Tanım: $x^Ty=0$ ise $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'deki x ve y vektörlerine

<u>diktir</u> denir.

Örk: 1) $\mathbb{R}^2$'de $x=0$ vektörü her vektöre diktir.

2) $\mathbb{R}^2$'de $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ vektörleri diktir.

$$e_1^T.e_2=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1.0+0.1=0$$

3) $\mathbb{R}^2$'de $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$ vektörleri diktir.

$$\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}=6-6=0$$

4) $\mathbb{R}^3$'de e_1 ve e_2 veya e_1 ve e_3 veya e_2 ve e_3 vektörleri diktir.

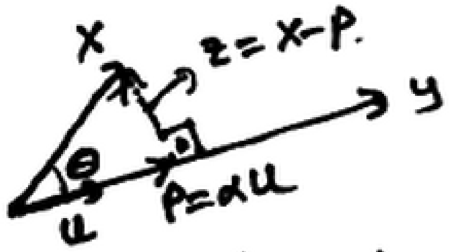
5) $\mathbb{R}^3$'de $\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}$ vektörleri

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}=4.1+(-1)(-2)+2.(-3)=0$$

olduğundan diktir.

skalor ve vektör izdüşümleri (projeksiyon)

Skaler çarpım bir vektörün diğer vektör doğrultusundaki bileşenini bulmada da kullanılabilir. x ve y, $\mathbb{R}^2$'de veya $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı vektörler olsun.



x vektörünü, p, y doğrultusunda, z'de p'ye dik olmak üzere, $p+z$ formunda yazmak istiyoruz.

y doğrultusundaki birim vektör $u = \frac{y}{\|y\|}$ olsun.
Amacımız $p=\alpha u$ ve p, $z = x-\alpha u$'ya dik olmak koşuluyla α'yı bulmak. p ve z'nin dik olması için α skaleri

$$\alpha = \|x\| \cos\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\|x\|\,\|y\|}{\|y\|}\cos\theta = \frac{x^T y}{\|y\|}$$

denklemini sağlamalıdır. α skalerine x'in y üzerinde <u>skaler izdüşümü</u> ve p vektörüne de x'in y üzerinde <u>vektör izdüşümü</u> denir. (Yani x'in y üzerinde skaler izdüşümü

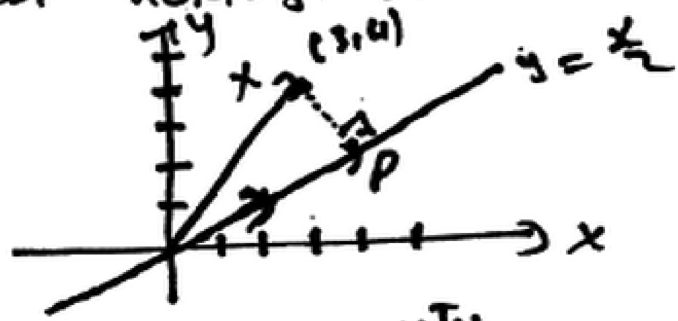
$$\alpha = \frac{x^T y}{\|y\|}$$

vektör izdüşümü de

$$p = \alpha u = \alpha \frac{y}{\|y\|} = \frac{x^T y}{y^T y}\, y \qquad (\|y\|^2 = y^T \cdot y)$$

dir.

örn: (3,4) noktasının, $y=\frac{x}{2}$ doğrusunda olan en kısa uzaklığını veren, $y=\frac{x}{2}$ doğrusu üzerindeki noktayı bulunuz.



$$y=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \qquad \alpha=\frac{x^Ty}{\|y\|}$$

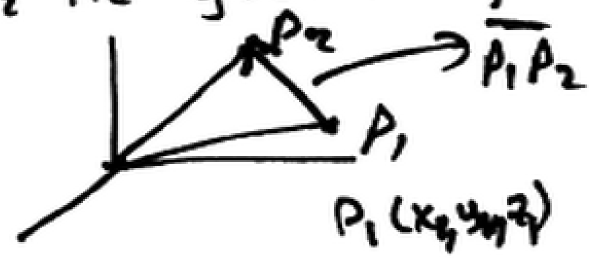
$$x^Ty=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=10 \qquad \alpha=\frac{x^Ty}{\|y\|}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\|y\|=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$u=\frac{y}{\|y\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$P=\alpha\cdot u=\frac{10}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$'de P_1 noktasından P_2 noktasına giden vektörü $\overline{P_1P_2}$ ile göstereceğiz.



