

問 15.4 定理 4.11 の証明

奥村 恭平

定理の証明の前に、いくつか補題を示す。

[復習 1]

$F \subset E$ が E の部分空間であるとき、 F の零化空間 F^\perp を $F^\perp := \{x' \in E' \mid \forall x \in F; \langle x, x' \rangle = 0\}$ と定義する。

補題 1. F^\perp は E' の閉空間 (問 13.3)

証明 . 以前久保さんが書いてくださったので略。 □

[復習 2]

F が E の閉部分空間であるとき、同値関係を「 $\sim \stackrel{def}{\iff} x - y \in F$ 」と定義し、 E の \sim による同値類を考えると、商空間 E/F が定義できる。(演算も well-defined.) このとき、 $\|x + F\| := \inf_{y \in F} \|x + y\|_E$ とノルムが定義される。補題 1 より、 E'/F^\perp が定義できることがわかる。

補題 2. $F' \cong E'/F^\perp$ (問 14.3(1))

証明 . $\phi \in F'$ とする。Hahn-Banach の定理より、 ϕ を $\Phi \in E'$ に拡張することができる。したがって、

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{T} & F' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x' & \mapsto & x'|F \end{array}$$

を考えれば、少なくとも $T(\Phi) = \phi$ なので、

$$\forall \phi \in F' \exists x' \in E'; T(x') = \phi$$

が成立し、 $T: E' \rightarrow F'$ は全射になる。(ただし、 $x'|F$ は x' の F への制限。)

次に、この T から、 $T': E'/F^\perp \rightarrow F'$ を構成する。任意の $x', y' \in E'$ について、 $T(x') = T(y')$ となる。

$$\begin{aligned} \iff \forall x', y' \in E'; x'|F = y'|F &\iff \forall x_F \in F; x'(x_F) = y'(x_F) \iff \forall x_F \in F; (x' - y')(x_F) = 0 \\ \iff x' - y' \in F^\perp &\text{ となるので、したがって、} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} E'/F^\perp & \xrightarrow{T'} & F' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x' + F^\perp & \mapsto & x'|F \end{array}$$

を考えれば、(E'/F^\perp は元の T において行き先が同じだったものを一つの元にまとめた集合になっているので、) $T': E'/F^\perp \rightarrow F'$ は全単射である。線形性と連続性については別途示す必要があるが省略する。以上より、 T' は全単射かつ連続な線形写像である。(i.e. 代数的同型である。)

ノルムについては、まず、Hahn-Banach の定理より、

$$(1) \quad \|x'|F\| \geq \|x' + F^\perp\|$$

となる。(??? ここがわからず。)

一方、

$$\|x'|F\| = \sup_{x \in F, \|x\| \leq 1} |x'(x)| \leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |x'(x)| = \|x'\|$$

が成立するので、 $\|x'|F\| \leq \|x' + F^\perp\|$ (??? ここのよくわからず。) よって、(1) と併せて、 $\|x'|F\| = \|x' + F^\perp\|$ が成立。

以上より、 $F' \cong E'/F^\perp$ が示された。 □

補題 3. $T: E \rightarrow F, S: F \rightarrow G$ が共に等距離同型写像ならば、 $S \circ T: E \rightarrow G$ は等距離同型写像

補題 4. $E \cong F, F \cong G \implies E \cong G$

証明．一つ前の補題による。

補題 5. $E \cong F \implies E' \cong F'$

以上の補題を前提に、定理を示す。

定理 1. 回帰的バナッハ空間の任意の閉部分空間は回帰的 (定理 4.11(a))

証明．まず、定理の内容を書き直す。

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x' & \longmapsto & \langle x, x' \rangle \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E'' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \phi_x \end{array} \quad \text{左図のように } T, \phi_x \text{ をおく。}$$

(i) E : Banach 空間 (ii) $F \subset E$: E の閉部分空間 (iii) $T : E \rightarrow E''$ が全射 という仮定の下で、 T の F への制限 $T|_F$ が $T|_F(F) = F''$ を満たすことを示せばよい。

補題 2 より、 $F' \cong E'/F^\perp$ 。よって、補題 5 より、 $F'' \cong (E'/F^\perp)'$ 。

また、 $(E'/F^\perp)' \cong (F^\perp)^\perp$ が成立する (???)

したがって、補題 4 より $F'' \cong F$ 。

示せなかったものを以下に並べる。

命題 1. $(E'/F^\perp)' \cong (F^\perp)^\perp$

命題 2. $(F^\perp)^\perp \cong F$