Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Damar Wicaksono

Teknologi Informasi

Universitas Tidar

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

- (a) 2, 8, 14, 20, …, (b) 3, 5, 7, 9, … (c) 25, 20,15,10, ….

Misalkan, suku ke-n adalah U_n maka barisan $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$, disebut barisan aritmatika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_n - U_{n-1}$ = konstanta. Dalam hal ini konstanta disebut beda (*b*) . Jika suku pertama *a* dan beda *b* , Anda mengenal rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah

$$U_n = a + (n-1)b$$

- Perhatikan barisan 2, 6, 18, 54, … dan barisan 5, -10, 20, -40, …

Misalkan, suku ke-n adalah U_n maka barisan $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n$ *disebut* barisan geometri jika

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r =$$

rasio. Jika suku pertama *a* dan *r* rasio maka rumus suku ke-n barisan geometri dapat ditentukan dengan

$$U_n = ar^{n-1}$$

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

- Barisan

Pengertian barisan secara umum adalah dengan fungsi. *ingat definisi tentang fungsi

Definisi

Suatu barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif (Z+ atau N) atau himpunan bagiannya.

Suatu barisan yang daerah hasilnya (*range*) adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real disebut barisan bilangan real, atau dengan kata lain:

Suatu barisan bilangan real adalah suatu fungsi $f : N \rightarrow R$

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Kemonotonan Barisan

Definisi

Barisan <an> dikatakan:

a. monoton naik jika untuk setiap $n \in N$, berlaku $a_{n+1} > a_n$
b. monoton tidak turun jika untuk setiap $n \in N$, berlaku $a_{n+1} \geq a_n$
c. monoton turun jika untuk setiap $n \in N$, berlaku $a_{n+1} < a_n$
d. monoton tidak naik jika untuk setiap $n \in N$, berlaku $a_{n+1} \leq a_n$
e. Suatu barisan yang tidak naik atau tidak turun disebut bukan suatu barisan monoton,

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Contoh

- Tunjukkan barisan <an> dengan $a_n = \frac{1}{n}$ merupakan barisan monoton turun.

Jawab

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0$$

a. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,$ Barisan monoton naik

b. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$ Barisan monoton turun

c. $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ Barisan monoton tidak turun

d. $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ Barisan monoton tidak naik

e. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ Bukan Barisan monoton

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

- Limit Barisan

Misalkan $<a_n>$ barisan dan L ∈ R. Barisan $<a_n>$ mempunyai limit L atau bisa ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ apabila untuk setiap bilangan positif terdapat bilangan positif K sehingga $|a_n - L| < \varepsilon, \forall n, n \geq K$

Contoh:

Tunjukkan Barisan <an> dengan $a_n = \frac{1}{n}, n \in N$ mempunyai limit 0!

Jawab.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga berlaku:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon, \forall n, n \geq K$$

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Latihan:

Tunjukkan Barisan <an> dengan $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in N$ mempunyai limit 1!

Jawab.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga berlaku:

$$\left|a_n - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{K} < \varepsilon, \forall n, n \ge K$$

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Sifat-sifat dari limit barisan

Misalkan, barisan <a_n> dan barisan <b_n> masing-masing mempunyai limit L_1 dan L_2 dan *k* suatu konstanta maka:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} k.a_n = k.\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k.L_1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1.L_2$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$

Deret dalam Sifat Konvergensi dan Divergensi

Konvergen dan divergen barisan

- Barisan <an> dikatakan konvergen ke L ∈ R jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
- Barisan <an> yang tidak mempunyai limit dikatakan divergen.
- Barisan yang divergen kemungkinan terjadi adalah limit barisannya ∞, -∞, atau beroskilasi

Contoh:

- Diketahui barisan $a_n = \dfrac{2+n}{4n}$. Tunjukkan barisan tersebut konvergen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+n}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+1}{4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Karena barisan $a_n = \dfrac{2+n}{4n}$
Memiliki limit ¼ sehingga
Barisan tersebut konvergen