$P_1(x_1,y_1,z_1)$

$P_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\overline{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)^T$$

$$=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{bmatrix}$$

Eğer N, $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı bir vektör ve P_0 sabit bir nokta ise $\overrightarrow{P_0P}$'nin N'ye dik olan çok şekildeki bütün P noktalarının kümesi, $\mathbb{R}^3$'de P_0'dan geçen bir π düzlemi oluşturur. N vektörü ve π düzlemine birbirine **normaldir** denir. $P=(x,y,z)$ noktasının π düzleminde olması için gerek ve yeter şart

$$(\overrightarrow{P_0P})^T N = 0$$

olmasıdır. Eğer $N=(a,b,c)$ ~~ve~~

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ ise bu düzlem denklemi

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)^T = \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix}$$

$$(\overrightarrow{P_0P})^T N = 0 \Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

dır.

örk: $(1,2,-1)$ noktasından geçen ve $N=(2,4,3)^T$ vektörüne normal olan düzlemin denklemini bul.

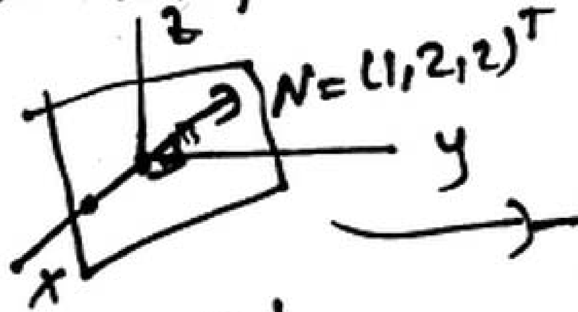
$P_0=(1,2,-1)$ $\qquad \overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-2, z+1)^T$

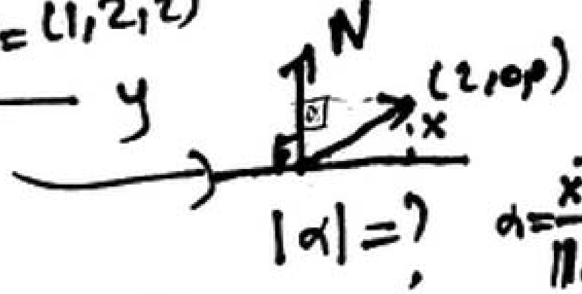
$$2(x-1) + 4(y-2) + (3)(z+1) = 0$$

$$2x+4y+3z = 7$$

$$2x+4y+3z=7$$

2) $(2,0,0)$ noktasından $x+2y+2z=0$ düzlemine olan en kısa uzaklığı bulunuz.





$$\alpha=\frac{x^T N}{\|N\|}$$

$$|\alpha|=\left|\frac{[2\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}{\|N\|}\right| = \frac{2}{3}$$

$\mathbb{R}^n$'de diklik

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'de verilen bütün tanımlar $\mathbb{R}^n$'ye genellenebilir. Eğer $x \in \mathbb{R}^n$ ise x'in öklid uzunluğu

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Eğer x ve y, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör ise bu iki vektörün arasındaki uzaklık $\|y-x\|$ dir. $\mathbb{R}^n$'de de Cauchy-Shwarz eşitsizliği doğrudur. Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$'deki herhangi x ve y vektörleri için

$$-1 \le \frac{x^T y}{\|x\|\,\|y\|} \le 1$$

dir.

$$|x^T y| \le \|x\|\,\|y\|$$

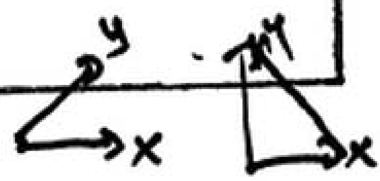
$\mathbb{R}^n$ deki iki vektör x ve y arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{x^T y}{\|x\|\,\|y\|} \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

olarak verilir. Eğer $u = \frac{x}{\|x\|}$ ve $v = \frac{y}{\|y\|}$ ise $\cos\theta = u^T v$ dir. $x^T y = 0$ ise x ve y vektörlerine diktir denir. ve $\perp$ sembolü diklik için kullanılır. Yani x ve y dik ise $x \perp y$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki x ve y vektörleri için

$$\|x+y\|^2 = (x+y)^T(x+y) = \|x\|^2 + 2x^T y + \|y\|^2$$

dir. Eğer x ve y dik ise bu durumda pisagor kuralı $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ elde edilir.



