2. Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0$$

Çözüm, 1. mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerine benzer şekilde

$$x_T(t) = x_h(t) + x_{özel}(t)$$

Homojen kısım: $\dot{x} = Ax, \qquad x(t_0) = x_0$

$$x_h(t) = Se^{\lambda t} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

Çözüm Tahmini

$$\lambda S e^{\lambda t} = A S e^{\lambda t}$$

$$\lambda S = AS$$

belirlememiz gereken kaç büyüklük var?

$$[\lambda I - A] S = 0$$

sıfırdan farklı çözüm erin olması nasıl mümkün olur?

$$\det[\lambda I - A] = 0 \longrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Karakteristik Denklem

Karakteristik denklemin kökleri: λ_1, λ_2 özdeğerler

Belirlememiz gereken S özvektör

Hangi uzayın elemanı?
O uzaya ait neyi belirlersek
aradığımızı bulmuş oluruz?

$[\lambda_1 I - A]S_1 = 0$ λ_1'e ilişkin özvektör

$[\lambda_2 I - A]S_2 = 0$ λ_2'e ilişkin özvektör

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= c_1 V_1 \\ S_2 &= c_2 V_2 \end{aligned}\right\} \quad x_h(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} V_1 & e^{\lambda_2 t} V_2 \end{bmatrix}}_{M(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Temel Matris

Özel çözüm:

$$x_{özel}(t) = \begin{bmatrix} x_{1_{özel}}(t) \\ x_{2_{özel}}(t) \end{bmatrix}$$

Nasıl belirleyeceğiz?

Tam çözüm:

$$x(t) = M(t)C + x_{özel}(t)$$

$$x(t_0) = M(t_0)C + x_{özel}(t_0) \longrightarrow C = M(t_0)^{-1}\left[x(t_0) - x_{özel}(t_0)\right]$$

$$x(t) = M(t)M^{-1}(t_0)\left[x(t_0) - x_{özel}(t_0)\right] + x_{özel}(t)$$

$$x(t) = \underbrace{M(t)M^{-1}(t_0)}_{\Phi(t)}\left[x(t_0) - x_{özel}(t_0)\right] + x_{özel}(t)$$

Durum Geçiş Matrisi

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)x(t_0) + x_{özel}(t) - \Phi(t)x_{özel}(t_0)}$$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)x(t_0)}_{\text{öz çözüm}} + \underbrace{x_{özel}(t) - \Phi(t)x_{özel}(t_0)}_{\text{zorlanmış çözüm}}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x(t_0)}_{\text{öz çözüm}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{zorlanmış çözüm}}$$

Dinamik Sistem

Önce lineer dinamik sistemleri durum denklemleri ile ifade ettik ...

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_o) = x_o$$

durum değişkeni

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ilk koşul

çıkış değişkeni

giriş değişkeni

$$x \in \ldots\ldots\ldots \qquad y \in \ldots\ldots\ldots \qquad u \in \ldots\ldots\ldots$$

Bu sistemin çözümü.....

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Bir özel hal: $$\dot{x}(t) = Ax(t)$$ Otonom sistem

Çözümü bir daha yazarsak

özvektörler

$$x(t) = e^{\lambda_1(t-t_o)}S_1x_1(t_0) + e^{\lambda_2(t-t_o)}S_2x_2(t_0) + ...e^{\lambda_n(t-t_o)}S_nx_n(t_0)$$

özdeğerler

Çözüm, özvektörler ve özdeğerler ile nasıl değişir

....

