

# $(l^1)'$ と $l^\infty$ は等距離同型

Kyohei Okumura

June 21, 2015

## 1 写像の構成

$$\begin{array}{ccc} l^\infty & \xrightarrow{T} & (l^1)' \\ \Psi & & \Psi \\ v & \longmapsto & f_v \end{array}$$

となる写像  $T$  をまずは構成したい。

$u = (u_k)_{k=1}^\infty \in l^1$  を任意にとると、

$$\sum_{k=1}^\infty |v_k u_k| \leq \sup_k |v_k| \sum_{k=1}^\infty |u_k| = \|v\|_\infty \|u\|_1 \quad (1)$$

が成立する。したがって、 $f_v(u) := \sum_{k=1}^\infty v_k u_k$  ( $u \in l^1$ ) と定義でき、( $f_v : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\forall u \in l^1 \quad |f_v(u)| = \left| \sum_k v_k u_k \right| \leq \sum_k |v_k u_k| \stackrel{(1)}{\leq} \|v\|_\infty \|u\|_1 \quad (2)$$

また、 $u^1 = (u_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $u^2 = (u_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $u^1, u^2 \in l^1$  を任意にとってくると、

$$\begin{aligned} f_v(\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2) &= \sum_k (\alpha_1 u_k^1 + \alpha_2 u_k^2) v_k \\ &\stackrel{\text{級数の線形性}}{=} \alpha_1 \sum_k v_k u_k^1 + \alpha_2 \sum_k v_k u_k^2 \\ &= \alpha_1 f_v(u^1) + \alpha_2 f_v(u^2) \end{aligned} \quad (3)$$

したがって、(2),(3) より、 $f_v$  は有界かつ線形なので、 $f_v \in (l^1)'$ 。以上より、 $T : v \mapsto f_v$  が構成できた。あとは、 $T$  がノルムを保ち、 $T$  が全単射であり、 $T, T^{-1}$  が共に連続であることを示せば、 $(l^1)'$  と  $l^\infty$  が等距離同型であることが示される。以下、順に示す。

## 2 $T$ がノルムを保つことの証明

$\|f_v\| = \|v\|_\infty$  となることを示す。 $\|v\|_\infty = \sup_k |v_k|$  より、 $\forall \epsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N}; \|v\|_\infty - \epsilon < |v_j|$  が成立。

$e^{(j)} := (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \overset{j}{1} \ 0 \ \dots)$  とおくと、 $\sum_k |e_k^{(j)}| = 1 < \infty$  より  $e^{(j)} \in l^1$  なので、 $f_v(e^{(j)})$  が定義されて、

$$\forall \epsilon \exists j \quad |f_v(e^{(j)})| = |v_j| > \|v\|_\infty - \epsilon \quad (4)$$

$$\|f_v\| = \sup_{\|u\|=1} |f_v(u)| \stackrel{(4)}{\geq} \|v\|_\infty \quad (5)$$

が成立する。

$$(2) \Rightarrow \forall u \in l^1 \setminus \{0\}; \quad \frac{|f_v(u)|}{\|u\|_1} \leq \|v\|_\infty \Rightarrow \|f_v\| \leq \|v\|_\infty$$

なので、(5) と併せて、 $\|f_v\| = \|v\|_\infty$  がいえる。

### 3 $T$ が全射であることの証明

$\forall f \in (l^1)'$   $\exists v \in l^\infty$   $f = f_v (= T(v))$  を示せばよい。 $f = 0$  に対しては、 $v = 0$  をとればよい。よって、以下では  $f \neq 0$  とする。

$v_j := f(e^{(j)})$ ,  $v := (v_j)_{j=1}^\infty$  とおくと、

$$\forall j \quad |v_j| = |f(e^{(j)})| \leq \|f\| \|e^{(j)}\|_1 = \|f\|$$

となり、 $\sup_j |v_j| < \infty$  となるので、 $v \in l^\infty$ 。

この  $v$  に対応する  $f_v$  が  $f_v = f$  となることを示せばよい。

$u = (u_j) \in l^1$  を任意にとる。 $u = \sum_j u_j e^{(j)}$  と表せることに注意すると、

$$f(u) = f\left(\sum_j u_j e^{(j)}\right) = \sum_j u_j f(e^{(j)}) = \sum_j v_j u_j = f_v(u)$$

が成立するので、 $T$  が全射であることが示された。

### 4 $T$ が単射であることの証明

$\forall v^1, v^2 \in l^\infty$ ;  $v^1 \neq v^2 \Rightarrow f_{v^1} \neq f_{v^2}$  を示せばよい。対偶を示す。

$$\forall u \in l^1 \quad f_{v^1} = f_{v^2} \Leftrightarrow \sum_k v_k^1 u_k = \sum_k v_k^2 u_k$$

が成立するので、 $u$  として特に  $e^{(j)}$  をとれば、 $\forall j \quad v_j^1 = v_j^2$  が示せる。したがって、 $v^1 = v^2$  となる。

### 5 $T, T^{-1}$ が共に連続であることの証明

#### 5.1 $T : v \mapsto f_v$ について

$$\begin{aligned} \|f_{v_n} - f_v\| &= \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} |f_{v_n}(u) - f_v(u)| \\ &= \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \left| \sum_k (v_k^n - v_k) u_k \right| \\ &\leq \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \sum_k |(v_k^n - v_k)| |u_k| \\ &\leq \|v_n - v\|_\infty \cdot \sup_{\|u\| \leq 1, u \in l^1} \sum_k |u_k| \\ &\stackrel{\sum_k |u_k| = \|u\|}{\leq} \|v_n - v\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

#### 5.2 $T^{-1} : f \mapsto v^f$ について

$v^f := \{f(e^{(j)})\}_{j=1}^\infty$ ,  $v_j^f := f(e^{(j)})$  とおく。

$$\begin{aligned} \|v^{f_n} - v^f\|_\infty &= \sup_j |v_j^{f_n} - v_j^f| \\ &= \sup_j |f_n(e^{(j)}) - f(e^{(j)})| \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} |f_n(u) - f(u)| \\ &= \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$