Dik Altuzaylar

Tanım: $\mathbb{R}^n$ nin iki alt uzayı X ve Y olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x^T y = 0$ ise X ve Y alt uzaylarına **diktir** denir. Ve $X \perp Y$ ile gösterilir.

Örk: 1) A, $m \times n$ tipinde bir matris ve $x \in N(A)$ olsun. $Ax = 0$ olduğundan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

dır. Bu da gösteriyor ki $i = 1, 2, \dots, m$ için A^T nin i. sütunu x vektörüne diktir. x, A^T nin her sütununa dik olduğundan, x,

A^T'nin sütun uzayındaki her vektöre diktir. Dolayısıyla $N(A)$'daki her vektör A^T'nin sütun uzayındaki her vektöre diktir. Yani $\mathbb{R}^n$'de $N(A)$ ve A^T'nin sütun uzayı diktir.

2) $\mathbb{R}^3$'de e_1 ile gerilen alt uzay X ve e_2 ile gerilen alt uzay Y olsun.

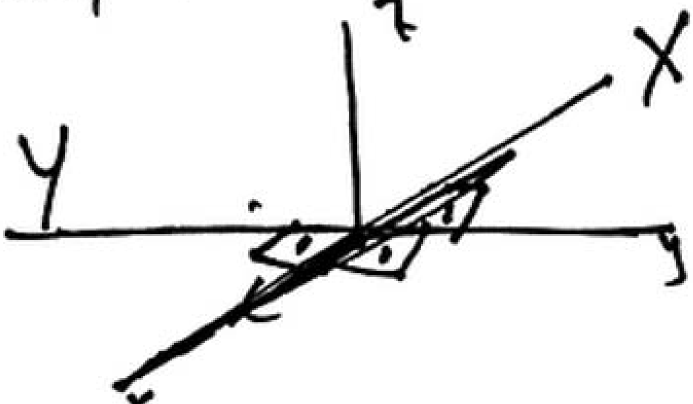
$$X = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Y = \left\{ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\forall x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in X \qquad \forall y = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \in Y$$

$$x^T y = [\alpha \; 0 \; 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$X \perp Y$ dir.



Dik alt uzay kavramı günlük hayattaki diklik kavramıyla örtüşmez. Örneğin sınıftaki duvar ve tavan birbirine diktir deriz ama xy-düzlemi ile yz düzlemi dik alt uzaylar değildir. Bunu görmek için xy düzleminde $x_1 = (1,1,0)^T$ ve yz düzleminde $x_2 = (0,1,1)^T$ vektörlerini alalım.

$$x_1^T x_2 = 0.1 + 1.1 + 1.0 = 1 \neq 0$$

olduğundan dik alt uzaylar değildir.

Örk 3) $\mathbb{R}^3$ de e_1, e_2 ile gerilen alt uzay X ve e_3 ile gerilen alt uzay Y olsun.

Eğer ~~x ∈~~ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in X$ ve $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix} \in Y$

ise $\quad x^T y = 0$

olduğundan $X \perp Y$ dir.

Tanım: Y, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olsun. Y'deki her vektöre dik olan $\mathbb{R}^n$'nin bütün vektörlerinin kümesi $Y^\perp$ ile gösterilsin. Yani

$$Y^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n : x^T y = 0, \ \forall y \in Y \}$$

$Y^\perp$, kümesine Y'nin <u>dik tümleyeni</u> denir.

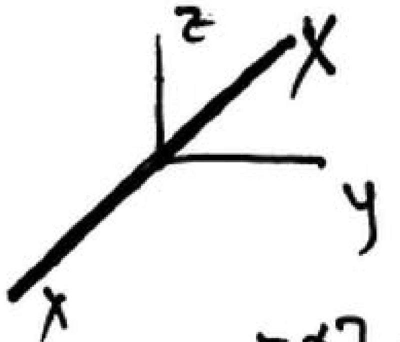
283

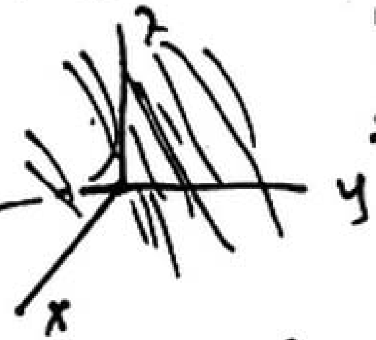
Ört: $\mathbb{R}^3$'de $X = span(e_1)$ ve $Y = span(e_2)$ olsun.

