問 15.4 定理 4.11 の証明 (未完)

奥村　恭平

定理の証明の前に、いくつか補題を示す。

[復習 1]

$F \subset E$ が E の部分空間であるとき、 F の零化空間 $F^{\perp}$ を $F^{\perp} := \{x' \in E' \mid \forall x \in F; \quad \langle x, x' \rangle = 0\}$ と定義する。

補題 1. $F^{\perp}$ は E' の閉空間 (問 13.3)

証明．以前久保さんが書いてくださったので略。 □

[復習 2]

F が E の閉部分空間であるとき、同値関係を「$\sim \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in F$」と定義し、$E$ の $\sim$ による同値類を考えることで、商空間 E/F が定義できる。（演算も well-defined。）このとき、$\|x + F\| := \inf_{y \in F} \|x + y\|_E$ とノルムが定義される。補題 1 より、$E'/F^{\perp}$ が定義できることがわかる。

補題 2. $F' \cong E'/F^{\perp}$ (問 14.3(1))

証明．$\phi \in F'$ とする。Hahn-Banach の定理より、ϕ を $\Phi \in E'$ に拡張することができる。したがって、

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{T} & F' \\ \cup & & \cup \\ x' & \longmapsto & x'|F \end{array}$$

を考えれば、少なくとも $T(\Phi) = \phi$ なので、

$$\forall \phi \in F' \ \ \exists x' \in E'; \quad T(x') = \phi$$

が成立し、$T : E' \to F'$ は全射になる。(ただし、$x'|F$ は x' の F への制限。)

次に、この T から、$T' : E'/F^{\perp} \to F'$ を構成する。任意の $x', y' \in E'$ について、$T(x') = T(y')$ となる。

$\Longleftrightarrow \forall x', y' \in E'; \quad x'|F = y'|F \quad \Longleftrightarrow \forall x_F \in F; \quad x'(x_F) = y'(x_F) \quad \Longleftrightarrow \forall x_F \in F; \quad (x' - y')(x_F) = 0$
$\Longleftrightarrow x' - y' \in F^{\perp}$ となるので、したがって、

$$\begin{array}{ccc} E'/F^{\perp} & \xrightarrow{T'} & F' \\ \cup & & \cup \\ x' + F^{\perp} & \longmapsto & x'|F \end{array}$$

を考えれば、（$E'/F^{\perp}$ は元の T において行き先が同じだったものを一つの元にまとめた集合になっているので、）$T' : E'/F^{\perp} \to F'$ は全単射である。線形性と連続性については別途示す必要があるが省略する。以上より、T' は全単射かつ連続な線形写像である。(i.e. 代数的同型である。）

ノルムについては、まず、Hahn-Banach の定理より、

$$\|x'|F\| \geq \|x' + F^{\perp}\| \tag{1}$$

となる。(??? ここがわからず。)

一方、

$$\|x'|F\| = \sup_{x \in F, \|x\| \leq 1} |x'(x)| \leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |x'(x)| = \|x'\|$$

が成立するので、$\|x'|F\| \leq \|x' + F^{\perp}\|$

(??? ここもよくわからず。) よって、(1) と併せて、$\|x'|F\| = \|x' + F^{\perp}\|$ が成立。

以上より、$F' \cong E'/F^{\perp}$ が示された。

□

補題 3. $T : E \to F, S : F \to G$ が共に等距離同型写像ならば、$S \circ T : E \to G$ は等距離同型写像

Date: June 25, 2015.

証明．全単射な写像同士を合成しても全単射。連続な写像同士を合成しても連続。
　ノルムについても、
$$\|S \circ T(x)\| = \|T(x)\| = \|x\|$$
より、成立。

補題 4. $E \cong F,\ \ F \cong G \Longrightarrow E \cong G$

証明．補題 3 による。 □

補題 5. $E \cong F \Longrightarrow E' \cong F'$(??? これって成立しますか？)

　以上の補題を前提に、定理を示す。

定理 1. 回帰的バナッハ空間の任意の閉部分空間は回帰的 (定理 4.11(a))

証明．(i) E :Banach 空間 (ii) $F \subset E$:E の閉部分空間 (iii) $E \cong E''$ という仮定の下で、$F \cong F''$ を示せば十分。
　補題 2 より、$F' \cong E'/F^{\perp}$。よって、補題 5 より、$F'' \cong (E'/F^{\perp})'$。
　また、$(E'/F^{\perp})' \cong (F^{\perp})^{\perp}$ が成立する (???)
　ところが、$E \cong E''$ より $F \cong (F^{\perp})^{\perp}$(???)
　したがって、補題 4 より $F'' \cong F$。

□

　示せなかったものを以下に並べる。

命題 1. (i) E :Banach 空間 (ii) $F \subset E$:E の閉部分空間 (iii) $E \cong E''$
　$\Longrightarrow \quad (E'/F^{\perp})' \cong (F^{\perp})^{\perp}$

命題 2. (i) E :Banach 空間 (ii) $F \subset E$:E の閉部分空間 (iii) $E \cong E''$
　$\Longrightarrow \quad (F^{\perp})^{\perp} \cong F$

　次に、定理の後半を示す。まず、補題をもう一つ準備する。

補題 6. E は E'' の中の閉部分空間 (???)

証明．正確には、
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E'' \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \phi_x \end{array}$$
　としたとき (ただし、$\phi_x(x') = \langle x, x' \rangle$)、$T(E) \in E''$ が閉部分空間となることを示す。
　まず、部分空間となることを示す。
$$\forall \phi_x, \phi_y \in T(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \ \alpha\phi_x + \beta\phi_y \in T(E)$$
を示せばよい。T が線形であり、E がベクトル空間であることに注意すれば、
$$\alpha\phi_x + \beta\phi_y = \alpha T(x) + \beta T(y) = T(\alpha x + \beta y) \in T(E)$$
が成立することが分かる。よって、$T(E)$ が E'' の部分空間であることが示された。
　次に、$T(E)$ が閉集合であることを示す。
$$\phi_{x_n} \to \phi_x \Longrightarrow \phi_x \in T(E)$$
　を示せばよい。
$$\phi_{x_n} \to \phi_x \Longleftrightarrow T(x_n) \to T(x) \overset{T:\text{連続かつ単射}}{\Longleftrightarrow} x_n \to x$$
　以上より、「$x \in E$ であれば、」 $T(E)$ は閉集合であることが言える。
　$\cdots$ 一般には不成立??

□

定理 2. $E \cong E'' \Longleftrightarrow E' \cong (E')''$ (定理 4.11(b))

証明．($\Longrightarrow$) 補題 5 より、$E \cong E'' \Longrightarrow E' \cong (E')''$ なので成立。
　($\Longleftarrow$) $E' \cong (E')''$ ならば、補題 5 より $E'' \cong (E')''' = (E'')''$ より、E'' も回帰的。
　補題 6 より、E は E'' の中の閉部分空間であるので、
　定理 1 より、$E \cong E''$ が成立。

□