SML HW3

29-176004 奥村 恭平 [*,†]

May 12, 2018

宿題 1

次の等式を示す.

$$E\left[\widehat{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log q(x_i;\theta)\bigg|_{\theta=\theta^*}\right]=1 \tag{1}$$

$E[\widehat{\theta}]=\theta^*$ の両辺を θ^* で偏微分することを考える．右辺は 1．左辺については,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^*}E[\widehat{\theta}(X_1,\dots,X_n)] &= \frac{\partial}{\partial\theta^*}\int\widehat{\theta}(x_1,\dots,x_n)q(x_1;\theta^*)\cdots q(x_n;\theta^*)dx_1\cdots dx_n \\
&= \int\frac{\partial}{\partial\theta^*}\widehat{\theta}(x_1,\dots,x_n)q(x_1;\theta^*)\cdots q(x_n;\theta^*)dx_1\cdots dx_n \quad \text{(微分と積分の順序交換)} \\
&= \int\widehat{\theta}(x_1,\dots,x_n)\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left[q(x_1;\theta)\cdots q(x_n;\theta)\right]\bigg|_{\theta=\theta^*}dx_1\cdots dx_n
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log[q(x_1;\theta)\dots q(x_n;\theta)]=\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}[q(x_1;\theta)\dots q(x_n;\theta)]}{q(x_1;\theta)\dots q(x_n;\theta)}$$

より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left[q(x_1;\theta)\cdots q(x_n;\theta)\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log[q(x_1;\theta)\dots q(x_n;\theta)]\right]q(x_1;\theta)\dots q(x_n;\theta) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\log q(x_i;\theta)\right]q(x_1;\theta)\cdots q(x_n;\theta) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log q(x_i;\theta)\right]q(x_1;\theta)\cdots q(x_n;\theta)
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^*}E[\widehat{\theta}(X_1,\dots,X_n)] &= \int\widehat{\theta}(x_1,\dots,x_n)\ \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log q(x_i;\theta)\right]\bigg|_{\theta=\theta^*}q(x_1;\theta^*)\cdots q(x_n;\theta^*)dx_1\cdots dx_n \\
&= E\left[\widehat{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log q(x_i;\theta)\bigg|_{\theta=\theta^*}\right]
\end{aligned}$$

となる．よって (1) が示された. □

[*] E-mail: kyohei.okumura@gmail.com
[†] 東京大学大学院 経済学研究科 M2

宿題 2

任意の $i, j \in [n]$ について，次の式を示せば良い．

$$\int \frac{\partial \log q}{\partial \theta_i}(x;\theta)\frac{\partial \log q}{\partial \theta_j}(x;\theta)q(x;\theta)dx = -\int \frac{\partial^2 \log q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(x;\theta)q(x;\theta)dx \tag{2}$$

まず，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial q}{\partial \theta_j}}{q}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot q^{-1} - \frac{\partial q}{\partial \theta_j}\frac{\partial q}{\partial \theta_i}q^{-2} \\ &= \frac{\partial^2 q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot q^{-1} - \frac{\partial \log q}{\partial \theta_j}\frac{\partial \log q}{\partial \theta_i} \end{aligned} \tag{3}$$

