Hava sıcaklığı 20 dereceden fazla.

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$(p \lor q) \to \neg r$$

$$s \to \neg p$$

$$s \land \neg q$$

$$\therefore r$$

Α 1. $s \wedge \neg q$

AndE:12. s

ImpE:3,24. $\neg p$

AndE:15. $\neg q$

6. $\neg p \land \neg q$ And1: 4,5

7. $\neg(p \lor q)$ DM:6 $(p \lor q) \rightarrow \neg r$ Α

7,8

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- ▶ Chapter 2: Fundamentals of Logic
 - 2.1. Basic Connectives and Truth Tables
 2.2. Logical Equivalence: The Laws of Logic
 2.3. Logical Implication: Rules of Inference

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

► Chapter 6: Propositional Logic