DERET TAYLOR & DERET MCLAURIN

Teknologi Informasi Universitas Tidar

Turunan

Fungsi, $y(x)$	**Turunan, y'**	**Fungsi, $y(x)$**	**Turunan, y'**
Konstanta	0	$\sin^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\cos^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{-a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
e^x	e^x	$\tan^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{1+(ax+b)^2}$
e^{-x}	$-e^{-x}$	$\sinh(ax+b)$	$a\cosh(ax+b)$
e^{ax}	ae^{ax}	$\cosh(ax+b)$	$a\sinh(ax+b)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\tanh(ax+b)$	$a\,\mathrm{sec}h^2(ax+b)$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos ech(ax+b)$	$-a\cos ech(ax+b)\coth(ax+b)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sec h(ax+b)$	$-a\,\mathrm{s}ech(ax+b)\tanh(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\coth(ax+b)$	$-a\cos ech^2(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\sinh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{(ax+b)^2+1}}$
$\tan(ax+b)$	$a\sec^2(ax+b)$	$\cosh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{(ax+b)^2-1}}$
$\cos ec(ax+b)$	$-a\cos ec(ax+b)\cot(ax+b)$	$\tanh^{-1}(ax+b)$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
$\sec(ax+b)$	$a\sec(ax+b)\tan(ax+b)$		

Tabel 1.1 Beberapa fungsi yang sering digunakan beserta dengan turunannya

Turunan

Beberapa Aturan pada Operasi Turunan
Jika *u* dan *v* adalah sebuah fungsi, dan *c* merupakan konstanta, maka:

$$1.(u+v)' = u' + v'$$

$$2.(uv)' = u'v + uv'$$

$$3.(cu)' = cu'$$

$$4.\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Jika $y = y(z)$

dan $z = z(x)$

maka $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$

Deret Taylor

Salah satu penerapan deret tak hingga adalah untuk menghitung nilai fungsi, misalnya dalam menghitung nilai fungsi sin (x), ln (x), dan e^x .

Ide dasarnya adalah menghampiri suatu fungsi dengan polynomial (suku banyak) sedemikian sehingga kesalahan yang terjadi masih dalam batas toleransi yang diinginkan. Andaikan kita akan menghampiri suatu fungsi f dengan polynomial

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_k(x-a)^k \quad \ldots (1)$$

Pada suatu interval x=a. Karena polynomial (1) mempunyai sebanyak (k+1) koefisien, maka cukup beralasan memuat (k+1) sebagai syarat yang harus dipenuhi oleh polynomial (1) tersebut.

Deret Taylor

Andaikan fungsi f mempunyai k turunan d x = a, dan kita akan memilih (k+1) sebagai syarat tersebut maka

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_k(x-a)^k$$

$$p'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \ldots + k.c_k(x-a)^{k-1}$$

$$p''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \ldots + k.c_k(x-a)^{k-1}$$

$$p'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + 120c_6(x-a)^3 + \ldots + k.c_k(x-a)^{k-1}$$

$$\vdots$$

Kemudian kita substitusikan x = a, maka diperoleh:

$$p(a) = c_0 \qquad p''(a) = 2c_2 = 2!.c_2 \qquad \vdots$$

$$p'(a) = c_1 \qquad p'''(a) = 6c_3 = 3.2.c_3 = 3!.c_3 \qquad p^k(a) = k!.c_k$$

Deret Taylor

Berdasarkan hasil substitusi sebelumnya, maka kita dapat menghitung nilai c_k , yaitu:

$$f(a) = p(a) = c_0 \qquad \Leftrightarrow c_0 = f(a)$$

$$f'(a) = p'(a) = c_1 \qquad \Leftrightarrow c_1 = f'(a)$$

$$f''(a) = p''(a) = 2c_2 = 2!.a_2 \qquad \Leftrightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$f'''(a) = p'''(a) = 6c_3 = 3.2.c_3 = 3!.c_3 \qquad \Leftrightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^k(a) = p^k(a) = k!.c_k \qquad \Leftrightarrow c_k = \frac{f^k(a)}{k!}$$

Deret Taylor

Definisi

Jika fungsi f dapat diturunkan sebanyak k kali di x = a, maka deret taylor berderajat k

untuk fungsi f di definisikan sebagai berikut:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_k(x-a)^k$$

$$p(x) = f(a) + f\,'(a)(x-a) + \frac{f\,''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f\,'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Deret Taylor

Contoh:

Tentukan deret taylor $f(x) = \frac{1}{x}$ disekitar x=1

Jawab:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Leftrightarrow \quad f(1) = 1 = 0!$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \Leftrightarrow \quad f'(1) = -1 = -1!$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad \Leftrightarrow \quad f''(1) = 2 = 2!$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad \Leftrightarrow \quad f'''(1) = -6 = -3!$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \qquad f^k(1) = (-1)^k k!$$

Deret Taylor

Contoh:

Tentukan deret taylor $f(x)=\dfrac{1}{x}$ disekitar x=1

Jawab:

Kemudian Substitusikan nilainya kedalam persamaan taylor

$$p(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{f^k(1)}{k!}(x-1)^k$$

$$=1-(x-1)+\frac{2!}{2!}(x-1)^2+\frac{(-3)!}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{(-1)^k.k!}{k!}(x-1)^k$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^k(x-1)^k$$

Deret McLaurin

Definisi

Jika fungsi f dapat diturunkan sebanyak k kali di x = 0, maka deret McLaurin berderajat k untuk fungsi f di definisikan sebagai berikut:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^k(0)}{k!}x^k$$

Dengan cara yang sama seperti pada deret taylor, silahkan lakukan pembuktian dari definisi diatas

Deret Taylor & McLaurin

LATIHAN SOAL

1. Tentukan deret taylor $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ di sekitar x= i
2. Tentukan deret taylor $f(x) = 2 - x + 3x^2 - x^3$ di sekitar x = -1
3. Tentukan deret taylor $f(x) = 1 + x^2 + x^3$ di sekitar x = 1
4. Tentukan deret mclaurin dari $f(x) = e^x$
5. Tentukan deret mclaurin dari $f(x) = \ln(x+1)$
6. Tentukan deret mclaurin dari $f(x) = \cos x$
7. Tentukan deret mclaurin dari $f(x) = \sin x$