$(l^1)'$ と l^∞ は等距離同型

Kyohei Okumura

May 2, 2016

1 写像の構成

$$\begin{array}{ccc} l^\infty & \xrightarrow{T} & (l^1)' \\ \Cup & & \Cup \\ v & \longmapsto & f_v \end{array}$$

となる写像 T をまずは構成したい。
$u = (u_k)_{k=1}^\infty \in l^1$ を任意にとると、

$$\sum_{k=1}^\infty |v_k u_k| \le \sup_k |v_k| \sum_{k=1}^\infty |u_k| = \|v\|_\infty \|u\|_1 \tag{1}$$

が成立する。したがって、$f_v(u) := \displaystyle\sum_{k=1}^\infty v_k u_k \quad (u \in l^1)$ と定義でき、$(f_v : l^1 \to \mathbb{R})$

$$\forall u \in l^1 \quad |f_v(u)| = \left| \sum_k v_k u_k \right| \le \sum_k |v_k u_k| \overset{(1)}{\le} \|v\|_\infty \|u\|_1 \tag{2}$$

また、$u^1 = (u_k^1)_{k\in\mathbb{N}},\ u^2 = (u_k^2)_{k\in\mathbb{N}},\ u^1, u^2 \in l^1$ を任意にとってくると、

$$\begin{aligned} f_v(\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2) &= \sum_k (\alpha_1 u_k^1 + \alpha_2 u_k^2) v_k \\ &\overset{\text{級数の線形性}}{=} \alpha_1 \sum_k v_k u_k^1 + \alpha_2 \sum_k v_k u_k^2 \\ &= \alpha_1 f_v(u^1) + \alpha_2 f_v(u^2) \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、(2),(3) より、f_v は有界かつ線形なので、$f_v \in (l^1)'$。以上より、$T : v \longmapsto f_v$ が構成できた。あとは、T がノルムを保ち、T が全単射であり、T, T^{-1} が共に連続であることを示せば、$(l^1)'$ と l^∞ が等距離同型であることが示される。以下、順に示す。

2 T がノルムを保つことの証明

$\|f_v\| = \|v\|_\infty$ となることを示す。$\|v\|_\infty = \sup_k |v_k|$ より、$\forall \epsilon > 0\ \exists j \in \mathbb{N};\ \|v\|_\infty - \epsilon < |v_j|$ が成立。

$e^{(j)} := (0\,0 \cdots\ 0\ \overset{\text{j}}{1}\ 0 \cdots)$ とおくと、$\displaystyle\sum_k \left| e_k^{(j)} \right| = 1 < \infty$ より $e^{(j)} \in l^1$ なので、$f_v(e^{(j)})$ が定義されて、

$$\forall \epsilon\ \exists j \quad \left| f_v(e^{(j)}) \right| = |v_j| > \|v\|_\infty - \epsilon \tag{4}$$

$$\|f_v\| = \sup_{\|u\|=1} |f_v(u)| \overset{(4)}{\ge} \|v\|_\infty \tag{5}$$

が成立する。

$$(2) \Rightarrow \forall u \in l^1 \setminus \{0\}; \quad \frac{|f_v(u)|}{\|u\|_1} \le \|v\|_\infty \Rightarrow \|f_v\| \le \|v\|_\infty$$

なので、(5) と併せて、$\|f_v\| = \|v\|_\infty$ がいえる。

3　T が全射であることの証明

$\forall f \in (l^1)' \ \exists v \in l^\infty \quad f = f_v (= T(v))$ を示せばよい。$f = 0$ に対しては、$v = 0$ をとればよい。よって、以下では $f \neq 0$ とする。

$v_j := f(e^{(j)}),\ v := (v_j)_{j=1}^\infty$ とおくと、

$$\forall j \quad |v_j| = |f(e(j))| \leq \|f\| \|e^{(j)}\|_1 = \|f\|$$

となり、$\sup_j |v_j| < \infty$ となるので、$v \in l^\infty$。

このの v に対応する f_v が $f_v = f$ となることを示せばよい。

$u = (u_j) \in l^1$ を任意にとる。$u = \sum_j u_j e^{(j)}$ と表せることに注意すると、

$$f(u) = f(\sum_j u_j e^{(j)}) = \sum_j u_j f(e^{(j)}) = \sum_j v_j u_j = f_v(u)$$

が成立するので、T が全射であることが示された。

4　T が単射であることの証明

$\forall v^1, v^2 \in l^\infty; \quad v^1 \neq v^2 \Rightarrow f_{v^1} \neq f_{v^2}$ を示せばよい。対偶を示す。

$$\forall u \in l^1 \quad f_{v^1} = f_{v^2} \Leftrightarrow \sum_k v_k^1 u_k = \sum_k v_k^2 u_k$$

が成立するので、u として特に $e^{(j)}$ をとれば、$\forall j \quad v_j^1 = v_j^2$ が示せる。したがって、$v^1 = v^2$ となる。

5　T, T^{-1} が共に連続であることの証明

5.1　$T : v \longmapsto f_v$ について

$$\begin{aligned}
\|f_{v_n} - f_v\| &= \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} |f_{v_n}(u) - f_v(u)| \\
&= \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \left| \sum_k (v_k^n - v_k) u_k \right| \\
&\leq \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \sum_k |(v_k^n - v_k)| |u_k| \\
&\leq \|v_n - v\|_\infty \cdot \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \sum_k |u_k| \\
&\overset{\sum_k |u_k| = \|u\|}{\leq} \|v_n - v\| \overset{n \to \infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

5.2　$T^{-1} : f \longmapsto v^f$ について

$v^f := \{f(e^{(j)})\}_{j=1}^\infty,\ \ v_j^f := f(e^{(j)})$ とおく。

$$\begin{aligned}
\|v^{f_n} - v^f\|_\infty &= \sup_j |v_j^{f_n} - v_j^f| \\
&= \sup_j |f_n(e^{(j)}) - f(e^{(j)})| \\
&\leq \sup_{\|u\| = 1} |f_n(u) - f(u)| \\
&= \|f_n - f\| \overset{n \to \infty}{\to} 0
\end{aligned}$$