Özvektörleri aynı özdeğerleri farklı iki sistem

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

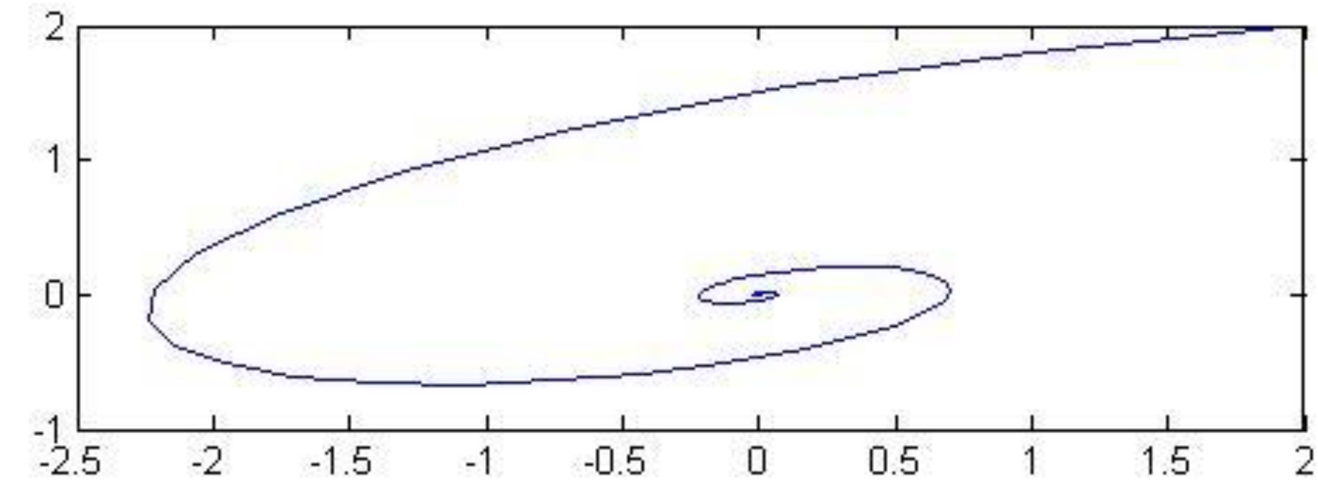
$$\lambda_{11} = -1 - 2i \qquad \lambda_{21} = -3 - 2i$$
$$\lambda_{12} = -1 + 2i \qquad \lambda_{22} = -3 + 2i$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651i \end{bmatrix} S_{21} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 - 0.3651i \end{bmatrix}$$

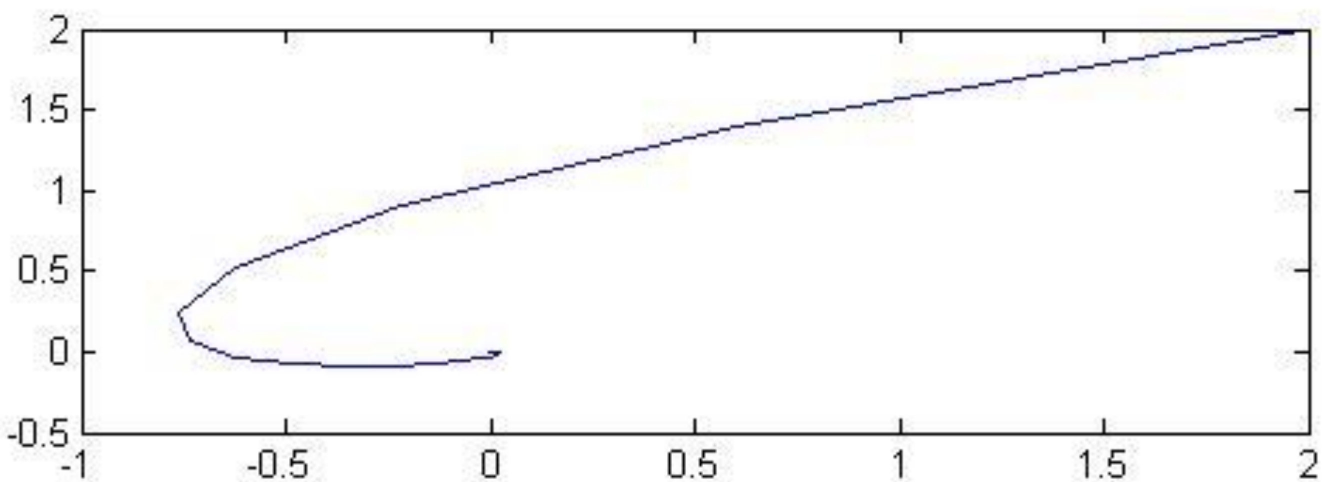
$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651i \end{bmatrix} S_{22} = \begin{bmatrix} 0.9129 \\ -0.1826 + 0.3651i \end{bmatrix}$$

Hangisi daha hızlı sıfıra yaklaşıyor ?