($X \perp Y$ dir)

$X^{\perp} = span(e_2, e_3)$

$Y^{\perp} = span(e_1, e_3)$





yz düzlemi $= X^{\perp} = span(e_2, e_3)$

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in X \qquad z \in \mathbb{R}^3 \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$x^T z = \alpha z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$

$z = \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

284

Teorem: a) X ve Y, $\mathbb{R}^n$'nin dik alt uzayları ise

$$X \cap Y = \{0\}$$

b) X, $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayı ise $X^{\perp}$'de $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayıdır.

Temel Altuzaylar:

A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Vektör uzaylarında gördük ki bir $b \in \mathbb{R}^m$ vektörünün A'nın sütun uzayında olması için gerek ve yeter şart bazı $x \in \mathbb{R}^n$ için $b = Ax$ olmasıdır. Eğer A matrisini

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer dönüşüm olarak düşünürsek A'nın sütun uzayı A'nın görüntü kümesi ile aynıdır. A'nın görüntü kümesini $R(A)$ ile gösterirsek,

$$R(A)=\{b\in\mathbb{R}^m : b=Ax, \text{ bazı } x\in\mathbb{R}^n\}$$

= A'nın sütun uzayıdır.

(her $\forall$, $\exists$ bazı)

A^T'nin sütun uzayı

$$R(A^T)=\{y\in\mathbb{R}^n : y=A^Tx, \text{ bazı } x\in\mathbb{R}^m\}$$

$R(A^T)$ sütun uzayı A'nın satır uzayının aynı-

sıdır, eğer tiplerini $1\times n$, $n\times 1$ aynı düşünürsek.

Bu yüzden $y\in R(A^T) \iff y^T$, A'nın satır uzayında ise. Sonuç olarak $R(A^T)\perp N(A)$ dır.

Aşağıdaki teoremde $N(A)$'nın dik tümleyeninin $R(A^T)$ olduğunu göreceğiz.

Teorem (Temel alt uzay teoremi) Eğer A, $m\times n$ tipinde matris ise

$$N(A)=R(A^T)^\perp \quad \text{ve} \quad N(A^T)=R(A)^\perp$$

dir.

Ört: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0 \}$

$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-2x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 = \alpha$
$x_2 = 2\alpha$

$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R(A^T) = \left\{ \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$R(A^T)^\perp = \left\{ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : z^T . x = 0 , \forall x \in R(A^T) \right\}$

$-2z_1 + z_2 = 0$

$z_1 = \alpha \quad z_2 = 2\alpha$

$z = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$R(A^T)^\perp = N(A)$

Teorem: S, $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayı ise

$$\text{boy}\, S + \text{boy}\, S^{\perp} = n$$

dir. Eğer $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, S'nin bir baz ve $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\}$, $S^{\perp}$'nin bir baz ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir bazdır.

Tanım: U ve V, W vektör uzayının alt uzayları olsun. Her $w \in W$ vektörü, $u \in U$ ve $v \in V$ olmak üzere, $u+v$'nin toplamı olarak tek türlü yazılıyorsa W'ya U ve V'nin

direkt toplamı denir. Ve $W = U \oplus V$ ile gösterilir.

Teorem: Eğer S, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı ise

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$$

dır.

Teorem: Eğer S, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı ise

$$(S^{\perp})^{\perp} = S$$

dir.

Bu teoreme göre S alt uzayının dik tümleyeni T ise T'nin dik tümleyenide S'dir. Bu durumda $N(A)^{\perp} = R(A^T)$ ve $N(A^T)^{\perp} = R(A)$ yazabiliriz. Ayrıca $Ax=b$ kararlı olması $\Leftrightarrow$ $b \in R(A)$ olduğu ve $R(A) = N(A^T)^{\perp}$ olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz

Sonuç: Eğer A, $m \times n$ tipinde matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ ise ya $Ax=b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ vardır veya öyle $y \in \mathbb{R}^m$ vardır ki $A^T y = 0$ ve $y^T b \neq 0$ dır.