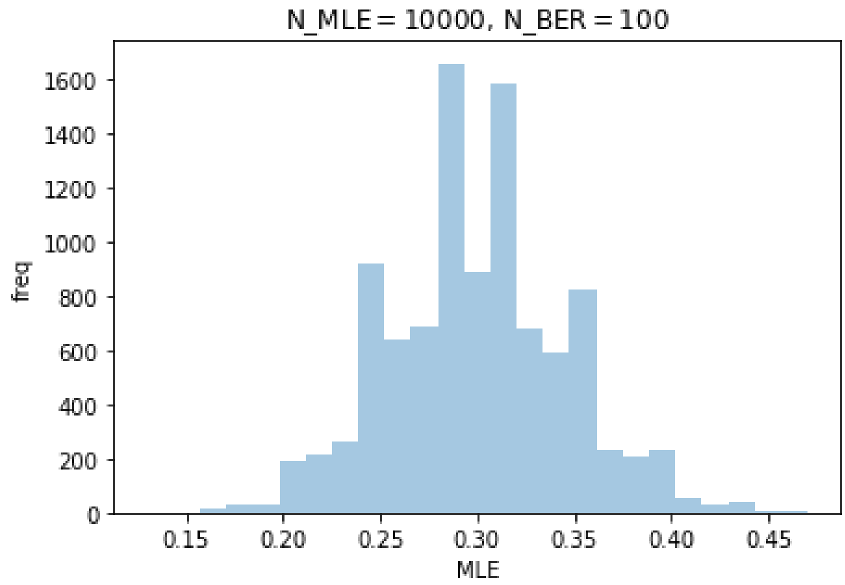
である．(3) の第 1 項について，微分と積分の順序交換を認めると，

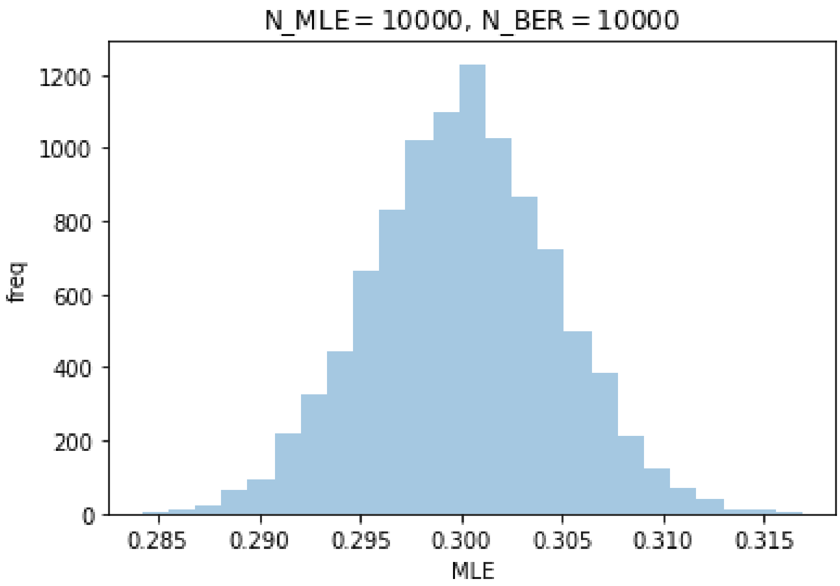
$$\int \frac{\partial^2 q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(x;\theta)q^{-1}(x;\theta) \cdot q(x;\theta)dx = \int \frac{\partial^2 q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(x;\theta)dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\underbrace{\int q(x;\theta)dx}_{=1} = 0$$

となることに注意すれば，(3) の両辺において x について積分をとることで，(2) を得る． $\square$

宿題 3

末尾のコード (言語は python) を用いてシミュレーションした．図中の N_BER は，最尤推定量一つを求める際にベルヌーイ分布から発生させた標本数，N_MLE は，最尤推定量の標本数を表す．N_BER が大きくなると，最尤推定量の分布の形が正規分布の形に近づいていることがわかる．






```
import numpy as np
import scipy as sp
from numpy.random import binomial
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

def mle_sim(N_MLE=100, N_BER=100, theta_true=0.3):
    mle_list = binomial(n=N_BER, p=theta_true, size = N_MLE)/N_BER

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(1,1,1)
    ax.set_title('N_MLE$␣=␣{0}$,␣N_BER$␣=␣{1}$'.format(N_MLE, N_BER))
    ax.set_ylabel('freq')
    sns.distplot(mle_list, kde=False, rug=False, bins=25, axlabel="MLE")
    None
```