A1 sistemi



A2 sistemi



Özdeğerleri aynı özvektörleri farklı iki sistem

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -5 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 5 & -0.3 \end{bmatrix}$$

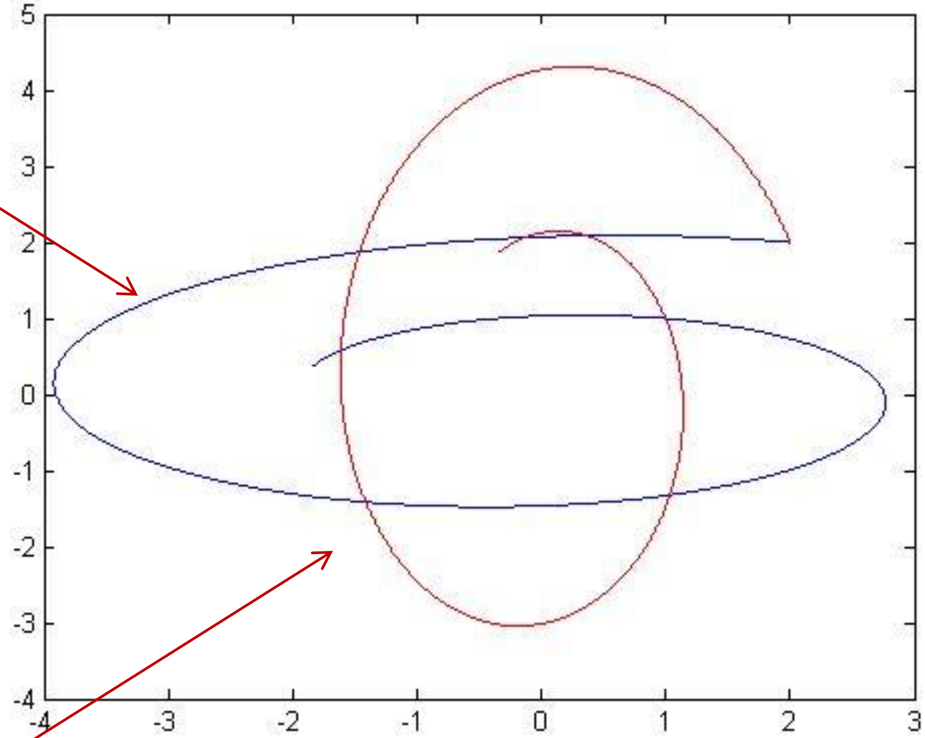
$$\lambda_{11} = -0.25 + 2.235i \qquad \lambda_{21} = -0.25 + 2.235i$$

$$\lambda_{12} = -0.25 - 2.235i \qquad \lambda_{22} = -0.25 - 2.235i$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 + 0.4081i \end{bmatrix} \qquad S_{21} = \begin{bmatrix} 0.0051 + 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

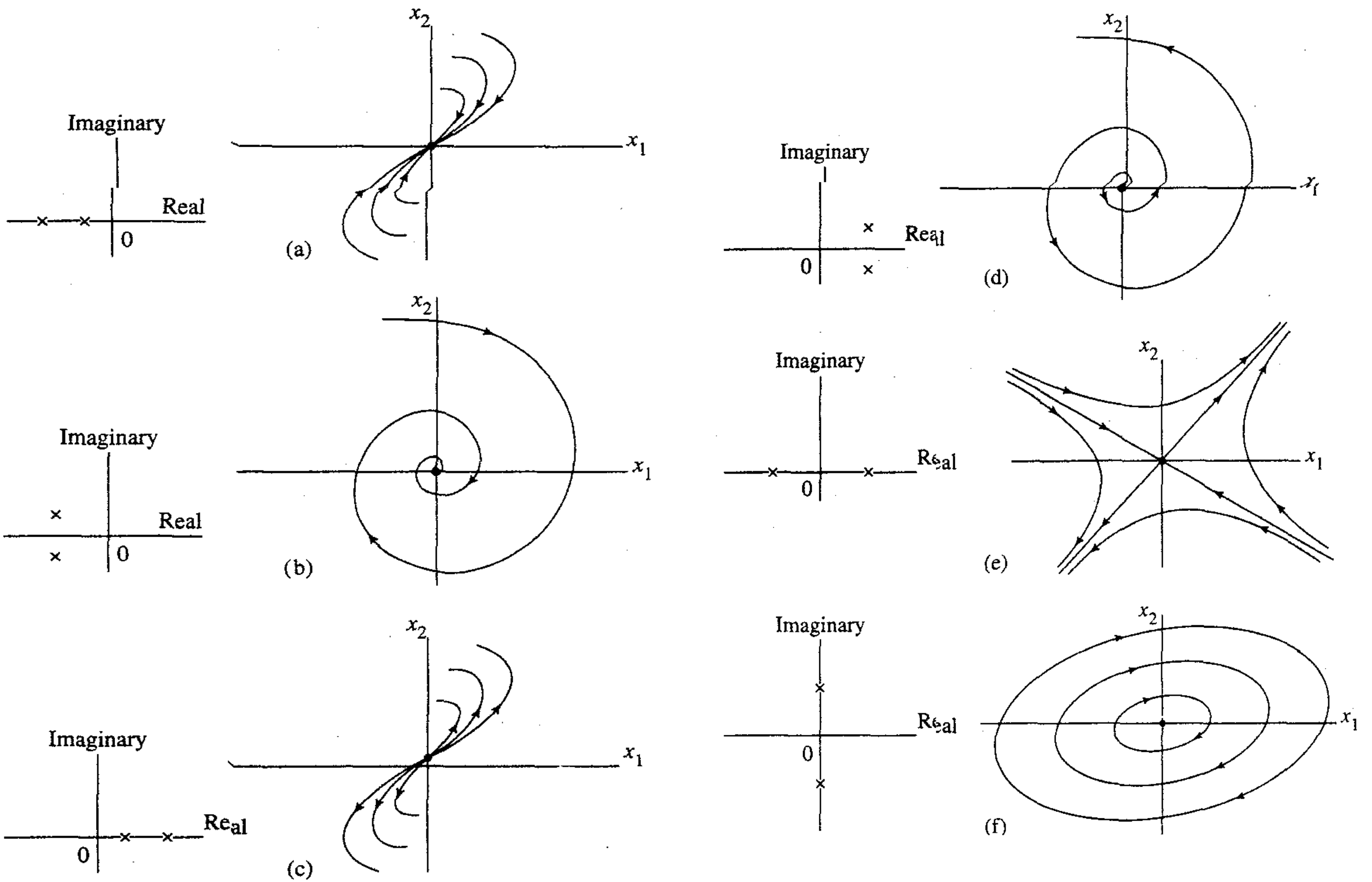
$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0.9125 \\ 0.0051 - 0.4081i \end{bmatrix} \qquad S_{22} = \begin{bmatrix} 0.0051 - 0.4081i \\ 0.9125 \end{bmatrix}$$

B1
sistemi



B2
sistemi

Bu durumda lineer sistemin çözümleri neler olabilir?



Tüm bu durum portrelerinde ortak bir şey var, ne?

S. Haykin, "Neural Networks- A Comprehensive Foundation"2[nd] Edition, Prentice Hall, 1999, New Jersey.

Dinamik sistemin özel bir çözümü: Denge noktası

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \longrightarrow \quad 0 = Ax_d$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \longrightarrow \quad 0 = f(x_d)$$

Kaç tane denge noktası olabilir?

Sistemin davranışını incelemenin bir yolu kararlılığını incelemektir.

Tanım: Lyapunov anlamında kararlılık

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemine ilişkin bir denge noktası x_d olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|x(0) - x_d\| < \delta(\varepsilon)$$

eşitsizliği

$$\|x(t) - x_d\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerektirecek şekilde bir $\delta(\varepsilon)$ bulunabiliyorsa x_d denge noktası Lyapunov anlamında kararlıdır.

Lineer sistemlerde denge noktasının Lyapunov anlamında kararlılığını incelemek için ne yapılıyor?
Denge noktasının kararlılığı neye denk, neden?